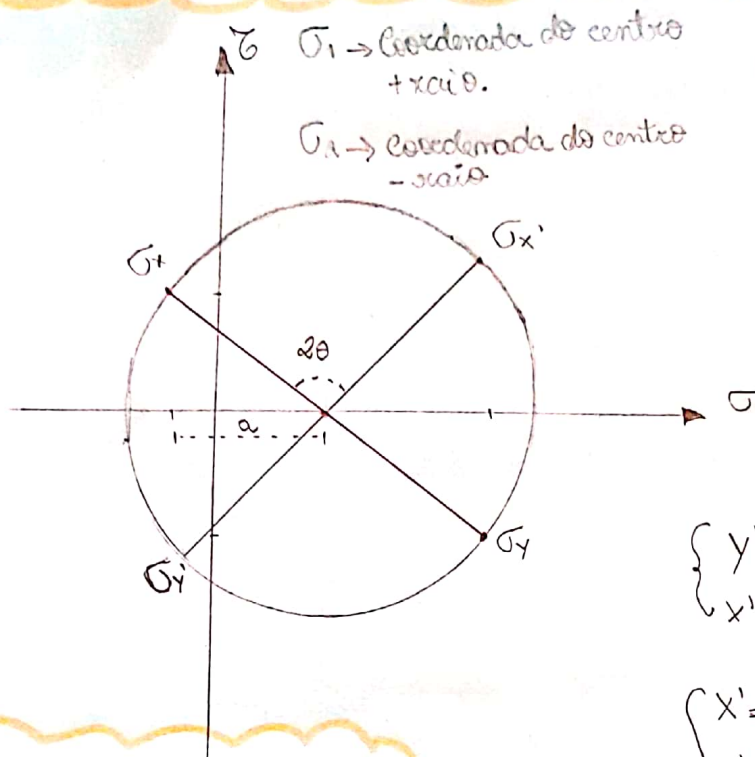


Círculo de Mohr e análise de tensões



$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$R = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\begin{cases} y' = y + R \cos \alpha \\ x' = x + R \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + a \cos \alpha + \tau \sin \alpha \\ y' = y - a \sin \alpha + \tau \cos \alpha \\ \alpha = 2\theta \end{cases}$$

Análise de tensões

$$\begin{cases} \sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{\sigma_{med}} + \underbrace{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}}_{\tau_{max}} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \\ \theta_s = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right) \end{cases}$$

$$\left\{ \tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \right\}$$

$$\theta_{p1} + 90^\circ = \theta_{p2}$$

Círculo de Mohr:

- * Ao girar o elemento no sentido horário, a um ângulo θ , o círculo gira no sentido anti-horário, a um ângulo 2θ .

* Passos ordenados do círculo de Mohr:

Tace $x \rightarrow (\sigma_x, \tau_{xy})$ Se aqui for positivo, a outra coordenada será negativa e vice-versa.

Tace $y \rightarrow (\sigma_y, -\tau_{xy})$

* Tridimensional

- Ao se desenhava o círculo de Mohr no estado tridimensional de tensões, analisa-se os "3 elementos", \rightarrow infinitesimais se os mesmos 1 deles possui τ representado e algum outro não tiver, deve-se olhar os que não possuem τ representado e calcular σ_1 e σ_2 do que tem do que sobrou (que possui τ representado), depois τ correspondente a cada um e substituir σ_1 para um e σ_2 para o outro nos círculos que não tinham τ .

\rightarrow Se σ_1 maior σ positivo
 \rightarrow Se σ_2 : $\sigma_{max}, \sigma_{int}$ (tensão normal interna) e σ_{min} .

* Tensão máxima absoluta

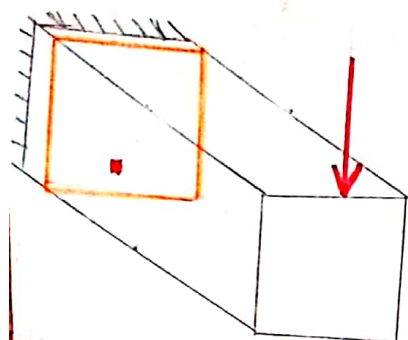
- Cada circunferência apresentada na imagem é um círculo de Mohr, cada um possui um τ_{max} e a maior dessas tensões é chamada τ_{max} absoluta.

$$\tau_{max}^{ABS} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

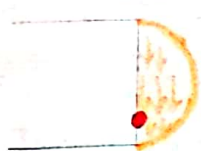
- Separa-se (no círculo de Mohr tridimensional) em planos $(xy, yz$ e $xz)$.

Análise de tensões

- * $(-\theta)$ elemento gira no sentido horário.
- * $(+\theta)$ elemento gira no sentido anti-horário.



→ distribuição da tensão cisalhante para a seção retangular



$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t}$$

Tensão cisalhante gerada pelo esforço cortante

→ distribuição da tensão normal para a seção retangular



$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I}$$

Tensão normal gerada pelo momento causado pelo esforço cortante.

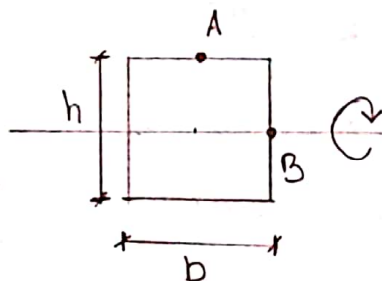
* Cisalhamento:

τ → tensão cisalhante

V → Esforço cortante (módulo ou mão)

I → momento de inércia (calculado em relação ao centróide da seção em torno do eixo que o momento calculado está em torno)

$$I_{\text{retangular}} = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow$$



Se o ponto fosse "A", "b" e "h" estariam em posições trocadas.

$$I_{\text{tubular/circular}} = I_x = I_y = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64}$$

Teorema de Steiner → $I' = I_o + Ad^2$

eixo 2 → eixo a qual se precisa calcular o "I" (momento de inércia)

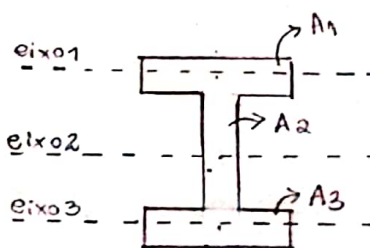
I_1' → "I" de A_1 em relação ao eixo 2

I_o' → "I" de A_1 em relação ao eixo 1

A → A_1

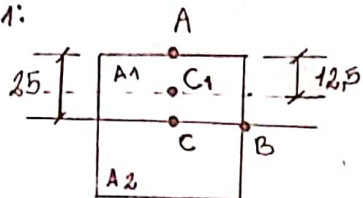
d → distância do eixo 1 ao eixo 2

Obs: calcular-se eixo 1 em relação ao 1 e eixo 3 também, depois soma. (3)



Q →

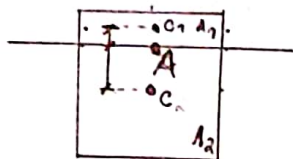
ex 1:



$Q_B = (\text{distância do centróide da área 1}) A_1$
(ao centróide da área toda)

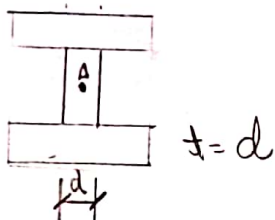
$$Q_B = 12,5 \cdot A_1$$

ex 2:



$$Q_A = d(c_1, c) \cdot A_1$$

$t \rightarrow$ Espessura (comprimento da seção encima do ponto).



• Cisalhamento causado pelo momento torçor: para seções circulares.

$$\tau = \frac{T \ell}{J}$$

$T \rightarrow$ momento torçor = torque

$\ell \rightarrow$ distância do centro da seção até o ponto de análise.

$$J = \frac{\pi (d_e^4 - d_i^4)}{32}$$

$J \rightarrow$ momento de inércia polar ($I_x + I_y$)

• Tensão normal

$M \rightarrow$ momento

$c \rightarrow$ distância do ponto estudado até a linha neutra (no centróide)

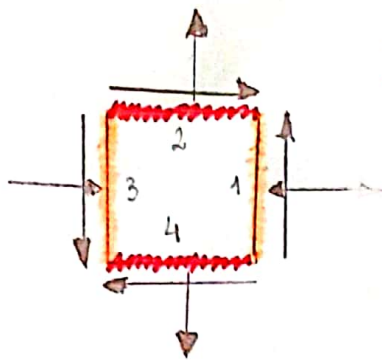
• Tensão normal causada pelo esforço normal

$$\sigma_n = \frac{P}{A}$$

$P \rightarrow$ carga

$A \rightarrow$ área

• Elemento infinitesimal e representação:



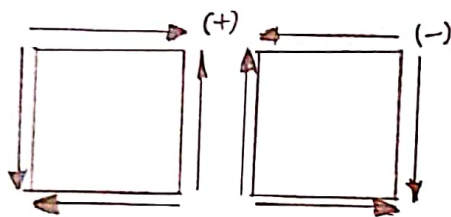
→ Pode ser escolhido de face x
 → Pode ser escolhido de face y

Se 1 for face x e 2 face y:

$$\sigma_x < 0$$

$$\sigma_y > 0$$

$$\tau_{xy} > 0$$



→ Sendo face 1 a face x escolhida

* Olhe as distribuições normal e cisalhante e a posição do elemento, para fazer a representação das tensões.

* Elemento gira no sentido horário a um ângulo θ , o círculo de Mohr gira no sentido anti-horário a um ângulo 2θ .

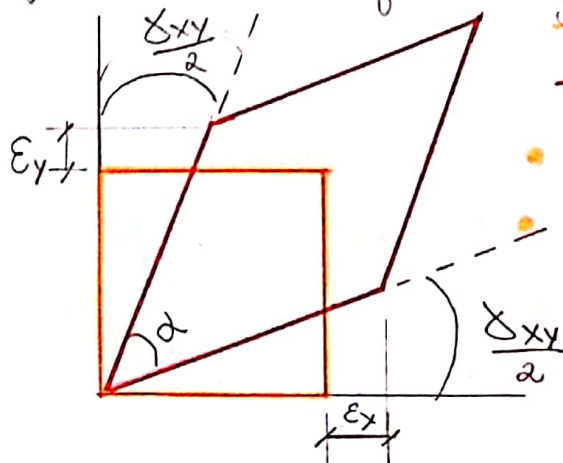
* Quando não há tensão representada, esta é igual a zero.

Se $\tau_{xy} = 0$, σ_x e σ_y são principais;

Se $\sigma_x = \sigma_y$ então τ é máximo

Isso vale também para as deformações (ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy}).

Transformação de deform



Elemento infinitesimal

Elemento infinitesimal deformado

σ gera deformação

τ gera distorção.

$\gamma_{xy} \rightarrow$ distorção

$$\gamma_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Se α for agudo ($< 90^\circ$) $\rightarrow (+) \gamma$

Se α for obtuso ($> 90^\circ$) $\rightarrow (-) \gamma$

$$\gamma_{xy} = 90 - \left(\begin{array}{l} \text{ângulo do vértice do elemento} \\ \text{infinitesimal deformado } (\alpha) \end{array} \right)$$

Usam-se as mesmas equações de σ e τ mostradas antes em "análise de tensões", entretanto, no lugar de σ tem ϵ e no de τ tem $\gamma/2$:

$$\sigma_x \rightarrow \epsilon_x \quad \tau_{xy} \rightarrow \gamma_{xy}/2$$

$$\sigma_{x'} \rightarrow \epsilon_{x'} \quad \tau_{xy'} \rightarrow \gamma_{xy'}/2$$

$$\sigma_y \rightarrow \epsilon_y$$

$$\sigma_{y'} \rightarrow \epsilon_{y'}$$

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta)$$

$$\frac{\gamma_{xy'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta)$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\theta) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta)$$

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \left[\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \left[\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta_s = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}} \right)$$

$\theta \rightarrow$ ângulo de rotação do elemento.

Se $\theta = 0$ há torção, mas não há rotação.

- Para γ_{max} a primeira coisa a se fazer é achar θ_s
- Usar o θ_s na fórmula de γ_{xy}
- Calcular $\gamma_{xy max}$

Se não for para desenhos posso calcular usó o γ_{xy} .

Roteta de deformações

$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a$$

$$\epsilon_b = \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b$$

$$\epsilon_c = \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c$$

→ Resolve o sistema e acha ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy}

Lei de Hooke generalizada

Quando tem σ , ϵ , ν , entre outros envolvidos

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Crterios de falha

- Critério de Tresca (materiais ducteis) (teoria da tensão do cisalhamento max.)
Num ensaio de tração axial a falha se dará num plano a 45° da seção transversal.

Se;

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1(+) \text{ e } \sigma_2(+) \rightarrow \tau_{\max \text{ abs.}} = |\sigma_1| \leq \sigma_e \\ \sigma_1(-) \text{ e } \sigma_2(-) \rightarrow \tau_{\max \text{ abs.}} = |\sigma_2| \leq \sigma_e \\ \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ com sinais opostos} \rightarrow \tau_{\max \text{ abs.}} = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_e \end{array} \right\} \tau_{\max} = \frac{\sigma_e}{2}$$

Satisfazendo estas condições, não haverá falha.

- Critério de Von Mises (teoria da energia de distorção máxima) (materiais dúcteis)

Relaciona a energia de distorção do objeto a do material num ensaio de tração axial.

$$\sigma_e \geq \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_e \geq (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2} \rightarrow \text{Para tensão plana, } \sigma_3 = 0$$

Satisfazendo a condição, não haverá falha.

Ilhaz sempre os pontos pontos para análise \rightarrow constante máxima e momento máximo

Exatamente é necessário fazer o diagrama para avaliar o pior ponto em vez de fazer a distribuição de tensões.

$\tau_{\max} = V$ igual a zero

Tensão de flexão $\rightarrow \sigma$ causado pelo momento fletor $\left(\frac{Mc}{I} \right)$.
medidas da seção transversal arredondadas para cima.

Fluxo de cisalhamento (q)

Questões que pedem distância entre pregos, por exemplo. (8)

- distância achada será arredondada para cima, se necessário, constante admissível ou força de cisalhamento.

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$S = \frac{V_{adm}}{q}$$

Projeto de eixo

Eixos terão momento torçor (predominante) e momento fletor.

- Olhar os casos críticos.

- Tensões cisalhantes num eixo são máximas nas extremidades.
- τ_{max} pelo momento fletor é máxima nas extremidades de cima e de baixo.

→ Portanto, as extremidades de cima e de baixo são as zonas mais críticas.

- Após fazer a análise de falha (Tresca e von Mises), tomar-se o valor mínimo do raio para que não haja falha, assim se pode obter a menor seção possível.
- Caso se for arredondar, for-se para um valor maior (em favor da segurança).

Tresca

$$r = c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{adm}} \sqrt{M^2 + T^2} \right)^{1/3}$$

von Mises

$$r = c = \sqrt[6]{\frac{16M^2 + 12T^2}{\pi^2 \sigma_{adm}^2}}$$

c → Se altera use houver mudança do eixo em que o momento estaciona.

De questões...

M_1 → momento em torno do eixo z.

M_2 → momento em torno do eixo y.

$M = (M_1^2 + M_2^2)^{1/2}$ → soma vetorial para usar os dois ao mesmo tempo.

Fator de segurança

Coef. de segurança $\rightarrow \frac{\text{carga}}{\text{resist. admissível}}$

$$FS = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma_{adm}} \rightarrow \text{qualquer } \sigma$$

Se $FS < 1 \rightarrow$ aprovado

$FS > 1 \rightarrow$ reprovado (falha)