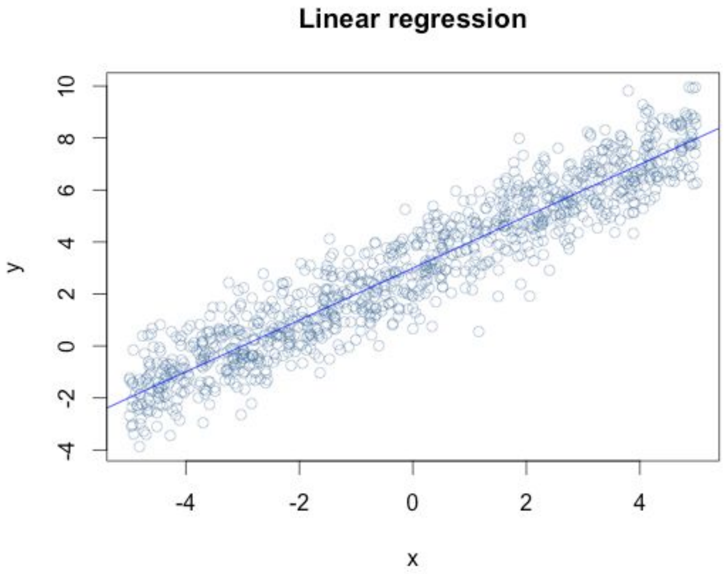
Regressão Logística

Alcione de Paiva Oliveira - DPI/UFV (baseado em Andrew Ng)

Regressão Logística

Regressão linear e logística

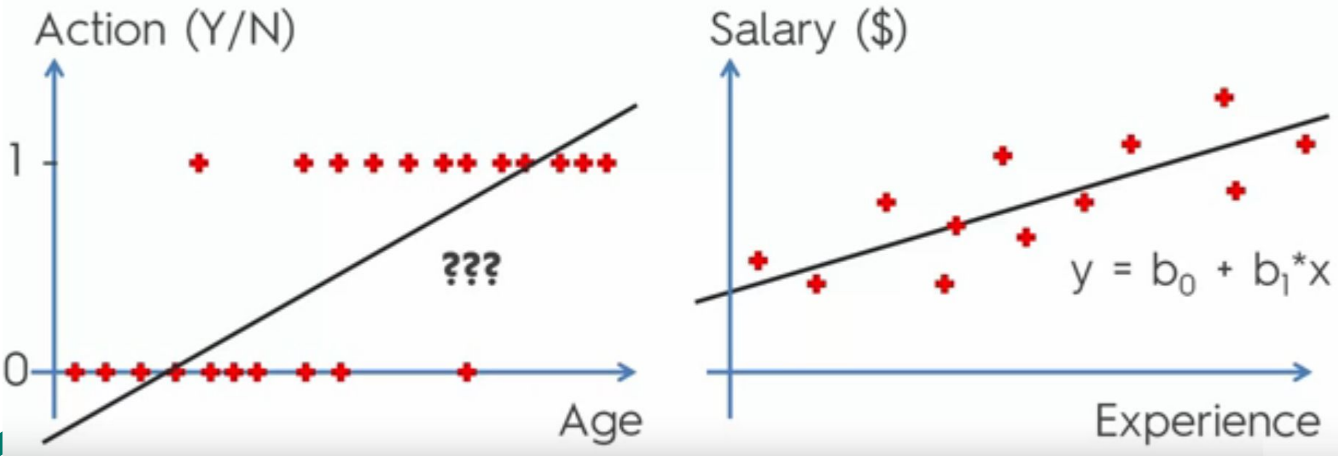
- Usa-se regressão linear quando se deseja prever um valor real a partir de uma função linear ajustada para valores de treinamento.



Regressão Logística

Regressão linear e logística

- No entanto, quando se deseja obter a probabilidade de classificação a regressão logística é a adequada.



Regressão Logística

Regressão linear e logística

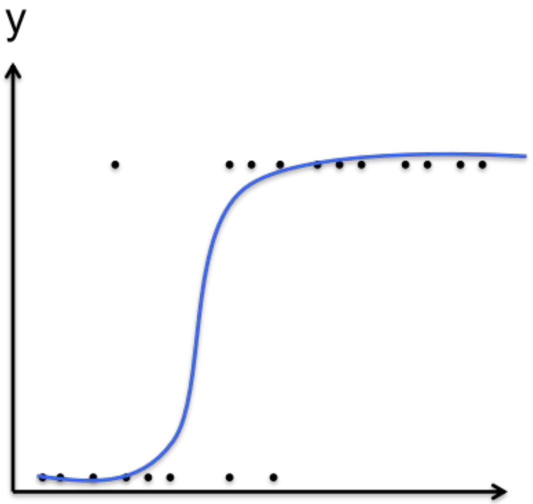
- No entanto, quando se deseja obter a probabilidade de classificação a regressão logística é a adequada.

Dado o salário, deve-se aprovar um empréstimo (S/N)

Regressão Logística

Regressão linear e logística

- No entanto, quando se deseja obter a probabilidade de classificação a regressão logística é a adequada.



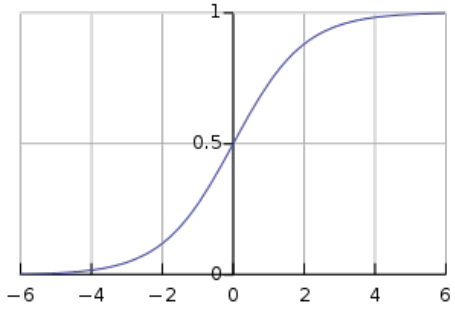
Regressão Logística

Regressão logística

- A regressão logística usa a função logística, de forma a manter infinitos scores entre 0 e 1.

- Uma função logística ou uma curva logística é um formato de “S” comum (curva sigmóide), com equação :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}$$



Regressão Logística

Regressão logística

- Então, suponha um vetor de entradas $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_{2,=}, .., x_n\}$ e um vetor de pesos $\boldsymbol{w} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ e uma constante b (também denominado de bias), a função linear z é definida como $z = \boldsymbol{w}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + b$.

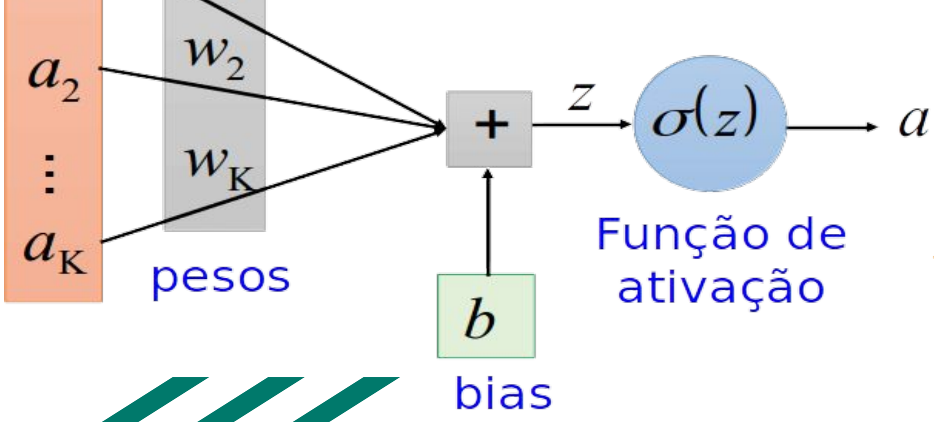
- Ao aplicarmos a função logística (função de ativação) σ à z obtemos um valor entre 0 e 1:

$$\sigma(z) = \sigma(z = \boldsymbol{w}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + b)$$

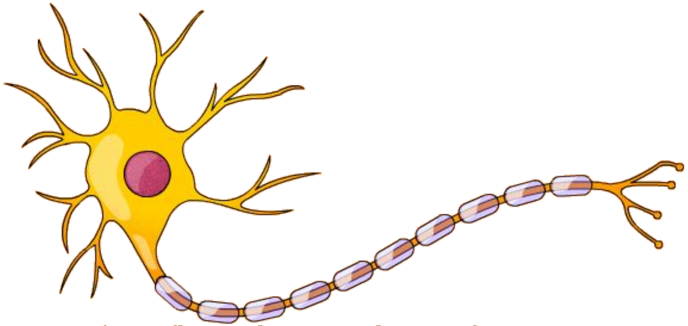
Regressão Logística

Regressão logística

$$z = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_K w_K + b$$



É um neurônio artificial



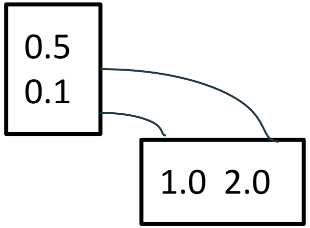
Alcione de Paiva Oliveira - DPI/UFV (baseado em Andrew Ng)

Regressão Logística

Regressão logística: Exemplo

- Vetor com valor de salário e valor pedido de empréstimo (em unidade de milhar) $\boldsymbol{x} = \{1,2\}$ e um vetor de pesos $\boldsymbol{w} = \{0.5, 0.1\}$ e uma constante $b=0.1$, então z, definida como $z = \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} + b$ é

$$1\times 0.5 + 2\times 0.1 + 0.1 = 0.8$$



- Ao aplicarmos a função logística (função de ativação) σ à z obtemos um valor entre 0 e 1:

$$\sigma(z) = \sigma(z = \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} + b) = 1/(1+e^{-0.8}) = 0.69$$

Regressão Logística

Regressão logística

- Mas como saber se o valor emitido está correto?
- O valor de 0.69 (69%) para emprestar para uma pessoa que ganha mil Reais e pediu dois mil empréstimos está correto?
- Como é feito o ajuste (aprendizado) da regressão logística?

Regressão Logística

Regressão logística

- O aprendizado é feito por meio do ajuste dos pesos.
- O ajuste é feito por meio da correção em etapas, dos pesos, a partir erro apresentado na saída de exemplos, cuja saída é conhecida (aprendizado supervisionado)

Regressão Logística

Função de perda (loss function)

$\hat{y}$ = σ ($z = \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} + b$) onde σ ($z$) = $1/(1+e^{-z})$

Dado um conjunto C= $\{(\boldsymbol{x}^{(1)},y^{(1)}),\ldots,(\boldsymbol{x}^{(m)},y^{(m)})\}$ queremos que $\hat{y}^{(i)} \approx y^{(i)}$.

A loss function $L(\hat{y},y)$ indica o quanto se errou.

Existem várias funções de perda:

Por que elevar ao quadrado?

$L(\hat{y},y) = 1/\mathrm{n} \sum_{i \in C}(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2$ (Erro Médio Quadrático - MSE)

*Mas não é uma boa lf

Regressão Logística

Função de perda (loss function)

$\hat{y}$ = σ ($z = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + b$) onde σ ($z$) = $1/(1+e^{-z})$

Dado um conjunto $C = \{(\mathbf{x}^{(1)},y^{(1)}),\ldots,(\mathbf{x}^{(m)},y^{(m)})\}$ queremos que $\hat{y}^{(i)} \approx y^{(i)}$.

A loss function $L(\hat{y},y)$ indica o quanto se errou.

Existem várias funções de perda:

$$L(\hat{y},y) = -(y \log \hat{y} + (1-y) \log(1-\hat{y}))$$ (Logistic loss)

Regressão Logística

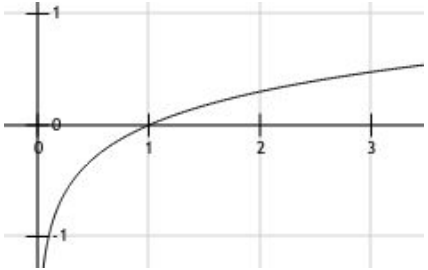
Função de perda (loss function)

$\hat{y} = \sigma\ (z = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + b)$ onde $\sigma\ (z) = 1/(1+e^{-z})$

Dado um conjunto $C = \{(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}), \ldots, (\mathbf{x}^{(m)}, y^{(m)})\}$ queremos que $\hat{y}^{(i)} \approx y^{(i)}$.

A loss function $L(\hat{y}, y)$ indica o quanto se errou.

Existem várias funções de perda:



$$L(\hat{y}, y) = -(y \log \hat{y} + (1-y) \log(1-\hat{y}))$$ (Logistic loss)

Se y = 1 então $\mathscr{L} = -\log \hat{y}$ e para minimizar a perda $\hat{y}$ precisa ser grande
Se y = 0 então $\mathscr{L} = -\log(1-\hat{y})$ e para minimizar a perda $\hat{y}$ precisa ser pequeno

Regressão Logística

Função de perda (loss function)

$\hat{y} = \sigma(z = \mathbf{w}^T\mathbf{x} + b)$ onde $\sigma(z) = 1/(1+e^{-z})$

Dado um conjunto $C = \{(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}), \ldots, (\mathbf{x}^{(m)}, y^{(m)})\}$ queremos que $\hat{y}^{(i)} \approx y^{(i)}$.

A loss function $L(\hat{y}, y)$ indica o quanto se errou.

Existem várias funções de perda:

$$J(\mathbf{w}, b) = 1/m \sum_{i \in C}(\mathscr{L}(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}) = -1/m \sum_{i \in C}[y^{(i)} \log \hat{y}^{(i)} + (1-y^{(i)}) \log(1-\hat{y}^{(i)})]$$

Regressão Logística

Regressão logística (**Gradiente descendente**)

- **Uma vez detectado o erro como ajustar a função para minimizar o erro?**

Ajustando os pesos w

- Podemos ajustar os pesos alterando no sentido inverso da inclinação do hiperplano do erro. (Gradient Descent)
- Obtemos a inclinação derivando (ou obtendo a *derivada direcional* no caso de vetor) a função de perda.

Regressão Logística

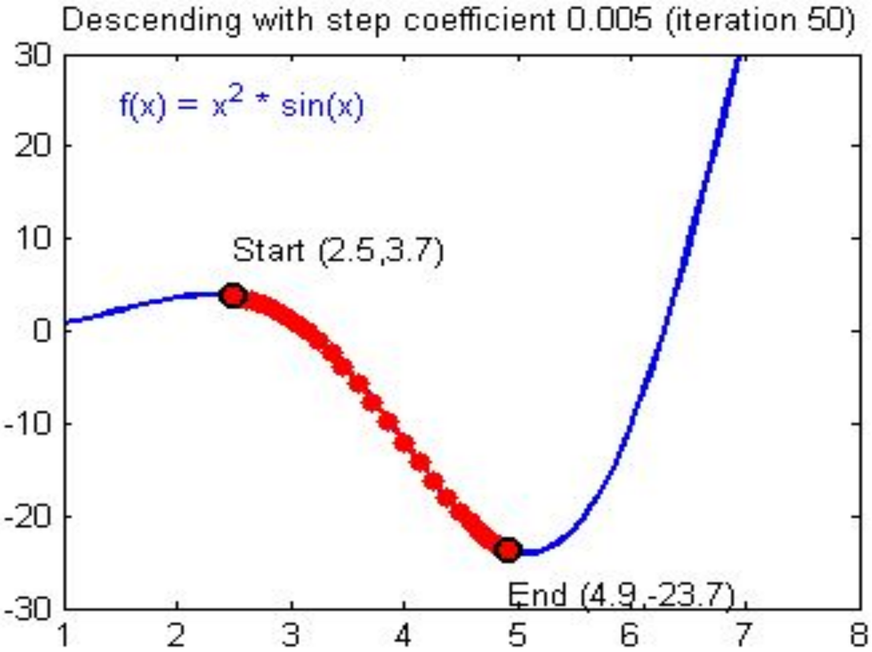
Regressão logística (**Gradiente descendente**)

$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

No ponto (*2.8,2.6*) f'(x) = -5.511

Então ajustamos no sentido inverso:

x= 2.8 -(0.005 × -5.511) = 2.82



Regressão Logística

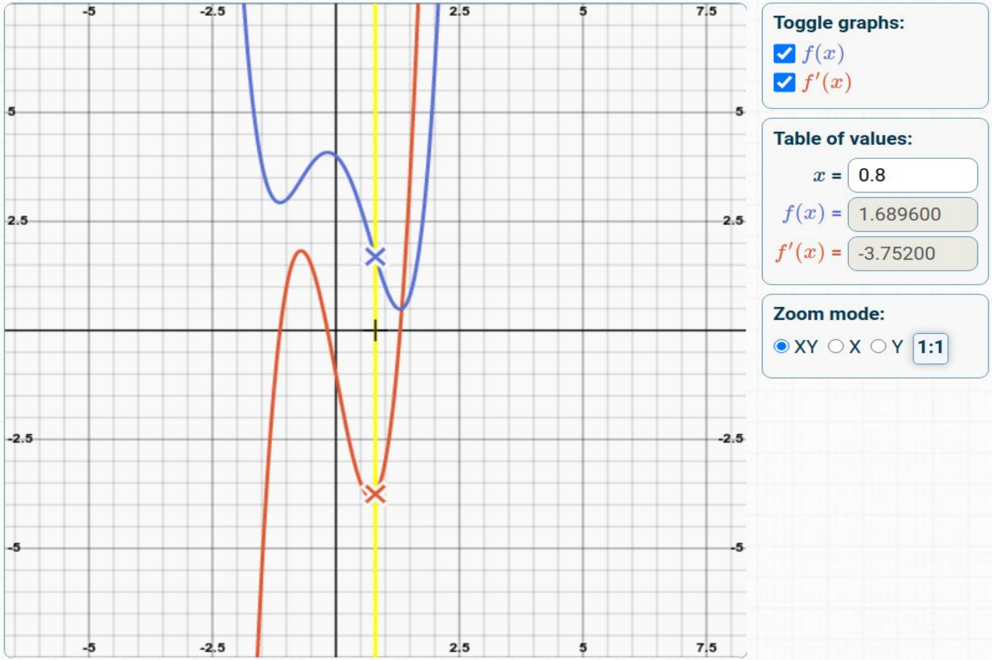
Regressão logística (**Gradiente descendente**) **Outro Exemplo**

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 1$$

Se ajustarmos ajustamos com alpha muito grande, iremos passar o ponto mínimo:

x= 0.8 -(0.3 × -3.75) = 1.9



https://www.derivative-calculator.net/

Regressão Logística

Regressão logística (**Gradiente descendente**)

- No caso de vetor e no âmbito do cálculo vetorial a inclinação é dada pelo gradiente da superfície de erro.
- O Gradiente de uma função $f(\mathbf{x})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um vetor da seguinte forma:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

Regressão Logística

Regressão logística (**Gradiente descendente**)

- O que desejamos é onde no ponto a o gradiente é o mais inclinado.
- Ou seja dado um vetor unitário $\boldsymbol{u}$ que parte do ponto qual é a inclinação de $\boldsymbol{u}$. (derivativa direcional)

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} (f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a}))/h$$

Regressão Logística

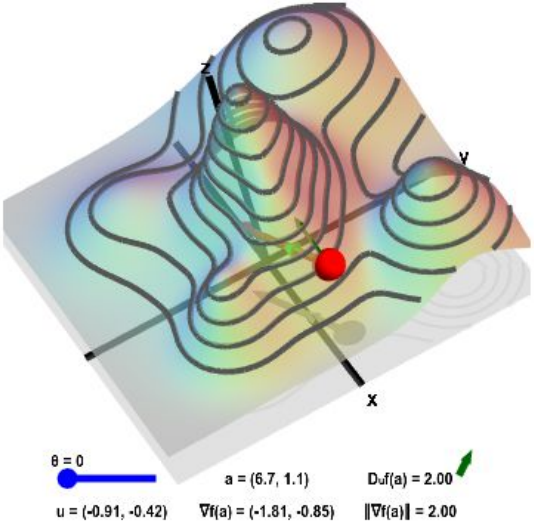
Regressão logística (**Gradiente descendente**)

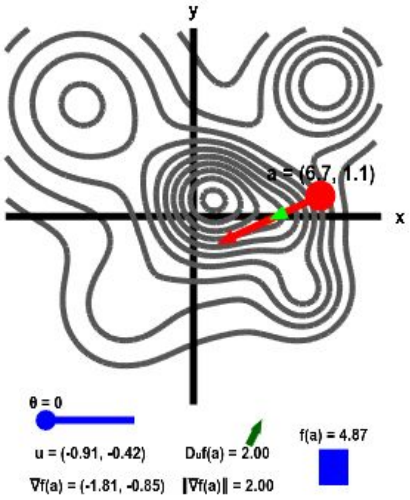
- $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ é máximo (*m* maior inclinação) é dada pela fórmula:

$$D_{\mathbf{m}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) / \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$$

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)



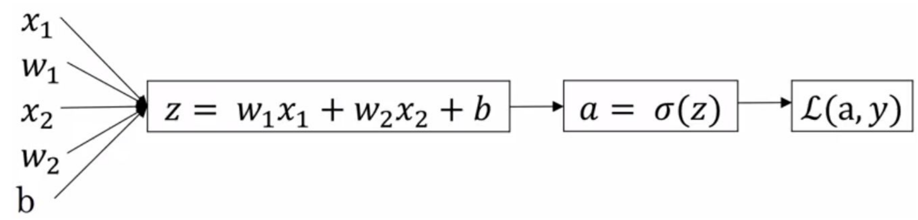


https://mathinsight.org/applet/gradient_directional_derivative_mountain

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

$$z = w^T x + b$$
$$\hat{y} = a = \sigma(z)$$
$$\mathcal{L}(a, y) = -(y \log(a) + (1 - y) \log(1 - a))$$



Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

$$x_1, w_1, x_2, w_2, b \longrightarrow \boxed{z = w_1x_1 + w_2x_2 + b} \longrightarrow \boxed{a = \sigma(z)} \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}(\mathrm{a}, y)}$$

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

x_1, w_1, x_2, w_2, b $\rightarrow$ $\boxed{z = w_1x_1 + w_2x_2 + b}$ $\rightarrow$ $\boxed{a = \sigma(z)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}(a, y)}$

$$\partial z = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial z} = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial z}$$

$$\partial a = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial a} = -\frac{y}{a} + \frac{1-y}{1-a}$$

Onde: $\frac{\partial a}{\partial z} = a(1-a)$

Logo: $\partial z = a - y$

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

Regra da cadeia

Seja $F = f \circ g$, ou de forma equivalente, $F(x) = f(g(x))$, então

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

ou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

Regra da cadeia

Exemplo: $y = e^{\sin x^2}.$

$$y = f(u) = e^u, \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = e^u, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

$$u = g(v) = \sin v, \qquad \frac{du}{dv} = g'(v) = \cos v,$$

$$v = h(x) = x^2. \qquad \frac{dv}{dx} = h'(x) = 2x.$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

x_1, w_1, x_2, w_2, b

$$\boxed{z = w_1x_1 + w_2x_2 + b} \rightarrow \boxed{a = \sigma(z)} \rightarrow \boxed{\mathcal{L}(a, y)}$$

$$\partial z = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial z} = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial z}$$

$$\partial a = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial a} = -\frac{y}{a} + \frac{1-y}{1-a}$$

Onde: $\frac{\partial a}{\partial z} = a(1-a)$

Logo: $\partial z = a - y$

$$\frac{\partial z}{\partial w_1} = dw_1 = x_1 dz \qquad dw_2 = x_2 dz \qquad db = dz$$

Regressão Logística

Regressão logística (Gradiente descendente)

$$x_1,\ w_1,\ x_2,\ w_2,\ b \rightarrow \boxed{z = w_1x_1 + w_2x_2 + b} \rightarrow \boxed{a = \sigma(z)} \rightarrow \boxed{\mathcal{L}(a, y)}$$

$$\partial z = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial z} = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial z} \qquad \partial a = \frac{\partial \ell(a,y)}{\partial a} = -\frac{y}{a} + \frac{1-y}{1-a}$$

Onde: $\frac{\partial a}{\partial z} = a(1-a)$ Logo: $\partial z = a - y$

$$w_1 := w_1 - \alpha\, dw_1$$
$$w_2 := w_2 - \alpha\, dw_2$$
$$b := b - \alpha\, db.$$

$$\frac{\partial z}{\partial w_1} = dw_1 = x_1 dz \qquad dw_2 = x_2 dz \qquad db = dz$$

Regressão Logística

FIM