Análise Real (EaD) Verão 2025

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Igor Krasnikovas Perucelo

Professor: Lucas Nacif Giacomin

Prova Final - Questão 1

1. Verdadeiro ou Falso? Prove ou dê um contraexemplo quando necessário.

   (a) O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ é enumerável;

   (b) A sequência (a_n) tal que $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ diverge;

   (c) A função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$$
   é contínua;

   (d) A sequência (x_k) definida recursivamente por
   $$x_1 = n, \quad x_{k+1} = n + \frac{1}{x_k}$$
   converge, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$;

   (e) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{se } x = p/q,, \ \mathrm{mdc}(p,q) = 1, \ q > 0, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
   é contínua em $\mathbb{Q}$;

   (f) Se a série $\sum a_n$ converge então $\sum 2^{-n} a_n$ converge;

   (g) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
   $$\forall X \subset \mathbb{R}, \overline{X} = X \implies \overline{f^{-1}(X)} = f^{-1}(X),$$
   Então f é contínua;

   (h) Todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raíz real.

Os seguintes resultados serão utilizados:

1) Guidorizzi - Um Curso de Cálculo Vol. 4, ed. 5, seção 3.2, p. 51

Critério do Limite. Sejam $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ duas séries, com $a_k > 0$ e $c_k > 0$, para todo $k \geq q$, em que q é um natural fixo. Suponhamos que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{c_k} = L.$$

Então

a) se $L > 0$, L real, ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes.

b) se $L = +\infty$ e se $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ for divergente, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ também será divergente.

c) se $L = 0$ e se $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ for convergente, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ também será convergente.

(a) O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ é enumerável; (F)

O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ claramente não é finito, então para ser para ser enumerável deve existir uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$. Suponha por contradição que exista. Cada elemento de $\mathcal{F}$ é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, então os elementos diferem pela lei de formação $f(n)$. Mostremos que $\mathcal{F}$ não é enumerável por um argumento análogo à Diagonal de Cantor:

$$\mathcal{F} \text{ enumerável} \Rightarrow \mathcal{F} = \{ f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pode ser vista como uma sequência sobre $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f_1 &: (f_{11}(1), f_{12}(2), \dots, f_{1n}(n), \dots) \\
f_2 &: (f_{21}(1), f_{22}(2), \dots, f_{2n}(n), \dots) \\
&\vdots \\
f_n &: (f_{n1}(1), f_{n2}(2), \dots, f_{nn}(n), \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se construirmos uma f que difira de $f_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então $f \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ será não enumerável. Pois bem, a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g : (g_1(1), g_2(2), \dots, g_n(n), \dots)$$

com $g_i \neq f_{ii}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ difere do n-ésimo elemento de $\mathcal{F}$ pela i-ésima imagem, isto é: $\forall i \in \mathbb{N}$ $g_i(i) \neq f_{ii}(i)$, logo $g \neq f_1, g \neq f_2, \dots, g \neq f_n, \dots$ e $\mathcal{F}$ não é enumerável $\square$.

Igor K.

(b) A sequência (a_n) tal que $a_n = \frac{n}{n+1}$ diverge; (F)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1 \Rightarrow a_n \to 1$

C

(c) A função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por (V) 3/5

$$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$$

é contínua;

Seja $c \in (a,b)$, $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$

$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} = f(c) \Leftrightarrow f$ é contínua em c.

CX

Como c é arbitrário, f é contínua $\square$. por que pode apenas substituir?

(d) A sequência (x_k) definida recursivamente por (F)

$$x_1 = n, \quad x_{k+1} = n + \frac{1}{x_k}$$

converge, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$;

$x_1 = n$

$x_2 = n + \frac{1}{n} = \frac{n^2+1}{n}$

$x_3 = n + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^3+2n}{n^2+1}$

$x_4 = n + \frac{n^2+1}{n^3+2n} = \frac{n^4+3n^2+1}{n^3+2n}$

X

x_K não converge pois $\forall K \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} x_K = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

Prova:

Igor K.

Sabemos que, dados dois polinômios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

temos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n \left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{x^m} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Vamos provar por indução em K que o grau do numerador de x_n é sempre maior que o grau do denominador.

Seja $Y = \left\{ K \in \mathbb{N} : x_K = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \text{ e } n > m \right\}$

(a) (caso base) $K = 1$ $\quad x_1 = \frac{n}{1} \Rightarrow 1 \in Y$.

(b) (passo indutivo) (Queremos que valha $K \in Y \Rightarrow K+1 \in Y$.

$$x_{K+1} = n + \frac{1}{x_K} = \frac{n x_K + 1}{x_K},$$ isto é o grau do numerador é sempre 1 a mais que do denominador, logo $K+1 \in Y$

Segue que $Y = \mathbb{N}$.

Usando os dois resultados, temos que:

$\forall K \in Y$ $\quad \lim_{n \to \infty} x_K = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} = \pm \infty$. Em particular, para $n \to \infty$,

$\lim_{K \to \infty} x_K = \pm \infty$. Nesse caso, como $\forall K \in \mathbb{N}$ $x_K > 0$, sabemos que $x_K \to \infty$ quando $K \to \infty$ e $n \to \infty$. Segue que x_K não converge $\forall n$ $\square$.

Igor K.

(e) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (F)

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{se } x = p/q,, \ \mathrm{mdc}(p,q) = 1,\ q > 0, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{Q}$;

$g = f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ é contínua? Fixe $a = \frac{p_0}{q_0}$ irredutível com $q_0 > 0$.

g contínua em $a \iff \forall x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ com $\lim x_n = a$
$\lim g(x_n) = g(a)$

Fixe $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ redutível e igual a $\frac{p_0}{q_0}$

Então x_n é constante e $\lim x_n = \frac{p_0}{q_0}$. Mas, como x_n não é irredutível, por exemplo, $x_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{p_0}{q_0} = \frac{p_n}{q_n}$, então

$\lim g(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n \cdot q_0} = 0 \neq g(a) = \frac{1}{q_0}$. Segue que

f não é contínua em $\mathbb{Q}$ $\square$.

Igor K.

(f) Se a série $\sum a_n$ converge então $\sum 2^{-n} a_n$ converge; (V) 5

Supondo que $a_n > 0$, como $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^{-n} > 0$, $\sum a_n$ e $\sum 2^{-n} a_n$ são de termos positivos. Então pelo critério do limite:

não necessariamente!

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{-n} a_n}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Como $\sum a_n$ converge, $\sum 2^{-n} a_n$ converge $\square$.

Anulado!

Igor K.

(g) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que (V)

$$\forall X\subset\mathbb{R}, \overline{X}=X \implies \overline{f^{-1}(X)}=f^{-1}(X),$$

Então f é contínua;

$\forall X\subset\mathbb{R}$ $\overline{X}=X$, isto é, X é fechado. Daí o seu complementar $\mathbb{R}\setminus X = X^c = A$ é aberto. Ainda, $\overline{f^{-1}(X)} = f^{-1}(X)$, isto é, $f^{-1}(X)$ é fechado, logo o seu complementar $\mathbb{R}\setminus f^{-1}(X) = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus X) = f^{-1}(A)$ é aberto. Então podemos reformular para

H: $\forall A\subset\mathbb{R}$ aberto $f^{-1}(A)$ é aberto de $\mathbb{R}$

T: f é contínua

Queremos ver que f é contínua, isto é, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall c\in\mathbb{R}$ $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$ $\iff$

$$\underset{B(c,\delta)}{x\in(c-\delta, c+\delta)} \Rightarrow f(x)\in\underbrace{(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)}_{B(f(c),\varepsilon)} \iff$$

$$f(B(c,\delta)) \subset B(f(c),\varepsilon)$$

<u>Prova</u>: Fixe $\varepsilon>0$. Fixe $c\in\mathbb{R}$. O conjunto $B(f(c),\varepsilon)$ é aberto em $\mathbb{R}$, logo $f^{-1}(B(f(c),\varepsilon))$ é aberto. Daí, como $f(c)\in B(f(c),\varepsilon)$, $c\in f^{-1}(B(f(c),\varepsilon))$ e $\exists\delta>0$ tq. $B(c,\delta)\subset f^{-1}(B(f(c),\varepsilon))$.

Como $A\subset f^{-1}(B) \iff f(A)\subset B$, temos:

$$f(B(c,\delta)) \subset B(f(c),\varepsilon)$$

Como ε e c são arbitrários, f é contínua $\square$.

Igor K.

(h) Todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raíz real. (V)

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e n ímpar.

1) $a_n > 0$: $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$

2) $a_n < 0$: $\lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$

Em ambos os casos, $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tq. $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Como p é contínuo em $\mathbb{R}$, é em particular em $[a,b]$. Então, pelo T.V.I., $p(a) < 0 < p(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ tq. $p(c) = 0$, isto é, todo polinômio de coef. reais e grau ímpar possui pelo menos uma raiz real $\square$

Igor K.

Análise Real (EaD) Verão 2025

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Igor Krasnikovas Perucelo

Professor: Lucas Nacif Giacomin

Prova Final - Questão 2

Mostre que existe apenas uma solução real para a equação $x^2 = e^x$.

Defina $f(x) = x^2 - e^x$ e o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$.

Então $f'(x) = 2x - e^x$.

Queremos ver que S possui um único elemento, isto é, $|S| = 1$.

Vimos que $f'(x) > 0 \ (<0) \Rightarrow f$ estritamente crescente (decrescente), por um corolário do T.V.M. Analisemos o sinal de f':

1) $x \le 0$: $2x \le 0$ e $-e^x < 0 \Rightarrow 2x - e^x < 0$

2) $x > 0$: $2x > 0$ e $-e^x > 0$. Como avaliar o sinal nesse caso?

Vimos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Seja $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - 2x$. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$. Como $\Delta = -4 < 0$, $g(x) > 0$, isto é, $1 + x + \frac{x^2}{2} > 2x \Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} > 2x$. Então $f'(x) = 2x - e^x < 0$ e, portanto, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ é estritamente decrescente.

Além disso, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \overset{+\infty}{x^2} - \underset{0}{e^x} = +\infty$ e, por L'Hôpital,

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$. Então $\lim_{x \to +\infty} 2x - e^x = -\infty$.

Logo $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $f|_{[a,b]}$ é contínua. Pelo T.V.I., $\exists c \in (a,b)$ tq. $f(c) = 0$. Juntando tudo o que foi dito, como f só decresce, c é único: $c \in S$, $|S| = 1$ $\square$.

Igor K.

Análise Real (EaD) Verão 2025

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Igor Krasnikovas Perucelo

Professor: Lucas Nacif Giacomin

Prova Final - Questão 3

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0.$$

Dica: Para cada $\epsilon > 0$ escolha um $\gamma > 0$ adequado e use o fato que para n suficientemente grande $(1-\gamma)^n < \gamma$. (Por que isto vale?). Separe a integral.

Os seguintes resultados serão utilizados:

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável $\Rightarrow$ $|f|$ integrável e $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

2) $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

3) (Elon - curso de análise vol. 1, ed. 15a, cap. 9, p. 226)

Dadas $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$, com f contínua, se p é integrável e não muda de sinal, então $\exists c \in [a,b]$ tq. $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c)\int_a^b p(x)dx$

Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0$. Sabemos que $\forall x \in (-1,1)$, $x^n \to 0$.

Seja $\eta \in (0,1)$, isto é, $0 < \eta < 1$, e separemos o integral nos intervalos $\int_0^{1-\eta} f(x)x^n dx + \int_{1-\eta}^1 f(x)x^n dx$. Como $\eta \in (0,1)$, nenhuma das integrais tem como extremos de integração o mesmo ponto. Como f é integrável, $\int_0^1 f(x)dx$ é limitada. Queremos ver que o limite $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0$, isto é, se $\int_0^1 f(x)x^n dx = a_n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

$$\left| \int_0^1 f(x)x^n dx \right| = \left| \int_0^{1-\eta} f(x)x^n dx + \int_{1-\eta}^1 f(x)x^n dx \right|$$

$$\underset{\text{(desigualdade triangular)}}{\leq} \left| \int_0^{1-\eta} f(x)x^n dx \right| + \left| \int_{1-\eta}^1 f(x)x^n dx \right|$$

$$\leq \int_0^{1-\eta} |f(x)x^n| dx + \int_{1-\eta}^1 |f(x)x^n| dx \quad (*)$$

$$x \in [0, 1-\eta] \Rightarrow x \leq 1-\eta \Rightarrow \underbrace{x^n}_{\geq 0} \leq \underbrace{(1-\eta)^n}_{\geq 0} \Rightarrow |x^n| \leq |(1-\eta)^n|$$

Assim, $\int_0^{1-\eta} |f(x)||x^n| dx \leq |(1-\eta)^n| \int_0^{1-\eta} |f(x)| dx$.

Como $(1-\eta)^n \to 0$, $|(1-\eta)^n| \to 0$. Como f é integrável, $|f|$ é integrável e $\int_0^{1-\eta} |f(x)| dx = I_1$ é finito. Segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq.

$$n > n_1 \Rightarrow \left| |(1-\eta)^n| - 0 \right| < \frac{\varepsilon}{2I_1}.$$

Igor K.

Por (3), como $|x^n|$ é contínua $|f(x)|$ não muda de sinal em $[1-\eta, 1]$,

então $\exists\, \bar{\eta} \in [1-\eta, 1]$ tq. $\int_{1-\eta}^{1} |f(x)|\,|x^n|\,dx = |\bar{\eta}^n| \int_{1-\eta}^{1} |f(x)|dx$.

Agora, $\int_{1-\eta}^{1} |f(x)|dx = I_2$ é finito e $|\bar{\eta}^n| \to 0$, se $\bar{\eta} < 1$. Então

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tq. $\left| |\bar{\eta}^n| - 0 \right| < \dfrac{\varepsilon}{2 I_2}$. Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0$:

$$(*) \quad \int_0^{1-\eta} |f(x) x^n| dx + \int_{1-\eta}^{1} |f(x) x^n| dx$$

$$\leq |(1-\eta)^n| \int_0^{1-\eta} |f(x)|dx + |\bar{\eta}^n| \int_{1-\eta}^{1} |f(x)|dx$$

$$= |(1-\eta)^n|\, I_1 + |\bar{\eta}^n|\, I_2$$

$$< \frac{\varepsilon}{2 I_1} \cdot I_1 + \frac{\varepsilon}{2 I_2} \cdot I_2 = \varepsilon$$

Como ε é arbitrário, mostramos que $a_n \to 0$.

Se $\bar{\eta} = 1$, $\int_{1-\eta}^{1} |f(x)|\,|x^n|\,dx = |1^n| \int_{1-\eta}^{1} |f(x)|dx = \int_{1-\eta}^{1} |f(x)|dx$.

Então sempre é possível escolher η de forma que $\eta \to 0^+$

Assim $\lim_{\eta \to 0^+} \int_{1-\eta}^{1} |f(x)| dx = \int_1^1 |f(x)|dx = 0$ $\square$.

Igor K.

Análise Real (EaD) Verão 2025

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Igor Krasnikovas Perucelo

Professor: Lucas Nacif Giacomin

Prova Final - Questão 4

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Defina

$$\omega(f; x) = \inf_{\delta>0}\{\omega(f; V_\delta(x) \cap [a, b])\}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $c \in [a, b]$ se e somente se $\omega(f; c) = 0$;

(b) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que existe partição P de $[a, b]$ tal que $\omega_i(f; P) < 1$. Dica: $\varepsilon = b - a$; (para algum i)

(c) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Use os itens anteriores para mostrar que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ onde f é contínua. Dica: Use a partição do item anterior e encontre intervalos encaixados tais que $\omega(f; I_k) < \dfrac{1}{k}$.

Os seguintes resultados serão utilizados:

1) f integrável $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists P \subset [a,b]$ partição t.q. $\sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$

2) (Intervalos Encaixantes): seja $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \cdots$ sequência decrescente de intervalos limitados e fechados. A interseção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ não é vazia.

Igor K.

(a) Mostre que f é contínua em $c \in [a, b]$ se e somente se $\omega(f; c) = 0$;

$(\Rightarrow)$ H: f é contínua em c

T: $\omega(f, c) = 0$

Queremos ver que $\omega(f, c) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = \inf\{\omega(\delta) : \delta > 0\} = 0$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de f, $\exists \delta > 0$ tq.

$\forall x [a, b]$ $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Como $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]\}$,

$\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Logo $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.

$(\Leftarrow)$ H: $\omega(f, c) = 0$

T: f é contínua em c

$\omega(f, c) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Fixe $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ tq. $\omega(\delta) < \varepsilon$.

$\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]\} < \varepsilon$.

Em particular, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Então

$\forall x [a, b]$ $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ $\square$.

Igor K.

(b) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que existe partição P de $[a,b]$ tal que $\omega_i(f;P) < 1$. Dica: $\varepsilon = b-a$; (para algum i)

Por (1), fixe $\varepsilon = b-a$. Então $\exists P \subset [a,b]$ partição tq. $\sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < b-a$. Suponha por contradição que não exista uma partição tq. $\omega_i(f,P) < 1$ para algum i, isto é, $\forall i$ $\omega_i(f,P) \geq 1$.

Então $\sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = b-a$, o que é uma contradição. Segue $\exists P \subset [a,b]$ tq. $\omega_i(f,P) < 1$ para algum i $\square$

Igor K.

(c) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Use os itens anteriores para mostrar que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ onde f é contínua. Dica: Use a partição do item anterior e encontre intervalos encaixados tais que $\omega(f; I_k) < \frac{1}{k}$.

Do item anterior, $\exists P \subset [a,b]$ partição tq. para algum i $\omega_i(f,P) < 1$, isto é, existe um subconjunto $I_1 \subset [a,b]$ tq. $\omega(f, I_1) < 1$. Podemos repetir o argumento recursivamente para encontrar uma seq. $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de intervalos: Tome $\varepsilon_n = \frac{b-a}{n}$. Então $\sum \omega_i \Delta t_i < \frac{b-a}{n}$. Suponha que $\forall i$ $\omega_i \geq \frac{1}{n}$. Então $\sum \omega_i \Delta t_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \Delta t_i = \frac{b-a}{n}$. Contradição.

Segue que existe uma sequência $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com $\omega(f, I_k) < \frac{1}{k}$. Além disso, $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$, então por (2), existe $c \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$.

Como $\forall k \in \mathbb{N}$ $\omega(f, I_k) < \frac{1}{k}$, $\omega(f, I_k) \to 0$. Como $\forall k \in \mathbb{N}$ $c \in I_k$, isso garante que $\omega(f, c) = 0$, pois, para k suficientemente grande, a oscilação de f em torno de um intervalo que contém c é nula. Segue do item (a) que $\omega(f, c) \iff f$ é contínua em c $\square$.

Igor K.