

Lista 3

Análise Real - verão 2025

Prof. Lucas Nacif
lucas.nacif@ime.usp.br

1. decida se os subconjuntos abaixo são abertos, fechados e/ou compactos

- (a) \mathbb{Z}
- (b) \mathbb{Q}
- (c) $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
- (d) $(-1, 1) \cup [2, 3]$
- (e) $\{0\}$

2. Considere a cobertura

$$[0, 10] \subseteq \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (2 + 1/n^2, 10 - 1/n^2) \right\} \cup (0, 3) \cup (9.8, 10.1)$$

Encontre uma subcobertura finita.

- 3. Mostre que apenas \mathbb{R} e \emptyset são ao mesmo tempo abertos e fechados.
- 4. Dê um exemplo de um subconjunto que não é aberto nem fechado
- 5. A fronteira de um conjunto X é dada por

$$\partial X = \{x \in \mathbb{R} | \forall \varepsilon > 0 \ V_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset \text{ e } V_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} - X) \neq \emptyset\}$$

Mostre que

- (a) $\text{int}(X) \cap \partial X = \emptyset$
- (b) $\overline{X} = X \cup \partial X$
- (c) $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R} - X}$

6. Use a definição de limite para mostrar que

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 3) = 5$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) = 3$

7. O limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{|x-5|}{x+5} - 1 \right)$ existe? Justifique.

8. Baseando-se na definição de limite, dê uma definição (em termos de $\varepsilon - \delta$) para

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

As propriedades aritméticas do limite continuam valendo para estes casos? Tente listá-las

9. Mostre que são contínuas em todo o seu domínio

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

(b) $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = e^x$

10. Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua (em todo o domínio) se e somente se $f^{-1}(X)$ é aberto sempre que $X \subset \mathbb{R}$ o é.

11. Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $|f|$ também é.

12. Trace a seguinte figura:

Um setor circular ABC de raio 1 e ângulo $\hat{A}BC = x$ inscrito no triângulo BCD cujo lado CD é perpendicular a BC e cujo lado BD contém o ponto A .

Calcule:

- O comprimento BC em termos de x
- O comprimento CD em termos de x
- A área do setor circular
- A área do triângulo ABC
- A área do triângulo BCD

Compare estas áreas e conclua que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.