SOLUÇÃO DE LISTA DE EXERCÍCIOS

LISTA 02

(EQUIVALÊNCIAS PROPOSICIONAIS)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição* (Kenneth H. Rosen):
  - Capítulo 1.2: *Equivalências Proposicionais*
- *Material suplementar:*
  - Conjunto de slides: *Aula 1.1 - Os Fundamentos: Lógica Proposicional.*

Revisão.

1. Responda formalmente as seguintes perguntas:

   (a) O que significa dizer que duas proposições compostas p e q são equivalentes?

   (b) Quando uma proposição composta é satifazível? E quando ela é insatisfazível?

Exercícios.

2. (Rosen 1.2.13) Utilize tabelas verdade para verificar a lei de absorção.

   (a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

   (b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

3. Demonstre as seguintes questões através da manipulação de conectivos lógicos. (Ou seja, não utilize tabelas da verdade, mas sim os axiomas de equivalência dados em sala de aula.)

   (a) (Rosen 1.2.20) $\neg(p \oplus q)$ e $p \leftrightarrow q$ são logicamente equivalentes.

   (b) (Rosen 1.2.25) $(p \to r) \vee (q \to r)$ e $(p \wedge q) \to r$ são logicamente equivalentes.

4. (Rosen 1.2.31) Mostre que $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ não são logicamente equivalentes.

5. (Rosen 1.2.29) Mostre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia. (**Obs:** Considere usar método de manipulação de conectivos lógicos e o método de tabela da verdade. Qual você achou mais fácil neste caso?)

6. (Rosen 1.2.42, adaptado) Suponha que uma tabela verdade em n variáveis proposicionais seja dada. Sempre é possível encontrar uma proposição composta que represente o comportamento desta tabela verdade como a seguir. Para cada linha da tabela da verdade em que a expressão seja avaliada como verdadeira, tome a conjunção das variáveis dessa linha da seguinte forma: as variáveis verdadeiras entram na conjunção em sua forma normal (x), enquanto as falsas entram negadas ($\neg x$). Por exemplo, considere que em uma tabela de 3 variáveis proposicionais haja uma linha com valores de verdade para as entradas $a = T, b = F, c = T$ e que produza o valor T para a saída; então construímos a conjunção $(a \wedge \neg b \wedge c)$ para representar essa linha. A seguir, tome a disjunção de todas as conjunções obtidas no passo anterior. Assim, obtemos uma expressão que é verdadeira se, e somente se, a expressão original era verdadeira. A proposição composta assim obtida é dita estar na **forma normal disjuntiva**.

   Convença-se da afirmação acima aplicando o método à tabela-verdade do operador binário de ou exclusivo ($\oplus$).

7. (Rosen 1.2.43) Uma coleção de operadores lógicos é chamado **funcionalmente completa** se toda proposição composta é logicamente equivalente a uma proposição composta envolvendo apenas estes operadores. Mostre que $\neg$, $\vee$ e $\wedge$ formam uma coleção de operadores funcionalmente completo. (Dica: use o fato que toda proposição composta é logicamente equivalente a uma outra proposição na forma normal disjuntiva.)

8. (Rosen 1.2.60) Quais das proposições compostas abaixo são satisfazíveis?

   a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

   b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

9. (Rosen 1.2.61) Explique como um algoritmo para definir se uma proposição composta é satisfazível pode ser usado para determinar se uma proposição composta é uma tautologia. (Dica: Se p é a proposição composta em que você está interessado, use o algoritmo de satisfatibilidade em $\neg p$ e interprete o resultado.)