SOLUÇÃO DE LISTA DE EXERCÍCIOS

LISTA 09

(DEFINIÇÕES RECURSIVAS E INDUÇÃO ESTRUTURAL, ALGORITMOS RECURSIVOS)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição* (Kenneth H. Rosen):
  - Capítulo 4.3: *Definições Recursivas e Indução Estrutural*
  - Capítulo 4.4: *Algoritmos Recursivos*

Revisão.

1. Responda formalmente as seguintes perguntas:

   (a) O que é uma definição recursiva? Quais os elementos essenciais de uma definição recursiva?

Exercícios.

2. (Rosen 4.3.1) Encontre $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = 1$ e para $n = 0, 1, 2, \ldots$:

   a) $f(n+1) = f(n) + 2$

   b) $f(n+1) = 3f(n)$

   c) $f(n+1) = 2^{f(n)}$

   d) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

3. (Rosen 4.3.3) Encontre $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e para $n = 0, 1, 2, \ldots$:

   a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$

   d) $f(n+1) = {}^{f(n-1)}/_{f(n)}$

4. (Rosen 4.3.7) Dê uma definição recursiva para a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ se

   (a) $a_n = 6n$.

   (b) $a_n = 2n + 1$.

   (c) $a_n = 10^n$.

   (d) $a_n = 5$.

5. Nesta questão vamos generalizar os operadores de conjunção ($\wedge$) e de disjunção ($\vee$) para um número qualquer de operandos. Isto é feito de maneira similar como generalizamos a operação de soma ($+$) de dois operandos para um número qualquer usando somatórios ($\sum$).

   Para isto, complete as seguintes definições recursivas, onde cada p_i, com $i \geq 1$, é uma proposição.

   (a) Generalização da conjunção: $\begin{cases} \bigwedge_{i=1}^{0} p_i = ?, \\ \bigwedge_{i=1}^{n} p_i = ?, \quad n \geq 1 \end{cases}$

(b) Generalização da disjunção: $\begin{cases} \bigvee_{i=1}^{0} p_i = ?, \\ \bigvee_{i=1}^{n} p_i = ?, \quad n \geq 1 \end{cases}$

6. (Rosen 4.3.25) Dê uma definição recursiva de:

   (a) o conjunto dos inteiros pares.

   (b) o conjunto dos inteiros positivos congruentes a 2 módulo 3 (ou seja, os inteiros positivos que têm resto 2 na divisão por 3).

   (c) o conjunto dos inteiros positivos não divisíveis por 5.

7. (Rosen 4.3.27) Seja S um subconjunto dos pares ordenados de inteiros, definido recursivamente por

   Passo base: $(0, 0) \in S$,

   Passo recursivo: Se $(a, b) \in S$, então $(a, b + 1) \in S$, $(a + 1, b + 1) \in S$ e $(a + 2, b + 1) \in S$.

   a) Liste os elementos de S produzidos pelas quatro primeiras aplicações da definição recursiva.

   c) Utilize indução estrutural para mostrar que $a \leq 2b$ quando $(a, b) \in S$.

8. (Rosen 4.3.29) Dê uma definição recursiva para cada um dos conjuntos de pares ordenados de inteiros positivos. (Dica: Plote os pontos no plano e procure por linhas que contenham os pontos do conjunto.)

   (a) $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+, a + b \text{ é par}\}$

   (b) $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+,\ a \text{ ou } b \text{ é ímpar}\}$

9. (Rosen 4.3.35) Dê uma definição recursiva para o reverso de uma string. (Dica: primeiro defina o reverso de uma string vazia λ. Então escreva uma string w de tamanho $n + 1$ como xy, onde x é uma string de tamanho n, e expresse o reverso de w em termos de x^R e y.)

10. (Rosen 4.3.43) Seja T é uma árvore binária completa (ou seja, uma árvore em que todos os vértices internos têm exatamente dois vértices filhos), seja $n(T)$ o número de vértices na árvore T, e seja $h(T)$ a altura (ou seja, o maior caminho da raiz até uma folha da árvore) de T.

    Use indução estrutural para mostrar que $n(T) \geq 2h(T) + 1$.

11. (Rosen 4.4.11) Dê um algoritmo recursivo para encontrar o mínimo de um conjunto finito de números inteiros, considerando o fato de que o mínimo de n números inteiros é o menor entre o último inteiro da lista e o mínimo dos primeiros $n - 1$ elementos da lista.

    Exiba como seu algoritmo encontra o mínimo elemento do conjunto $\{3, 5, 1, 2, 4\}$.

12. Os *números de Fibonacci*, $f_0, f_1, f_2, ...$ são definidos recursivamente como a seguir:

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Em particular, os primeiros números de Fiboacci são

$$\begin{array}{llllll} f_0 = 0, & f_1 = 1, & f_2 = 1, & f_3 = 2, & f_4 = 3, & f_5 = 5, \\ f_6 = 8, & f_7 = 13, & f_8 = 21, & f_9 = 34, & f_{10} = 55, & \ldots \end{array}$$

Utilize indução estrutural para mostrar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n,$$

para $n = 0, 1, 2, ...$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398$ (a “proporção divina”) e $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61803398$.