Lista 5
Análise Real - verão 2025

Prof. Lucas Nacif
lucas.nacif@ime.usp.br

1. Sempre assumimos a hipótese de que as funções são limitadas. Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é ilimitada, f pode ser integrável? Justifique

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Mostre que

$$\left| \overline{\int_a^b} f \right| \leq \overline{\int_a^b} |f|.$$

3. seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer partição P, tem-se

$$\omega_i(|f|; P) \leq \omega_i(f; P)$$

   Conclua que f integrável implica $|f|$ integrável.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que

$$\int_a^b |f| = 0 \iff \operatorname{int}\{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\} = \emptyset$$

5. seja f contínua em $[a, b]$. Mostre que se f não é identicamente nula então $\int_a^b |f| > 0$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(x) = [f(x)]^2, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Mostre que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

7. Forneça um exemplo de uma função que não seja integrável mas que possua uma primitiva. Dica: Exercício 1

8. Seja $a > 0$ e $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se f é uma função ímpar então $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

9. Mostre apenas usando somas inferiores e superiores que

   - $\int_0^b x dx = \dfrac{b^2}{2}$
   - $\int_0^b x^2 dx = \dfrac{b^3}{3}$

   Generalize o resultado para $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Dica: considere partições que dividem $[0, b]$ em intervalos de mesmo tamanho.

10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

    (a) Mostre que se $\int_a^x f = 0, \ \forall x \in [a, b]$ então $f(x) = 0, \forall x$

    (b) Mostre que se $\int_a^x f = \int_x^b f, \ \forall x \in [a, b]$ então $f(x) = 0, \forall x$.

11. Suponha f, g contínuas e $g \geq 0$ em $[a, b]$. mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

12. Seja f integrável. Seja $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$. Calcule $F'(x)$ e mostre que se f é contínua então

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt$$

13. Encontre uma função f tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = x^2 + 2x^3.$$

    Dica: assuma qualquer condição necessária sobre f, por exemplo continuidade, ser C^1, etc.

14. Mostre que

$$\int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt$$

15. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

    (a) Mostre que $F(x/y) = F(x) - F(y)$

    (b) Considere o termo

$$\gamma_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - L(n)$$

    Mostre que a sequência $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dica: Limitada e decrescente.

(c) Use o item anterior para mostrar que a série harmônica alternada converge para $L(2)$. Dica: $\gamma_{2n} - \gamma_n$

16. Mostre a Desigualdade de Cauchy–Schwarz: Se f, g são integráveis em $[a, b]$ então

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

17. Usando tudo o que se sabe sobre integração, calcule, se existirem, as primitivas das funções do exercício 17 da lista 4.