Lista 1
Análise Real - verão 2025

Prof. Lucas Nacif
lucas.nacif@ime.usp.br

1. Dados dois conjuntos A, B, podemos definir os seguintes conjuntos:

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \in B\}$$
$$A - B = \{x \in A;\ x \notin B\}$$

   Respectivamente, União, interseção e diferença.

   Dados conjuntos A, B e C, mostre que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (b \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

   Dica: Para mostrar igualdade entre dois conjuntos X, Y, basta mostrar que $X \subset Y$ e $Y \subset X$.

2. Dados dois conjuntos A, B podemos definir a diferença simétrica

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

   Mostre que

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$
$$A \oplus B = A \oplus C \implies B = C.$$

3. Considere a seguinte relação em $\mathbb{N}$:

$$x < y \iff \exists z \in \mathbb{N}; y = x + z$$

   Mostre que

   - $m < n$ e $n < p$ implica $m < p$;

- Ou $m < n$ ou $n < m$ ou $m = n$, exclusivamente;
- Se $m < n$ então para todo natural p, $m + p < n + p$;
- Se $m < n$ então $mp < np$, para todo natural p.

Se substituírmos $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, as propriedades continuam válidas?

4. **Dados dois números naturais a, b mostre que existe natural m tal que $ma > b$.**

5. **Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que seja injetora mas não sobrejetora.**

6. **Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que seja sobrejetora mas não injetora.**

7. **Construa uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.** Lembrando que $f^{-1}(n) = \{m \in \mathbb{N}; f(m) = n\}$.

8. **Prove por indução que, dados $x_1, ...x_n \in \mathbb{R}$, tem-se**

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

9. **Utilize o princípio da indução para mostrar que**

   - $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$**;**
   - $(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2 = 1 + 8 + 27 + 64 + ... + n^3$**;**
   - $n \geq 4 \implies n! > 2^n$**.**

10. **Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$ vale a desigualdade**

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx, \ \forall r \in \mathbb{N}.$$

11. **Exprima cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo como reunião de intervalos:**

    (a) O conjunto dos $X \in \mathbb{R}$ tais que $|x - 3| + |x + 4| < 9$;

    (b) O conjutno dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $|x^2 - 6| \leq 2$;

    (c) O conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $(2x^3 + 4)(x - 2) \geq 0$.

12. **Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção de conjuntos enumeráveis. Mostre que**

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

é também enumerável.

13. **Seja X um conjunto enumerável. Mostre que o subconjunto**

$$F(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) | Y \text{ é finito}\}$$

é enumerável.

14. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita limitada quando o conjunto imagem

$$f(X) := \{f(x) | x \in X\}$$

for limitado. Neste caso podemos definir $\sup f = \sup f(X)$. **Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Mostre que**

(i) a função $f + g$ é limitada e $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$, $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$;

(ii) existem funções onde as desigualdades acima são estritas.

15. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados, não vazios, e $m_A = \inf A, M_A = \sup A$, $m_B = \inf B$ e $M_B = \sup B$. **Exprima, se existir, em termos de m_A, m_B, M_A e M_B**

- $\sup(A \cup B)$;
- $\inf(A \cup B)$;
- $\sup(A + B)$;
- $\inf(A + B)$;
- $\sup(AB)$, se $A \subset \mathbb{R}^+$;
- $\inf(AB)$, se $A \subset \mathbb{R}^+$.

Onde $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ e $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

16. Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito enumerável. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$a_n = \sup\{x_i | i \geq n\}$$
$$b_n = \inf\{x_i | i \geq n\}$$

Mostre que

- $a_i \geq a_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$;
- $b_i \leq b_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Ainda, mostre que, se X é limitado superiormente o conjunto $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado inferiormente. Analogamente, mostre que se X é limitado inferiormente, então $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente.

17. **Nas condições do ítem anterior, suponha que X é limitado e que $x_i < x_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostre que** $\inf A = \sup B$.