Lista 0.3

Igor Lacerda

May 8, 2023

1. (a) Um predicado é qualquer mapeamento que associa um conjunto ordenado de variáveis a um único valor: verdadeiro ou falso. Um exemplo de predicado é $P(x) : x < 3$. O predicado conta com *variáveis* e cada uma com seu domínio.

   (b) Uma proposição é necessariamente verdadeira se não é falsa. Por outro lado, não pode ser atribuido um valor booleano a um predicado. Para remediar essa situação, nós usamos conectivos: $\forall$ quando queremos que todo elemento de um domínio atenda ao predicado e $\exists$ quando é suficiente que um único elemento atenda ao predicado.

2. (a) Todas as pessoas que são comediantes são engraçadas

   (b) Todas as pessoas são comediantes e são engraçadas

   (c) Existe uma pessoa que é comediante e engraçada

   (d) Existe uma pessoa que é um comediante e engraçada

3. (a) V

   (b) F

   (c) V

   (d) F

4. *Eu achei essa questõa confusa...*

   (a) Definindo como *domínio* os estudantes *da minha* escola e fazendo $P(x)$ ser *x já morou no Vietnam,* temos:

   $$\exists x : P(x)$$

   De forma semelhante, podemos ter como *domínio* todas as pessoas do mundo, de modo que podemos fazer $Q(x)$ ser *x é um estudante da minha escola.* Assim temos:

   $$\exists x : (P(x) \land Q(x))$$

   É claro que assim *poderiamos* criar algo semelhante com somente $Q(x)$. No entanto, não cumpriria o requisito de predicados com duas variáveis. Então fazemos: $R(x, y)$ ser x *é estudante da minha escola e já morou em y:*

$$\exists(x, Vietnam) : R(x, Vietnam)$$

5. $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) \not\equiv \forall x : (P(x) \vee Q(x))$

   Considere o seguinte contra-exemplo: o domínio são os números naturais, $P(x)$ é x *é par* e $Q(x)$ é x *é ímpar*. Nesse caso, como nem todo natural é par, $\forall x : P(x)$ é falsa e de forma semelhante, como nem todo natural é ímpar, $\forall x : Q(x)$ é também falsa. Por outro lado, a outra proposição é verdadeira, dado que um natural é *par ou ímpar*.

   Ou seja, basta criar um ou que é "exclusivo" mas "complementar" (uma forma simples de fazer isso é usando negações) para criar uma situação em que a primeira proposição é falsa mas a segunda é verdadeira, tornando-as assim, inequivalentes.

6. (a) $\forall x : (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
   (b) $\forall x : (Q(x) \rightarrow R(x))$
   (c) $\forall x : (P(x) \rightarrow \neg R(x))$
   (d) Não é verdade que (c) segue de (a) e (b)! O fato de todas as pessoas ignorantes serem convencidas não significa que para ser convencido é necessário ser ignorante, só que se você é ignorante, então você é convencido. Desse modo, é possível que existam pessoas convencidas que não são ignorantes e elas podem ser professores, o que é uma contradição com (c).

7. (a) Para qualquer real, existe um real maior.
   (b) Para quaisquer 2 reais se ambos são não-negativos, seu produto também será não-negativo.
   (c) Para quaisquer 2 reais existe um real que é igual ao produto destes.

8. $L(x, y) := x$ ama y

   (a) $\forall x : L(x, Jerry)$
   Todo mundo ama o Jerry.
   (b) $\forall x : \exists y : L(x, y)$
   Todo mundo ama alguém.
   (c) $\exists y : \forall x : L(x, y)$
   Existe alguém que é amado por todos.
   (d) $\forall x : \exists y : \neg L(x, y)$
   Ninguém ama todo mundo.
   (e) $\exists y : \neg L(Lydia, y)$
   Lydia não ama alguém (em particular).

(f) $\exists y : \forall x \neg L(x, y)$

Existe alguém que não é amado por ninguém.

(g) $\exists y : \forall x : (L(x, y) \wedge \forall z : \forall w : (L(w, z) \rightarrow z = y))$

Existe alguém que é amado por todos e todos os que são amados por todos são essa pessoa (ou seja, só existe uma pessoa que é amada por todos).

(h) $\exists A : (L(Lynn, A) \wedge \exists B \neq A : L(Lynn, B) \wedge \forall x : (L(Lynn, x) \rightarrow (x = A \vee x = B)))$

Lynn ama A e B, e toda pessoa que Lynn ama é A ou B.

(i) $\forall x : L(x, x)$

Todo mundo ama a si mesmo.

(j) $\exists x : (L(x, x) \wedge \forall y : (P(x, y) \rightarrow y = x)$

Existe alguém que ama a si mesmo e que toda pessoa que ela ama é ela mesma.

9. (a) A(Lois, Prof. Michael)

   (b) $\forall x : (S(x) \rightarrow A(x, \text{Prof. Gross}))$

   (c) $\forall x : (F(x) \rightarrow (A(x, \text{Prof. Miller}) \vee A(\text{Prof. Miller}, x)))$

   (d) $\exists x : S(x) \wedge \forall y : (F(y) \rightarrow \neg A(x, y))$

   (e) $\exists x : (F(x) \wedge \forall y : S(y) \rightarrow \neg A(y, x))$

   (f) $\forall x : (F(x) \rightarrow \exists y : S(y) \wedge A(y, x))$

   (g) $\exists x : (F(x) \wedge \forall y \neq x : (F(y) \wedge A(x, y)))$

   (h) $\exists x : (S(x) \wedge \forall y : (F(y) \rightarrow \neg A(y, x)))$

10. (a) $\exists x : \forall y : \exists z : \neg T(x, y, z)$

    (b) $\exists x : \forall y : \neg P(x, y) \wedge \exists x : \forall y : \neg Q(x, y)$

    (c) $\exists x : \forall y : (\neg P(x, y) \vee \forall z : \neg R(x, y, z))$

    (d) $\exists x : \forall y : (P(x, y) \wedge \neg Q(x, y))$

11. Seja $P(x, y)$ o predicado: *x tem y raízes em* $\mathbb{R}$, considere como *domínio* de x todos os polinômios quadráticos com coeficientes em $\mathbb{R}$ e como domínio de y os naturais. Assim podemos escrever:

$$\forall x : P(x, 0) \vee P(x, 1) \vee P(x, 2)$$

12. Seja $P(x)$ o predicado: *x é o atual rei da França*, cujo domínio são todas as pessoas; e seja $Q(x)$ o predicado: *x é careca*, com o mesmo domínio. Então temos:

$$\forall x : (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Essa proposição é *verdadeira.* Como em todo elemento do domínio $P(x)$ é falsa, então $(P(x) \rightarrow Q(x))$ é sempre *verdadeira.* Para ver que esse é o caso, podemos ainda considerar sua negação: existe alguém que é o atual rei da França e que não é careca. O problema dessa afirmação é que não existe um atual rei da França, então não tem como ele ser ou não careca.

Similarmente, se a proposição fosse *"O atual rei da França não é careca"*, ela *também* seria verdadeira! De novo: se ela *fosse* falsa, sua *negação seria verdadeira* e portanto nós poderiamos dar um contra-exemplo de um rei atual da França que é careca. Mas *não tem como* dar esse contra-exemplo, pois não existe um rei atual da França!