

Caminhos mínimos em grafos com pesos

Algoritmos e Estruturas de Dados

Busca em Profundidade (DFS)

- Algoritmo recursivo curto que encontra todos os vértices acessíveis a partir da raiz
- Útil para problemas como
 - identificar/contar componentes conexos
 - encontrar ciclos
 - ordenação topológica

Caminhos mínimos

Dados vértices v e w , encontrar o caminho de menor tamanho entre eles.

- Busca em Largura -> grafos sem pesos
- E se tem pesos?

Think-pair-share

Teremos uma sequência de perguntas sobre grafos com pesos

1. reservem um lugar para anotar suas ideias
2. escolham uma dupla
3. para cada pergunta, 30s para pensar em uma resposta
4. 30s para discutir com sua dupla
5. 1m para compartilhar ideias na sala

A busca em largura funciona em grafos com pesos?

Se sim explique, se não dê um contra-exemplo

E se modificássemos a BFS para pegar as menores arestas primeiro?

Isso funciona? Se sim explique, se não dê um contra-exemplo

E se modificássemos a BFS para pegar os vértices mais próximos primeiro?

Isso funciona? Se sim explique, se não dê um contra-exemplo

Vamos pro handout!

15 min

Conclusões?

Algoritmo de Dijkstra

- menor caminho em grafos com pesos não negativos
- ideia central: **iterativamente pegar o vértice mais próximo da fonte**
- ao processarmos um vértice a distância até ele não muda mais

Algoritmo de Dijkstra

Entradas:

- $G = (V, E)$ um grafo direcionado com pesos não negativos armazenados em uma matriz quadrada P
- $s, t \in V$ dois vértices (fonte e destino)

Saída:

- array `path` com o caminho de s até t ou \emptyset se não houver caminho
- tamanho do caminho

Algoritmo de Dijkstra

Auxiliares:

- arrays `pred` e `dist` de tamanho $|V|$ inicializado com `-1` e $-\infty$
- conjunto `h` contendo vértices já alcançados mas ainda não processados

Veremos que o conjunto `h` é essencial para obtermos um algoritmo rápido!

Algoritmo de Dijkstra

```
dist[s] <- 0  
pred[s] <- s  
INSERE s EM h
```

```
PARA i=1 até |V| FAÇA  
    k <- elemento em h com menor dist
```

```
    PARA CADA VIZINHO j DE k FAÇA  
        distK <- dist[k] + P[k, j]  
        SE distK < dist[j] ENTÃO  
            dist[j] <- distK  
            pred[j] <- k  
            INSERE j EM h # não faz nada se já estiver em h
```

```
    FIM
```

```
FIM
```

```
FIM
```

```
PREENCHA path USANDO O ARRAY pred  
DEVOLVA path, dist[t]
```

Algoritmo de Dijkstra

- Complexidade depende da operação elemento em h com menor dist
 - guardar todos em um vetor dinâmico e pegar o menor é $\mathcal{O}(V)$
 - faço isso no máximo V vezes
- Calculamos `distK` no máximo `E` vezes

Total $\mathcal{O}(E + V^2) = \mathcal{O}(V^2)$

Dá para fazer melhor?

Min-heap

Propriedades:

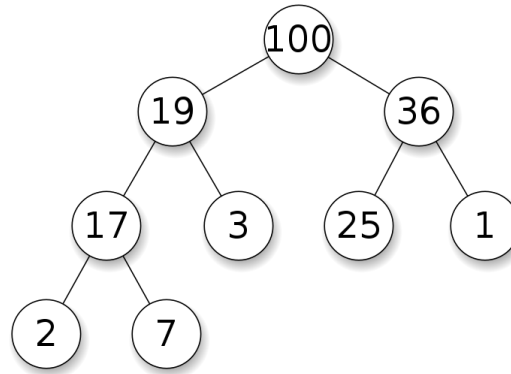
1. todo nó tem no máximo dois filhos
2. "completo" à esquerda
3. valor de um nó é menor que o valor de seus filhos

Operações:

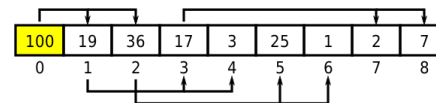
- `INSERE(H, V)`
- `MENOR(H)` devolve o menor valor e o remove

Max-heap (alternativa)

Tree representation



Array representation



Propriedades:

1. todo nó tem no máximo dois filhos
2. "completo" à esquerda
3. valor de um nó é maior que o valor de seus filhos

Representação como array

Dado um nó armazenado no índice i

1. em quais índices estão seus dois filhos?
2. em qual índice está seu pai?

Representação como array

Dado um nó armazenado no índice i

1. em quais índices estão seus dois filhos? $2i + 1$ e $2i + 2$
2. em qual índice está seu pai? $(i - 1) // 2$

Como representar as operações?

- INSERE
 - i. colocar no final do heap
 - ii. troca com pai se for menor
 - iii. faz passo 2 até não dar mais
- REMOVE
 - i. troca elemento 0 com último elemento
 - ii. diminui tamanho do min-heap
 - iii. troca raiz com o menor dos filhos até não dar mais

Melhorando Dijkstra com min-heap

```
ENQUANTO TAM(h) > 0 FAÇA

    _, k <- MENOR(h) # pega o com menor dist
    SE k já foi visitado ENTÃO continua loop FIM

    PARA CADA VIZINHO j DE k FAÇA
        distK <- dist[k] + P[k, j]
        SE distK < dist[j] ENTÃO
            dist[j] <- distK
            pred[j] <- k
            INSERE(h, (distK, j)) # insere o par (dist, índice),
                                # usando dist como valor

    FIM
FIM
FIM
```

Melhorando Dijkstra com min-heap

Qual a complexidade de

- INSERE ?
- MENOR ?

Melhorando Dijkstra com min-heap

Qual a complexidade de

- INSERE ? $\mathcal{O}(\log N)$
- MENOR ? $\mathcal{O}(\log N)$

Loop externo roda no máximo E vezes. (Por que?)

Total $\mathcal{O}(E \log V)$