SOLUÇÃO DE LISTA DE EXERCÍCIOS

Lista 03

(Predicados e Quantificadores)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição* (Kenneth H. Rosen):
  - Capítulo 1.3: *Predicados e Quantificadores*
  - Capítulo 1.4: *Quantificadores Agrupados*

Revisão.

1. Responda formalmente as seguintes perguntas:

   (a) Defina o que é um predicado.

   (b) Qual a diferença principal entre um predicado e uma proposição lógica em termos de seu valor de verdade? Explique o que pode ser feito com um predicado para se obter uma proposição com um valor de verdade bem definido.

Exercícios.

2. (Rosen 1.3.7) Traduza as expressões abaixo para linguagem natural, sabendo que $C(x)$ é *"x é um comediante"*, $F(x)$ é *"x é engraçado"*, e o universo de discurso é o conjunto de todas as pessoas.

   (a) $\forall x : (C(x) \to F(x))$

   (b) $\forall x : (C(x) \land F(x))$

   (c) $\exists x : (C(x) \to F(x))$

   (d) $\exists x : (C(x) \land F(x))$

3. (Rosen 1.3.15) Determine o valor de verdade das sentenças abaixo, sabendo que o domínio das variáveis consiste nos números inteiros.

   (a) $\forall n : n^2 \geq 0$

   (b) $\exists n : n^2 = 2$

   (c) $\forall n : n^2 \geq n$

   (d) $\exists n : n^2 < 0$

4. (Rosen 1.3.27) Traduza cada uma das afirmações abaixo em expressões lógicas de 3 maneiras diferentes, variando o domínio e utilizando predicados com uma e duas variáveis.

   a) Um estudante na sua escola já morou no Vietnam.

5. (Rosen 1.3.50) Mostre que $\forall x : P(x) \lor \forall x : Q(x)$ e $\forall x : (P(x) \lor Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

6. (Rosen 1.3.59) Sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ as proposições *"x é um professor"*, *"x é ignorante"*, e *"x é convencido"*, respectivamente. Expresse cada uma das declarações utilizando quantificadores, conectivos lógicos, $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, onde o domínio consiste de todas as pessoas.

(a) Nenhum professor é ignorante.
(b) Todas as pessoas ignorantes são convencidas.
(c) Nenhum professor é convencido.
(d) É verdade que (c) segue de (a) e (b)?

7. (Rosen 1.4.1) Traduza as sentenças seguintes para linguagem natural, usando como domínio o conjunto dos números reais.

   (a) $\forall x : \exists y : (x < y)$
   (b) $\forall x : \forall y : (((x \geq 0) \land (y \geq 0)) \rightarrow (xy \geq 0))$
   (c) $\forall x : \forall y : \exists z : (xy = z)$

8. (Rosen 1.4.9) Seja $L(x, y)$ o predicado *"x ama y"*, onde o domínio consiste de todas as pessoas no mundo. Utilize quantificadores para expressar cada uma das afirmações abaixo:

   (a) Todos amam Jerry.
   (b) Todo mundo ama alguém.
   (c) Existe alguém que é amado por todos.
   (d) Ninguém ama a todos.
   (e) Há alguém que Lydia não ame.
   (f) Existe alguém que não é amado por ninguém.
   (g) Existe exatamente uma pessoa que é amada por todos.
   (h) Existem exatamente duas pessoas que Lynn ama.
   (i) Todo mundo ama a si mesmo(a).
   (j) Existe alguém que não ama a ninguém além de si mesmo(a).

9. (Rosen 1.4.11) Seja $S(x)$ o predicado *"x é um estudante"*, $F(x)$ o predicado *"x é um funcionário"*, e $A(x, y)$ o predicado *"x fez uma pergunta a y"*, onde o domínio das variáveis x e y consiste de todos as pessoas associadas à universidade. Utilize quantificadores para expressar cada uma das afirmações.

   (a) Lois fez uma pergunta ao Prof. Michael.
   (b) Todos os estudantes fizeram uma pergunta ao Prof. Gross.
   (c) Todos os funcionários fizeram uma pergunta ao Prof. Miller ou tiveram uma pergunta feita a si pelo Prof. Miller.
   (d) Existe um estudante que não fez nenhuma pergunta a nenhum funcionário.
   (e) Existe um funcionário que nunca recebeu uma pergunta de um estudante.
   (f) Todo funcionário já foi perguntado por algum estudante.
   (g) Existe um funcionário que já fez um pergunta a todo outro funcionário.
   (h) Existe um estudante que nunca recebeu uma pergunta de um funcionário.

10. (Rosen 1.4.31) Expresse a negação de cada afirmação de forma que todos sinais de negação precedam imediatamente os predicados.

   (a) $\forall x : \exists y : \forall z : T(x, y, z)$
   (b) $\forall x : \exists y : P(x, y) \lor \forall x : \exists y : Q(x, y)$
   (c) $\forall x : \exists y : (P(x, y) \land \exists z : R(x, y, z))$
   (d) $\forall x : \exists y : (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

11. (Rosen 1.4.44) Utilize quantificadores e conectivos lógicos para expressar que um polinômio quadrático com coeficientes em $\mathbb{R}$ tem no máximo duas raízes em $\mathbb{R}$.

12. Argumente se a proposição *"O atual rei da França é careca"* é verdadeira ou falsa. (Dica: converta a proposição para uma expressão lógica quantificada e avalie sua veracidade.)