UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

2ª PROVA DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS VII – 2020-1

1ª Questão (2,5 pontos) – Para a viga da figura, determinar a equação da curva elástica e o deslocamento e rotação no ponto *C*. (Figura 1)

2ª Questão (2,5 pontos) – Determine as reações nos apoios e trace os diagramas de esforço cortante e momento fletor. *EI* = constante. (Figura 2)

3ª Questão (2,5 pontos) – O suporte *ABC* da figura suporta um carregamento vertical *W* na junta *B*. Cada membro é um tubo circular esbelto de aço (E = 200 GPa) com diâmetro externo de 100 mm e espessura da parede de 6,0 mm. A distância entre os suportes é 7,0 m. Determine o valor crítico de *W*. (Figura 3)

4ª Questão (2,5 pontos) – A estrutura com a forma de L é constituída de dois segmentos, cada um com comprimento *L* e rigidez à flexão *EI*. Se ela é submetida a uma carga uniformemente distribuída conforme a figura determine o deslocamento horizontal da extremidade C. (Figura 4)

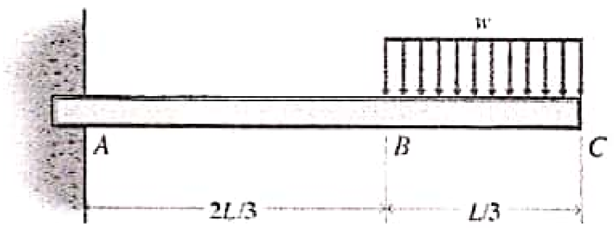


Figura 1

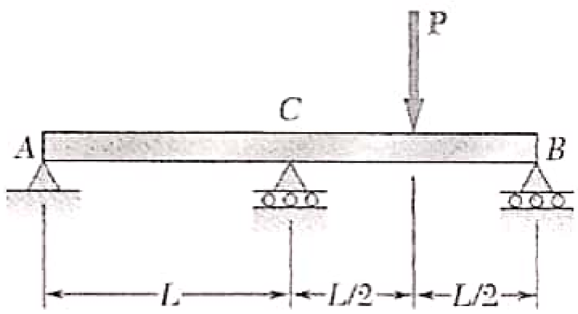


Figura 2

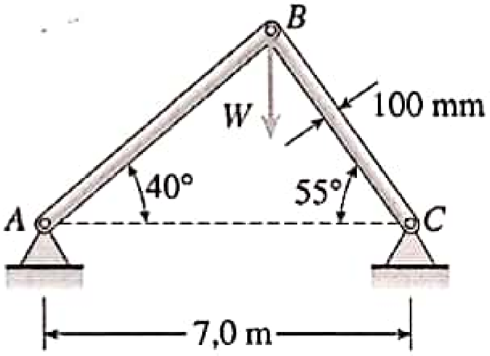


Figura 3

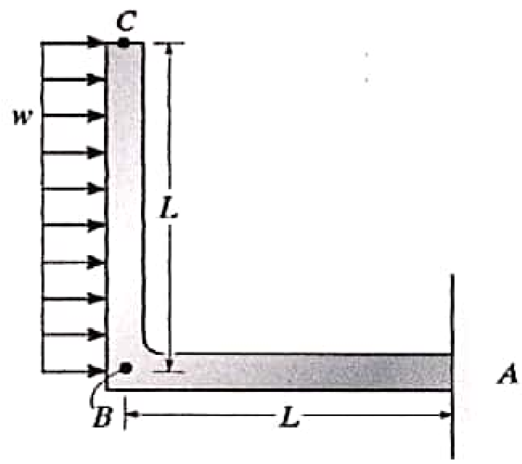
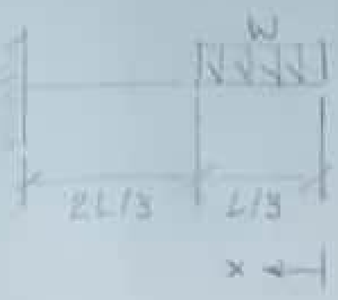


Figura 4

1)



$$w(x) = w\langle x-0\rangle^0 - w\langle x - L/3\rangle^0$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$$

$$V = -w\langle x-0\rangle^1 + w\langle x - L/3\rangle^1$$

$$M = -\frac{w}{2}\langle x-0\rangle^2 + \frac{w}{2}\langle x - L/3\rangle^2$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{w}{2}\langle x - L/3\rangle^2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w}{6}x^3 + \frac{w}{6}\langle x - L/3\rangle^3 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w}{24}x^4 + \frac{w}{24}\langle x - L/3\rangle^4 + C_1x + C_2$$

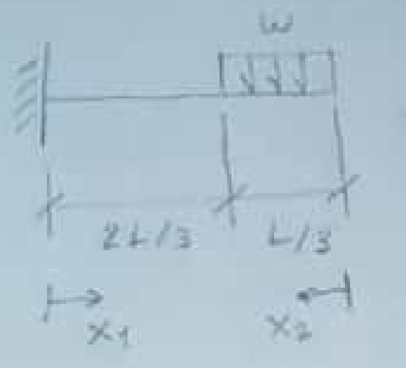
$$\frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow x = L \rightarrow C_1 = -\frac{4wL^3}{81} + \frac{w}{6}L^3$$

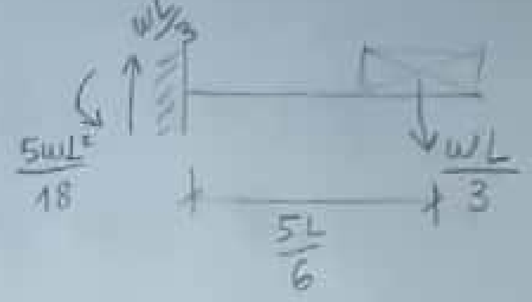
$$v = 0 \rightarrow x = L \rightarrow C_2 = -\frac{2wL^4}{243} + \frac{wL^4}{24} - C_1L$$

rotação $= \left.\frac{dv}{dx}\right|_0 = C_1 = 0{,}117\, wL^3/EI$

deslocamento $= v(0) = C_2 = -8{,}38 \cdot 10^{-2}\, wL^4/EI$

Digitalizado com CamScanner





$$M(x_1) = -\frac{5wL^2}{18} + \frac{wL}{3}x_1 \qquad M(x_2) = -\frac{w x_2^2}{2}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx_1^2} = -\frac{5wL^2}{18} + \frac{wL}{3}x_1 \qquad EI\frac{d^2v}{dx_2^2} = -\frac{w x_2^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx_1} = -\frac{5wL^2}{18}x_1 + \frac{wL}{6}x_1^2 + C_1 \qquad EI\frac{dv}{dx_2} = -\frac{w x_2^3}{6} + C_1'$$

$$EI\,v = -\frac{5wL^2}{36}x_1^2 + \frac{wL}{18}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad EI\,v = -\frac{w x_2^4}{24} + C_1'x_2 + C_2'$$

$$\frac{dv}{dx_1} = 0 \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$v = 0 \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{dv}{dx_1} = -\frac{dv}{dx_2} \rightarrow x_1 = \frac{2L}{3} \wedge x_2 = \frac{L}{3}$$

$$-\frac{5wL^2}{18}\cdot\frac{2L}{3} + \frac{wL}{6}\cdot\frac{4L^2}{9} = \frac{w}{6}\frac{L^3}{27} - C_1' \rightarrow C_1' = \frac{19wL^3}{162}$$

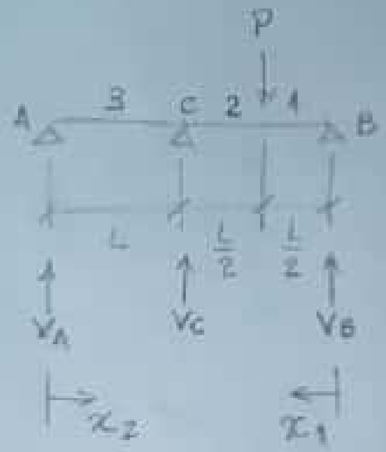
$$v(x_1) = v(x_2) \rightarrow x_1 = \frac{2L}{3} \wedge x_2 = \frac{L}{3}$$

$$-\frac{5wL^2}{36}\frac{4L^2}{9} + \frac{wL}{18}\frac{8L^3}{27} = -\frac{w}{24}\frac{L^4}{81} + \frac{19wL^3}{162}\frac{L}{3} + C_2' \rightarrow C_2' = -\frac{163}{1944}wL^4$$

$$\text{rotação} = \left.\frac{dv}{dx_2}\right|_0 = C_1' = 0{,}117\,wL^3/EI$$

$$\text{deslocamento} = v(x_2 = 0) = C_2' = -8{,}38\cdot10^{-2}\,wL^4/EI$$

2)



Método da integração

$P = V_A + V_B + V_C$ (1)

$\sum M_A = 2L \cdot V_B + L \cdot V_C - P \cdot \frac{3L}{2} = 0$ (2)

$M(x_1)_1 = V_B \cdot x_1$

$M(x_1)_2 = V_B \cdot x_1 - P(x_1 - L/2)$

$M(x_2)_3 = V_A \cdot x_2$

Trecho 1:

$EI\frac{dv_1^2}{dx_1^2} = V_B \cdot x_1$

$EI\frac{dv_1}{dx_1} = V_B \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1$

$EIv_1 = V_B \cdot \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2$

Trecho 2:

$EI\frac{dv_2^2}{dx_1^2} = V_B \cdot x_1 - Px_1 + \frac{PL}{2}$

$EI\frac{dv_2}{dx_1} = V_B \cdot \frac{x_1^2}{2} - \frac{Px_1^2}{2} + \frac{PL}{2}x_1 + C_1'$

$EIv_2 = V_B \cdot \frac{x_1^3}{6} - \frac{Px_1^3}{6} + \frac{PLx_1^2}{4} + C_1' x + C_2'$

Trecho 3:

$EI\frac{dv_3^2}{dx_2^2} = V_A \cdot x_2$

$EI\frac{dv_3}{dx_2} = V_A \cdot \frac{x_2^2}{2} + C_1''$

$EIv_3 = V_A \cdot \frac{x_2^3}{6} + C_1'' x_2 + C_2''$

$v_1 = 0 \to x_1 = 0 \to C_2 = 0$

$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_1} \to x_1 = L/2 \to V_B \cdot \frac{L^2}{8} + C_1 = V_B \cdot \frac{L^2}{8} - \frac{PL^2}{8} + \frac{PL^2}{4} + C_1'$

$v_1 = v_2 \to x_1 = L/2 \to V_B \cdot \frac{L^3}{48} + \frac{L}{2}C_1 = \frac{V_B \cdot L^3}{48} - \frac{PL^3}{48} + \frac{PL^3}{16} + \frac{L}{2}C_1' + C_2'$

$v_2 = 0 \to x_1 = L \to 0 = V_B\frac{L^3}{6} - \frac{PL^3}{6} + \frac{PL^3}{4} + LC_1' + C_2'$

$C_1 = -\frac{8L^2 \cdot V_B + PL^2}{48}$, $C_1' = -\frac{8L^2 \cdot V_B - 5PL^2}{48}$, $C_2' = \frac{PL^3}{48}$

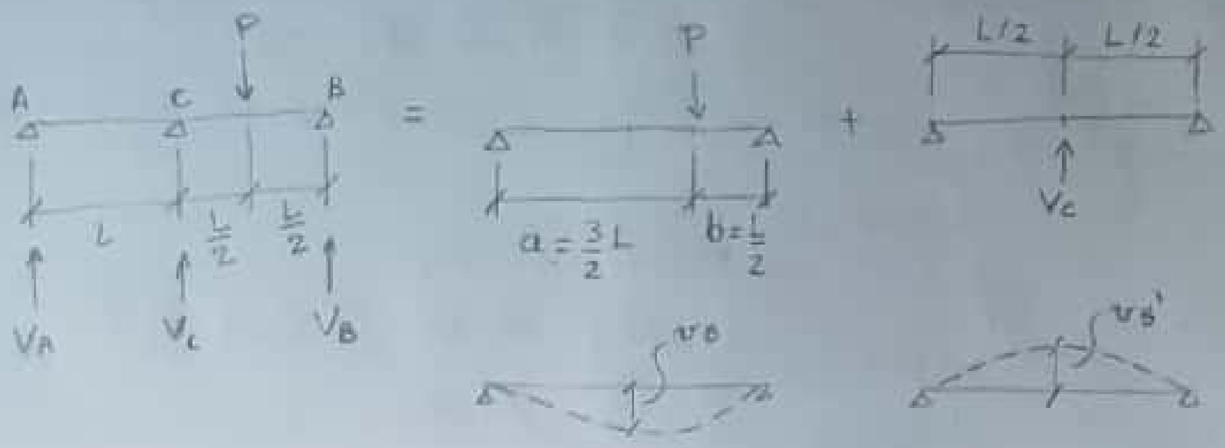
$v_3 = 0 \to x_2 = 0 \to C_2'' = 0$

$v_3 = 0 \to x_2 = L \to 0 = V_A \cdot \frac{L^3}{6} + C_1'' \cdot L \to C_1'' = -V_A\frac{L^2}{6}$

$\frac{dv_2}{dx_1} = -\frac{dv_3}{dx_2} \to x_1 = L \wedge x_2 = L \to V_A = \frac{-16V_B + 5P}{16}$ (3)

Resolvendo o sistema de equações dado por (1), (2) e (3), tem-se que: $V_A = -\frac{3P}{32}$, $V_B = \frac{13P}{32}$ e $V_C = \frac{11P}{16}$

Método da superposição



Equação de compatibilidade : $v_B + v_B' = 0$

$$v_B = -\frac{P.b.x}{6EI(2L)}[(2L)^2 - b^2 - x^2] = -\frac{11PL^3}{96EI} \quad \text{para } x = L$$

$$v_B' = \frac{V_c(2L)^3}{48EI} = \frac{V_c L^3}{6EI}$$

De (1) tem-se que : $\frac{V_c L^3}{6EI} - \frac{11PL^3}{96EI} = 0 \rightarrow V_c = \frac{11}{16}P$ (2)

Equações de equilíbrio:

$P = V_A + V_B + V_c$ (3)

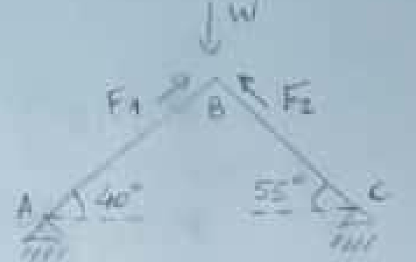
$\Sigma M_A = 2L V_B + L V_c - 3PL/2 = 0$ (4)

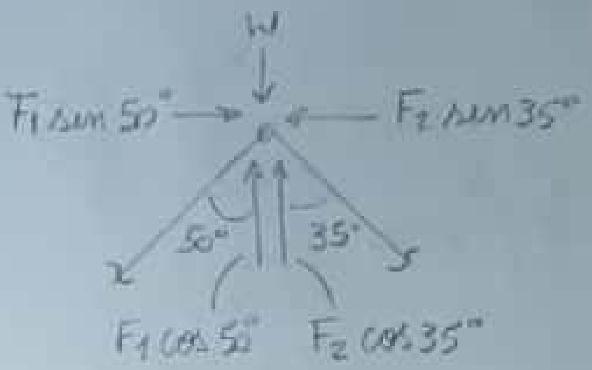
Das equações (2), (3) e (4) tem-se : $V_A = -\frac{3P}{32}$ e $V_B = \frac{13P}{32}$

DEC

DMF

3)





$$\begin{cases} W = F_1 \cos 50^\circ + F_2 \cos 35^\circ \\ F_1 \operatorname{sen} 50^\circ = F_2 \operatorname{sen} 35^\circ \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} F_1 &= 0{,}576\,W \\ F_2 &= 0{,}769\,W \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overline{AB} \cos 40^\circ + \overline{BC} \cos 55^\circ = 7000 \\ \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC} \cos 85^\circ = 7000^2 \end{cases}$$

$\overline{AB} = 5756\,mm$

$\overline{BC} = 4516{,}7\,mm$

$d_e = 100\,mm$

$d_i = 100 - 2 \cdot 6 = 88\,mm$

$I = \frac{\pi}{64}(d_e^4 - d_i^4) = 1963994{,}64\,mm^4$

Barra AB

$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(KL)^2} = 116892{,}87\,N$

Barra BC

$P_{cr} = 189839{,}73\,N$

$K = 1$ nas duas barras → bi-rotulada

$E = 200000\,MPa$

$F_1 = 116892{,}87 = 0{,}576\,W$

$W = 202939{,}01\,N$

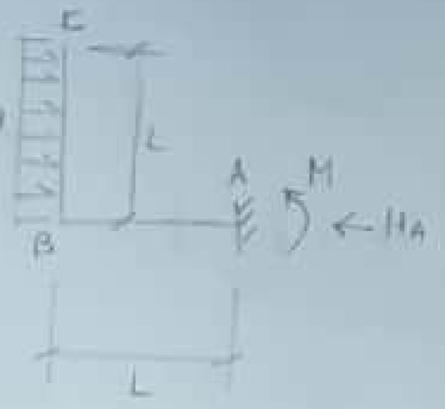
→ Pior caso (Resposta)

$F_2 = 189839{,}73 = 0{,}769\,W$

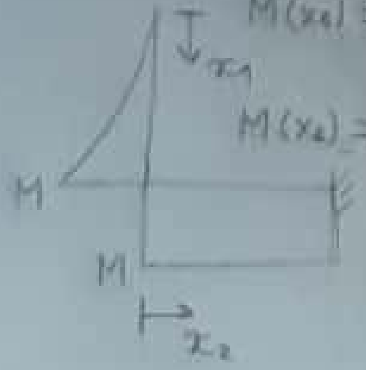
$W = 246865{,}70\,N$

Digitalizado com CamScanner

4)

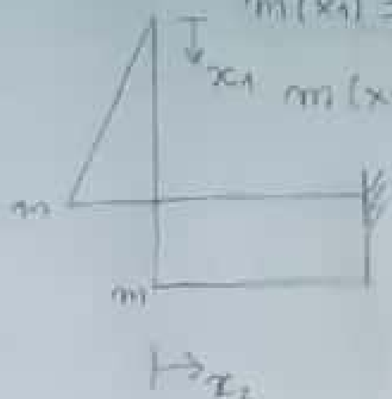


$$H_A = wL$$
$$M = \frac{wL^2}{2}$$



$$M(x_1) = \frac{w}{2}x_1^2$$
$$M(x_2) = \frac{w}{2}L^2$$

$$h_a = 1$$
$$m = L$$



$$m(x_1) = x_1$$
$$m(x_2) = L$$

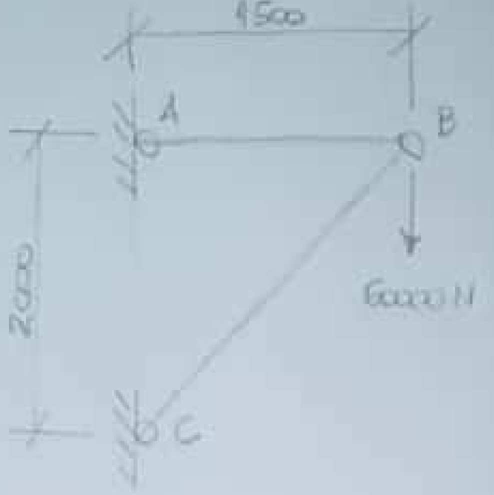
Barra CB

$$\Delta_{CB} = \int_C^B \frac{m(x_1)M(x_1)}{EI}\,dx_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{w}{2}x_1^3\,dx_1 = \frac{wL^4}{EI\,8}$$

Barra BA

$$\Delta_{BA} = \int_B^A \frac{m(x_2)M(x_2)}{EI}\,dx_2 = \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{w}{2}L^2 \cdot L\,dx_2 = \frac{wL^4}{EI\,2}$$

$$\Delta_C = \Delta_{CB} + \Delta_{BA} = \frac{5wL^4}{8EI}$$



$\overline{AB} \rightarrow d = 30\,mm$; $A = \frac{\pi d^2}{4} = 706{,}86\,mm^2$

$E = 210000\,MPa$

$\sigma_e = 360\,MPa$

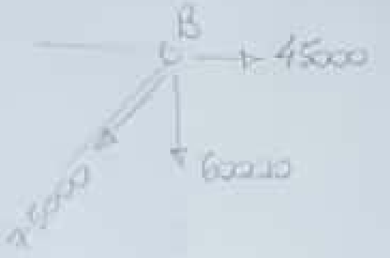
$\overline{BC} \rightarrow d_i = 50\,mm,\ t = 15\,mm$

$E = 73000\,MPa$; $A = \frac{\pi}{4}[(d_i+2t)^2 - d_i^2]$

$\sigma_e = 280\,MPa$; $A = 3063{,}05\,mm^2$

$I = \pi[(d_i+2t)^4 - d_i^4]/64$

$I = 1703823{,}14$



* Tensão normal desenvolvida em $\overline{AB}$ por conta da tração:

$$\sigma = \frac{4500}{706{,}86} = 63{,}66\,MPa < 360\,MPa\ (OK)$$

* Tensão normal desenvolvida em $\overline{BC}$ por conta da compressão:

$$\sigma = \frac{7500}{3063{,}05} = 24{,}48\,MPa < 280\,MPa\ (OK)$$

* Carga crítica da barra comprimida

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2\ 73000 \cdot 1703823{,}14}{2500^2} = 196411{,}6\,N > 7500\ (OK)$$

$K = 1 \rightarrow$ barra bi-rotulada

* Fator de segurança

$$F.S. = \frac{\sigma}{\sigma_{adm}}$$

$\rightarrow$ Barra $\overline{AB}$: $63{,}66 / 360 = 0{,}18$

$\rightarrow$ Barra $\overline{BC}$:

- compressão: $24{,}48 / 280 = 0{,}09$
- flambagem: $7500 / 196411{,}6 = 0{,}38$

Fator de segurança é o maior valor

$F.S. = 0{,}38$ (flambagem)