

# **Caminhos mínimos em grafos com pesos**

**Algoritmos e Estruturas de Dados**

# Busca em Profundidade (DFS)

- Algoritmo recursivo curto que encontra todos os vértices acessíveis a partir da raiz
- Útil para problemas como
  - identificar/contar componentes conexos
  - encontrar ciclos
  - ordenação topológica

# Caminhos mínimos

Dados vértices  $v$  e  $w$ , encontrar o caminho de menor tamanho entre eles.

- Busca em Largura -> grafos sem pesos
- E se tem pesos?

# Think-pair-share

Teremos uma sequência de perguntas sobre grafos com pesos

1. reservem um lugar para anotar suas ideias
2. escolham uma dupla
3. para cada pergunta, 30s para pensar em uma resposta
4. 30s para discutir com sua dupla
5. 1m para compartilhar ideias na sala

# A busca em largura funciona em grafos com pesos?

**Se sim explique, se não dê um contra-exemplo**

**E se modificássemos a BFS para pegar as menores arestas primeiro?**

**Isso funciona? Se sim explique, se não dê um contra-exemplo**

**E se modificássemos a BFS para pegar os vértices mais próximos primeiro?**

**Isso funciona? Se sim explique, se não dê um contra-exemplo**

# Vamos pro handout!

15 min

# Conclusões?

# Algoritmo de Dijkstra

- menor caminho em grafos com pesos não negativos
- ideia central: **iterativamente pegar o vértice mais próximo da fonte**
- ao processarmos um vértice a distância até ele não muda mais

# Algoritmo de Dijkstra

**Entradas:**

- $G = (V, E)$  um grafo direcionado com pesos não negativos armazenados em uma matriz quadrada  $P$
- $s, t \in V$  dois vértices (fonte e destino)

**Saída:**

- array `path` com o caminho de  $s$  até  $t$  ou  $\emptyset$  se não houver caminho
- tamanho do caminho

# Algoritmo de Dijkstra

Auxiliares:

- arrays `pred` e `dist` de tamanho  $|V|$  inicializado com `-1` e  $-\infty$
- conjunto `h` contendo vértices já alcançados mas ainda não processados

**Veremos que o conjunto `h` é essencial para obtermos um algoritmo rápido!**

# Algoritmo de Dijkstra

```
dist[s] <- 0
pred[s] <- s
INSERE s EM h

PARA i=1 até |V| FAÇA
    k <- elemento em h com menor dist

    PARA CADA VIZINHO j DE k FAÇA
        distK <- dist[k] + P[k, j]
        SE distK < dist[j] ENTÃO
            dist[j] <- distK
            pred[j] <- k
            INSERE j EM h # não faz nada se já estiver em h
        FIM
    FIM
FIM

PREENCHA path USANDO O ARRAY pred
DEVOLVA path, dist[t]
```

# Algoritmo de Dijkstra

- Complexidade depende da operação elemento em  $h$  com menor  $dist$ 
  - guardar todos em um vetor dinâmico e pegar o menor é  $\mathcal{O}(V)$
  - faço isso no máximo  $V$  vezes
- Calculamos  $dist_k$  no máximo  $E$  vezes

**Total**  $\mathcal{O}(E + V^2) = \mathcal{O}(V^2)$

# Dá para fazer melhor?

# Min-heap

## Propriedades:

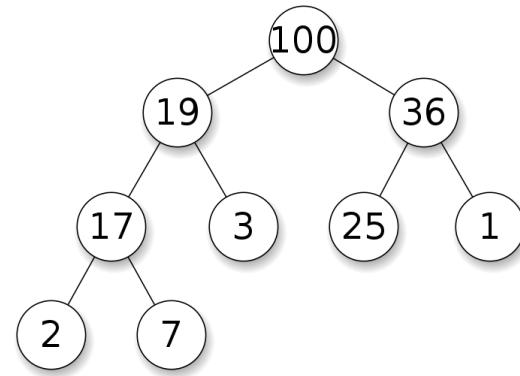
1. todo nó tem no máximo dois filhos
2. "completo" à esquerda
3. valor de um nó é menor que o valor de seus filhos

## Operações:

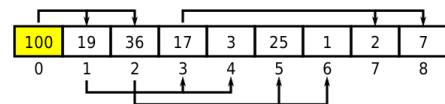
- `INSERE(H, V)`
- `MENOR(H)` devolve o menor valor e o remove

# Max-heap (alternativa)

Tree representation



Array representation



## Propriedades:

1. todo nó tem no máximo dois filhos
2. "completo" à esquerda
3. valor de um nó é maior que o valor de seus filhos

# Representação como array

Dado um nó armazenado no índice  $i$

1. em quais índices estão seus dois filhos?
2. em qual índice está seu pai?

# Representação como array

Dado um nó armazenado no índice  $i$

1. em quais índices estão seus dois filhos?  $2i + 1$  e  $2i + 2$
2. em qual índice está seu pai?  $(i - 1) // 2$

# Como representar as operações?

- INSERE
  - i. colocar no final do heap
  - ii. troca com pai se for menor
  - iii. faz passo 2 até não dar mais
- REMOVE
  - i. troca elemento 0 com último elemento
  - ii. diminui tamanho do min-heap
  - iii. troca raiz com o menor dos filhos até não dar mais

# Melhorando Dijkstra com min-heap

ENQUANTO  $\text{TAM}(h) > 0$  FAÇA

\_, k <- MENOR(h) # pega o com menor dist  
SE k já foi visitado ENTÃO continua loop FIM

PARA CADA VIZINHO  $j$  DE  $k$  FAÇA

```
distK <- dist[k] + P[k, j]
```

SE  $distK < dist[j]$  ENTÃO

```
dist[j] <- distK
```

```
pred[j] <- k
```

```
INSERE(h, (distK, j)) # insere o par (dist, índice),  
                      # usando dist como valor
```

FIM

FIM

FIM

# Melhorando Dijkstra com min-heap

Qual a complexidade de

- INSERE ?
- MENOR ?

# Melhorando Dijkstra com min-heap

Qual a complexidade de

- INSERE ?  $\mathcal{O}(\log N)$
- MENOR ?  $\mathcal{O}(\log N)$

Loop externo roda no máximo  $E$  vezes. (Por que?)

**Total**  $\mathcal{O}(E \log V)$