

# Lista 1 - Espaços Métricos - IME USP 2025

Professor: Rodrigo Rey Carvalho

06/01/2025 - 10/01/2025

Os seguintes exercícios farão parte da avaliação do curso. Escolha dois dos cinco exercícios abaixo para enviar para correção

**1)** Considere o seguinte conjunto  $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f[\mathbb{R}] \text{ é limitada em } \mathbb{R}\}$ , isto é, o conjunto de todas as funções dos reais nos reais tal que, para cada função  $f$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $f[\mathbb{R}] \subseteq [-n, n]$ . Seja  $d : X \rightarrow \mathbb{R}$  função dada por  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ . Mostre que  $d$  é uma métrica sobre  $X$ .

**2)** Considere  $\mathbb{N}$  o conjunto dos naturais munido da métrica 0-1. Dado um subconjunto qualquer  $A \subseteq \mathbb{N}$  verifique as seguintes igualdades mostrando as duas contenções.

(a)  $\overline{A} = A$

(b)  $A^\circ = A$

(c)  $\partial A = \emptyset$

**3)** Considere  $\mathbb{R}^2$  com a métrica usual. Prove que o subconjunto  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ , dado por  $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ , é um fechado de  $\mathbb{R}^2$ .

**4)** Dados  $(X, d)$  espaço métrico e  $A \subseteq X$  qualquer. Mostre que  $\partial A$  é um subconjunto fechado de  $X$ .

**5)** Considere sobre  $\mathbb{R}^2$  duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  onde  $d_1$  é a métrica usual de  $\mathbb{R}^2$  e

$$d_2(x, y) = \max\{|x_0 - y_0|, |x_1 - y_1|\}.$$

(a) Desenhe  $B_{d_1}((0, 0), 1)$  e  $B_{d_2}((0, 0), 1)$ ;

(b) Verifique que as duas métricas acima são equivalentes.