P2 - 2020.1 - 18/11/19

1) $\lambda_R = 200\,s \rightarrow 25°C = 298{,}15\,K$ $\qquad G = 5.10^9\,Pa$

$\eta_0 = 10\,MPa \rightarrow 50°C = 323{,}15\,K$ $\qquad Q = 60k\,J/mol$

$R = 8{,}314\,J/mol\,K$

a) $\lambda_R\,(50°C) = ?$

Primeiramente vamos descobrir η_0 p/ $T = 25°C$:

$$\lambda_R = \frac{\eta}{G} = 200\,s \qquad \eta = \lambda_R\,G$$

$$\eta = \eta_0\, e^{\frac{Q}{RT}}$$

$$\lambda_R = \frac{\eta_0}{G}\, e^{\frac{Q}{RT}}$$

$$\eta_0 = \frac{\lambda_R\,G}{e^{Q/RT}} = \frac{(200\,s)\,(5.10^9\,Pa)}{e^{\left(\frac{60k\,J/mol}{\left(\frac{8{,}314\,J}{mol\,K}\right).(298{,}15\,K)}\right)}}$$

$$\eta_0 = 30{,}752$$

Beleza, agora iremos utilizar a mesma formulinha, mas temos os valores de η_0, G, Q, R e T e queremos descobrir λ_R (50°C), ou seja, o tempo de relaxação do polímero à 50°C (323,15K).

$$\lambda_R = \frac{\eta_0}{G}\, e^{\frac{Q}{RT}} = \frac{30{,}752}{5.10^9}\, e^{\frac{60\,000\,J/mol}{\left(8{,}314\frac{J}{mol}\right)(323{,}15\,K)}}$$

$$\boxed{\lambda_R = 30{,}745\,s}$$

b) A deformação total em $t = 3$ horas

Primeiramente, devemos analisar atentamente o enunciado da questão, que diz que o polímero segue o modelo de Maxwell e foi submetido a uma tensão constante. Com isso, pode-se dizer que se trata do fenômeno da fluência ($\tau = \tau_0 = cte$)

$\tau_0 = 10 MPa = 10 \cdot 10^6 Pa$

Fluência: $\gamma = \frac{\tau_0}{G} + \frac{\tau_0}{\eta} t$

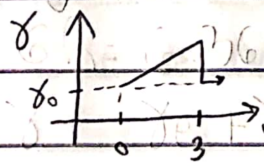
$t = 3 h = 3 \cdot 3600 s$
$t = 10800 s$

$\eta = \lambda_R G$

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G} + \frac{\tau_0}{\lambda_R G} t = \frac{10 \cdot 10^6 Pa}{5 \cdot 10^9 Pa} + \frac{10 \cdot 10^6 Pa}{(30{,}745 s)(5 \cdot 10^9 Pa)} (10800 s)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\gamma = 0{,}7045 \\ \gamma = 70{,}45\%\end{gathered}}$$

c) Deformação remanescente (γ_p) 6 horas após a remoção da tensão. Primeiramente devemos analisar o gráfico $\gamma \times t$.



Com isso, vemos que após 3h a tensão foi removida e γ retornou ao seu estado inicial.

$$\gamma_p = \frac{\tau_0}{\eta} t = \frac{10 \cdot 10^6}{(30{,}745 s)(5 \cdot 10^9 Pa)} \cdot (10800 s)$$

$\gamma_p = 0{,}7025$

$\gamma_p = 70{,}25\%$

c) Continuação

Atenção!!!

Como após 3h, γ se mantém constante e igual a γ_0, após 6h também teremos o mesmo valor de γ (3h). Por isso, na questão usamos $t = 3h$ (10800 s) e não $t = 6h$.

d) Deformação total em $t=3h$ p/ modelo KV

3h = 10800 s

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G}\left(1 - e^{\left(\frac{-t}{\lambda_R}\right)}\right)$$

$$\gamma = \frac{10 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^9}\left(1 - e^{\left(\frac{-10800\ s}{30,745\ s}\right)}\right)$$

$$\gamma = 0,002$$

OBS:

e) Pelo gráfico, já vemos que esse valor deve dar aproximadamente zero.

Iremos considerar $t = 3\ h = 10800\ s$ e $\gamma_0 = 0,002$

$$\gamma = \gamma_0\, e^{-\left(\frac{t}{\lambda_R}\right)} = 0,002\, e^{-\left(\frac{10800}{30,745}\right)}$$

$$\boxed{\gamma = 0}$$

② $\frac{F_f}{F_m} = 80$ $V_f \leq 0,50$

Condição de Contorno:

$V_f + V_m = 1$

Iremos calcular V_f para todos os casos $V_m = 1 - V_f$

(i) Carbono: $\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f}{E_m} \cdot \frac{V_f}{V_m}$

$$80 = \frac{480\,GPa}{5\,GPa} \cdot \frac{V_f}{V_m} \Rightarrow \frac{V_f}{V_m} = \frac{80 \cdot 5\,GPa}{480\,GPa}$$

$$\frac{V_f}{V_m} = 0,833$$

$$V_m = 1 - V_f$$

$$\frac{V_f}{1-V_f} = 0,833$$

$$V_f = 0,833 - 0,833\,V_f$$

$$V_f = 0,45$$

(ii) Vidro

$$\frac{V_f}{1-V_f} = \frac{F_f}{F_m} \cdot \frac{E_m}{E_f} = \frac{80 \cdot 5\,GPa}{90\,GPa} = 4,45$$

$$V_f = 4,45 - 4,45\,V_f$$

$$V_f = 0,8165$$

Logo, descartamos a possibilidade da utilização da fibra de vidro, uma vez que V_f não obedece a condição inicial ($V_f \leq 0,50$)

(2) Cont.

(iii) Aramida

$$\frac{V_f}{V_m} = \frac{V_f}{1-V_f} = \frac{F_f}{F_m} \frac{E_m}{E_f} = 80 \frac{5\ GPa}{60\ GPa} = 6,667$$

$$V_f = 6,667 - 6,667 V_f$$
$$V_f = 0,867$$

Portanto, como a fibra de aramida também não satisfaz a condição inicial ($V_f \leq 0,5$), iremos projetar o compósito com fibra de carbono e resina poliéster, pois a fibra de carbono terá $V_f = 0,45 < 0,5$.

b) Longitudinal

b) $E_c = E_m V_m + E_f V_f$ (Regra das misturas)

$V_m + V_f = 1 \Rightarrow V_m = 1 - V_f = 0,55$

$$E_c = 5G(0,55) + 480\ G\ (0,45)$$

$$\boxed{E_c = 218,75\ GPa}$$

Transversal

$$\frac{1}{E_c} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}$$

$$\frac{1}{E_c} = \frac{0,55}{5G} + \frac{0,45}{480G} \Rightarrow \boxed{E_c = 9,0141\ G\ Pa}$$

/96

② cont.

c) Regra da mistura

$\rho_c = V_m \rho_m + V_f \rho_f$

Pela tabela, temos os valores de ρ_m e ρ_f.

$\rho_m = 1,2\ g/cm^3$ $\rho_f = 1,54\ g/cm^3$

$\rho_c = (0,55)(1,2\ g/cm^3) + (0,45)(1,54\ g/cm^3)$

$\boxed{\rho_c = 1,353\ g/cm^3}$

d) $E_c = E_m V_m + E_{f1} V_{f1} + E_{f2} V_{f2} + E_{f3} V_{f3}$

$V = V_m = V_{f1} = V_{f2} = V_{f3}$

Pela condição de contorno, temos que:

$\Sigma V = 1 \Rightarrow V_m + V_{f1} + V_{f2} + V_{f3} = 1$

$4 V_m = 1$

$V_m = 0,25 = V_{f1} = V_{f2} = V_{f3}$

$E_c = (5\ GPa)(0,25) + (480\ GPa)(0,25) + (90G)(0,25) + (60G)(0,25)$

$\boxed{E_c = 158,75\ GPa}$

(3) Matriz poliéster ($E_m = 10\,GPa$) e fibra de carbono ($E_f = 380\,GPa$)

$A_T = 120\,mm^2$
$\sigma = 250\,MPa$

a) $\frac{F_f}{F_m} = 60$ $\qquad \frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f}{E_m} \cdot \frac{V_f}{V_m}$

$$\frac{V_f}{V_m} = \frac{F_f}{F_m} \frac{E_m}{E_f} = 60 \left(\frac{10\,GPa}{380\,GPa}\right) = 1{,}58$$

Condição de contorno: $V_f + V_m = 1$
$V_m = 1 - V_f$

$$\frac{V_f}{1 - V_f} = 1{,}58 \Rightarrow V_f = 1{,}58 - 1{,}58\,V_f$$
$$\boxed{V_f = 0{,}612}$$

b) $F_f = 60\,F_m$ $\qquad F_c = F_f + F_m$
$F_c = 61\,F_m$

$$\sigma = \frac{F_c}{A} \Rightarrow F_c = 250 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-6}$$
$$F_c = 30\,000$$

$$F_m = \frac{30\,000}{61} = 491{,}8\,N$$

$$F_f = F_c - F_m = 29508{,}196\,N$$

③ c) $\sigma_R = 2200\ MPa$ $A_c = 120\ mm^2$

$\sigma_f = ?$ $\sigma_F = \dfrac{F_f}{A_{Tf}}$

$A_{Tf} = A_c \cdot V_f = 120 \cdot 0{,}612 = 73{,}44\ mm^2$

$F_F = (2200\ MPa)(73{,}44\ mm^2)$

$F_F = 161\,568\ N$

$\dfrac{F_f}{F_m} = 60$ $F_m = \dfrac{F_f}{60} = 2692{,}8\ N$

$\sigma_c = \dfrac{F_f + F_m}{A_c} = \dfrac{161568 + 2692{,}8}{120 \cdot 10^{-6}} = 1368{,}84 \cdot 10^6\ Pa$

$\sigma_c = 1368{,}84\ MPa$

d) $A_m = A_c \cdot V_m = 120 \cdot (1 - 0{,}612) = 46{,}56\ mm^2$

$V_m = 1 - V_f = 1 - 0{,}612$

$\sigma_m = \dfrac{F_m}{A_m} = \dfrac{2692{,}8\ N}{46{,}56 \cdot 10^{-6}\ m^2} = 57{,}84\ MPa$

4) $E = 300\,GPa$ $T_0 = 25°C = 298{,}15\,K$

$\sigma_R = 1100\,MPa$ $T = 1200°C = 1473{,}15\,K$

40 cm de comprimento $= L_0$

$\Delta L = 0{,}9\,mm$

a) $\Delta L = L_0\,\alpha\,\Delta T$ $e = \dfrac{\Delta L}{L_0}$

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta T} = \frac{0{,}9}{400(1473{,}15 - 298{,}15)}$$

$$\alpha = 1{,}915 \cdot 10^{-5} = 1{,}915 \cdot 10^{-6}/K$$

b) $\sigma = E \cdot e = (300\,GPa)\left(\dfrac{0{,}9}{400}\right) = -0{,}675\,GPa$

★ATENÇÃO!!!

$\sigma < 0$ pq a soma das deformações deve ser 0. Logo, a deformação térmica + a deformação da força de reação tem que dar 0.

c) $\sigma_{max} = \sigma_R = E\,\alpha\,\Delta T$ → como é variação, ñ precisei passar p K

$$1100 \cdot 10^6 = 300 \cdot 10^9 \cdot (1{,}915) \cdot 10^{-6}\,(T_f - 25)$$

$$T_f - 25 = 25{,}0099°C$$

$$T_f = 1{,}9147 \cdot 10^3 + 25$$

$$T_f = 1914{,}7 + 25$$

$$T_f = 1939{,}7°C$$

d) $\Delta T = 350 - 1200 = -850\,K$

na superfície

$$\varepsilon = \alpha\,\Delta T = (1{,}915 \cdot 10^{-6}/°C)(-850\,K) = -1{,}628 \cdot 10^{-3}$$