Parte I

Caso bilinear

- Dedução dos coeficientes: A dedução dos coeficientes seguiu o método mostrado no livro "A First Course in Numerical Methods"da bibliografia do curso. As condições de interpolação são:

  - $s_{ij}^L(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$

  - $s_{ij}^L(x_i, y_{j+1}) = f(x_i, y_{j+1})$

  - $s_{ij}^L(x_{i+1}, y_j) = f(x_{i+1}, y_j)$

  - $s_{ij}^L(x_{i+1}, y_{j+1}) = f(x_{i+1}, y_{j+1})$

Usando a primeira condição como $S_{00}^L = f(x_0, y_0)$ e generalizando, chegamos em:

$a_{00} = f(x_i, y_j)$

Avaliando $S_{ij}^L = f(x_i, y_{j+1})$, chegamos em:

$a_{01} = f(x_i, y_{j+1}) - a_{00}$

Com $S_{ij}^L = f(x_{i+1}, y_j)$ obtemos:

$a_{10} = f(x_{i+1}, y_j) - a_{00}$

Por fim, a última condição $s_{ij}^L(x_{i+1}, y_{j+1}) = f(x_{i+1}, y_{j+1})$ nos dá:

$a_{11} = f(x_{i+1}, y_{j+1}) - a_{00} - a_{10} - a_{01}$.

Usando os valores encontrados dos coeficientes, também podemos escrever:

$a11 = f(x_{i+1}, y_{j+1}) + f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_j)$

A dedução dos coeficientes só depende de saber que $\frac{x-x_i}{h_x}$ é 0 quando avaliado em x_i e 1 quando avaliado em x_{i+1}. O mesmo vale, analogamente, para y.

Parte II
Caso bicúbico

- Dedução dos coeficientes: Essa dedução é bem mais trabalhosa e extensa, por tanto vamos omitir os detalhes que são puramente manipulação algébrica.
  Vamos nos referir às condições de interpolação na ordem em que aparecem na definição do EP. Com a primeira condição, chegamos em :
  $a_{00} = f(x_i, y_j)$
  Com a segunda condição, chegamos em:
  $a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03} = f(x_i, y_{j+1})$
  Com a terceira condição, chegamos em:
  $a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30} = f(x_{i+1}, y_j)$
  Com a quarta condição, chegamos em:
  $a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03} + a10 + a11 + a12 + a13 + a20 + a21 + a22 +$

$a23 + a30 + a31 + a32 + a33 = f(x_{i+1}, y_{j+1})$

Com a quinta condição, chegamos em:

$a_{10} = \partial x f(x_i, y_j) h_x$

Com a sexta condição, chegamos em:

$a_{01} = \partial y f(x_i, y_j) h_y$

Com a sétima condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_x}(a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}) = \partial x f(x_i, y_{j+1})$

Com a oitava condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_y}(a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03}) = \partial y f(x_i, y_{j+1})$

Com a nona condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_x}(a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30}) = \partial x f(x_{i+1}, y_j)$

Com a décima condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_y}(a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31}) = \partial y f(x_{i+1}, y_j)$

Com a décima primeira condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_x}(a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+2(a_{20}+a_{21}+a_{22}+a_{23})+3(a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{33})) =$

$\partial x f(x_{i+1}, y_{j+1})$

Com a décima segunda condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_y}(a_{01}+a_{11}+a_{21}+a_{31}+2(a_{02}+a_{12}+a_{22}+a_{32})+3(a_{03}+a_{13}+a_{23}+a_{33})) = \partial y f(x_{i+1}, y_{j+1})$

Com a décima terceira condição, chegamos em:

$a_{11} = h_x h_y \partial^2 xyf(x_i, y_j)$

Com a décima quarta condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_x h_y}(a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13}) = \partial^2 xyf(x_i, y_{j+1})$

Com a décima quinta condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_x h_y}(a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31}) = \partial^2 xyf(x_{i+1}, y_j)$

Com a décima sexta condição, chegamos em:

$\frac{1}{h_x h_y}(a_{11} + 2(a_{21} + a_{12}) + 3(a_{31} + 3a_{13}) + 4a_{22} + 6(a_{32} + a_{23}) + 9a_{33}) = \partial^2 xyf(x_{i+1}, y_{j+1})$

Agora vamos usar o termo "i-ésima equação" para a equação obtida a

partir da i-ésima condição de interpolação.
Usando a segunda e a oitava equação, obtemos a_{02} e a_{03}.
Usando a terceira e a nona equação, obtemos a_{20} e a_{30}.
Usando a sétima e a décima quarta equação, obtemos a_{12} e a_{13}.
Usando a décima e a décima quinta equação, obtemos a_{21} e a_{31}.
Os coeficientes a_{22}, a_{23}, a_{32} e a_{33} exigem que se resolva um sistema linear com a quarta, décima primeira, décima segunda e décima sexta equações.
No final, obtemos os seguintes coeficientes:

- $a_{00} = f(x_i, y_j)$
- $a_{10} = \partial x f(x_i, y_j) h_x$
- $a_{01} = \partial y f(x_i, y_j) h_y$
- $a_{11} = \partial^2 xy f(x_i, y_j) h_x h_y$
- $a_{02} = 3(f(x_i, y_{j+1}) - a_{00}) - \partial y f(x_i, y_{j+1}) h_y - \partial y f(x_i, y_j) h_y 2$

- $a_{03} = f(x_i, y_{j+1}) - a_{00} - a_{01} - a_{02}$
- $a_{20} = 3(f(x_{i+1}, y_j) - a_{00}) - \partial x f(x_{i+1}, y_j)h_x - \partial x f(x_i, y_j)h_x 2$
- $a_{30} = f(x_{i+1}, y_j) - a_{00} - a10 - a20$
- $a_{12} = 3(\partial x f(x_i, y_{j+1})h_x - a_{10}) - \partial^2 xy f(x_i, y_{j+1})h_x h_y - 2a_{11}$
- $a_{13} = \partial x f(x_i, y_{j+1})h_x - a_{10} - a_{11} - a_{12}$
- $a_{21} = 3(\partial y f(x_{i+1}, y_j)h_y - a_{01}) - \partial^2 xy f(x_{i+1}, y_j)h_x h_y - 2a_{11}$
- $a_{31} = \partial y f(x_{i+1}, y_j)h_y - a_{01} - a_{11} - a_{21}$

Os coeficientes restantes serão dados em forma matricial, pois são muito extensos: Sejam:
$C = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03} + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{20} + a_{21} + a_{30} + a_{31}$
$D = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + 2(a_{20} + a_{21}) + 3(a_{30} + a_{31})$
$E = a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31} + 2(a_{02} + a_{12}) + 3(a_{03} + a_{13})$
$F = a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} + 2a_{12} + 3a_{13}$ Teremos a matriz abaixo representando os coeficientes restantes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{23} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_{i+1}, y_{j+1}) - C \\ \partial x f(x_{i+1}, y_{j+1}) h_x - D \\ \partial y f(x_{i+1}, y_{j+1}) h_y - E \\ \partial^2 xy f(x_{i+1}, y_{j+1}) h_x h_y - F \end{bmatrix}$$

- Construção e avaliação (bilinear e bicúbico):

  – A função *controiv* recebe:
  nx = número de intervalos no eixo x.
  ny = número de intervalos no eixo y.
  ax = x mínimo.
  bx = x máximo.
  ay = y mínimo.
  by = y máximo.

fmatrix = matriz com os valores da função f em cada ponto da malha.
dxfmatrix = matriz com os valores da $\partial x f$ em cada ponto da malha.
dyfmatrix = matriz com os valores da $\partial y f$ em cada ponto da malha.
dxyfmatrix = matriz com os valores da $\partial^2 x y f$ em cada ponto da malha.
typeintpol = tipo de interpolação: bilinear ou bicúbica.

– A funçao *controiv* retorna:
Uma matriz com os coeficientes para cada ponto da malha. Esses valores serão utilizados pela *avaliav*.

– A função *avaliav* recebe:
nx = número de intervalos no eixo x.

ny = número de intervalos no eixo y.
ax = x mínimo.
bx = x máximo.
ay = y mínimo.
by = y máximo.
coefficients = matriz com os coeficientes necessários para avaliar a função interpoladora em cada ponto da malha.
typeintpol = tipo de interpolação: bilinear ou bicúbica.
Para descobrirmos com qual S_{ij} iremos interpolar o ponto, usamos as fórmulas:
i = floor((x - ax)/hx)
j = floor((y - ay)/hy)
Também devemos considerar os casos especiais em que os pontos a serem interpolados estão nas arestas direitas ou superiores da malha.

– A funçao *avaliav* retorna:
O valor da função interpoladora no ponto (x, y)

– Protocolos válidos para *constroiv* e *avaliav*: As matrizes com os valores da função (ou sua derivada) têm que estar dispostas de tal forma que as colunas representem o eixo x e as linhas o eixo y. As colunas mais à direita representam os maiores valores de x. As linhas mais a baixo representam os maiores valores de y.
A matriz de coeficientes é expandida através da matriz *fmatrix*, ou seja, para cada posição na matriz *fmatrix*, a matriz de coeficientes terá uma matriz 2x2 ou 4x4, dependendo se for uma interpoleção bilienar ou bicúbica, respectivamente. É importante notar que nem todos os pontos vão sofrer essa expansão, pois os pontos da última coluna e da última linha são descartados. Por exemplo, temos a

seguinte matriz fmatrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

A última linha e última colunas são descartadas e não terão um elemento correspondente na matriz de coeficientes. Para cada posição restante na *fmatrix* teremos uma outra matriz correspondente na matriz de coeficientes (uma matriz de matrizes). No caso bilinear, teremos uma matriz do seguinte tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} & a_{10} & a_{11} \\ a_{00} & a_{01} & a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$$

No caso bicúbico, teremos a matriz do seguinte tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Parte III
Testes

Para a primeira parte dos testes (verificar se o programa funciona e ver o erro), nós usamos as três funções abaixo e os seguintes parâmetros:

ax = 0

bx = 3

ay = 0

by = 3

nx = 2

ny = 2

Função 1: $f(x, y) = x + y$

fmatrix = [0, 1.5, 3; 1.5, 3, 4.5; 3, 4.5, 6]

dxfmatrix = [1, 1, 1; 1, 1, 1; 1, 1, 1]

dyfmatrix = [1, 1, 1; 1, 1, 1; 1, 1, 1]

dxyfmatrix = [0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0]

Função 2: $f(x, y) = x^2 + y^2$

fmatrix = [0, 2.25, 9; 2.25, 4.5, 11.25; 9, 11.25, 18]
dxfmatrix = [0, 3, 6; 0, 3, 6; 0, 3, 6]
dyfmatrix = [0, 0, 0; 3, 3, 3; 6, 6, 6]
dxyfmatrix = [2, 2, 2; 2, 2, 2; 2, 2, 2]

Função 3: $f(x, y) = sin(xy)$

fmatrix = [sin(0), sin(0), sin(0); sin(0), sin(2.25), sin(4.5); sin(0), sin(4.5), sin(9)]
dxfmatrix = [0, 0, 0; cos(0)*1.5, cos(2.25)*1.5, cos(4.5)*1.5; cos(0)*3, cos(4.5)*3, cos(9)*3]
dyfmatrix = [0, cos(0)*1.5, cos(0)*3; 0, cos(2.25)*1.5, cos(4.5)*3; 0, cos(4.5)*1.5, cos(9)*3]

dxyfmatrix = [cos(0), cos(0), cos(0); cos(0), cos(2.25) - sin(2.25)*2.25, cos(4.5) - sin(4.5)*4.5; cos(0), cos(4.5) - sin(4.5)*4.5, cos(9) - sen(9)*9]
A interpolação nos pontos da malha dá certo para todos os pontos no caso bilinear. Já no caso bicúbico, todos os pontos dão certo exceto por um: o ponto superior direito no plano cartesiano. Não conseguimos corrigir esse erro a tempo.
Testes para o caso Bilinear - $x^2 + y^2$:
v(1, 1) = 3
v(2, 2) = 9
v(1.7, 1.7) = 6.3
v(2.4, 2.5) = 13.05
v(0.1, 0.1) = 0.3
v(2.2, 2.2) = 10.8
v(2.9, 2.9) = 17.1
v(0.5, 1.5) = 3

$v(2.5, 1.5) = 9$
$v(3, 2.2) = 14.4$

$f(1, 1) = 2$
$f(2, 2) = 8$
$f(1.7, 1.7) = 5.78$
$f(2.4, 2.5) = 12.01$
$f(0.1, 0.1) = 0.02$
$f(2.2, 2.2) = 9.68$
$f(2.9, 2.9) = 16.82$
$f(0.5, 1.5) = 2.5$
$f(2.5, 1.5) = 8.5$
$f(3, 2.2) = 13.84$

$e(x, y) = abs(f(x, y) - v(x, y))$

e(1, 1) = 1
e(2, 2) = 1
e(1.7, 1.7) = 0.52
e(2.4, 2.5) = 1.04
e(0.1, 0.1) = 0.28
e(2.2, 2.2) = 1,12
e(2.9, 2.9) = 0.28
e(0.5, 1.5) = 0.5
e(2.5, 1.5) = 0.5
e(3, 2.2) = 0.56

Bicúbico - $x^2 + y^2$:
v(1, 1) = 0.024691
v(1.2, 1.2) = 0.041472

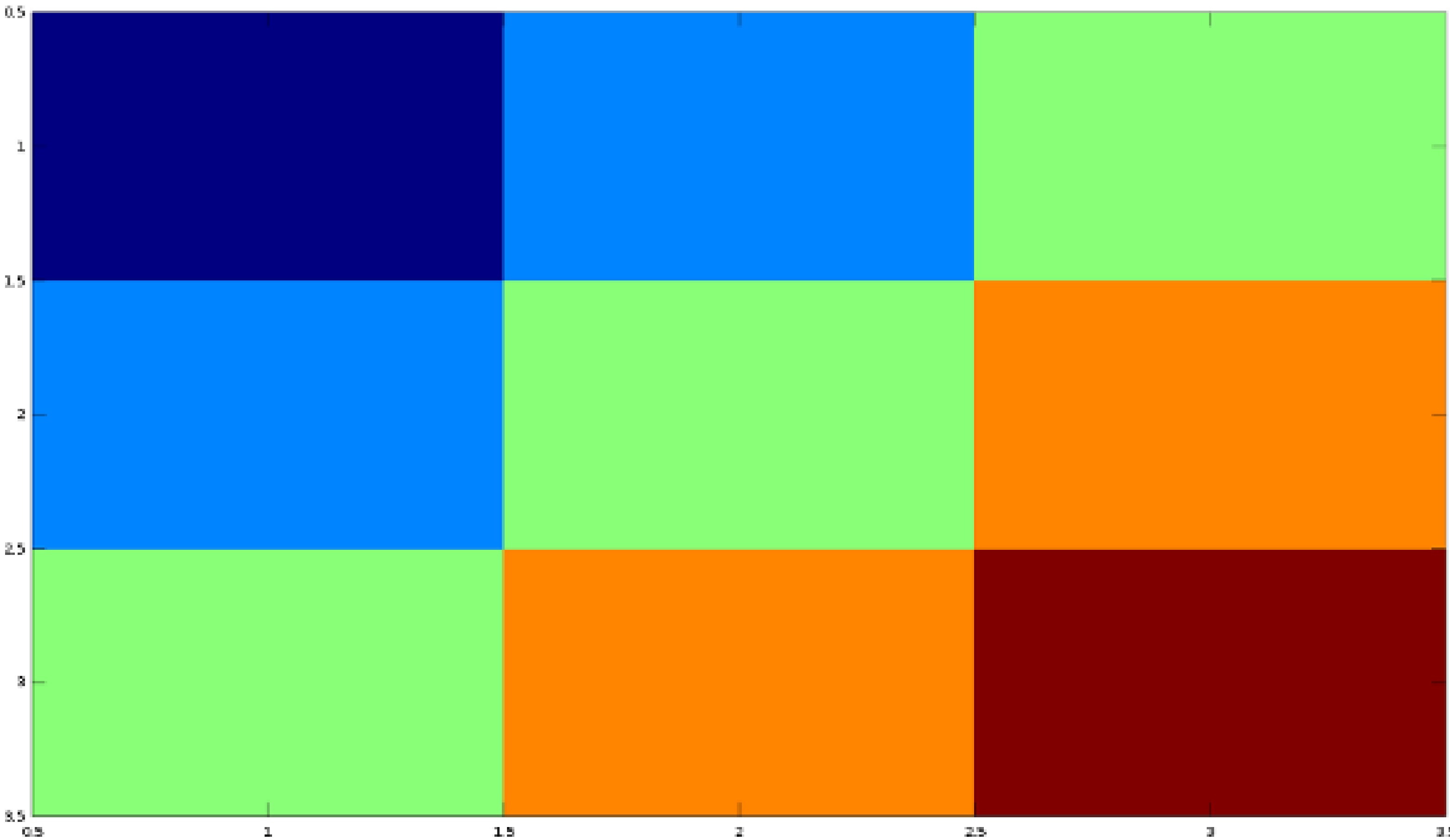
$v(0.7, 0.7) = 0.0012389$
$v(0.5, 1.5) = 2.5$
$v(1.2, 1.5) = 3.69$
$v(1.5, 0.5) = 2.5$
$v(1, 0.9) = 0.026$
$v(1.2, 1.4) = 0.063296$
$v(0, 0.5) = 0.25$
$v(1, 0) = 1$
$f(1, 1) = 2$
$f(1.2, 1.2) = 2.88$
$f(0.7, 0.7) = 0.98$
$f(0.5, 1.5) = 4.5$
$f(1.2, 1.5) = 3.69$
$f(1.5, 0.5) = 2.5$
$f(1, 0.9) = 1.81$

f(1.2, 1.4) = 3.4
f(0, 0.5) = 0.25
f(1, 0) = 1

e(x, y) = abs(f(x, y) - v(x, y))
e(1, 1) = 1,975309
e(2, 2) = 2,838528
e(1.7, 1.7) = 0,9787611
e(2.4, 2.5) = 2
e(0.1, 0.1) = 0
e(2.2, 2.2) = 0
e(2.9, 2.9) = 1,784
e(0.5, 1.5) = 3,336704
e(2.5, 1.5) = 0
e(3, 2.2) = 0

Para o teste de compressão de imagens, nós usamos a seguinte função e parâmetros:
$f(x, y) = x + y$
ax = 0
bx = 2
ay = 0
by = 2
nx = 1
ny = 1
fmatrix = [0, 1, 2; 1, 2, 3; 2, 3, 4]
dxfmatrix = dyfmatrix = [1, 1, 1; 1, 1, 1; 1, 1, 1]
dxyfmatrix = [0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0]

Usando a função imagesc() do Octave com fmatrix como argumento, obtemos:


0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Agora, usando a seguinte matriz composta apenas dos pontos das "quinas" de fmatrix: [0, 2; 2, 4]
conseguimos obter a mesma imagem interpolando os pontos da malha de fmatrix.