SOLUÇÃO DE LISTA DE EXERCÍCIOS
Lista 07
(Funções, Sequências, Cardinalidade)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição* (Kenneth H. Rosen):
  - Capítulo 2.3: *Funções*
  - Capítulo 2.4: *Sequências e Somatórios*
- *Material suplementar:*
  - Conjunto de slides: *Aula 2 - Conjuntos, Funções, Sequências, e Cardinalidade (Parte sobre Cardinalidade).*

Revisão.

1. Responda formalmente as seguintes perguntas:
   (a) Defina o que é um conjunto enumerável e um conjunto não enumerável.
   (b) Especifique o que afirma o Teorema de Schröder-Bernstein. Explique como o teorema pode ser empregado para demonstrar que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade.
   (c) Explique em alto nível como o conceito de enumerabilidade de conjuntos pode ser usado para demonstrar que existem funções não computáveis, i.e., funções matemáticas que não podem ser expressas por nenhum algoritmo.

Exercícios.

2. (Rosen 2.3.1) Por que f não é uma função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ se
   (a) $f(x) = 1/x$?
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$?
   (c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2+1)}$?

3. (Rosen 2.3.4) Encontre o domínio e a imagem das funções abaixo. Note que, em cada caso, para achar o domínio deve-se identificar o conjunto de elementos aos quais a função associa algum valor.
   (a) a funcão que associa a cada inteiro não negativo seu último digito;
   (b) a função que associa o inteiro seguinte a um inteiro positivo;
   (c) a função que associa a uma string binária o número de bits 1 nesta string;

4. (Rosen 2.3.9) Encontre o valor de:
   c) $\lceil -3/4 \rceil$
   d) $\lfloor -7/8 \rfloor$
   g) $\lceil 1/2 + \lceil 3/2 \rceil \rceil$
   h) $\lfloor 1/2 \cdot \lfloor 5/2 \rfloor \rfloor$

5. (Rosen 2.3.12) Determine quais das funções seguintes de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injetivas, sobrejetivas, e bijetivas.
   (a) $f(n) = n - 1$
   (b) $f(n) = n^2 + 1$
   (c) $f(n) = n^3$
   (d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$
6. (Rosen 2.3.38) Seja f uma função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$. Ache
   (a) $f^{-1}(\{1\})$
   (b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$
   (c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$
7. (Rosen 2.3.50) Demonstre que se x é um número real, então $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ e $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.
8. (Rosen 2.4.3) Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da sequência $\{a_n\}$ onde a_n é dado por
   b) $(n+1)^{n+1}$
   d) $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$
9. (Rosen 2.4.5) Liste os 10 primeiros termos destas sequências.
   d) a sequência cujo n-ésimo termo é $n! - 2^n$, para $n \geq 1$;
   e) a sequência que começa com 3, e em que cada termo subsequente é o dobro do termo anterior;
   f) a sequência cujo primeiro termo é 2, o segundo é 4, e cada termo seguinte é a soma dos dois termos anteriores;
   h) a sequência cujo n-ésimo termo é o número de letras na palavra em português para o número n, para $n \geq 1$.
10. (Rosen 2.4.10) Para cada uma das listas de inteiros abaixo, dê uma fórmula simples ou regra que gere os termos de uma sequência de inteiros que comece com a lista dada. Assumindo que a sua fórmula esteja correta, dê os próximos três elementos da sequência.
    a) $3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, ...$
    b) $7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, ...$
    c) $1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011...$
    d) $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...$
    e) $0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2\,186, 6\,560, 19\,682, ...$
11. (Rosen 2.4.27) Qual o valor dos seguintes produtos:
    a) $\prod_{i=0}^{13} i$
    c) $\prod_{i=0}^{99} (-1)^i$
    d) $\prod_{i=0}^{11} 2$
12. (Rosen 2.4.31) Determine se cada um dos conjuntos abaixo é finito, infinito enumerável, ou não enumerável. Para aqueles infinitos enumeráveis, exiba uma enumeração mostrando os 10 primeiros elementos.
    (a) os inteiros negativos
    (b) os inteiros pares
    (c) os números reais entre 0 e $1/2$
    (d) os inteiros múltiplos de 7

13. (Rosen, 8th Edition, 2.5.7) Suponha que o Hotel de Hilbert esteja completamente ocupado. Um dia é aberta uma filial do hotel do outro lado da rua, em que, assim como na sede original, há um número infinito e contável de quartos. Mostre que os hóspedes que estavam originalmente na sede do hotel podem ser distribuídos de forma a ocupar todos os quartos tanto da sede quanto da filial.

14. (Rosen, 8th Edition, 2.5.11) Dê um exemplo de dois conjuntos não enumeráveis A e B tais que $A \cap B$ seja

    (a) finito;

    (b) infinito enumerável;

    (c) não enumerável.

15. (Rosen, 8th Edition, 2.5.28) Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável.

16. (Desafio!) Mostre que para quaisquer números reais distintos a, b, com $a < b$, o intervalo (a, b) é não enumerável. (Dica: Lembre-se de que sabemos que o intervalo $[0, 1)$ é não enumerável, e use o Teorema de Schröder-Bernstein, que diz que para quaisquer conjuntos A, B, temos que $|A| = |B|$ se existe uma injeção de A para B e existe uma injeção de B para A.)