Lista 3
Análise Real - verão 2025

Prof. Lucas Nacif
lucas.nacif@ime.usp.br

1. Mostre que se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ então ele é único.

2. Dada uma função f definida em toda a reta, mostre que a imagem da união de quaisquer subconjunto coincide com a união das imagens de cada subconjunto.

3. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostre que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(X_\lambda).$$

4. Decida se os subconjuntos abaixo são aberos, fechados e/ou compactos

   (a) $\mathbb{Z}$

   (b) $\mathbb{Q}$

   (c) $\{1/n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

   (d) $(-1, 1) \cup [2, 3]$

   (e) $\{0\}$

5. Considere a cobertura

$$[0, 10] \subseteq \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(2 + 1/n^2, 10 - 1/n^2)\} \cup (-1, 3) \cup (9.8, 10.1)$$

   Encontre uma subcobertura finita.

6. Mostre que apenas $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são ao mesmo tempo abertos e fechados.

7. Dê um exemplo de um subconjunto que não é aberto nem fechado

8. A fronteira de um conjunto X é dada por

$$\partial X = \{x \in \mathbb{R}|\forall\varepsilon > 0\ V_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset \text{ e } V_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} - X) \neq \emptyset\}$$

   Mostre que

(a) $int(X) \cap \partial X = \emptyset$

(b) $\overline{X} = X \cup \partial X$

(c) $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R} - X}$

9. Use a definição de limite para mostrar que

   (a) $\lim_{x \to 2}(4x - 3) = 5$

   (b) $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

   (c) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} \right) = 3$

10. O limite $\lim_{x \to 5} \left(\dfrac{|x-5|}{x+5} - 1 \right)$ existe?Justifique.

11. Baseando-se na definição de limite, dê uma definição (em termos de $\varepsilon - \delta$) para

    (a) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

    (b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

    (c) $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$

    As propriedades aritméticas do limite continuam valendo para estes casos? Tente listá-las

12. Mostre que são contínuas em todo o seu domínio

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$

    (b) $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

    (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = e^x$

13. Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua (em todo o domínio) se e somente se $f^{-1}(X)$ é aberto sempre que $X \subset \mathbb{R}$ o é.

14. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua então $|f|$ também é.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre usando a definição que a função $g(x) = f(ax + b)$ é contínua. Dica: Separe em casos.

16. Mostre que se f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ e (x_n) é sequência de Cauchy, então $f(x_n)$ é de Cauchy.

17. Seja f função contínua em $\mathbb{R}$. Mostre que $f([a, b]) = [c, d]$. Dica: Use fatos sobre compactos e continuidade e o TVI.

18. Seja f contínua em $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$. Mostre que se $\inf(f) < \alpha < \sup(f)$, então existem $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$ tal que $f(x) = f(y) = \alpha$. Dica: Separe $[a, b]$ em intervalos convenientes, use o exercício anterior e o TVI.

19. Trace a seguinte figura:

    Um setor circular ABC de raio 1 e ângulo $A\hat{B}C = x$ inscrito no triangulo BCD cujo lado CD é perpendicular a BC e cujo lado BD contém o ponto A.

    Calcule:

    - O comprimento BC em termos de x
    - O comprimento CD em termos de x
    - A área do setor circular
    - A área do triangulo ABC
    - A área do triangulo BCD

      Compare estas áreas e conclua que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.