Relatório EP3

Igor Fratel Santana - 9793565 Allan Amancio Rocha - 9761614

19 de junho de 2017

Parte I
Deduções

Nesse trabalho usaremos os coeficientes necessários para o EP2 **e** aproximações para as derivadas parciais $\partial x f$, $\partial y f$ e $\partial^2 x y f$ usando os métodos *centrado*, *para frente* e *para trás*.
Nós usamos a seguinte expansão do polinômio de Taylor para realizar nossas deduções:

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)+\partial x f(x_0, y_0)h+\partial y f(x_0, y_0)k+\frac{1}{2}[\partial^2 x^2 f(x_0, y_0)h^2+ 2\partial^2 xy f(x_0, y_0)hk + \partial^2 y^2 f(x_0, y_0)k^2] + E(h, k)$
onde o erro $E(h, k)$ é $O(h^2)$ quando $h > 0$ e $k > 0$ e $O(h^3)$ quando $h = 0$ e $k = 0$.
Todas as fórmulas deduzidas são aproximações com erro $O(h^2)$.

- Aproximações de $\partial x f$:
  - centrada: Usando as fórmulas $f(x_0 + h, y_0)$ e $f(x_0 - h, y_0)$ obtidas através da expansão de Taylor considerando $k = 0$ obtemos $\partial x f(x_0, y_0) = \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{2h}$
  - para frente: Usando as fórmulas $f(x_0 + h, y_0)$ e $f(x_0 + 2h, y_0)$ obtemos $\partial x f(x_0, y_0) = \frac{4f(x_0+h,y_0)-f(x_0+2h,y_0)-3f(x_0,y_0)}{2h}$

– para trás: Usando as fórmulas $f(x_0 - h, y_0)$ e $f(x_0 - 2h, y_0)$ obtemos $\partial x f(x_0, y_0) = \frac{-4f(x_0-h,y_0)+f(x_0-2h,y_0)+3f(x_0,y_0)}{2h}$

- Aproximações de $\partial y f$ (análogas ao caso anterior):

  – centrada: $\partial x f(x_0, y_0) = \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0-k)}{2k}$

  – para frente: $\partial x f(x_0, y_0) = \frac{4f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0+2k)-3f(x_0,y_0)}{2k}$

  – para trás: $\partial x f(x_0, y_0) = \frac{-4f(x_0,y_0-k)+f(x_0,y_0-2k)+3f(x_0,y_0)}{2k}$

- Aproximações de $\partial^2 xyf$:
  Essas aproximações foram obtidas derivando as fórmulas anteriores. Por exemplo, a fórmula $\partial^2 xyf$ centrada em x é obtida derivando a fórmula $\partial x f$ em relação a y. Essa nova fórmula sempre será centrada em x mas pode ser centrada, para frente ou para trás em y dependendo

de como o numerador é calculado.

- x centrado e y centrado/pra frente/pra trás: $\partial^2 xyf(x_0, y_0) = \frac{\partial yf(x_0+h,y_0)-\partial yf(x_0-h,y_0)}{2h}$
- x para frente e y centrado/pra frente/pra trás: $\partial^2 xyf(x_0, y_0) = \frac{4\partial yf(x_0+h,y_0)-\partial yf(x_0+2h,y_0)-3\partial yf(x_0,y_0)}{2h}$
- x para trás e y centrado/pra frente/pra trás: $\partial^2 xyf(x_0, y_0) = \frac{-4\partial yf(x_0-h,y_0)+\partial yf(x_0-2h,y_0)+3\partial yf(x_0,y_0)}{2h}$
- y centrado e x centrado/pra frente/pra trás: $\partial^2 xyf(x_0, y_0) = \frac{\partial xf(x_0,y_0+k)-\partial xf(x_0,y_0-k)}{2k}$
- y para frente e x centrado/pra frente/pra trás: $\partial^2 xyf(x_0, y_0) = \frac{4\partial xf(x_0,y_0+k)-\partial xf(x_0,y_0+2k)-3\partial xf(x_0,y_0)}{2k}$
- y para trás e x centrado/pra frente/para trás: $\partial^2 xyf(x_0, y_0) = \frac{-4\partial xf(x_0,y_0-k)+\partial xf(x_0,y_0-2k)+3\partial xf(x_0,y_0)}{2k}$

Parte II

Testes

Seguindo a descrição do ep, nosso primeiro passo foi determinar os erros das aproximações das derivadas. Para isso usamos a função $f(x, y) = y * sin(x)$. Nós calculamos as aproximações das derivadas para um plano cartesiano fixo, mas com h=0.6 e h=0.3. Comparando os erros das aproximações para esses diferentes valores de "h", calculamos um fator de erro. O fator de erro para uma derivada é calculado como E_1/E_2, onde o numerador é a média dos valores da malha de erro da derivada com h = 0.6 e o denominador é a média dos valores da malha de erro da derivada com h = 0.3. Dessa forma, temos quantas vezes o erro médio com h = 0.3 "cabe"no erro médio com "h = 0.6". Como o erro das aproximações é quadrático, esperamos ver fatores de erro maiores ou iguais a 4 para uma redução de "h"pela metade. Foi isso que observamos com exceção do fator de erro da derivada parcial em y, que deu um valor próximo de 1. Analisamos essa "anomalia" e chegamos à conclusão que esse fator de erro provém do fato dos erros de aproximações para as derivadas em y (tanto com h=0.6 como com h=0.3) resultarem em valores iguais a zero ou extremamente próximos de zero.

```
***TESTE I - APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS***
___Função utilizada: y.sen(x)___

(malha com h = 0.6)

DERIVADA PARCIAL EM X

Malha de derivadas parciais reais em x

   0.00000   0.00000   0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000
   0.60000   0.49520   0.21741  -0.13632  -0.44244  -0.59400
   1.20000   0.99040   0.43483  -0.27264  -0.88487  -1.18799
   1.80000   1.48560   0.65224  -0.40896  -1.32731  -1.78199
   2.40000   1.98081   0.86966  -0.54529  -1.76974  -2.37598
   3.00000   2.47601   1.08707  -0.68161  -2.21218  -2.96998

Malha de derivadas parciais aproximadas em x

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.66327   0.46602   0.20460  -0.12829  -0.41636  -0.65232
   1.32653   0.93204   0.40921  -0.25658  -0.83273  -1.30465
   1.98980   1.39806   0.61381  -0.38486  -1.24909  -1.95697
   2.65306   1.86408   0.81841  -0.51315  -1.66546  -2.60929
   3.31633   2.33010   1.02301  -0.64144  -2.08182  -3.26161

Malha de erro entre derivadas parciais (em x) reais e aproximadas

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.06327   0.02918   0.01281   0.00803   0.02607   0.05833
   0.12653   0.05836   0.02562   0.01607   0.05214   0.11665
   0.18980   0.08755   0.03844   0.02410   0.07822   0.17498
   0.25306   0.11673   0.05125   0.03213   0.10429   0.23331
   0.31633   0.14591   0.06406   0.04017   0.13036   0.29164
```

```
DERIVADA PARCIAL EM Y

Malha de derivadas parciais reais em y

   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112

Malha de derivadas parciais aproximadas em y

   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112
   0.00000   0.56464   0.93204   0.97385   0.67546   0.14112

Malha de erro entre derivadas parciais (em y) reais e aproximadas

   0.0000e+00   0.0000e+00   1.1102e-16   1.1102e-16   0.0000e+00   0.0000e+00
   0.0000e+00   0.0000e+00   1.1102e-16   1.1102e-16   0.0000e+00   0.0000e+00
   0.0000e+00   1.1102e-16   1.1102e-16   1.1102e-16   0.0000e+00   2.7756e-17
   0.0000e+00   0.0000e+00   1.1102e-16   1.1102e-16   0.0000e+00   0.0000e+00
   0.0000e+00   2.2204e-16   1.1102e-16   3.3307e-16   0.0000e+00   0.0000e+00
   0.0000e+00   1.1102e-16   4.4409e-16   1.4433e-15   0.0000e+00   2.7756e-17
```

DERIVADA PARCIAL DE SEGUNDA ORDEM MISTAS EM X E Y

Malha de derivadas parciais de segunda ordem mistas reais em x e y

1.00000	0.82534	0.36236	-0.22720	-0.73739	-0.98999
1.00000	0.82534	0.36236	-0.22720	-0.73739	-0.98999
1.00000	0.82534	0.36236	-0.22720	-0.73739	-0.98999
1.00000	0.82534	0.36236	-0.22720	-0.73739	-0.98999
1.00000	0.82534	0.36236	-0.22720	-0.73739	-0.98999
1.00000	0.82534	0.36236	-0.22720	-0.73739	-0.98999

Malha de derivadas parciais de segunda ordem mistas aproximadas em x e y

1.10544	0.77670	0.34100	-0.21381	-0.69394	-1.08720
1.10544	0.77670	0.34100	-0.21381	-0.69394	-1.08720
1.10544	0.77670	0.34100	-0.21381	-0.69394	-1.08720
1.10544	0.77670	0.34100	-0.21381	-0.69394	-1.08720
1.10544	0.77670	0.34100	-0.21381	-0.69394	-1.08720
1.10544	0.77670	0.34100	-0.21381	-0.69394	-1.08720

Malha de erro entre derivadas parciais de segunda ordem mistas (em x e y) reais e aproximadas

0.105442	0.048636	0.021353	0.013389	0.043454	0.097212
0.105442	0.048636	0.021353	0.013389	0.043454	0.097212
0.105442	0.048636	0.021353	0.013389	0.043454	0.097212
0.105442	0.048636	0.021353	0.013389	0.043454	0.097212
0.105442	0.048636	0.021353	0.013389	0.043454	0.097212
0.105442	0.048636	0.021353	0.013389	0.043454	0.097212

```
(malha com h = 0.3)

DERIVADA PARCIAL EM X

Malha de derivadas parciais reais em x

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.30000   0.28660   0.24760   0.18648   0.10871   0.02122
   0.60000   0.57320   0.49520   0.37297   0.21741   0.04244
   0.90000   0.85980   0.74280   0.55945   0.32612   0.06366
   1.20000   1.14640   0.99040   0.74593   0.43483   0.08488
   1.50000   1.43300   1.23800   0.93241   0.54354   0.10611

Malha de derivadas parciais aproximadas em x

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.30872   0.28232   0.24390   0.18370   0.10708   0.02383
   0.61744   0.56464   0.48781   0.36740   0.21417   0.04766
   0.92616   0.84696   0.73171   0.55109   0.32125   0.07148
   1.23488   1.12928   0.97561   0.73479   0.42834   0.09531
   1.54360   1.41161   1.21952   0.91849   0.53542   0.11914

Malha de erro entre derivadas parciais (em x) reais e aproximadas

   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
   0.008719   0.004280   0.003697   0.002785   0.001623   0.002607
   0.017438   0.008559   0.007395   0.005569   0.003247   0.005213
   0.026158   0.012839   0.011092   0.008354   0.004870   0.007820
   0.034877   0.017119   0.014789   0.011139   0.006493   0.010426
   0.043596   0.021399   0.018487   0.013923   0.008116   0.013033
```

```
DERIVADA PARCIAL EM Y

Malha de derivadas parciais reais em y

   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749

Malha de derivadas parciais aproximadas em y

   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749
   0.00000   0.29552   0.56464   0.78333   0.93204   0.99749

Malha de erro entre derivadas parciais (em y) reais e aproximadas

   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.1102e-16   0.0000e+00
   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.1102e-16   0.0000e+00
   0.0000e+00   5.5511e-17   1.1102e-16   1.1102e-16   1.1102e-16   1.1102e-16
   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.1102e-16   0.0000e+00
   0.0000e+00   5.5511e-17   2.2204e-16   2.2204e-16   1.1102e-16   0.0000e+00
   0.0000e+00   2.2204e-16   1.1102e-16   2.2204e-16   4.4409e-16   1.1102e-16
```

```
Malha de derivadas parciais de segunda ordem mistas reais em x e y

   1.000000   0.955336   0.825336   0.621610   0.362358   0.070737
   1.000000   0.955336   0.825336   0.621610   0.362358   0.070737
   1.000000   0.955336   0.825336   0.621610   0.362358   0.070737
   1.000000   0.955336   0.825336   0.621610   0.362358   0.070737
   1.000000   0.955336   0.825336   0.621610   0.362358   0.070737
   1.000000   0.955336   0.825336   0.621610   0.362358   0.070737

Malha de derivadas parciais de segunda ordem mistas aproximadas em x e y

   1.029064   0.941071   0.813011   0.612328   0.356947   0.079426
   1.029064   0.941071   0.813011   0.612328   0.356947   0.079426
   1.029064   0.941071   0.813011   0.612328   0.356947   0.079426
   1.029064   0.941071   0.813011   0.612328   0.356947   0.079426
   1.029064   0.941071   0.813011   0.612328   0.356947   0.079426
   1.029064   0.941071   0.813011   0.612328   0.356947   0.079426

Malha de erro entre derivadas parciais de segunda ordem mistas (em x e y) reais e aproximadas

   0.0290639   0.0142657   0.0123244   0.0092823   0.0054110   0.0086887
   0.0290639   0.0142657   0.0123244   0.0092823   0.0054110   0.0086887
   0.0290639   0.0142657   0.0123244   0.0092823   0.0054110   0.0086887
   0.0290639   0.0142657   0.0123244   0.0092823   0.0054110   0.0086887
   0.0290639   0.0142657   0.0123244   0.0092823   0.0054110   0.0086887
   0.0290639   0.0142657   0.0123244   0.0092823   0.0054110   0.0086887
```

```
FATORES DE ERROS
(O quanto o erro diminui quando h é dividido por dois)

Fator de erro da derivada parcial em x:
 8.3376

Fator de erro da derivada parcial em y:
 1.4565

Fator de erro da derivada parcial de segunda ordem mistas em x e y:
 4.1688

Fator de erro das derivadas parciais:
 4.6543
```

O próximo passo dos nossos testes foi mostrar que nosso programa interpola as funções nos pontos da malha.

```
***TESTE II - INTERPOLAÇÃO***

--> FUNÇÃO - X + Y

Pontos a interpolar:

   0.00000   1.50000   3.00000
   1.50000   3.00000   4.50000
   3.00000   4.50000   6.00000

Pontos analíticos (f)

   0.00000   0.75000   1.50000   2.25000   3.00000
   0.75000   1.50000   2.25000   3.00000   3.75000
   1.50000   2.25000   3.00000   3.75000   4.50000
   2.25000   3.00000   3.75000   4.50000   5.25000
   3.00000   3.75000   4.50000   5.25000   6.00000

Pontos numéricos (v)

   0.00000   0.75000   1.50000   2.25000   3.00000
   0.75000   1.60417   2.25000   3.10417   3.85417
   1.50000   2.25000   3.00000   3.75000   4.50000
   2.25000   3.10417   3.75000   4.60417   5.35417
   3.00000   3.85417   4.50000   5.35417   6.00000

| f - v |

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.10417   0.00000   0.10417   0.10417
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.10417   0.00000   0.10417   0.10417
   0.00000   0.10417   0.00000   0.10417   0.00000
```

```
--> FUNÇÃO - X² + X²

Pontos a interpolar:

    0.00000    2.25000    9.00000
    2.25000    4.50000   11.25000
    9.00000   11.25000   18.00000

Pontos analíticos (f)

    0.00000    0.56250    2.25000    5.06250    9.00000
    0.56250    1.12500    2.81250    5.62500    9.56250
    2.25000    2.81250    4.50000    7.31250   11.25000
    5.06250    5.62500    7.31250   10.12500   14.06250
    9.00000    9.56250   11.25000   14.06250   18.00000

Pontos numéricos (v)

    0.00000    0.56250    2.25000    5.06250    9.00000
    0.56250    1.43750    2.81250    6.09375    9.87500
    2.25000    2.81250    4.50000    7.31250   11.25000
    5.06250    6.09375    7.31250   10.75000   14.68750
    9.00000    9.87500   11.25000   14.68750   18.00000

| f - v |

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.31250   0.00000   0.46875   0.31250
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.46875   0.00000   0.62500   0.62500
   0.00000   0.31250   0.00000   0.62500   0.00000
```

```
--> FUNÇÃO - SEN(XY)

Pontos a interpolar:

   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.77807  -0.97753
   0.00000  -0.97753   0.41212

Pontos analíticos (f)

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.53330   0.90227   0.99320   0.77807
   0.00000   0.90227   0.77807  -0.23129  -0.97753
   0.00000   0.99320  -0.23129  -0.93933   0.45004
   0.00000   0.77807  -0.97753   0.45004   0.41212

Pontos numéricos (v)

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000  -0.70044   0.70575   0.39128  -0.23007
   0.00000   0.70575   0.77807   0.21698  -0.97753
   0.00000   0.39128   0.21698  -0.02549  -0.45142
   0.00000  -0.23007  -0.97753  -0.45142   0.30909

| f - v |

   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.23374   0.19652   0.60192   1.00815
   0.00000   0.19652   0.00000   0.44827   0.00000
   0.00000   0.60192   0.44827   0.91384   0.90146
   0.00000   1.00815   0.00000   0.90146   0.10303
```

Por útimo, tratamos da compressão de imagens. O programa lê uma imagem, a separa em 3 matrizes representando R, G e B. Com essas matrizes, retiramos uma malha grossa descartando pontos alternadamente. Ao final dessa "simplificação"as matrizes terão (aproximadamente) metade do número de linhas e metade do número de colunas original. Para cada matriz R, G e B teremos uma outra matriz aproximada numericamente pela função avaliav. Nós juntamos as 3 matrizes aproximadas em uma única imagem e exibimos ela. Por padrão, o programa exibe a imagem "mario.png"(inclusa na entrega do ep) após a compressão. Deixaremos aqui alguns exemplos de imagens após a compressão feita pelo nosos programa:
Nota: as imagens colocadas abaixo sofreram redimencionamento pois são todas 16x16.