Regressão ordinal - uma introdução

Igor Costa

10/05/2022

Motivação

Esse material pretende fazer uma breve introdução aos chamados modelos de regressão ordinais, ajustados a variáveis dependentes categórias ordinais, ou seja, em que a ordem dos elementos é importante (nível de escolaridade, respostas em escala do tipo Likert, etc). As discussões aqui feitas restringem-se ao campo da psicolinguística experimental.

Recomendações de leitura:

Gelman & Hill (2009). *Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models.*

Mais especificamente:

- 6.5 Multinomial regression (119-123)
- 15.2 Ordered categorical regression: storable votes (331-332).
- 5 Logistic regression (p. 79-105).

Veja também:

Nicenboim, B., Schad, D. & Vasishth, S. An Introduction to Bayesian Data Analysis for Cognitive Science.

Carregando os pacotes adequados

```
require(ggplot2)
require(dplyr)
require(RColorBrewer)
require(tidyr)
require(scales)
require(brms) # Esse o pacote para fazermos o modelo ordinal bayesiano
require(sjPlot) # Fundamental para extrair os efeitos marginais (última etapa deste tutorial)
```

Carregamento e organização dos dados brutos

Carregando os dados de um experimento com Escala Likert:

```
dados <-
  read.csv("https://raw.githubusercontent.com/igordeo-costa/ModelosOrdinais/main/ScalaLikertCosta2022.cs
```

Transformando as variáveis de modo adequado

```
dados$Ordem<-as.factor(dados$Ordem)
dados$Num<-as.factor(dados$Num)
dados$answer<-as.factor(dados$answer)
dados$idade<-as.integer(dados$idade)
dados$genero<-as.factor(dados$genero)
```

```
dados$escolaridade<-as.factor(dados$escolaridade)
dados$idioma<-as.factor(dados$idioma)
dados$item<-as.factor(dados$item)
```

Mudar os dados respostas para ordenados

```
dados$answer<-as.ordered(dados$answer)
```

Investigando os dados - Análise descritiva

Contagem dos valores brutos:

```
contag <- dados %>%
  group_by(Ordem, Num, answer) %>%
  tally() %>%
  group_by(Ordem, Num) %>%
  spread(answer, n)

colnames(contag) <- c("Ordem", "Num",
                      "Discordo_Totalmente", "Discordo", "Neutro",
                      "Concordo", "Concordo_Totalmente")

contag
```

```
## # A tibble: 4 x 7
## # Groups:   Ordem, Num [4]
##   Ordem   Num   Discordo_Totalmente Discordo Neutro Concordo Concordo_Totalmente
##   <fct>   <fct>               <int>    <int>  <int>    <int>                <int>
## 1 todo-um PL                    156       72     20       27                   23
## 2 todo-um SG                     27       25     40       53                  149
## 3 um-todo PL                     66       26     42       66                  108
## 4 um-todo SG                     20       12     33       53                  181
```

Cálculo das porcentagens respectivas (tabela em formato horizontal)

```
porc_horiz <- dados %>%
  group_by(Ordem, Num, answer) %>%
  tally() %>%
  mutate(perc=n/sum(n)) %>%
  dplyr::select(-n) %>%
  group_by(Ordem, Num) %>%
  spread(answer, perc)

colnames(porc_horiz) <- c("Ordem", "Num",
                          "Discordo_Totalmente", "Discordo", "Neutro",
                          "Concordo", "Concordo_Totalmente")

porc_horiz
```

```
## # A tibble: 4 x 7
## # Groups:   Ordem, Num [4]
##   Ordem   Num   Discordo_Totalmente Discordo Neutro Concordo Concordo_Totalmente
##   <fct>   <fct>               <dbl>    <dbl>  <dbl>    <dbl>                <dbl>
## 1 todo-um PL                  0.523    0.242  0.0671   0.0906               0.0772
## 2 todo-um SG                  0.0918   0.0850 0.136    0.180                0.507
## 3 um-todo PL                  0.214    0.0844 0.136    0.214                0.351
```

```
## 4 um-todo SG                0.0669   0.0401 0.110    0.177               0.605
```

Gráfico de barras empilhadas para fácil visualização

Essa parte é difícil de compreender se não temos a noção do resultado final. Você pode rodá-la e voltar depois com calma para entender os códigos. Resumidamente: vamos fazer um gráfico de barras empilhadas centrado na categoria "neutro", ou seja, no meio da escala. Para isso, vamos criar dois conjuntos de dados: as porcentagens da parte de cima ("concordo" e "concordo totalmente') e as da parte de baixo ("discordo" e "discordo totalmente"). A categoria "neutro" será dividida em duas e cada pedaço anexado a uma das partes acima.

Dividir o meio da escala (os julgamentos "Neutro"):

```
dados_meio <- porc_horiz %>%
  mutate(c1 = Neutro / 2,
         c2 = Neutro / 2) %>%
  select(Ordem, Num,
         Discordo_Totalmente, Discordo, c1, c2, Concordo, Concordo_Totalmente) %>%
  gather(key = answer, value = perc, 3:8)
```

Separar a escala em dois conjuntos, o "alto" e o "baixo":

```
meio_alto <- dados_meio %>%
  filter(answer %in% c("Concordo_Totalmente", "Concordo", "c2")) %>%
  # Níveis na ordem normal!
  mutate(answer = factor(answer, levels = c("Concordo_Totalmente", "Concordo", "c2")))

meio_baixo <- dados_meio %>%
  filter(answer %in% c("c1", "Discordo", "Discordo_Totalmente")) %>%
  # Níveis na ordem inversa!
  mutate(answer = factor(answer, levels = c("Discordo_Totalmente", "Discordo", "c1")))
```

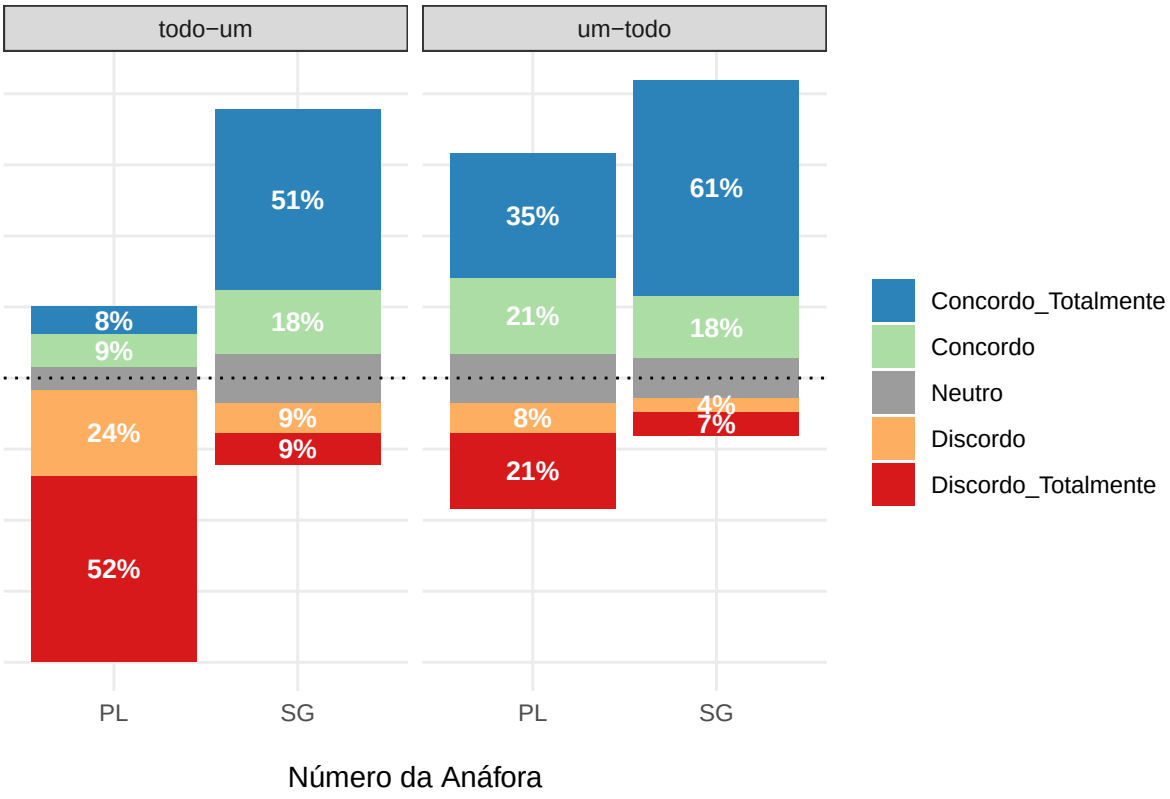
Estabelecer uma paleta de cores para organização!

```
# Usar, do pacote RColorBrewer, a paleta de cores "spectral", com 5 cores
legend_pal <- brewer.pal(name = "Spectral", n = 5)
# Duplica a cor do meio manualmente
legend_pal<-c("#2B83BA", "#ABDDA4", "#FFFFBF", "#FFFFBF", "#FDAE61", "#D7191C")
# Substitui a cor do meio por um cinza
legend_pal <- gsub("#FFFFBF", "#9C9C9C", legend_pal)
# Atribui nomes às cores
names(legend_pal) <-
  c("Concordo_Totalmente", "Concordo", "c1", "c2", "Discordo", "Discordo_Totalmente")
```

Produzir o gráfico, finalmente!

```
ggplot() +
  geom_bar(data = meio_alto, aes(x = Num, y=perc, fill = answer), stat="identity") +
  geom_bar(data = meio_baixo, aes(x = Num, y=-perc, fill = answer), stat="identity") +
  #------------------------------------------------------------------------
  # Essa parte do código é um pouco complicada...
  # Serve apenas para colocar os valores dentro das barras de modo alinhado...
  geom_text(data = meio_alto,
            aes(alpha = answer, x = Num, y=perc, group = answer,
                label = scales::percent(perc, accuracy = 1)),
            color = "white", size = 3.5, fontface = "bold",
            position = position_stack(vjust = .5)) +
```

```
  geom_text(data = meio_baixo,
            aes(alpha = answer, x = Num, y=-perc, group = answer,
                label = scales::percent(perc, accuracy = 1)),
            size = 3.5, color = "white", fontface = "bold",
            position = position_stack(vjust = .5),) +
  scale_alpha_manual(values = c("c1" = 0, "c2" = 0,
                                "Discordo" = 1, "Discordo_Totalmente" = 1,
                                "Concordo_Totalmente" = 1, "Concordo" = 1),
                     guide = 'none') +
  #-------------------------------------------------------------------------------
  geom_hline(yintercept = 0, color =c("black"), linetype = "dotted") +
  facet_wrap(~Ordem) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(from = -1, to = 1, by = .2),
                     # Definir os valores negativos da legenda como positivos
                     labels = function(x) percent(abs(x))) +
  scale_fill_manual(values = legend_pal,
                    breaks = c("Concordo_Totalmente", "Concordo", "c2",
                               "Discordo", "Discordo_Totalmente"),
                    labels = c("Concordo_Totalmente", "Concordo", "Neutro",
                               "Discordo", "Discordo_Totalmente")) +
  labs(x = "\nNúmero da Anáfora", y = "", fill = "") +
  ggtitle("") +
  theme_bw() +
  theme(axis.ticks.x = element_blank(),
        axis.text.y = element_blank(),
        axis.ticks.y = element_blank(),
        plot.background = element_blank(),
        panel.grid.minor = element_blank(),
        panel.border = element_blank())
```



Ajustando um modelo ordinal misto

Agora vamos de fato ajustar um modelo ordinal bayesiano...

Verificando quais os contrastes dos dados:

```
contrasts(dados$Num)
```

```
##    SG
## PL  0
## SG  1
```

```
contrasts(dados$Ordem)
```

```
##          um-todo
## todo-um        0
## um-todo        1
```

Mudar o nível-base para "um-todo" para facilitar a comparação entre as condições "um-todo" SG x PL

```
dados$Ordem<-relevel(dados$Ordem, ref = "um-todo")
```

Ajustando um modelo de regressão ordinal bayesiano sem definição das priors informativas ("flat priors"). Este não é o melhor cenário, mas o objetivo aqui é apenas entender o funcionamento e implementação do modelo.

Vamos rodar o modelo mais completo, pois demora um pouco... ou muito, dependendo da capacidade de processamento do seu computador...

```
# Vamos garantir que o programa use toda a nossa capacidade de computação para acelerar o
# processo usando todos os núcleos do nosso processador
options(mc.cores = parallel::detectCores())
```

```r
# Aqui de fato o modelo
m2 <- brm(answer ~ Ordem*Num + (1+Ordem*Num|subj)+(1+Ordem*Num|item),
          data = dados,
          family = cumulative(link = "logit", threshold = "flexible"),
          silent = 2, refresh = 0) # Apenas para não dar avisos no arquivo .pdf
```

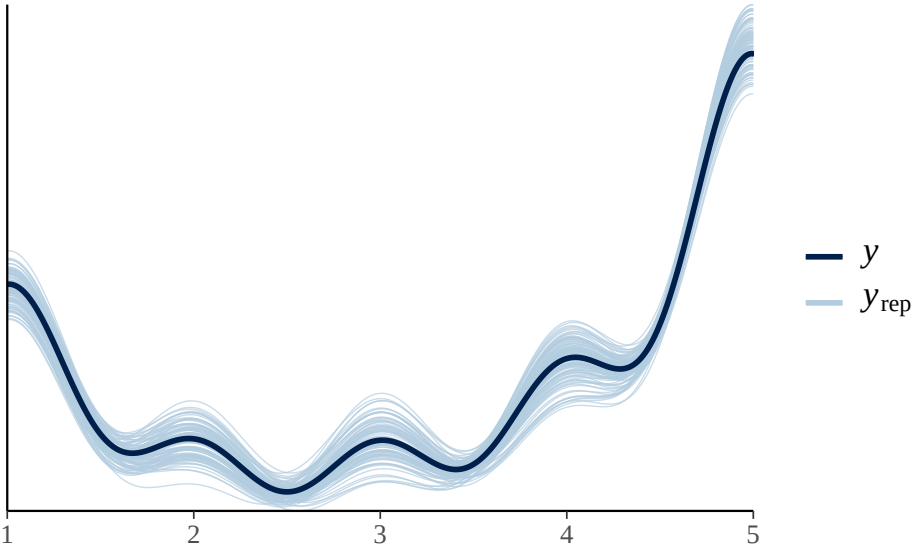
```
## Running /usr/lib/R/bin/R CMD SHLIB foo.c
## gcc -I"/usr/share/R/include" -DNDEBUG   -I"/home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/Rcpp/include/
## In file included from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Core:88,
##                  from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Dense:1,
##                  from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/StanHeaders/include/stan/math/prim
##                  from <command-line>:
## /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/src/Core/util/Macros.h:628:1: er
##   628 | namespace Eigen {
##       | ^~~~~~~~~
## /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/src/Core/util/Macros.h:628:17: e
##   628 | namespace Eigen {
##       |                 ^
## In file included from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Dense:1,
##                  from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/StanHeaders/include/stan/math/prim
##                  from <command-line>:
## /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Core:96:10: fatal error: complex
##    96 | #include <complex>
##       |          ^~~~~~~~~
## compilation terminated.
## make: *** [/usr/lib/R/etc/Makeconf:168: foo.o] Erro 1
```

```r
# Investigando apenas os fatores fixos
fixef(m2)[5:7,]
```

```
##                     Estimate Est.Error       Q2.5     Q97.5
## OrdemtodoMum       -2.477511 0.3519906 -3.1800222 -1.800388
## NumSG               1.611167 0.4060618  0.8465771  2.445277
## OrdemtodoMum:NumSG  1.688926 0.4038942  0.8991507  2.534378
```

Você pode checar o ajuste do modelo, ou seja, a relação entre as priors e os dados. Neste caso, porém, ele será bom, visto que, com 'flat priors' o modelo usava os próprios dados como critério...

```r
pp_check(m2, ndraws = 100)
```




```
# Investigue também no formato de barras, se desejar
# pp_check(m2, type = "bars", ndraws = 100)
```

Visualizando as estimativas

Extraindo os coefientes dos fatores fixos e intervalos de confiança calculados

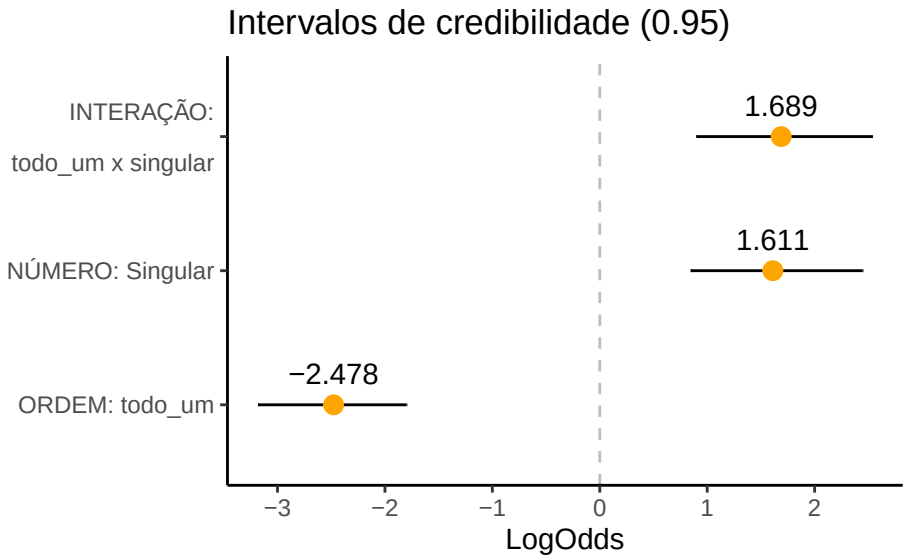
```
fixos.m<-fixef(m2)[5:7,]

# Prepara um data frame com esses dados
colnames(fixos.m)<-c("Estimativas", "Est.Error", "lower", "upper")
fixos.m<-as.data.frame(fixos.m)

# Calcula da razão de chance e das probabilidades correspondentes
fixos.m<-fixos.m %>%
  mutate(OddsRatio=exp(Estimativas)) %>%
  mutate(Probs=OddsRatio/(1 + OddsRatio)*100)

rownames(fixos.m)<-c("ORDEM: todo_um", "NÚMERO: singular", "INTERAÇÃO: ordem x número")

round(fixos.m, 3)
```

```
##                           Estimativas Est.Error  lower  upper OddsRatio  Probs
## ORDEM: todo_um                 -2.478     0.352 -3.180 -1.800     0.084  7.745
## NÚMERO: singular                1.611     0.406  0.847  2.445     5.009 83.357
## INTERAÇÃO: ordem x número       1.689     0.404  0.899  2.534     5.414 84.408
```

Agora vamos plotar o gráfico para publicação...

```
fixos.m %>%
  ggplot(aes(x=reorder(rownames(fixos.m), Estimativas),
             y=Estimativas))+
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed", color = "grey")+
  geom_errorbar(aes(ymin=lower, ymax=upper), width=.0,
                position=position_dodge(.9))+
  geom_point(color="orange", size = 3)+
  geom_text(aes(label=round(Estimativas, 3)), vjust=-1)+
  # ao mudar a ordem é preciso mudar aqui embaixo...
```

```
  scale_x_discrete(labels=c("ORDEM: todo_um", "NÚMERO: Singular",
                            "INTERAÇÃO:\n\ntodo_um x singular")) +
  labs(y = "LogOdds", x = "") +
  ggtitle("Intervalos de credibilidade (0.95)") +
  coord_flip()+theme_classic()
```



Interpretando os resultados...

A fim de entender os resultados, primeiro devemos lembrar os contrastes do modelo. Neste caso, estamos usando 'dummy code' (0 e 1), também chamado de 'treatment contrasts'. Não vamos entrar em detalhes aqui sobre outros tipos de contrastes. Para uma discussão introdutória, veja o excelente material disponível aqui.

```
contrasts(dados$Num)
```

```
##    SG
## PL  0
## SG  1
```

```
contrasts(dados$Ordem)
```

```
##         todo-um
## um-todo       0
## todo-um       1
```

As categorias codificadas com 0 (zero) formam a base, a referência contra as quais as demais serão contrastadas. Neste caso, um_todo (0) PL (0) é a categoria de referência. Logo, podemos entender assim as estimativas do modelo:

- O preditor 'Ordem: todo_um' = -2.47 logOdds indica o contraste 'todo_um (1) PL (0)' × 'um_todo (0) PL (0)'. Ou seja, mantendo-se o número constante, o efeito da 'ordem': todo_um aumenta a probabilidade de se DESCER na escala, aumenta a probabilidade de se dar uma resposta mais abaixo na escala.
- O preditor 'Número: singular' = +1.62 logOdds indica o contraste 'um_todo (0) SG (1)' x 'um_todo (0) PL (0)'. Ou seja, mantendo-se a ordem constante, o efeito do 'número': singular aumenta a probabilidade de se SUBIR na escala, aumenta a probabilidade de se dar uma resposta mais acima na escala.
- A interação 'Ordem x Número (todo_um singular)' = +1.66 logOdds indica que os níveis da variável 'Ordem' interagem com os níveis da variável 'Número', basicamente indicando que: o nível singular

aumenta a probabilidade de SUBIR na escala com todo_um; o nível plural aumenta a probabilidade de DESCER na escala com todo_um.

IMPORTANTE! O fato de haver um efeito de interação aponta para olharmos com cuidado para os efeitos de Ordem e de Número. Se não houvesse interação, o efeito de um nível da variável seria o mesmo para ambos os níveis da outra, mas como há, os efeitos de 'ordem' e de 'número' indicam contrastes particulares. Ver explicação abaixo, se quiser saber mais sobre esse ponto.

Um adendo: de logOdds para Odds para probailidades

Vamos começar com um vetor de probabilidades, de 0 a 1, portanto. E vamos transformá-lo em logaritmo da chance (LogOdds). É esse valor que o modelo com `family = 'logit'` nos dá.

```
a = round(qlogis(c(0,.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9,1)), 2)

# Logaritmo da chance, ou logOdds
print(a)
```

```
##  [1]  -Inf -2.20 -1.39 -0.85 -0.41  0.00  0.41  0.85  1.39  2.20   Inf
```

Agora vamos transformar esse valor em chance:

```
# Odds ou razão de chance
round(exp(a), 1)
```

```
##  [1] 0.0 0.1 0.2 0.4 0.7 1.0 1.5 2.3 4.0 9.0 Inf
```

E, por fim, vamos retornar às probabilidades:

```
# Retornando às probabilidades
round(exp(a)/(1+exp(a)), 2)
```

```
##  [1] 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 NaN
```

Olhando com atenção para esses dados, o que percebemos é que:

- Probabilidade de 50% é igual a 0 (zero) logOdds que é igual a chance de 1/1 (1 para 1, ou seja, uma chance de sucesso para uma de fracasso);
- Probabilidade de 80% é igual a 1.39 logOdds que é igual a chance de 4/1 (4 chances de sucesso para uma de fracasso);
- Probabilidade de 10% é igual a -2.20 logOdds que é igual a chance de 0.1 ou 1/10 (1 chance de sucesso para 10 de fracasso).

Mas por que usar logOdds se fica tão difícil de compreender? O motivo é que probabilidade é um valor limitado entre 0 e 1 enquanto LogOdds é um valor que vai de -Inf a +Inf:

```
qlogis(0) # 0%
```

```
## [1] -Inf
```

```
qlogis(1) # 100%
```

```
## [1] Inf
```

```
qlogis(.9999999999) # um valor muito próximo de 100% pode ser estimado em logOdds
```

```
## [1] 23.02585
```

```
qlogis(.0000000001) # um valor muito próximo de 0% pode ser estimado em logOdds
```

```
## [1] -23.02585
```

Assim sendo, uma outra maneira de ler as estimativas do modelo é, grosseiramente, interpretar as probabilidades (ou chances) correspondentes na tabela:

```
round(fixos.m, 3)
```

```
##                             Estimativas Est.Error  lower  upper OddsRatio  Probs
## ORDEM: todo_um                   -2.478     0.352 -3.180 -1.800     0.084  7.745
## NÚMERO: singular                  1.611     0.406  0.847  2.445     5.009 83.357
## INTERAÇÃO: ordem x número         1.689     0.404  0.899  2.534     5.414 84.408
```

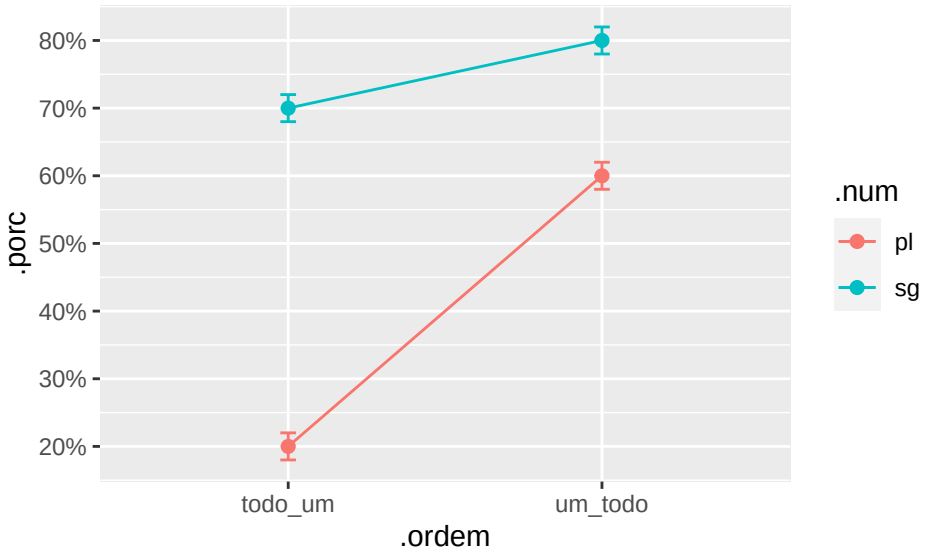
Ao se mudar de uma frase com a ordem 'um_todo' para uma frase com a ordem 'todo_um', há cerca de 7% de probabilidade (0.08 ou 1 chance para 12) de a resposta ser 1 nível abaixo na escala. Por exemplo, se as pessoas em geral marcam 'concordo' em uma frase com 'um_todo', há 7% de chance de elas marcarem abaixo, ou seja, 'neutro', em uma frase com 'todo_um'. Apesar de ser uma probabilidade pequena, ela foi significativa.

Se as pessoas em geral marcam 'concordo' em uma frase com 'plural', há 83% de probailidade (ou 5 chances para 1) de elas marcarem acima, ou seja, 'concordo totalmente' em uma frase com anáfora 'singular'. *Grosso modo*, é isso que o modelo está dizendo.

Um adendo para explicar o efeito de interação

Observe o gráfico abaixo, cujos valores foram inventados, apenas para ilustração:

```
data.frame(
  .ordem = c("um_todo", "um_todo", "todo_um", "todo_um"),
  .num = c("sg", "pl", "sg", "pl"),
  .porc = c(.8, .6, .7, .2),
  .sd = c(rep(.02, 4))) %>%
  ggplot(aes(x = .ordem, y = .porc, group = .num, color = .num)) +
  geom_errorbar(aes(ymin = .porc-.sd, ymax = .porc+.sd), width = .05) +
  geom_point(size = 2) + geom_line() +
  scale_y_continuous(labels = scales::label_percent(accuracy = 1L),
                     breaks = seq(from = 0, to = 1, by = .1))
```



Observe que mudar de plural (0) para singular (1) (ou vice-versa):

- Quando a ordem é 'um_todo', a mudança é de 20% (80 - 60) ou (60-80 = -20)
- Quando a ordem é 'todo_um', a mudança é de 50% (70 - 20) ou (20-70 = -50)

- A diferença é, portanto: 50 - 20 = 30 ou -50 - (-20) = -30

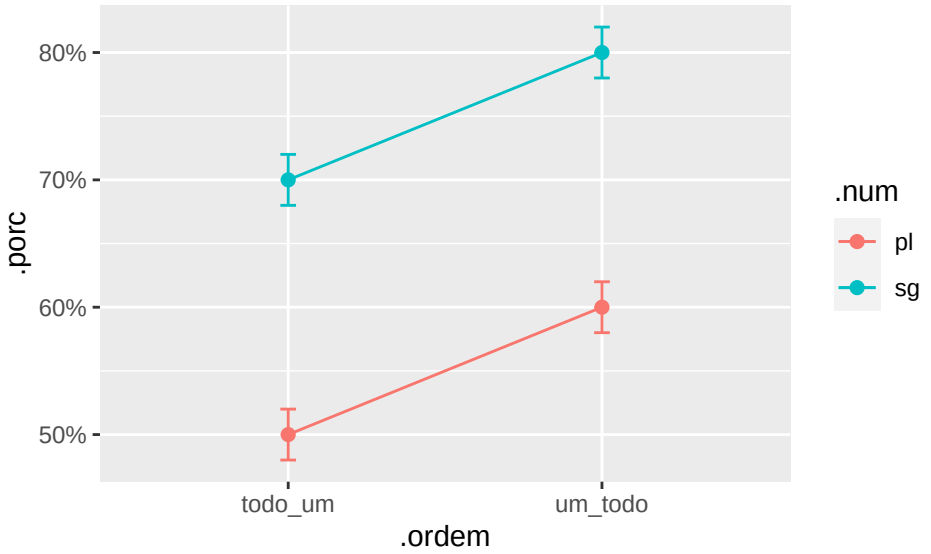
Observe também que mudar de 'um_todo' (0) para 'todo_um' (1) (ou vice-versa):

- Quando o número é 'singular', a mudança é de 10% (80 - 70) ou (70 - 80 = -10)
- Quando o número é plural, a mudança é de 40% (60 - 20) ou (20 - 60 = -40)
- A diferença é, portanto: 40 - 10 = 30 ou -40 - (-10) = -30

Repare que o "efeito de interação" é sempre o mesmo: a diferença das diferenças = 30% (ou -30% se for no sentido contrário, de 1 para 0). Por isso, não importa o modelo que você ajuste para esses dados, com quaisquer contrastes o valor da interação será o mesmo, mudando apenas o sinal em alguns casos!

Vamos fazer uma pequena mudança no gráfico, trocando aquele .2 por .5:

```
data.frame(
  .ordem = c("um_todo", "um_todo", "todo_um", "todo_um"),
  .num = c("sg", "pl", "sg", "pl"),
  .porc = c(.8, .6, .7, .5),
  .sd = c(rep(.02, 4))) %>%
  ggplot(aes(x = .ordem, y = .porc, group = .num, color = .num)) +
  geom_errorbar(aes(ymin = .porc-.sd, ymax = .porc+.sd), width = .05) +
  geom_point(size = 2) + geom_line() +
  scale_y_continuous(labels = scales::label_percent(accuracy = 1L),
                     breaks = seq(from = 0, to = 1, by = .1))
```



Ao fazer isso, o que vemos é que o resultado, ao se mudar de 'plural' para 'singular' não é afetado pela 'ordem', que é 20% em ambos os casos: 20 - 20 = 0% de alteração de um nível para outro; O resultado ao se mudar de 'um_todo' para 'todo_um' não é afetado pelo 'número', que é 10% em ambos os casos: 10 - 10 = 0% de alteração de um nível para outro. Logo: não há efeito de interação!

Esse gráfico mostra bem, ainda, o que um modelo de regressão faz ao expor as 'estimativas'. Se não há interação, o efeito de 'singular' (aumento de 20%) é o mesmo tanto em 'todo_um' quanto em 'um_todo'. Esse pensamento é difícil para quem vem de um paradigma mental típico da Análise de Variância (Anova), que pensa sempre em contrastes de todas as categorias contra todas as categorias, como se faz em um teste *post-hoc*. O modelo de regressão contrasta apenas o que for estritamente necessário, não contrastando o que for redundante. Se, por exemplo, temos 3 categorias (A, B e C), ele apenas fará dois contrastes, porque o terceiro é inferível desses dois. Um exemplo pode deixar isso mais claro: se sabemos que Pedro é 5 anos mais velho do que João e que Maria é 2 anos mais velha do que Pedro, então não precisamos calcular a diferença de idade entre João e Maria, pois podemos inferi-la dos contrastes já dados.

No caso de 4 condições nos dados com que estamos trabalhando, ao fixar uma delas no intercepto, o modelo precisa apenas contrastar duas delas e estimar a interação para ter tudo o que é necessário. Se não há interação, o efeito do número obtido do contraste de duas condições é o mesmo para o contraste entre as demais (e o modelo não precisa perder tempo calculando esse valor). Se há interação, então o efeito efeito do número obtido do contraste de duas condições não é o mesmo para as demais e o modelo está mostrando nas estimativas o contraste individual entre elas.

Ajustando um modelo com priors informativas (ou nem tanto)

Antes de tudo, o que são 'priors'? Uma prior é qualquer informação *a priori* que temos sobre um fenômeno, que pode vir de conhecimento teórico sobre o assunto ou de dados de experimentos prévios sobre este tema. Por exemplo, se alguém nos faz uma pergunta sobre se a altura das pessoas aumenta com a idade, nós diríamos que 'sim', pelo menos até certa idade. Se alguém nos pergunta se a relação de aumento por ano é de 5cm ou de 5m, certamente diríamos que está mais próxima de 5cm do que de 5m. Logo, ao ajustar um modelo bayesiano, podemos incluir essas informações, de modo que o modelo não olhe para os dados de modo 'ingênuo' e nos venha com uma estimativa de que a cada ano as pessoas crescem 5m, por exemplo. Veja mais sobre o tema neste capítulo.

Em primeiro lugar, se você quiser, pode investigar as priors possíveis para cada parâmetro do modelo a ser aplicado a seus dados:

```
get_prior(answer ~ Ordem*Num + (1+Ordem*Num|subj)+(1+Ordem*Num|item),
          data = dados,
          family = cumulative(link = "logit", threshold = "flexible"))
```

```
##                 prior     class                coef group resp dpar nlpar lb ub
##                (flat)         b
##                (flat)         b              NumSG
##                (flat)         b       OrdemtodoMum
##                (flat)         b OrdemtodoMum:NumSG
##                lkj(1)       cor
##                lkj(1)       cor                      item
##                lkj(1)       cor                      subj
##  student_t(3, 0, 2.5) Intercept
##  student_t(3, 0, 2.5) Intercept                 1
##  student_t(3, 0, 2.5) Intercept                 2
##  student_t(3, 0, 2.5) Intercept                 3
##  student_t(3, 0, 2.5) Intercept                 4
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd                                        0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd                      item              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd          Intercept   item              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd              NumSG   item              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd       OrdemtodoMum   item              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd OrdemtodoMum:NumSG   item              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd                      subj              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd          Intercept   subj              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd              NumSG   subj              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd       OrdemtodoMum   subj              0
##  student_t(3, 0, 2.5)        sd OrdemtodoMum:NumSG   subj              0
##        source
##       default
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##       default
```

```
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##       default
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##       default
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
##  (vectorized)
```

Em se tratando dos fatores fixos, o que este resultado nos mostra é que podemos definir priors para os coeficientes ou betas (β), marcados com a letra 'b' no resultado acima (temos 4 destes: uma para 'ordem', um para 'número', um para a 'interação' entre eles e um para a condição de referência, não nomeada); e priors para os 'interceptos' que, neste caso, são os 'tau cuts', ou seja, o valor que separa cada uma das categorias de sua adjacente ('neutro' de 'concordo'; 'concordo' de 'concordo totalmente' e assim por diante, aqui nomeadas como 'vazio', 1, 2, 3 e 4).

Apenas a título de ilustração, vamos setar priors para este modelo e ver o que muda nos resultados:

```
prior_manual <-
  # Assume distribuição normal com média 0 e desvio padrão 5 para todos os
  # coeficientes estimados (b de beta)
  prior(normal(0, 5), class = "b") +
  # Assume distribuição normal com média 0 e desvio padrão 5 para os interceptos
  # (nesse caso tau cuts)
  prior(normal(0, 5), class = "Intercept")

# Vamos garantir que o programa use toda a nossa capacidade de computação para acelerar o
# processo usando todos os núcleos do nosso processador
options(mc.cores = parallel::detectCores())

m3 <- brm(answer ~ Ordem*Num + (1+Ordem*Num|subj)+(1+Ordem*Num|item),
          data = dados,
          family = cumulative(link = "logit", threshold = "flexible"),
          prior = prior_manual,
          sample_prior = "only", # Extrair amostras apenas das priors e não dos dados
          silent = 2, refresh = 0) # Apenas para não dar avisos no arquivo .pdf
```

```
## Running /usr/lib/R/bin/R CMD SHLIB foo.c
## gcc -I"/usr/share/R/include" -DNDEBUG   -I"/home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/Rcpp/include/
## In file included from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Core:88,
##                  from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Dense:1,
##                  from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/StanHeaders/include/stan/math/prim
##                  from <command-line>:
## /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/src/Core/util/Macros.h:628:1: e
##   628 | namespace Eigen {
##       | ^~~~~~~~~
```

```
## /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/src/Core/util/Macros.h:628:17: e
##   628 | namespace Eigen {
##       |                 ^
## In file included from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Dense:1,
##                  from /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/StanHeaders/include/stan/math/prim
##                  from <command-line>:
## /home/igor/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.1/RcppEigen/include/Eigen/Core:96:10: fatal error: complex
##    96 | #include <complex>
##       |          ^~~~~~~~~
## compilation terminated.
## make: *** [/usr/lib/R/etc/Makeconf:168: foo.o] Erro 1
```

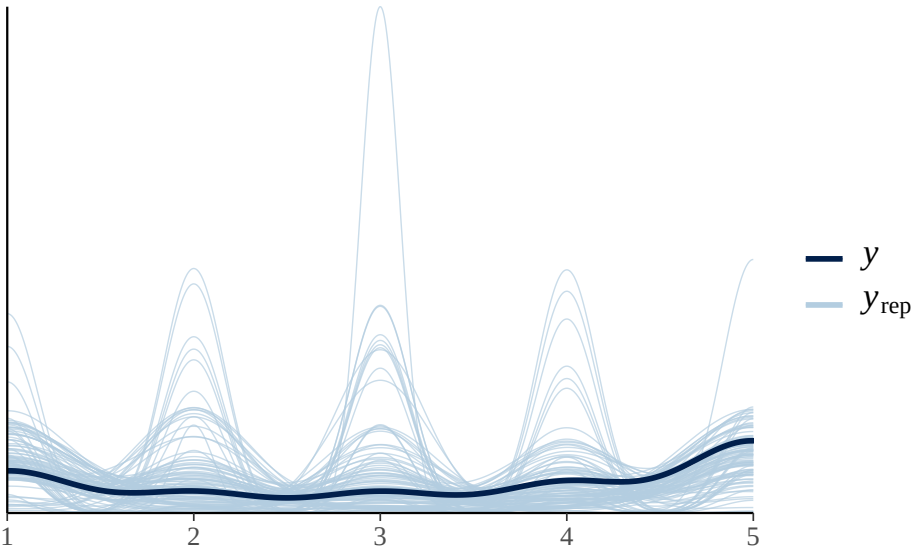
```
fixef(m3)[5:7,]
```

```
##                         Estimate Est.Error       Q2.5    Q97.5
## OrdemtodoMum       -0.018202923  4.987457  -9.716427 9.700195
## NumSG               0.005574496  5.071674  -9.912587 9.772343
## OrdemtodoMum:NumSG  0.004125102  5.177579 -10.164964 9.949251
```

Observe que, como as minhas priors são completamente sem sentido, as estimativas do modelo também são loucas!!!

E podemos verificar quão boas são nossas priors... Nesse caso, horríveis...

```
# pp_check(m3, type = "bars", nsamples = 100)
pp_check(m3, ndraws = 100)
```



Você poderia (e deveria, se tiver tais informações), definir as priors mais detalhadamente, por exemplo, para cada um dos *slopes* (β) estimados, como abaixo:

```
# Definindo prios mais detalhadamente
prior_manual <-
  prior(normal(1, 1), class = "b", coef = NumSG) +
  prior(normal(1, 1), class = "b", coef = OrdemtodoMum) +
  prior(normal(1, 1), class = "b", coef = OrdemtodoMum:NumSG) +
  prior(normal(0, 1.5), class = "Intercept")
```

Investigando os dados do Mario

Carregando os dados e fazendo as alterações na tabela:

```
final_table <-
  read.csv("https://raw.githubusercontent.com/igordeo-costa/ModelosOrdinais/main/AnaliseEscalaLikert_Ma
           stringsAsFactors = T)

# Preparando a tabela
final_table$escala <- as.ordered(final_table$escala) # variável resposta ordenada
```

Preparando a estatística descritiva

Calculando valores absolutos

```
resp_escala_abso <- final_table %>%
  filter(!is.na(escala)) %>% # Excluir células vazias NA
  group_by(Tamanho, Número, escala) %>% # agrupa pelas condições relevantes
  tally() %>% # Faz a contagem
  spread(escala, n)

colnames(resp_escala_abso) <- c("Tamanho", "Número",
                                "Nada_natural", "Pouco_natural", "Neutro",
                                "Muito_natural", "Totalmente_natural")
```

Calculando valores percentuais

```
resp_escala_perc <- final_table %>%
  filter(!is.na(escala)) %>%
  group_by(Tamanho, Número, escala) %>%
  tally() %>%
  mutate(perc=n/sum(n)) %>%
  select(-n) %>%
  spread(escala, perc)

colnames(resp_escala_perc) <- c("Tamanho", "Número",
                                "Nada_natural", "Pouco_natural", "Neutro",
                                "Muito_natural", "Totalmente_natural")
```

E aqui vamos fazer o gráfico de barras empilhadas:

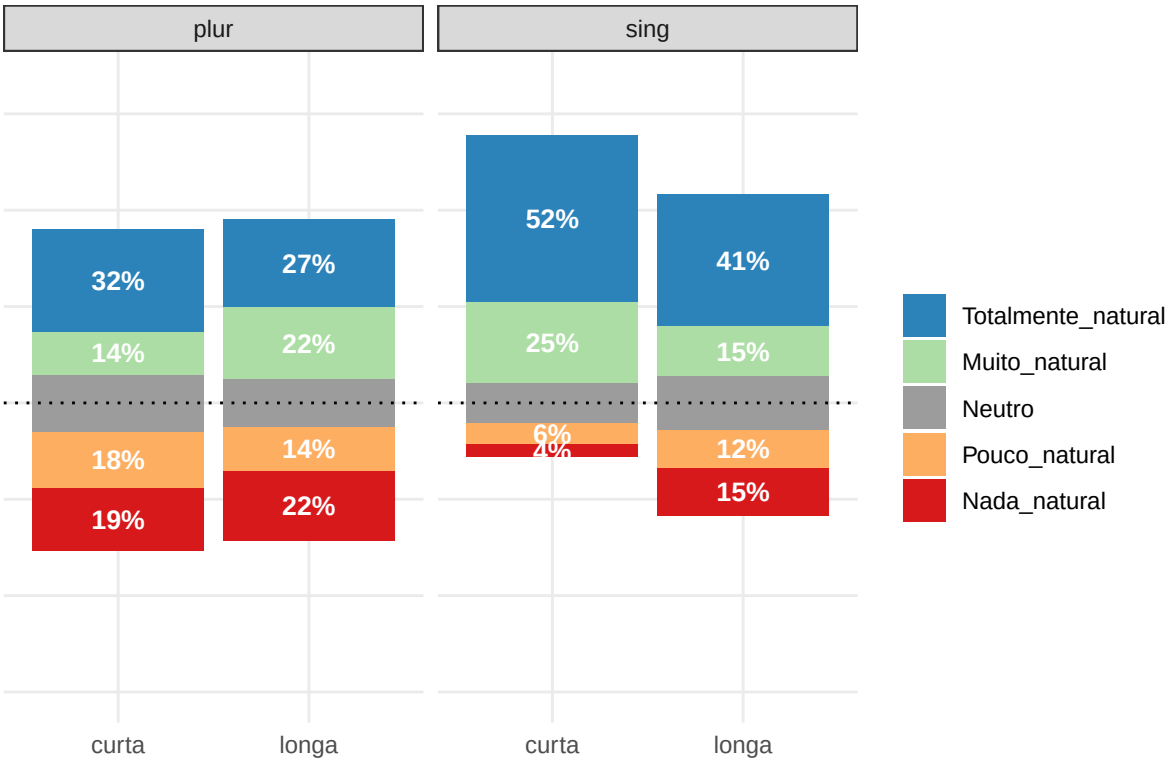
```
# Dividir o meio da escala (os julgamentos "Neutro"):
dados_meio <- resp_escala_perc %>%
  mutate(c1 = Neutro / 2,
         c2 = Neutro / 2) %>%
  select(Tamanho, Número,
         Nada_natural, Pouco_natural, c1, c2, Muito_natural, Totalmente_natural) %>%
  gather(key = Escolha, value = perc, 3:8)

# Separando a escala em dois conjuntos, o "alto" e o "baixo":
meio_alto <- dados_meio %>%
  filter(Escolha %in% c("Totalmente_natural", "Muito_natural", "c2")) %>%
  # Níveis na ordem normal!
  mutate(Escolha = factor(Escolha,
                          levels = c("Totalmente_natural", "Muito_natural", "c2")))

meio_baixo <- dados_meio %>%
```

```
  filter(Escolha %in% c("c1", "Pouco_natural", "Nada_natural")) %>%
  # Níveis na ordem inversa!
  mutate(Escolha = factor(Escolha,
                          levels = c("Nada_natural", "Pouco_natural", "c1")))

# Estabelecimento de uma paleta de cores para organização!
legend_pal<-c("#2B83BA", "#ABDDA4", "#FFFFBF", "#FFFFBF", "#FDAE61", "#D7191C")
legend_pal <- gsub("#FFFFBF", "#9C9C9C", legend_pal)
names(legend_pal) <- c("Totalmente_natural", "Muito_natural", "c1",
                       "c2", "Pouco_natural", "Nada_natural")
```

Produzindo o gráfico, finalmente!

```
ggplot() +
  geom_bar(data = meio_alto, aes(x = Tamanho,
                                 y=perc, fill = Escolha), stat="identity") +
  geom_bar(data = meio_baixo, aes(x = Tamanho,
                                  y=-perc, fill = Escolha), stat="identity") +
#-------------------------------------------------------------------------------
# Essa parte do código é um pouco complicada...
# Serve apenas para colocar os valores dentro das barras
geom_text(data = meio_alto,
          aes(x = Tamanho, y=perc, group = Escolha,
              alpha = Escolha,
              label = scales::percent(perc, accuracy = 1)),
          color = "white",
          size = 3.5, position = position_stack(vjust = .5),
          fontface = "bold") +
  geom_text(data = meio_baixo,
            aes(x = Tamanho, y=-perc, group = Escolha,
                alpha = Escolha,
                label = scales::percent(perc, accuracy = 1)),
            size = 3.5, position = position_stack(vjust = .5),
            color = "white",
            fontface = "bold") +
  # Não mostrar as % no meio da escala!
  scale_alpha_manual(values = c("c1" = 0, "c2" = 0,
                                "Muito_natural" = 1, "Totalmente_natural" = 1,
                                "Nada_natural" = 1, "Pouco_natural" = 1),
                     guide = 'none') +
  #-------------------------------------------------------------------------------
  geom_hline(yintercept = 0, color = c("black"), linetype = "dotted") +
  scale_fill_manual(values = legend_pal,
                    breaks = c("Totalmente_natural", "Muito_natural", "c2",
                               "Pouco_natural", "Nada_natural"),
                    labels = c("Totalmente_natural", "Muito_natural",
                               "Neutro", "Pouco_natural", "Nada_natural")) +
  labs(x = "", y = "", fill="") +
  facet_wrap(~Número) +
  theme_bw() +
  scale_y_continuous(labels = function(x) percent(abs(x)),
                     limits = c(-0.9, 1),
                     breaks = seq(from = -0.9, to = 1, by = .3)) +
  theme(axis.ticks.y = element_blank(),
```

```
        axis.ticks.x = element_blank(),
        axis.text.y = element_blank(),
        plot.background = element_blank(),
        panel.grid.minor = element_blank(),
        panel.border = element_blank()) +
  ggtitle("")
```



Exemplos de sentenças usadas pelo autor e suas categorizações respectivas:

- No escritório da firma desapareceu um documento sigiloso. (curta_sg)
- No escritório da firma desapareceu uns documentos sigilosos. (curta_pl)
- No canteiro do jardim desabrochou **repentinamente** uma azaleia belíssima. (longa_sg)
- No canteiro do jardim desabrochou **repentinamente** umas azaleias belíssimas. (longa_pl)

Aplicando um modelo ordinal aos dados usando 'Flat priors'

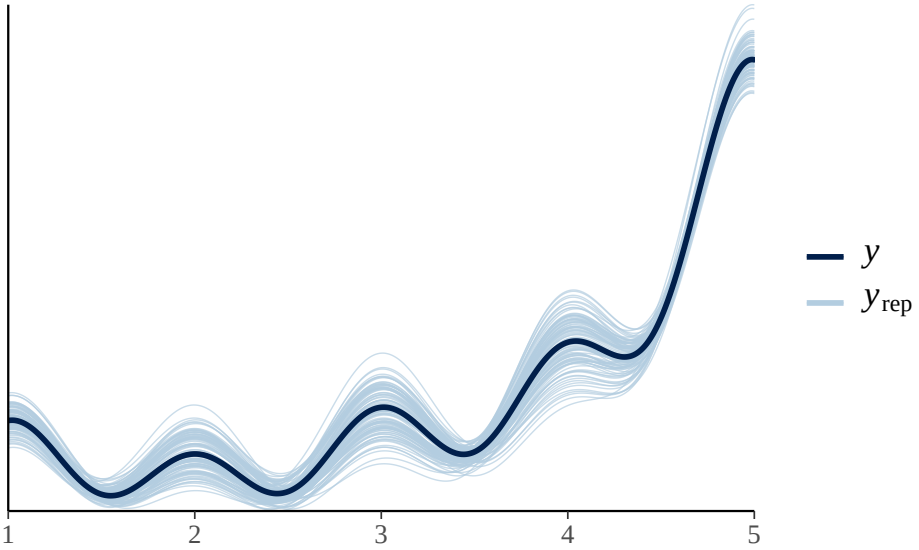
```
# Ativando acesso a todos os núcleos do processador
options(mc.cores = parallel::detectCores())

# Ajustando o modelo
ordinal_mario <- brm(escala ~ Tamanho*Número +
                       (1+Tamanho*Número|Part) + (1+Tamanho*Número|num),
                     data = final_table,
                     family = cumulative(link = "logit", threshold = "flexible"),
                     silent = 2, refresh = 0)

fixef(ordinal_mario)[5:7,]
```

```
##                          Estimate Est.Error      Q2.5     Q97.5
## Tamanholonga           -0.4016507  1.410250 -3.296400  2.099404
```

```
## Númerosing               6.2996466  2.593822  2.741625 12.690676
## Tamanholonga:Númerosing -3.3845367  2.250770 -8.605299  0.054558
```

Checando a qualidade do ajuste...

```
pp_check(ordinal_mario, ndraws = 100)
```



Extrair os coefientes dos fatores fixos e intervalos de confiança calculados

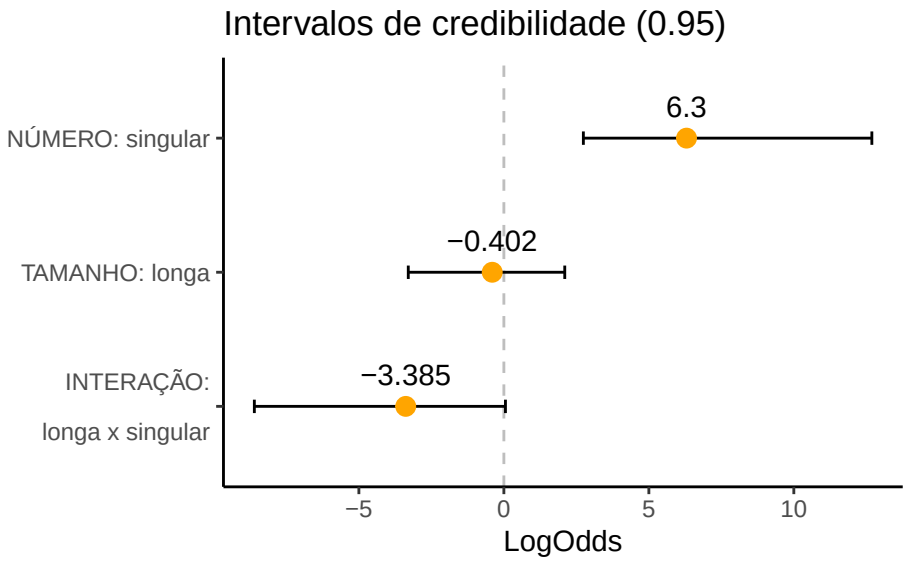
```
fixos.m<-fixef(ordinal_mario)[5:7,]

# Preparar um data frame com esses dados
colnames(fixos.m)<-c("Estimativas", "Est.Error", "lower", "upper")
fixos.m<-as.data.frame(fixos.m)

# Cálculo da razão de chance e das probabilidades
fixos.m<-fixos.m %>%
  mutate(OddsRatio=exp(Estimativas)) %>%
  mutate(Probs=OddsRatio/(1 + OddsRatio)*100)

rownames(fixos.m)<-c("TAMANHO: longa", "NÚMERO: singular", "INTERAÇÃO: longa x sg")

round(fixos.m, 3)
```

```
##                       Estimativas Est.Error  lower  upper OddsRatio  Probs
## TAMANHO: longa             -0.402     1.410 -3.296  2.099     0.669 40.092
## NÚMERO: singular            6.300     2.594  2.742 12.691   544.380 99.817
## INTERAÇÃO: longa x sg      -3.385     2.251 -8.605  0.055     0.034  3.278
```

Plotar um gráfico para publicação...

```
fixos.m %>%
  ggplot(aes(x=reorder(rownames(fixos.m), Estimativas),
             y=Estimativas))+
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed", color = "grey")+
  geom_errorbar(aes(ymin=lower, ymax=upper), width=.1,
                position=position_dodge(.9))+
  geom_point(color="orange", size = 3) +
  geom_text(aes(label=round(Estimativas, 3)), vjust=-1)+
```

```
  # ao mudar a ordem é preciso mudar aqui
  scale_x_discrete(labels=c("INTERAÇÃO:\n\nlonga x singular",
                            "TAMANHO: longa",
                            "NÚMERO: singular"))+
  labs(y = "LogOdds", x = "") +
  ggtitle("Intervalos de credibilidade (0.95)") +
  coord_flip()+theme_classic()
```



Interpretando os resultados...

Lembrando nossos contrastes...

```
contrasts(final_table$Tamanho)
```

```
##       longa
## curta     0
## longa     1
```

```
contrasts(final_table$Número)
```

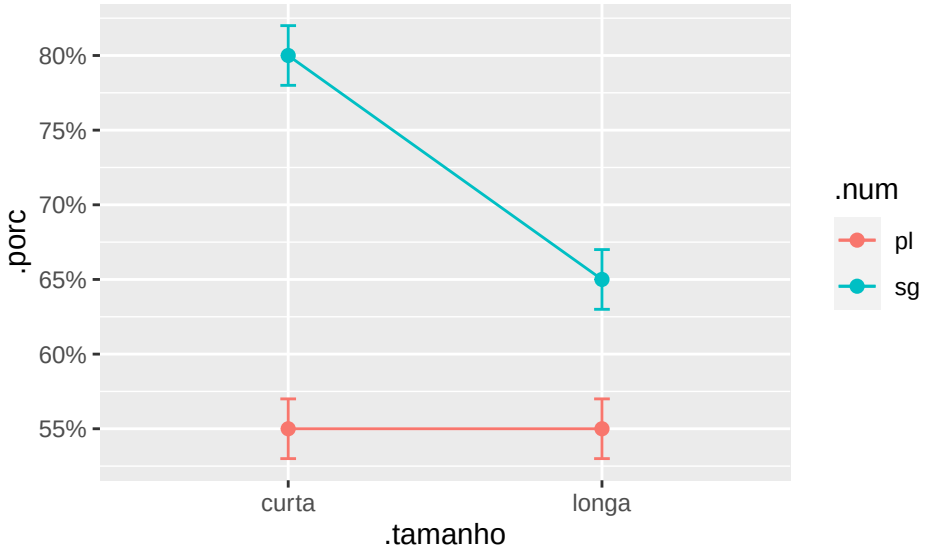
```
##      sing
## plur    0
## sing    1
```

- O fator significativo número singular (+6 logOdds) indica o contraste Curta (0) sg (1) x Curta (0) pl (0): singular aumenta a chance de se SUBIR na escala...
- O efeito não significativo de tamanho indica que nada se pode inferir quanto ao tamanho. O intervalo de credibilidade cortando a linha do zero indica que o parâmetro populacional pode tanto ser menor quanto maior do que zero... ou mesmo zero. Mantendo-se o plural constante, ao se mudar de longa para curta, não se pode inferir que há diferença.
- O intervalo de credibilidade para a interação ora corta a linha do zero ora não. Apenas por motivos pedagógicos, vamos assumir que ele seja significativo. Se é assim, então o nível singular aumenta MUITO a probabilidade de SUBIR na escala com curta e aumenta POUCO ou NADA com longa. Mas por que o valor em logOdds é negativo (-3 logOdds)? Como falamos antes, o resultado da interação é sempre o mesmo, o que muda é apenas o sinal.

De novo um adendo para compreender a interação...

Vamos olhar para o gráfico abaixo:

```
# Valores abaixo são inventados, apenas para ilustração
data.frame(.tamanho = c("curta", "curta", "longa", "longa"),
           .num = c("sg", "pl", "sg", "pl"),
           .porc = c(.8, .55, .65, .55),
           .sd = c(rep(.02, 4))) %>%
  ggplot(aes(x = .tamanho, y = .porc, group = .num, color = .num)) +
  geom_line() +
  geom_errorbar(aes(ymin = .porc-.sd, ymax = .porc+.sd), width = .05) +
  geom_point(size = 2) +
  scale_y_continuous(labels = scales::label_percent(accuracy = 1L),
                     breaks = seq(from = 0, to = 1, by = .05))
```



Quando se muda de plural (0) para singular (1):

- na curta: 55 - 80 = -25
- na longa: 55 - 65 = -10
- Diferença = -25 - (-10) = -15% (Sinal negativo)

Quando se muda de singular (1) para plural (0):

- na curta: 80 - 55 = 25
- na longa: 65 - 55 = 10
- Diferença = 25 -10 = 15% (Sinal positivo)

Quando se muda de curta (0) para longa (1):

- no singular 80 - 65 = 15
- no plural 60 - 60 = 0
- Diferença = 15% (Sinal positivo)

Quando se muda de longa (1) para curta (0):

- no singular 65 - 80 = -15
- no plural 60 - 60 = 0
- Diferença = -15% (Sinal negativo)

Se você quiser ver como fica sem o efeito de interação, basta mudar o segundo .55 para .7:

```r
# Valores abaixo são inventados, apenas para ilustração
data.frame(.tamanho = c("curta", "curta", "longa", "longa"),
           .num = c("sg", "pl", "sg", "pl"),
           .porc = c(.8, .7, .65, .55),
           .sd = c(rep(.02, 4))) %>%
  ggplot(aes(x = .tamanho, y = .porc, group = .num, color = .num)) +
  geom_line() +
  geom_errorbar(aes(ymin = .porc-.sd, ymax = .porc+.sd), width = .05) +
  geom_point(size = 2) +
  scale_y_continuous(labels = scales::label_percent(accuracy = 1L),
                     breaks = seq(from = 0, to = 1, by = .05))
```