

## POMORSKA LIGA ZADANIOWA ZDOLNI Z POMORZA

Konkurs dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych  
województwa pomorskiego w roku szkolnym 2020/2021

### Etap III – wojewódzki

Przedmiot: MATEMATYKA – część I (PIERWSZA)

Czas przewidziany na rozwiązanie zadań konkursowych: godz. 8:00 – 8:50 (50 minut)

Dodatkowy czas przewidziany na czynności organizacyjne: godz. 8:50 – 9:00 (10 minut)

### Instrukcja dla ucznia

**Zanim przystąpisz do rozwiązywania testu, przeczytaj uważnie poniższą instrukcję.**

1. Arkusz składa się z 2 stron i zawiera 3 zadania (numerowane od 1 do 3).
2. Na rozwiązanie zadań części pierwszej masz 50 minut. Dodatkowo 10 minut jest przeznaczonych na zrobienie skanu pracy lub zdjęć i wysłanie rozwiązań zadań.
3. Za rozwiązanie trzech zadań w tej części możesz uzyskać maksymalnie 30 punktów – za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz maksymalnie dostać 10 punktów.
4. Rozwiązania i odpowiedzi zapisz na własnych kartkach. Staraj się, żeby Twoje odpowiedzi były precyzyjne i jednoznaczne. Na każdej kartce z rozwiązaniami zapisz swoje imię i nazwisko.
5. Pisz samodzielnie.
6. Pisz czytelnie. Nie używaj korektora i ołówka. Rozwiązania zadań przedstaw w takiej formie, żeby można było odczytać je bez problemu.
7. Wszystkie rozwiązania zadań zamieść jako załączniki (w formacie \*.doc, \*.docx, \*.pdf) w jednym lub co najwyżej dwóch przesłankach mailowych. Załączone pliki powinny mieć nazwę: *imię\_nazwisko\_miejscowość*. List elektroniczny z rozwiązaniami zadań prześlij na adres mailowy: [matematyka\\_plz\\_Pp@odn.slupsk.pl](mailto:matematyka_plz_Pp@odn.slupsk.pl).
8. W treści wysyłanego listu elektronicznego podaj swoje dane identyfikacyjne tzn. imię, nazwisko, nazwę szkoły i adres szkoły. Uczestnik zobowiązany jest podać tytuł wiadomości zgodny z wzorem: np. Kowalski Jan – matematyka – szkoła – ponadpodstawowa.
9. Czas przeznaczony na odbiór treści zadań, lekturę instrukcji oraz przygotowanie i wysłanie rozwiązań nie jest zaliczany do czasu przeznaczonego na rozwiązanie zadań. Czas przeznaczony na te czynności wynosi: 10 minut.

**Życzymy powodzenia!**



### Zadanie 1. (0-10 p.)

Dany jest trójkąt  $PRT$ . Współrzędne punktu  $P$  są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Punkty  $R$  i  $T$  otrzymujemy w wyniku przekształcenia jednokładnego punktu  $P$  względem środka jednokładności  $S(3;0)$ , tj.  $R = J_{S(3;0)}^{k=3}(P)$ ,  $T = J_{S(3;0)}^{k=-1}(P)$ . Przez środek odcinka  $RT$  poprowadzono prostą prostopadłą do odcinka  $RT$ . Przez punkt  $R$  pod kątem  $45^\circ$  do osi  $OX$  poprowadzono prostą. Obie proste przecięły się w punkcie  $Q$ . W ten sposób punkty te wyznaczyły trójkąt  $QRT$ .

Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród punktów o współrzędnych całkowitych, należących do trójkąta  $QRT$ , wybierzemy 3 punkty, które będą spełniały warunek:  $|y - 4| < x$ ?

Przedstaw tok swojego rozumowania i obliczenia.

### Zadanie 2. (0-10 p.)

a) Dane są wielomiany  $W(x) = x^4 - (k - 1)(k + 2)x^3 - (k + 1)x^2 + 3(k - 1)x + 5$  oraz  $Q(x) = x^2 - 1$ . Dla jakiej dodatniej wartości  $k$  dzielenie wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $Q(x)$  daje resztę:  $-x + 3$ ? Zapisz ten wielomian.

Przedstaw swoje obliczenia.

b) Współczynniki wielomianu  $W(x)$  przy zmiennych o wykładnikach nieparzystych są pierwszymi wyrazami ciągu rekurencyjnego: 
$$\begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}.$$

Wyznacz  $a_{2021}$ ,  $S_{2021}$ .

Przedstaw swój tok rozumowania i obliczenia.

### Zadanie 3. (0-10 p.)

Dwie grupy turystów wyruszają jednocześnie z miejscowości A do miejscowości B odległych o  $s$  km. Pierwsza grupa idzie początkowo pieszo z prędkością  $p$  km/h. Druga grupa jedzie początkowo autobusem z prędkością  $a$  km/h, a po przejechaniu pewnego odcinka drogi kontynuuje podróż pieszo z prędkością  $p$  km/h. Autobus zawraca i jedzie w kierunku miejscowości A do spotkania z pierwszą grupą, a następnie wiezie ją w kierunku miejscowości B. Obie grupy przybywają do B jednocześnie. Oblicz czas, w którym każda z grup przebyła drogę z A do B.

W rozważaniach pomin czas na wysiadanie i wsiadanie do autobusu.

Przedstaw tok swojego rozumowania i obliczenia.