МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САНКТ – ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ

ОТЧЁТ
по лабораторной работе

«СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Выполнила: студентка группы К4120
Загряжская Н.И

Проверил: к.т.н., доцент И.В. Ананченко

Санкт – Петербург
2017

Цель: Изучить основные методы спектрального анализа сигналов в среде Mathcad и Matlab.

Ход работы:

1. Выполним прямое и обратное преобразование Фурье детерминированного сигнала, представленного в виде дискретной функции меняющийся по гармоническому закону. Для задания в Mathcad определим постоянные величины, входящие в функцию и ограничим число k . Пусть: $A = 2, \psi = \pi / 4$, $T =$ 200, $\Delta t = 1$, $k = 0,1,\ldots 1023$. Решение предоставлено на Рисунках 1 и 2.

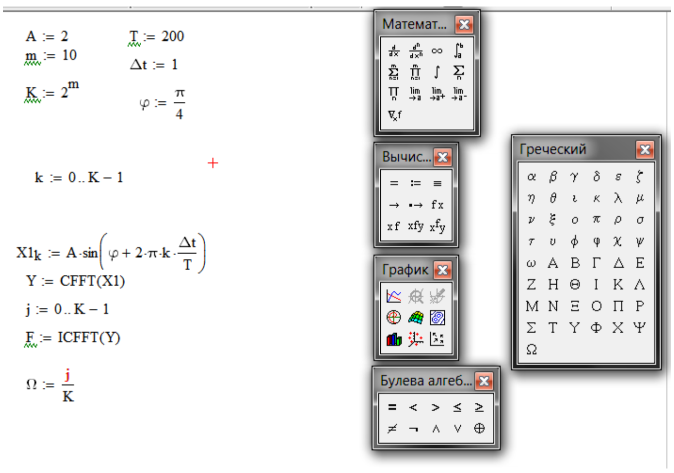

Рисунок 1 — Листинг вычисления преобразований Фурье заданного сигнала.

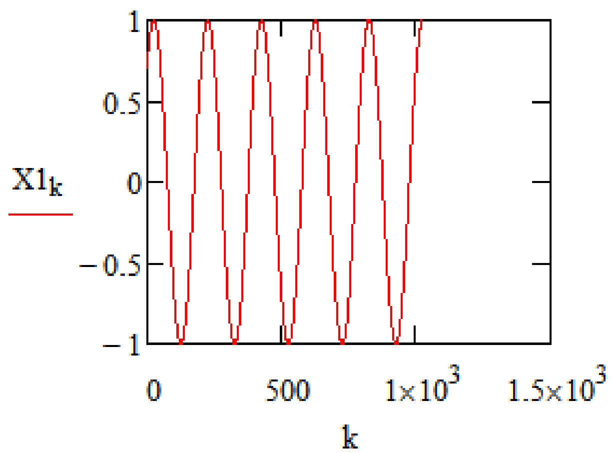

Рисунок 2 — Результат вычисления преобразований Фурье заданного сигнала

2. Реализации быстрого преобразования Фурье в MATLAB для дискретной функции меняющейся по гармоническому закону.

Листинг программы примет вид:

```
clear all
K=1024;k=1:1:1024;
A=2;T=200;dt=1;ksi=pi/4;
s=(2*pi*(k-1)*dt)/T;
X1=A*sin(s+ksi);
Y=fft(X1);
F=ifft(Y);
f=(0:length(Y)-1)/length(Y);
figure(1)
clf
subplot(311),plot(X1)
xlim([0 1024]);
subplot(312),plot(f,abs(Y))
ylim([0 1200]);
subplot(313),plot(F)
xlim([0 1024]);
ylim([-2 2]);
```

Результат работы программы изображен на Рисунке 3.

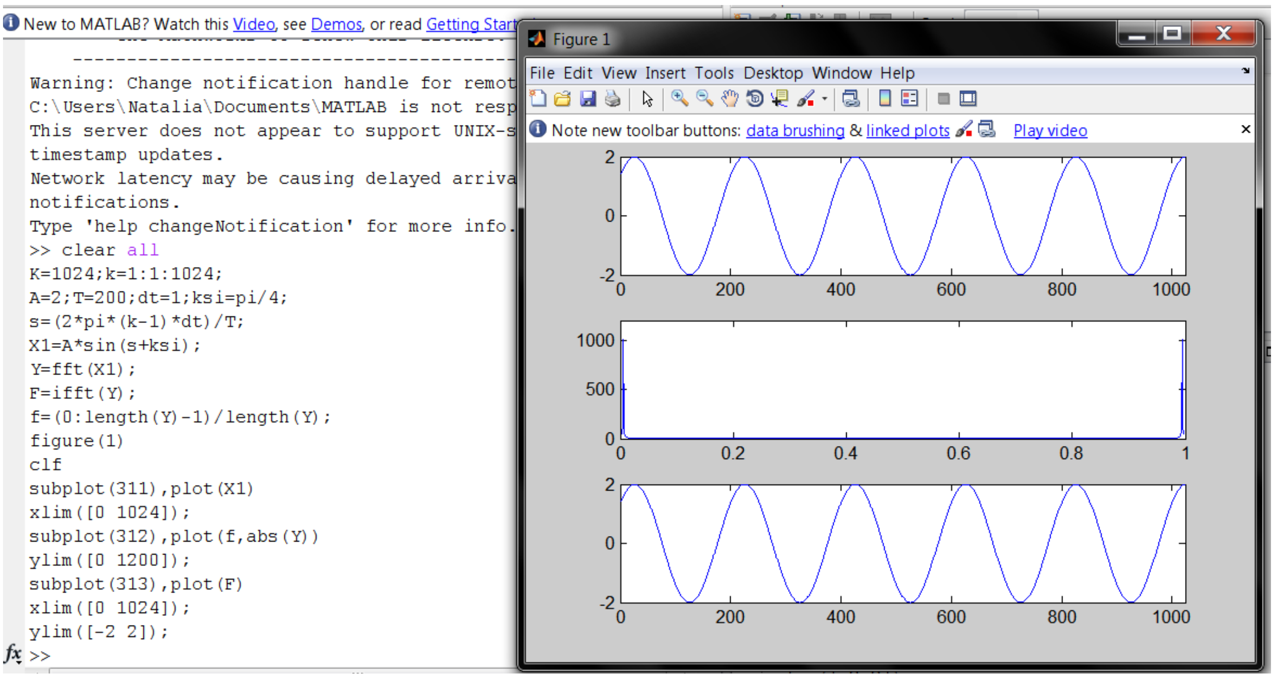

Рисунок 3 — Графики сигнала (а) и его прямого (б) и обратного (в) преобразований Фурье

Упражнение 4(Индивидуальное задание).

1. Осуществить прямое и обратное Фурье-преобразование тестовых сигналов $x(t)_k$, представленных в виде следующих функций:

№1. $X_k = A\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{(k\cdot 0.3)^n\,\Delta t}{T}+\psi\right)+2$, где $A=3$, $T=200, \Delta t=1$, $\psi=\pi/6$, $n=1{,}45$, $k=0,1,\ldots 1023$.

Решение задания 1:

$À := 3$

$T := 200$

$m := 10$

$\Delta t := 1$

$K := 2^m$

$\varphi := \frac{\pi}{6}$

$k := 0, 1 .. 1023$

$n := 1.45$

$$X1_k := A \cdot \sin\left[\varphi + 2 \cdot \pi \cdot (k \cdot 0.3)^n \cdot \frac{\Delta t}{T}\right]$$

$Y := CFFT(X1)$

$j := 0 .. K - 1$

$F := ICFFT(Y)$

$\Omega_j := \frac{j}{K}$

Результат вычислений (Рисунок 4):

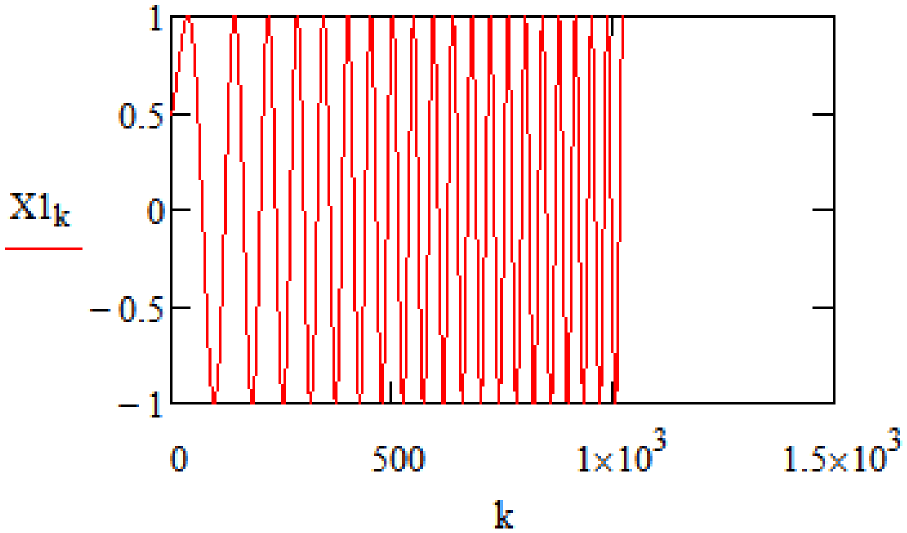

Рисунок 4 — Результат вычислений по первому индивидуальному заданию

№2. $X_k = A\sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{(k \cdot 0.3)^n \Delta t}{T} + \psi_k\right) + 2$, где ψ_k – случайная фаза, равномерно распределенная (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, \pi/6]$. Остальные параметры сигнала такие же, как для сигнала №1.

Решение задания 2:

$À := 3$

$T := 200$

$k := 0, 1 .. 1023$

$m := 10$

$\Delta t := 1$

$K := 2^m$

$$\varphi_k := \frac{rnd(k+1)}{(k+1)} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$n := 1.45$

$$X1_k := A \cdot \sin\left[\varphi_k + 2 \cdot \pi \cdot (k \cdot 0.3)^n \cdot \frac{\Delta t}{T}\right]$$

$Y := CFFT(X1)$

$j := 0..K-1$

$F := ICFFT(Y)$

$$\Omega_j := \frac{j}{K}$$

Результат вычислений (Рисунок 5):

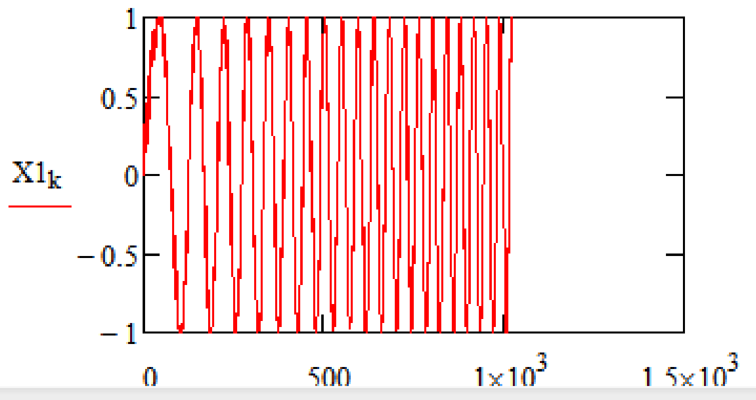

Рисунок 5 — Результат вычисления

Вывод:

Спектральный анализ базируется на выполнении преобразований Фурье и заключается в разложении сигнала на его частотные или спектральные составляющие, а также оценке их спектральных характеристик – амплитуды, фазы, спектральной плотности мощности.

Преобразование Фурье — операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной.

Прямое преобразование Фурье — это формула для коэффициентов An, выражающая их значения через исходную функцию.

Обратное преобразование Фурье, в данном случае — формула для восстановления значений функции по известным коэффициентам разложения ее в ряд Фурье.

Для осуществления дискретного преобразования Фурье необходимо:

1) Задать функцию тестового сигнала;
2) Провести процедуру прямого и обратного преобразования Фурье с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ);
3) Вывести результаты в виде графиков:
   a) функция сигнала (в зависимости от числа отсчетов);
   b) прямое преобразование Фурье (в зависимости от частоты);
   c) обратное преобразование Фурье (в зависимости от числа отсчетов).

Быстрым преобразованием Фурье (БПФ) называют набор алгоритмов, реализация которых приводит к существенному уменьшению вычислительной сложности ДПФ. Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходный N-отсчетный сигнал x(n) на два более коротких сигнала, ДПФ которых могут быть скомбинированы таким образом, чтобы получить ДПФ исходного N-отсчетного сигнала.

Так, если исходный N-отсчетный сигнал разбить на два N/2-отсчетных сигнала, то для вычисления ДПФ каждого из них потребуется около $(N/2)^2$ комплексных умножений. Тогда для вычисления искомого N-отсчетного ДПФ потребуется порядка $2(N/2)^2=N^2/2$ комплексных умножений , т.е. вдвое меньше по сравнению с прямым вычислением. Операцию разбиения можно повторить, вычисляя вместо (N/2)-отсчетного ДПФ два (N/4)-отсчетных ДПФ и сокращая тем сасым объем вычислений еще в два раза. Выигрыш в два раза является приблизительным, поскольку не учитывается, каким образом из ДПФ меньшего размера образуется искомое N-отсчетное ДПФ. Существует большое количество алгоритмов БПФ. К примеру алгоритм БПФ с прореживанием по времени.

Алгоритм БПФ для комплексных данных встроен в соответствующие функции, в имя которых входит литера «с».

1) cfft(y) – вектор прямого комплексного преобразования Фурье;

2) CFFT(y) – вектор прямого комплексного преобразования Фурье в другой нормировке;
3) icfft(▼) – вектор обратного комплексного преобразования Фурье;
4) ICFFT(▼) – вектор обратного комплексного преобразования Фурье в другой нормировке.

Для стационарного случайного процесса *X* (*t*) справедлива теорема Винера-Хинчина, которая устанавливает связь между его энергетическим спектром *F*() и корреляционной функцией *R*() с помощью преобразований Фурье.

Функцию частоты *F* (ω) называют энергетическим спектром стационарного случайного процесса. Этот спектр дает только усредненную картину распределения энергии процесса по частотам элементарных гармонических составляющих, но не учитывает их фазовой структуры. Поэтому величина *F* (ω) представляет удельную мощность, приходящийся на спектральную составляющую сигнала *X* (*t*) в окрестности выбранной частоты.

Применимость теоремы Винера-Хинчина только стационарными процессами, среднее значение которых равно нулю. Если это условие выполнено то энергетический спектр *F*() стационарного случайного процесса – непрерывная функция частоты.

Автокорреляционная функция случайного сигнала определяется следующим образом:

$$^{a}R_n := \frac{1}{K - n + 1} \cdot \sum_{k=0}^{K-n} \left[\left(X1_k - E1 \right) \cdot \left(X1_{k+n} - E1 \right) \right]$$