Liczby wielowymiarowe

Igor Józefowicz

Politechnika Gdańska

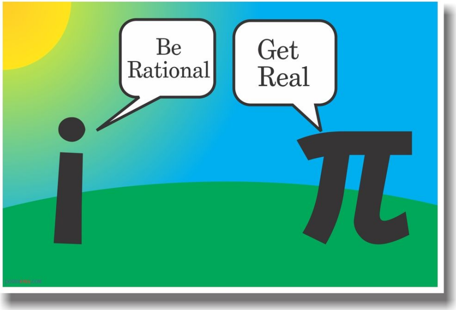
3 listopada 2025

Plan prezentacji

1. Motywacja i historia
2. Liczby zespolone $\mathbb{C}$
3. Kwaterniony $\mathbb{H}$
4. Konstrukcja Cayley–Dicksona
5. Oktoniony (ciekawostka)
6. Porównanie i podsumowanie

Dlaczego w ogóle "liczby wielowymiarowe"?

- Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ opisują długości, pomiary, ciągłe wartości.
- Ale równanie $x^2 + 1 = 0$ **nie ma** rozwiązania w $\mathbb{R}$.
- Dodajemy więc nowy obiekt i taki, że $i^2 = -1$.
- Dostajemy liczby zespolone $\mathbb{C}$, które są już **dwuwymiarowe**.
- Potem przejdziemy do 4 wymiarów (kwaterniony) i 8 wymiarów (oktoniony).



Źródło: `https://www.thepromptmag.com/wp-content/uploads/2018/09/imaginary-numbers.jpeg`

Krótka historia

- XVIII w.: Euler, Gauss – zdefiniowanie liczb zespolonych.
- 1843: William Rowan Hamilton wprowadza **kwaterniony** $\mathbb{H}$.
- 1845: Cayley i Graves konstruują **oktoniony** $\mathbb{O}$.

Euler

Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_-_Jakob_Emanuel_Handmann_(Kunstmuseum_Basel).jpg

Gauss

Źródło: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Hamilton

Źródło: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_portrait_oval_combined.png

Definicja liczb zespolonych

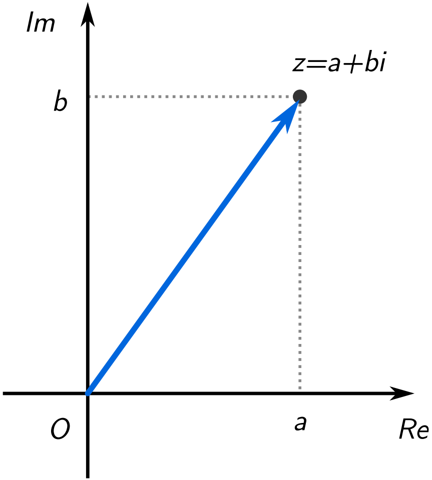
Definicja

$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$

- a – część rzeczywista, $\Re(z)$,
- b – część urojona, $\Im(z)$.
- Każde $z = a + bi$ to punkt (a, b) na płaszczyźnie.

Wniosek: $\mathbb{C}$ jest **2-wymiarową** przestrzenią nad $\mathbb{R}$.

Sprzężenie: $\overline{a + bi} = a - bi.$
Moduł: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$



Źródło: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complex_number_illustration.svg`

Działania w $\mathbb{C}$

Niech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

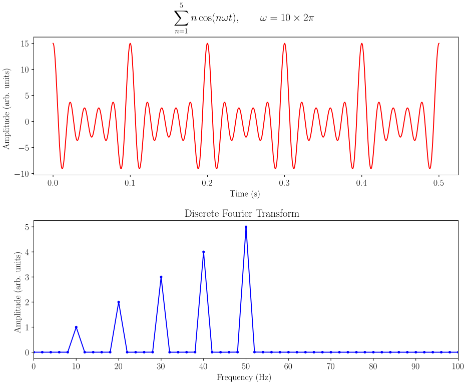
- Dodawanie:
$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$
- Mnożenie:
$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
- Dzielenie:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Własność kluczowa:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{oraz} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Zastosowania liczba zespolonych: Przetwarzanie sygnałów

- Liczby zespolone są fundamentalne w analizie sygnałów (dźwięk, obraz, radio).
- Wzór Eulera $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ pozwala reprezentować sygnał jako sumę fal o danej amplitudzie i fazie.



Źródło: *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FFT_of_Cosine_Summation_Function.svg*

Zastosowania liczb zespolonych: Sieci neuronowe

- **Zespolone sieci neuronowe** (Complex-Valued Neural Networks, CVNN) to rozszerzenie klasycznych sieci, gdzie wagi, biasy i aktywacje są liczbami zespolonymi.
- **Zalety:**
  - Naturalnie przetwarzają dane zespolone, np. z radaru, sonaru, MRI, zachowując informację o fazie.
  - Pojedynczy neuron zespolony może być bardziej wyrazisty niż dwa neurony rzeczywiste.
  - Lepsze zdolności do generalizacji w problemach z falami i oscylacjami.

Pytanie Hamiltona:
czy da się zrobić coś jak liczby zespolone, ale dla pełnych obrotów 3D?

Odpowiedź:

Definicja

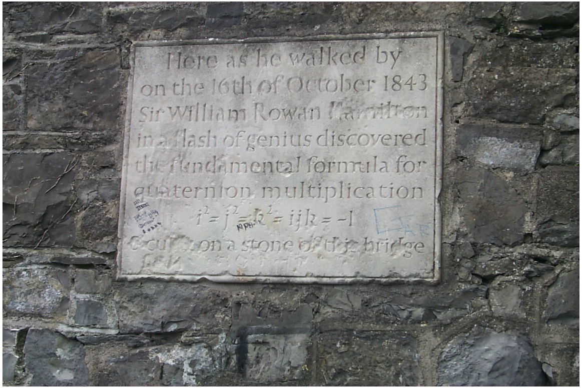
$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ gdzie jednostki i, j, k spełniają

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

- To już **4-wymiarowa** przestrzeń nad $\mathbb{R}$.
- Każdy kwaternion ma część skalarną (a) i wektorową $((b, c, d))$.

Hamilton i Broom Bridge (1843)

Anegdota: 16 października 1843 Hamilton wyrył wzór $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ na moście Broom Bridge w Dublinie.



Źródło: *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/Broom_bridge_plaque.jpg*

Tabela mnożenia

Podstawowe reguły:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Dowód: mnożenie kwaternionów nie jest przemienne

Teza

W $\mathbb{H}$ zachodzi $ij \neq ji$.

Dowód.

Z definicji jednostek $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ mamy $ij = k$ oraz $ji = -k$, zatem $ij \neq ji$. □

Wniosek: Mnożenie kwaternionów **nie jest przemienne**.

Działania w $\mathbb{H}$

Niech $q_1 = a + bi + cj + dk, \quad q_2 = e + fi + gj + hk.$

- Dodawanie: współrzędnie, jak w $\mathbb{R}^4$.
- Mnożenie: korzystamy z tabelki $ij = k$, $ji = -k$, itd.
- Sprzężenie:
$$\overline{q} = a - bi - cj - dk.$$
- Norma:
$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$
- Odwrotność (jeśli $q \neq 0$):
$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}.$$

Ważne: Każdy niezerowy kwaternion ma odwrotność.
To znaczy, że w $\mathbb{H}$ można **dzielić**.

Kwaterniony a rotacje 3D

Cel praktyczny: opisać obrót wektora 3D bez niestabilności numerycznych.

Kwaternion jednostkowy q (tzn. $\|q\| = 1$) reprezentuje pewien obrót w przestrzeni 3D.

Jeśli mamy wektor $\vec{v}$, traktujemy go jako czysto wektorowy kwaternion $0 + v_x i + v_y j + v_z k$ i liczymy:

$$\vec{v}' = q\,\vec{v}\,q^{-1}.$$

Własność kluczowa: długość $\|\vec{v}\|$ się nie zmienia. To znaczy: to jest *czysty obrót*, bez rozciągania.

Dlatego kwaterniony są używane w **Unity, Blenderze, silnikach gier, dronach, nawigacji satelitarnej**.

Stabilność numeryczna / Euler vs kwaterniony

- W opisie obrotu przez kąty Eulera pojawia się problem **gimbal lock** (dwie osie pokrywają się i tracimy jeden stopień swobody).
- Kąty Eulera są też podatne na kumulację błędu przy wielokrotnych obrotach/aktualizacjach.
- Kwaterniony jednostkowe można po prostu normalizować (sprowadzać z powrotem do długości 1) i zachować stabilność obrotu numerycznie.

W praktyce: silniki gier i narzędzia 3D trzymają orientację obiektu właśnie jako kwaternion, nie jako $(yaw, pitch, roll)$.

Kwaterniony jako macierze 2×2 zespolone

Istnieje odwzorowanie

$$a + bi + cj + dk \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

- Mnożenie kwaternionów odpowiada mnożeniu tych macierzy.
- Norma kwaternionu wiąże się z wyznacznikiem takiej macierzy.
- To połączenie pokazuje, że kwaterniony są głęboko związane z macierzami obrotu i ogólnie z algebrą macierzową.

Podwajanie wymiaru: konstrukcja Cayley–Dicksona

- Istnieje ogólny sposób budowania kolejnych systemów liczbowych przez **podwajanie wymiaru**.
- Zaczynamy od $\mathbb{R}$ (1 wymiar).
- Robimy z tego uporządkowaną parę liczb rzeczywistych: dostajemy $\mathbb{C}$ (2 wymiary).
- Potem pary liczb zespolonych $\Rightarrow$ kwaterniony $\mathbb{H}$ (4 wymiary).
- Potem pary kwaternionów $\Rightarrow$ oktoniony $\mathbb{O}$ (8 wymiarów).

Ten proces nazywa się **konstrukcją Cayley–Dicksona**.

Co tracimy przy każdym podwojeniu?

- $\mathbb{R}$: uporządkowane, przemienne, łączne, można dzielić.
- $\mathbb{C}$: nie jest już "uporządkowane" w sensie zgodnym z mnożeniem, ale nadal przemienne i łączne, można dzielić.
- $\mathbb{H}$: **nie jest przemienne**, ale nadal łączne, można dzielić.
- $\mathbb{O}$: **nie jest przemienne ani łączne**, ale jest tzw. "alternatywne" i nadal można dzielić.

Dalej (16 wymiarów: **sedeniony**) tracimy nawet możliwość dzielenia: pojawiają się dzielniki zera $\Rightarrow$ algebra psuje się dla zastosowań numerycznych.

Tabela własności

	Wymiar	Uporządk.	Przem.	Łączne	Dzielenie	Brak dzieln. zera
$\mathbb{R}$ (rzeczywiste)	1	tak	tak	tak	tak	tak
$\mathbb{C}$ (zespolone)	2	nie	tak	tak	tak	tak
$\mathbb{H}$ (kwaterniony)	4	nie	nie	tak	tak	tak
$\mathbb{O}$ (oktoniony)	8	nie	nie	nie	tak	tak
sedeniony itd.	16	nie	nie	nie	**nie**	**nie**

inspiracja: klasyczna tabela własności algebr Cayley–Dicksona

Oktoniony w skrócie

- Oktoniony $\mathbb{O}$ są 8-wymiarowe i mają 7 “jednostek urojonych”.
- Mnożenie nie jest już nawet łączne, ale ciągle można dzielić (nie ma dzielników zera).

Zastosowania:

- teoretyczna fizyka wysokich energii, symetrie wyjątkowe,
- matematyka czysto abstrakcyjna.

W praktyce inżynierskiej (grafika 3D, robotyka, Unity, Blender): **używamy kwaternionów, nie oktonionów.**

Różnice w działaniach

- W $\mathbb{C}$: mnożenie jest przemienne ($zw = wz$).
- W $\mathbb{H}$: mnożenie **nie** jest przemienne ($ij = k$, ale $ji = -k$), ale jest łączne.
- W $\mathbb{O}$: nawet łączność upada, tzn. $(ab)c \neq a(bc)$ w ogólności.

Intuicja: Im większy wymiar (2,4,8,16,. . .), tym więcej swobody, ale płacimy za to utratą przydatnych własności algebraicznych.

Dlaczego w praktyce wygrywają kwaterniony?

- Mają skończoną, zwartą reprezentację obrotu 3D.
- Dają się stabilnie normalizować numerycznie.
- Nie mają problemu gimbal lock, w przeciwieństwie do kątów Eulera.
- Są wspierane natywnie przez silniki gier (Unity), narzędzia 3D (Blender), biblioteki grafiki, kontrolery lotu dronów.
- Nadal można je mnożyć i dzielić (czyli mamy sensowną algebrę).

Wniosek praktyczny: kwaterniony to nie tylko ciekawostka matematyczna. To narzędzie inżynierskie.

Podsumowanie

- Liczby wielowymiarowe powstają przez kolejne rozszerzenia:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to \mathbb{O} \to \dots$$

  (konstrukcja Cayley–Dicksona).
- Każde rozszerzenie podwaja wymiar, ale **psuje** jakąś własność (najpierw "porządek", potem przemienność, potem łączność itd.).
- Kwaterniony są kluczowe praktycznie: opisują obroty 3D w stabilny numerycznie sposób.
- Oktoniony i dalej są głównie ciekawostką teoretyczną (fizyka teoretyczna, struktury wyjątkowe), bo tracimy już zbyt wiele własności.

Źródła

- Wikipedia, *Quaternion*, https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion
- Wikipedia, *Quaternions and spatial rotation*, https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation
- Wikipedia, *Gimbal lock*, https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock
- Wikipedia, *Octonion*, https://en.wikipedia.org/wiki/Octonion
- Wikipedia, *Cayley–Dickson construction*, https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Dickson_construction
- 3Blue1Brown, *Quaternions and 3d rotation, explained interactively*, https://youtu.be/zjMuIxRvygQ
- 3Blue1Brown, *Visualizing the 4d numbers Quaternions*, https://youtu.be/d4EgbgTm0Bg
- Dokumentacja Unity i Blender: reprezentacja rotacji przez kwaterniony.