# BPI 2021

## Etap 1
## Zestaw 2

## MATEMATYKA

**Zadanie 1.** Dane są dwa ciągi nieskończone: ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 4$ i różnicy $r = 3$ oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $b_1 = 10$ i ilorazie $q = 2$. Wyznaczyć wzór ogólny ciągu rosnącego , złożonego ze wszystkich wyrazów należących do obu ciągów równocześnie.

**Zadanie 2.** Dla jakich całkowitych wartości parametru *m* równanie

$$(m-2)x^2 - (m+1)x - m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn jest liczbą całkowitą?

**Zadanie 3.** Prosta *l* o równaniu $y = x + 1$ przecina parabolę $y = x^2 + 3x - 2$ w punktach *A* i *B*. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty *A* i *B* wiedząc, że środek okręgu leży na stycznej do danej paraboli, która jest równoległa do prostej *l*.

**Zadanie 4.** W sferę o promieniu $R = 6$ wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny w ten sposób, że wszystkie wierzchołki ostrosłupa leżą na powierzchni sfery. Obliczyć objętość tego ostrosłupa wiedząc, że jego krawędzie boczne są prostopadłe względem siebie.

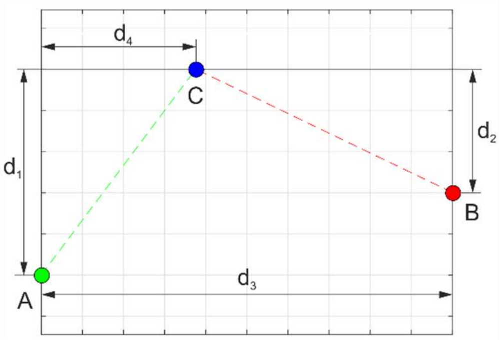
**Zadanie 5.** Dla jakich wartości parametru *m* równanie

$$\log_2(x+1) - 2\log_4 x = \log_2 m$$

ma pierwiastek należący do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}\ ,\ 3 \right)$ ?

## INFORMATYKA

**Zadanie 1.** Robot ma poruszać się po układzie jak na rysunku 1 i pokonywać drogę z miejsca stacjonowania C do punktów A i B gdzie ma wykonywać pewne czynności. W dowolnym języku programowania lub w pseudokodzie opracuj program, który dla zadanych długości $d_1$, $d_2$ oraz $d_3$ umożliwi wyznaczenie położenia punktu C względem punktu A (długość $d_4$) w taki sposób, aby suma dróg robota |AC| + |BC| była najkrótsza.




Rys. 1. Schemat do analizy położenia punktów charakterystycznych drogi robota

**Zadanie 2.** Dana jest następująca tablica zawierająca bajty zapisane szesnastkowo:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0x5C | 0x4F | 0x44 | 0x4E | 0x49 | 0x52 | 0x56 | 0x4F | 0x5C | 0x49 | 0x5C | 0x00 |

Tablica ta zawiera zaszyfrowane jedenastoliterowe słowo w formacie ASCII. Każdy bajt słowa został zaszyfrowany przy użyciu klucza oraz operatora alternatywy wykluczającej (XOR). Ostatni bajt tablicy jest null terminatorem (bajtem zerowym oznaczającym koniec ciągu znaków) i nie został zaszyfrowany.

Wiedząc, że:

1. klucz jest ośmiobitowy,
2. funkcja skrótu (hash) zaimplementowana na listingu 2 (zapis w języku C++):
   dla odszyfrowanego słowa daje wartość hash równą 0x112EA189 (zapis szesnastkowy),

napisz program do odszyfrowania słowa metodą bruteforce i odpowiedz na poniższe pytania:

```
unsigned int hash = 1;

for (int i = 0; i < 11; i++)
{
        hash *= tablica[i];
        hash /= 12;
}
```

a) Jaka jest liczba wszystkich możliwych kluczy?

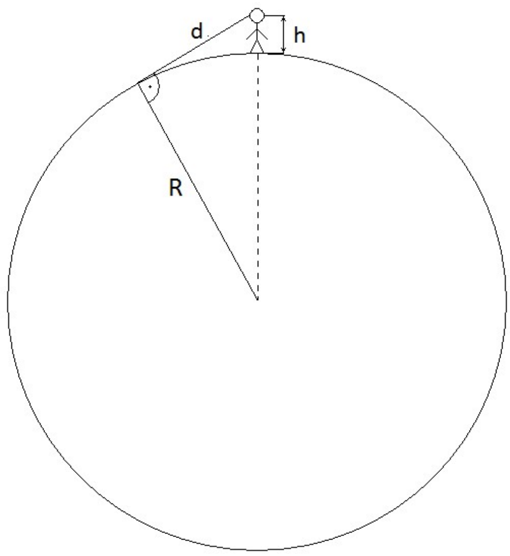
b) Jakie jest odszyfrowane słowo? Jaki jest klucz?

c) Jaka jest suma wszystkich bajtów odszyfrowanego słowa?

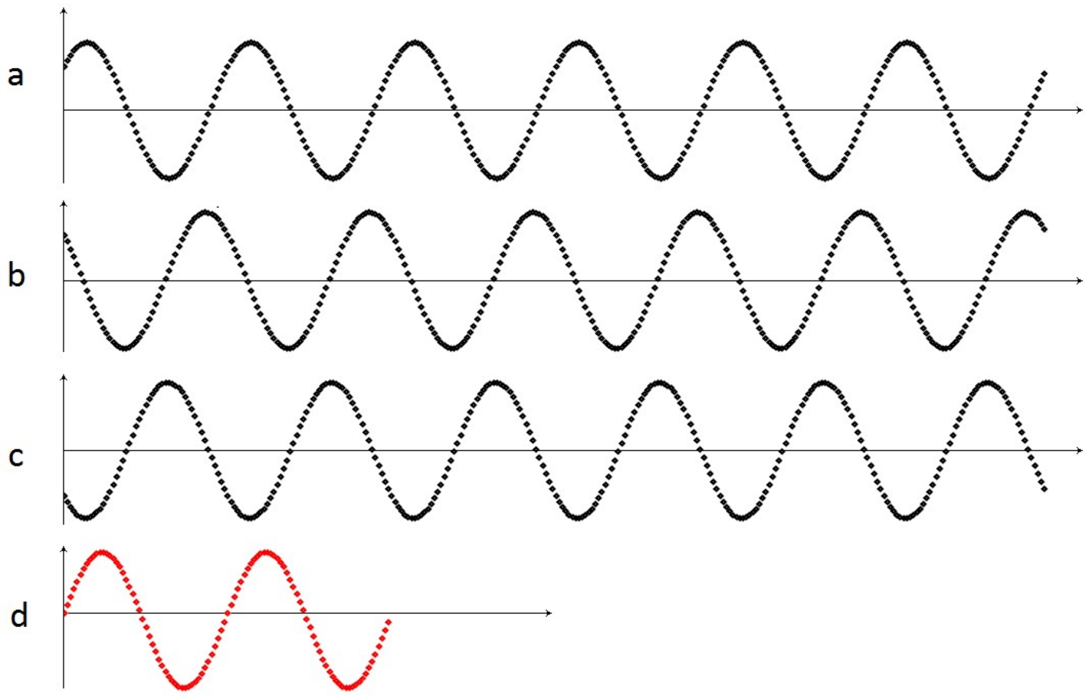
**Zadanie 3.** Obok przedstawiono kod programu, który „odwiedza” wybrane komórki dwuwymiarowej tablicy i kasuje wartość tych komórek. Wypisz kolejne litery, które zostaną skasowane w tablicy. Litery wypisz posortowane od najmniejszej sumy indeksów.

```cpp
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
	char tab[5][10] = {
		{'a', 'b', 'c', 'd', 'f', 'g', 'i', 'k', 'j', 'l'},
		{ 'c', 'f', 'C', 'f', 'i', 'e', 'i', 'k', 'Z', 'M' },
		{ 'd', 'f', 'o', 'd', 'g', 'W', 'I', 'p', 'M', 'N' },
		{ 'g', 't', 'O', 'R', 'p', 'W', 'l', 'D', 'S', 'E' },
		{ 'h', 'r', 'm', 'Z', 'A', 'W', 'L', 'P', 'A', 'E' }
	};

	for (int i = 0; i < 5; i++)
	{
		for (int j = 8; j > 0; j--)
		{
			if ((i%j >= j / 2) && (j % (i + 1) == i) || (tab[i][j] == 'W'))
				tab[i][j] = 0;
		}
	}

    return 0;
}
```

**Zadanie 4.** Napisz program w języku C++ który po podaniu przez użytkownika promienia dowolnej planety ‘R’ (w kilometrach) oraz wysokości na jakiej znajduje się wzrok obserwatora ‘h’ (w metrach), będzie obliczał jak daleko znajduje się horyzont ‘d’. Odległość horyzontu należy podać w kilometrach. Rysunek przedstawia szkic z osobą i planetą.




**Zadanie 5.** Urządzenie mierzy przebieg sygnału sinusoidalnego, a następnie wynik pomiaru zapisuje w postaci tabeli zawierającej 500 elementów (punktów przebiegu). Problem w tym, że za każdym razem pomiar zaczyna się w innym momencie sinusoidy (rys. 3 a, b, c). Napisz pseudokod, który po każdym pomiarze będzie wycinał ze zmierzonego przebiegu ten sam fragment sinusoidy i rysował go na wykresie. Wycinany fragment (rys. 3 d) ma zaczynać się w momencie przejścia przebiegu przez wartość ‘0’ i zawierać dwa okresy mierzonego przebiegu. Jeden okres składa się z 50 punktów.




Rys. 3 Kolejne przebiegi otrzymywane po przeprowadzeniu pomiaru

## FIZYKA

**Zadanie 1.** Danie z pomiarów promieniowania słonecznego (http://geomodelsolar.eu/) pokazują, że w naszym regionie nasłonecznienie, czyli sumaryczna energia promieniowania słonecznego przypadająca na 1 $m^2$ wynosi ok 900 $kWh/m^2$/rok. Oblicz jaką powierzchnię powinny mieć ogniwa fotowoltaiczne by zaspokoić zapotrzebowanie twojego domu w energię elektryczną (sprawdź rachunki!). Pamiętaj, że ogniwa takie pracują ze sprawnością raczej nie większą niż 15% oraz, że konieczny proces magazynowania i oddawania energii (noc, dni pochmurne) powoduje dalsze około 25% straty. Pomińmy w rozważaniach fakt, że nasłonecznienie w ciągu zimy jest aż 7 razy mniejsze niż latem, co wymagałoby zwiększenia powierzchni albo znalezienia sposobu na gromadzenie dużej ilości energii na długi czas.

**Zadanie 2.** Oblicz ile wody można by doprowadzić do wrzenia za pomocą akumulatora z telefonu o pojemności 1500mAh i napięciu 3,5V. Przyjmij, że podczas pracy napięcie się nie zmienia aż do kompletnego rozładowania.

**Zadanie 3.** Sprawność mechaniczną organizmu człowieka szacuje się na ok 25% to znaczy, że pozostałe 75% energii chemicznej przekształcane jest na ciepło. Rozważmy amatora biegów trenującego podbiegi na schodach wieżowca o wysokości 100 m (30 pięter). O ile stopni powinna wzrosnąć temperatura biegacza gdyby organizm nie oddawał ciepła

otoczeniu? Jaka ilość wody zostałaby odparowana gdyby założyć, że tylko w ten sposób (przez pocenie) organizm jest chłodzony? W drugim przypadku zakładamy, że temperatura biegacza nie wzrosła.

**Zadanie 4.** Gumową piłeczkę upuszczamy z wysokości jednego metra na powierzchnię od której się odbija ze skutecznością (sprawnością) 90%. Zakładając ruch idealnie pionowy oraz inne ewentualne idealizacje oblicz całkowitą odległość jaką pokona piłeczka do całkowitego zatrzymania

**Zadanie 5.** Przypuśćmy, że 1 g wodoru (pod ciśnieniem atmosferycznym zajmuje on objętość ok 10 litrów) zostaje rozdzielonych na protony i elektrony oraz przypuśćmy, że protony zostają umieszczone na biegunie północnym Ziemi a elektrony na południowym czyli w odległości 13000 km. Z jaką siłą ściskającą Ziemię mielibyśmy wówczas do czynienia?