МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №1
з курсу “Дискретна математика ”

Виконав:
ст. гр. КН-110
Холод Ігор

Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2018

Тема: Побудова матриці бінарного відношення.
Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

Теоретичні відомості:

Декартів добуток множин A і B (позначається $A \times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b \in B$. При цьому вважається, що $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$,

$b_1 = b_2$.

Потужність декартова добутку дорівнює $|A \times B| = |A| \times |B|$

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку A×B (тобто $R \subset A \times B$).

Якщо пара (a, b) належить відношенню R , то пишуть

$(a, b) \in R$, або aRb .

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x| \; \exists y \, (x, y) \in R\}$, а **областю значень** – множина $\rho_R = \{y| \; \exists x \, (x, y) \in R\}$ ($\exists$ - існує).

Для скінченних множин бінарне відношення $R \subset A \times B$ зручно задавати за допомогою **матриці відношення** $R_{m \times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, а $n = |B|$.

Елементами матриці є значення $\begin{cases} 1, \text{якщо } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{якщо } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

Види бінарних відношень.

Нехай задано бінарне відношення R на множині $A^2 : R \subseteq A \times A = \{(a, b)| a \in A, \; b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається **рефлексивним**, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa , тобто $(a,a) \in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.
2. Бінарне відношення R на множині A називається **антирефлексивним**, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa , тобто $(a,a) \notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.
3. Бінарне відношення R на множині A називається **симетричним**, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb слідує bRa , тобто якщо $(a,b) \in R$ то і $(b,a) \in R$.

Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається **антисиметричним**, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається **транзитивним**, якщо для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається **антитранзитивним**, якщо для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується наступним чином: якщо $f \subseteq X \times Y$, то $f : X \to Y$. Множину X називають **областю визначення**, а Y – **множиною значень** функції.

Областю значень функції називається підмножина Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$. Вона позначається символом $f(X)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним образом визначений $y \in Y$, такий що $(x, y) \in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом x при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу x.

Види функціональних відношень:

1. Функція називається **ін'єктивною (ін'єкцією)**, якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$.

Функція ін'єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається **сюр'єктивною (сюр'єкцією)**, якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається **бієктивною (бієкцією)**, якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно. Таку функцію ще називають **взаємно-однозначним відображенням**.

Варіант 13

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$?

Нехай $(x, y) \in (A \cup B) \times (B \cup D) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \& y \in (B \cup D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((x \in A)$ або $(x \in C)) \& ((y \in B)$ або $(y \in D)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((x \in A) \& (y \in B))$ або $((x \in C) \& (y \in D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$
Отже, рівність вірна.

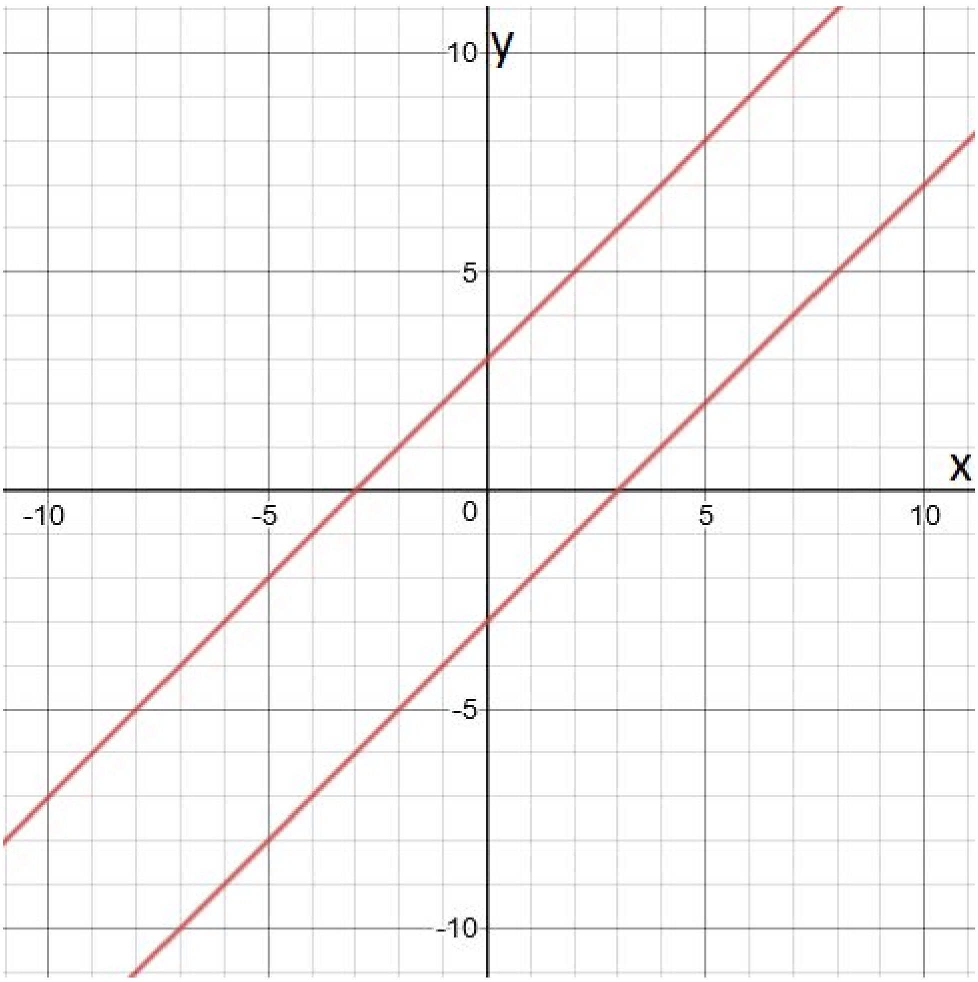
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:
$R = \{(x, y) | x \in M \& x \in y \& |y| > x\}$, де $M = \{x | x \in Z \& |x| \leq 1\}$, Z -множина цілих чисел.

Згідно з означенням матриці відношення, розв'язок має вигляд:

	{Ø}	{1}	{0}	{-1}	{1; 0}	{1; -1}	{0; -1}	{1; 0; -1}
1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1
-1	0	0	0	1	0	1	1	1

3. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \& (x - y)^2 = 9\}$

$(x - y)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$



4. Навести приклад бінарного відношення R ⊂ A× A, де A ={a, b, c, d, e}, яке є не рефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

$R = \{(x,\ y)|\ x,\ y\ \in A\ \&\ (x - y) \neq 0 \text{ або } x = a\}$

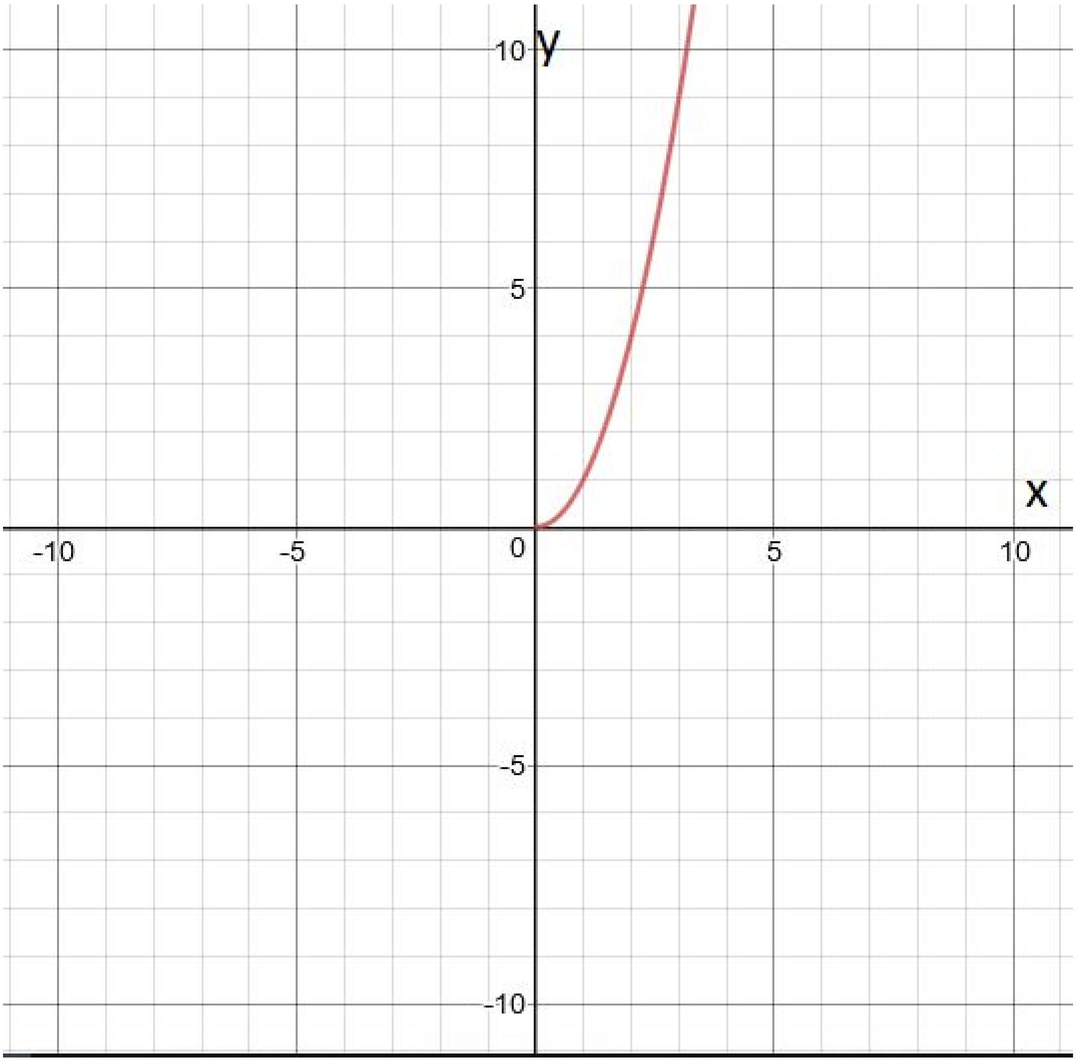
Матриця такого відношення має такий вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{x,\ y)|(x, y) \in R^2 \& \ y = (\sqrt{x})^4\}$

Побудуємо графік даної функції:

$(\sqrt{x})^4 = x^2,$ при $x \geq 0$



Область визначення даної функції: $x \in [0;\ \infty)$, а область значень: $y \in [0;\ \infty)$

З цього графіка видно, що відношення є функціональним на області визначення, бо одному значенню x відповідає лише одне значення y. Відношення також ін'єктивне, оскільки одному значенню y на області значень відповідає лише одне значення x, і сюр'єктивне, оскільки для будь якого y можна знайти x, що $y = f(x)$. Отже дане відношення є бієктивним.

6.Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

$\rho = \{(a, b)|\ a \in A,\ b \in B\ \&\ (2a - b) < 3\}$

Код програми:

```
#include <stdio.h>
#include <locale.h>

int main()
{
	int n; //size of arrays A and B

	//Inputting arrays' size
	printf("Arrays' size: ");
	scanf("%i", &n);

	int A[n], B[n], C[n][n];; //Arrays A and B

	//Inputting arrays A and B
	printf("Input array A:\n");
	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
	printf("A[%i]=", i);
	if((scanf("%i", &A[i])) == 0)
	{
	scanf("%*[^\n]");
	printf("Error. Try again. (use only integer numbers)\n");
	i--;
	}
	}
	printf("Input array B:\n");
	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
	printf("B[%i]=", i);
	if((scanf("%i", &B[i])) == 0)
	{
	scanf("%*[^\n]");
	printf("Error. Try again. (use only integer numbers)\n");
	i--;
	}
	}

```

```
//Printing arrays A and B
printf("Array A: {");
for (int i = 0; i < n; i++)
{
if (i != n - 1)
printf("%i, ", A[i]);
else
printf("%i}\n", A[i]);
}
printf("Array B: {");
for (int i = 0; i < n; i++)
{
if (i != n - 1)
printf("%i, ", B[i]);
else
printf("%i}\n", B[i]);
}

//Building aRb
for (int i = 0; i < n; i++)
for (int j = 0; j < n; j++)
{
if ((2 * A[i] - B[j]) < 3)
C[i][j] = 1;
else
C[i][j] = 0;
}

//Printing aRb
printf("Array aRb:\n");
for (int i = 0; i < n; i++)
{
for (int j = 0; j < n; j++)
printf("%i ", C[i][j]);
printf("\n");
}

printf("Binary relation is: ");
//Checking for different types of aRb

//Reflexivity
int count1 = 0, count0 = 0;
for (int i = 0; i < n; i++)
{
if (C[i][i] == 1)
count1++;
```

```
else
count0++;
}
if (count1 == n)
printf("reflexive,");
else if (count0 == n)
printf("anti-reflexive,");
else
printf("not reflexive,");

//Symmetry
int sim = 1, simc = 0;
for (int i = 0; i < n; i++)
for(int j = 0; j < n; j++)
{
if ((C[i][j] != C[j][i]) && (C[i][j] == 1))
	sim = 0;
	else if ((C[i][j] == C[j][i]) && (C[i][j] == 1) && (i != j))
	simc++;
}
if ((sim == 1) && (simc > 0))
printf(" symmetric,");
else if ((simc == 0) && (sim == 0))
printf(" anti-symmetric,");
else
printf(" not symmetric,");

//Transitivity
int trans = 1, antitrans = 1;
for(int i = 0; i < n; i++)
for(int j = 0; j < n; j++)
	for(int k = 0; k < n; k++)
	{
	if (C[i][j] && C[j][k] && C[i][k] && (i != k) && (i != j))
	antitrans = 0;
	if (C[i][j] && C[j][k] && !C[i][k] && (i != k) && (i != j))
	trans = 0;
	}
if (((antitrans == 1) && (trans == 1)) || ((antitrans == 0) && (trans == 0)))
printf(" and not transitive.\n");
else if (antitrans == 1)
printf(" and anti-transitive.\n");
else if (trans == 1)
printf(" and transitive.\n");
```

```
    return 0;
}
```

Результат виконання при різних тестових прикладах:

```
Array A: {2, 3, 4, 5, 6}
Array B: {1, 2, 3, 4, 5}
Array aRb:
0 1 1 1 1
0 0 0 1 1
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
Binary relation is: anti-reflexive, anti-symmetric, and transitive.
```

```
Array A: {1, 2, 3, 4, 5}
Array B: {6, 7, 8, 9, 10}
Array aRb:
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
0 0 1 1 1
Binary relation is: reflexive, not symmetric, and not transitive.
```

```
Array A: {1, 2, 3, 4, 5}
Array B: {3, 4, 5, 6, 7}
Array aRb:
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
0 1 1 1 1
0 0 0 1 1
0 0 0 0 0
Binary relation is: not reflexive, not symmetric, and not transitive.
```

Висновок: я навчився будувати бінарні відношення, визначати їх види (транзитивність, рефлективність і симетричність), розрізняти різні функціональні відношення (ін’єктивність, сюр’єктивність), а також програмно реалізовувати побудову і перевірку бінарних відношень.