Lista 4
Análise Real - verão 2025

Prof. Lucas Nacif
lucas.nacif@ime.usp.br

1. Use a definiçãio para encontrar a derivada de
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$
   (b) g(x)=1/x
2. para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos $\lfloor x \rfloor$ como o maior inteiro menor ou igual a x.
   (a) Mostre que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é contínua em $(z, z+1) \forall z \in \mathbb{Z}$
   (b) Em quais pontos f é diferenciável? Como é a função derivada $f'(x)$ nesses pontos?
3. Mostre que não existem funções f, g diferenciáveis tais que $f(0) = g(0) = 0$ e $x = f(x)g(x)$.
4. Mostre usando a definição a regra do quociente para derivadas.
5. Seja
   $$f_a(x) = \begin{cases} x^a, \text{ se } x \geq 0 \\ 0, \text{ se } x, 0 \end{cases}$$
   para quais valores $a \in \mathbb{R}$, f_a é diferenciável em $x = 0$?
6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. dado $t \in (1, +\infty)$. Mostre que se $|f(x)| \leq |x|^t$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}$.
7. Seja f uma função diferenciável em c. mostre que se $f(c) \neq 0$ então $|f|$ é diferenciável em c. (Dica: separe em casos)

   A hipótese $f(c) \neq 0$ é necessária?
8. Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável e f' é limitada, então f é uniformemente contínua.(Dica: TVM)
9. Seja f diferenciável em $[a, b]$ tal que $f'(x) \geq M, \forall x \in [a, b]$. Mostre que
   $$f(b) \geq f(a) + M(b - a)$$

10. Mostre que de todos os retângulos de perímetro p o quadrado possui maior área.

11. Mostre que de todos os triângulos inscritos em uma circunferência de raio r, o equilátero possui a maior área

12. Mostre que se f, g são contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que
$$[f(a) - f(b)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

13. Trace a seguinte figura:

    Um setor circular ABC de raio 1, ângulo $A\hat{B}C = x$, inscrito no triangulo BCD cujo lado CD é perpendicular a BC e cujo lado BD contém o ponto A.

    Calcule:

    - A altura do triangulo ABC em relação a BC em relação a x.
    - O comprimento CD em termos de x
    - A área do setor circular
    - A área do triangulo ABC
    - A área do triangulo BCD

      Compare estas áreas e conclua que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

      Em seguida calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

14. Use os resultados do item anterior para calcular as derivadas de $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$.

15. Usando propriedades do logarítmo, calcule a derivada de $\ln(x)$

16. Usando o ítem anterior, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

17. Extra: Derive usando tudo ao seu dispor.

    (a) $f(x) = \arcsin(x)$
    (b) $f(x) = \arctan(x)$
    (c) $f(x) = \log_7 x$
    (d) $f(x) = e^{5x} \cos^2(3x)$
    (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$
    (f) $f(x) = \ln^2(x)$
    (g) $f(x) = x \ln(x)$

(h) $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1-x^3}$

(i) $f(x) = \cot^{-1}(x)$

(j) $f(x) = \sinh(x)$