Lista de Exercícios 0.5

Igor Lacerda Faria

[1]Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Belo Horizonte - MG - Brasil

igorlfs@ufmg.br

Revisão

1. (a) i. **Axioma.** Afirmação que é tida como verdadeira sem necessidade de prova.
   ii. **Resultado.** Sentença deduzida a partir de outras sentenças (ou axiomas ou outros resultados deduzidos anteriormente).
   iii. **Teorema.** Um tipo de resultado particularmente importante para alguma área ou teoria.
   iv. **Proposição.** Afirmação que queremos provar.
   v. **Lema.** Um resultado "menos importante" de alguma área ou teoria.
   vi. **Corolário.** Um resultado que segue imediatamente de algum teorema ou lema.
   vii. **Demonstração.** Método argumentativo que verifica a validade de uma proposição.

   (b) Uma **demonstração construtiva** não somente mostra a existência de um elemento que satisfaz dada proposição, como também fornece um método para obter tal elemento. Em contrapartida, uma **demonstração não-construtiva**

Exercícios

2. $\models m + n \equiv 0 \bmod(2) \wedge n + p \equiv 0 \bmod(2) \Rightarrow m + p \equiv 0 \bmod(2)$, com $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

$$\exists a_1, a_2 \mid m + n = 2a_1, n + p = 2a_2$$

$$\Rightarrow m + 2n + p = 2(a_1 + a_2)$$

$$\Rightarrow m + p = 2(a_1 + a_2 - n)$$

Tomando $k \in \mathbb{Z} \mid k = a_1 + a_2 - n$, temos: $m + p = 2k \Rightarrow m + p$ é par. ∎
Demonstração **direta**.

3. **Teorema.** O produto de dois números ímpares é par.

   Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{Z} \mid m, n$ são ímpares. Então $\exists a, b \in \mathbb{Z} \mid m = 2a+1, n = 2b+1$. Assim, $mn = (2a+1)(2b+1) = 2(2ab+a+b)+1$. Tomando $k = 2ab + a + b$, temos $mn = 2k + 1$, ou seja, mn é ímpar. ∎

4. **Teorema.** Se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é.

   Demonstração. Suponha por contradição que, tanto n como $n + 2$ são quadrados perfeitos. Então existem naturais[1] $a, b \mid a^2 = n, b^2 = n + 2$. Assim, $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = 2$. Mas essa equação não possui soluções inteiras. Suponha que ela possui. Então $b + a$ e $b - a$ são naturais cujo produto é 2. Mas os únicos naturais com essa propriedade são 1 e 2, e como $b + a > b - a$, tome $b + a = 2$ e $b - a = 1$. Substituindo $b = 1 + a$ na primeira equação, temos: $2a + 1 = 2 \Rightarrow 2a = 1$, o que é absurdo pois $a \in \mathbb{N}$. Portanto, se n é um quadrado perfeito, $n + 2$ não é. ∎

5. **Teorema.** A soma de um irracional e um racional é irracional.

   Demonstração. Seja w um número irracional e q um número racional. Suponha que sua soma é racional. Ou seja, $\exists a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^* \mid q + w = \frac{a}{b}$. Assim, podemos fazer $q + w - q = w$, que pela fechadura da diferença nos racionais é também racional. Ora, mas isso contradiz a hipótese de que w é irracional. Portanto, a soma de um irracional e um racional é irracional.

6. **Proposição.** Se x é irracional então $\frac{1}{x}$ é também irracional.

   Demonstração. Por absurdo, supomos que seja possível x ser um irracional e $\frac{1}{x}$ ser um racional. Assim, existe um $q \in \mathbb{Q} \mid q = \frac{1}{x}$. Logo, $q^{-1} = x$, ou seja, x é racional, o que contradiz a hipótese. Portanto, se x é irracional, então $1/x$ é também irracional.

7. $\models \forall n \in \mathbb{Z} \mid n^3 + 5$ é impar, então n é par

   (a) por *contraposição:* se n é ímpar, então $n^3 + 5$ é par. De fato, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid n = 2k + 1$. Como mostrado no exercício (3), o produto de dois ímpares é ímpar, ou seja, n^2 é ímpar e $n^2 \cdot n$ também é ímpar. Somando 5 a um número ímpar, obtemos um número par. Assim, finalizamos nossa demonstração por contraposição.

   (b) por *contradição:* suponha $n^3 + 5$ ímpar e n ímpar. Argumentando de forma semelhante ao caso anterior, temos que n^3 é ímpar, e somando 5 chegamos em um número par, o que contradiz um de nossos pressupostos. Assim, finalizamos a nossa demonstração por contradição.

[1] Incluindo o 0

8. Se um dos números é 0, já obtemos nosso resultado multiplicando qualquer um dos números restantes por 0. Se os números forem todos positivos (ou negativos), é também trivial o resultado, bastanto tomar qualquer produto. Se há um (ou dois) negativos, basta tomar o produto dos que tem mesmo sinal. Assim, cobrimos todos os casos possíveis e mostramos que num grupo qualquer de 3 números, existe um produto de 2 deles de tal modo que o produto é não negativo. Essa demonstração é não construtiva, não sei qual parte atende à condição.

9. A proposição "se a e b são números racionais, então a^b também é racional" é falsa: tome, por exemplo, $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$. Assim: $a^b = \sqrt{2}$, que é irracional.

10. **Proposição.** $\nexists n \in \mathbb{N} \mid n^2 + n^3 = 100$

    Demontração. Como $n \in \mathbb{N}$, então n^3, n^2 são positivos[2]. Em particular, temos que $n \leq 4$, uma vez que $5^3 = 125 > 100$ e $n^3 > 125$ para $n > 5$. Assim, podemos simplesmente testar todos os casos, na "força bruta": $n = 1 \Rightarrow 1 + 1 \neq 100$, $n = 2 \Rightarrow 4 + 8 \neq 100$, $n = 3 \Rightarrow 9 + 27 \neq 100$, e por último, $n = 4, \Rightarrow 16 + 64 = 80 \neq 100$. Portanto, não existe tal inteiro.

11. Suponha $a = b$, então $min(a, b) = med(a, b) = max(a, b)$. Suponha $a \neq b$, e, sem perda de generalidade, suponha $a < b$. Então $min(a, b) = a$ e $max(a, b) = b$, com $min(a, b) < max(a, b)$. Além disso,

$$\frac{a + a}{2} < \frac{a + b}{2} < \frac{b + b}{2}$$

    Portanto, $min(a, b) < med(a, b) < max(a, b)$. Assim, concluimos a prova.

12. (a) **Teorema.** Entre quaisquer dois números racionais distintos, existe um irracional.

    Demonstração. Sejam a, b números racionais. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a < b$. Consideramos a seguinte função, cujo domínio de x são os números reais entre 0 e 1:

$$f(x) = (1 - x)a + xb$$

    Desse modo, temos uma forma conveniente de representar os números reais entre a e b. Assim, basta escolher um x conveniente, de tal modo que $f(x)$ seja irracional para quaisquer a e b. Um x com essa propriedade, é, por exemplo, $1/\pi$. Temos:

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = a + \frac{b - a}{\pi}$$

[2] ou 0, mas isso não importa

Como a, por definição, é racional, se $\frac{b-a}{\pi}$ for irracional, pelo exercício (5), a soma será também irracional. Suponha que o número em questão seja racional. Então $\exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \mid \frac{b-a}{\pi} = \frac{p}{q}$. Multiplicando cruzado:

$$q(b-a) = p \cdot \pi$$

Isto é,

$$\pi = \frac{q(b-a)}{p}$$

O que é absurdo, pois q/p é racional (é o inverso de um racional) e $b-a$ também é racional (a diferença de racionais), ou seja, estaríamos obtendo que π é racional. Portanto, para obter um número irracional entre quaisquer racionais, basta tomar $f(\frac{1}{\pi})$

(b) Para generalizar a demonstração anterior e obter infinitos irracionais entre os números, podemos tomar $f(\frac{1}{n\pi})$, em que n é um número natural. A demontração para isso segue de forma análoga ao caso anterior: no final chegaríamos no absurdo que $n\pi$ é racional.