

Introdução a grafos

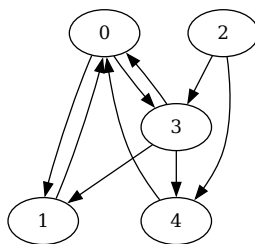
Algoritmos e Estruturas de Dados - 2025/01

Última atualização: 02/04/2025 19:02

Um grafo é um $\mathcal{G} = (V, E)$ contendo dois conjuntos:

- um conjunto $V = \{0 \dots N - 1\}$ de vértices numerados de 0 até $N = |V|$
- um conjunto de arestas (edges) $E = \{(x, y) | x, y \in V; x \neq y\}$ contendo pares de vértices. Toda aresta é **direcionada**.

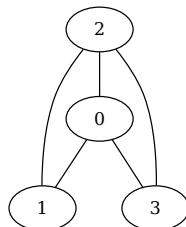
Se nosso grafo tiver pesos temos adicionalmente uma função $w : E \rightarrow \mathcal{R}$ que mapeia cada aresta em E a um número real.



Nessas primeiras atividades iremos praticar as definições básicas de grafos e sua utilização. Esse material é importante para conseguirmos um vocabulário básico a ser usado na disciplina.

Exercício: Qual é o número de vértices e arestas do grafo acima?

Exercício: E para o grafo **não direcionado** abaixo?



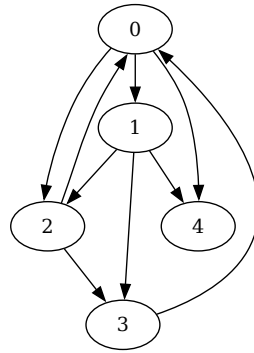
Definições

Em grafos direcionados temos as seguintes definições:

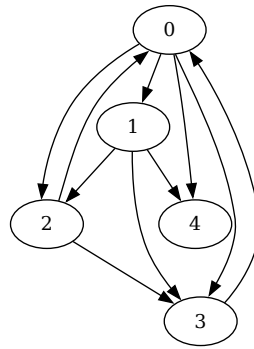
- O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que **chegam** nele
- O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que **saem** dele

Em grafos não direcionados nos referimos somente ao **grau** de um vértice, já que ambos *grau de entrada* e *de saída* são iguais.

Exercício: Circule no grafo abaixo o vértice de **menor grau de entrada**



Exercício: Circule no grafo abaixo o vértice de **maior grau de saída**



Nesta disciplina armazenamos grafos usando **matrizes de adjacências**: uma matriz quadrada $A \in \mathcal{R}^{N \times N}$ com N linhas com a seguinte definição (para grafos sem pesos):

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para grafos com pesos usamos a seguinte definição, em que armazenamos o peso de cada aresta em sua posição correspondente na matriz.

$$A_{i,j} = \begin{cases} w((i,j)) & \text{se } i, j \in E \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Modelagem usando grafos

Agora vamos praticar interpretar problemas “reais” usando grafos. Em cada problema precisamos fazer 4 perguntas básica:

1. o que cada vértice do grafo representa?
2. qual relação entre vértices uma aresta representa?
3. essa relação tem direção ou é sempre simétrica?
4. essa relação tem pesos/preferências ou todas arestas são equivalentes?

Problema: Medir a influência de pessoas em redes sociais é um tema recente dada sua importância em nossa atual Economia da Atenção. Imagine que temos os seguintes dados de log de uma rede social:

- todos nomes de usuários
- posts de cada usuário
- toda vez que um usuário curte um post

Nós vamos querer responder às seguintes perguntas:

1. Como saber quais usuários postaram algo que foi curtido?
2. Como encontrar o usuário com maior número de posts curtidos?
3. Como encontrar o usuário que mais curtiu posts?

Vamos usar grafos para resolver este problema. Levando em conta essas perguntas, responda as questões abaixo.

Exercício: Em nosso grafo, o que seriam os vértices?

Exercício: Em nosso grafo, qual relação arestas entre dois vértices representa?

Exercício: O grafo é direcionado? As arestas tem peso?

Exercício: Considere o log abaixo com as postagens e curtidas de 5 usuários. Ao lado, desenhe o grafo correspondente e escreva sua matriz de adjacências

Usuário 1 fez post #1
Usuário 3 gostou do post #1
Usuário 5 fez post #2
Usuário 2 gostou do post #1
Usuário 3 fez post #3
Usuário 3 gostou do post #2
Usuário 2 gostou do post #3
Usuário 2 gostou do post #2
Usuário 2 fez post #4
Usuário 4 gostou do post #4
Usuário 3 gostou do post #4
Usuário 5 fez post #5
Usuário 5 fez post #6
Usuário 2 fez post #7
Usuário 4 gostou do post #3
Usuário 1 gostou do post #5
Usuário 1 gostou do post #6

Vamos agora retomar as perguntas originais. Responda às questões abaixo usando a matriz de adjacências como base.

Exercício: Como saber quais usuários postaram algo que foi curtido?

Exercício: Como encontrar o usuário com maior número de posts curtidos?

Exercício: Como encontrar o usuário que mais curtiu posts?

Isso conclui nossa introdução a grafos! Com isso já temos um vocabulário básico para abordar problemas em grafos e vimos um exemplo de como olhar para um problema e representar seus dados usando grafos.