

SOLUÇÃO DE LISTA DE EXERCÍCIOS

LISTA 08

(INDUÇÃO FRACA E FORTE, BOA ORDENAÇÃO)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição* (Kenneth H. Rosen):
 - Capítulo 4.1: *Indução Matemática*
 - Capítulo 4.2: *Indução Completa e Boa Ordenação*

Revisão.

1. Responda formalmente as seguintes perguntas:
 - (a) Descreva o princípio da indução matemática fraca.
 - (b) Descreva o princípio da indução matemática forte.
 - (c) Explique a principal diferença entre a indução fraca e a indução forte.
 - (d) Explique o que é o princípio da boa-ordenação.

Exercícios.

2. (Rosen 4.1.3) Seja $P(n)$ a afirmação de que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para o inteiro positivo n .
 - (a) Qual é a afirmação $P(1)$?
 - (b) Mostre que $P(1)$ é verdadeiro, completando o passo base da demonstração.
 - (c) Qual é a hipótese de indução?
 - (d) O que você precisa demonstrar no passo indutivo?
 - (e) Complete o passo indutivo.
 - (f) Explique por que os passos acima mostram que a fórmula é verdadeira para todo inteiro positivo n .
3. (Rosen 4.1.6) Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para todo inteiro positivo n .
4. (Rosen 4.1.11) Encontre uma fórmula para $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n e demonstre que a fórmula está correta.
5. (Rosen 4.1.21) Demonstre que $2^n > n^2$ para $n \geq 5$, n inteiro.
6. (Rosen 4.1.33) Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n é um inteiro não-negativo.
7. (Rosen 4.1.56) Demonstre que $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n$, para todo $n \geq 1$. (Dica: use a lei de De Morgan que diz que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.)
8. (Rosen 4.2.3) Seja $P(n)$ a proposição “uma postagem de n centavos pode ser formada utilizando apenas selos de 3 centavos e selos de 5 centavos”. Esse exercício ilustra uma demonstração por indução forte de que $P(n)$ é verdade para $n \geq 8$.

- (a) Mostre que as proposições $P(8)$, $P(9)$ e $P(10)$ são verdadeiras, completando o passo base da demonstração.
- (b) Qual é a hipótese indutiva da demonstração?
- (c) O quê você necessita demonstrar no passo indutivo?
- (d) Complete o passo indutivo para $k \geq 10$.
- (e) Explique porque estes passos mostram que a proposição é verdadeira sempre que $n \geq 8$.
9. (Rosen 4.2.12) Utilize indução forte e mostre que todo inteiro positivo n pode ser escrito como a soma de potências de 2 distintas, ou seja, como a soma de um subconjunto dos inteiros $2^0, 2^1, 2^2, \dots$. (Dica: no passo indutivo, considere separadamente os casos $k + 1$ ímpar ou par. Note que $(k+1)/2$ é inteiro quando $k + 1$ é par.)
10. Considere uma barra de chocolate formada por uma única fileira de n quadradinhos como na figura abaixo.

1	2	3	...	$n-1$	n
---	---	---	-----	-------	-----

Suponha que você queira separar todos os quadradinhos da barra, de forma a obter n quadradinhos individuais. Assuma que você pode realizar quebras na barra apenas entre dois quadradinhos consecutivos (i.e., você não pode partir um quadradinho no meio, apenas separar um quadradinho do outro).

Usando indução forte, demonstre que para qualquer barra de n quadradinhos são necessárias exatamente $n - 1$ quebras para separar todos os quadradinhos.

11. Encontre o erro na “demonstração” por indução abaixo da afirmação de que em qualquer grupo de n pessoas, com $n \geq 1$, todas têm a mesma cor de olhos.

“Demonstração”. Seja $P(n)$ o predicado “Em qualquer grupo de n pessoas, todas têm a mesma cor de olhos”. Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeiro para todo inteiro $n \geq 1$.

Passo base. $P(1)$ é verdade porque em qualquer grupo de 1 pessoa, essa pessoa tem a mesma cor de olhos que ela mesma.

Passo indutivo. Assuma como hipótese de indução que $P(k)$ é verdadeiro para um inteiro $k \geq 1$ arbitrário. Queremos mostrar que $P(k + 1)$ também será verdadeiro.

Note que em um grupo qualquer de $k + 1$ pessoas, podemos colocá-las em fila e observar que as k primeiras formam um grupo de k pessoas. Pela hipótese de indução, essas pessoas têm todas a mesma cor de olhos. Da mesma forma, na fila de $k + 1$ pessoas, as k últimas formam também um grupo de k pessoas e, pela hipótese de indução, têm todas a mesma cor de olhos. Como o grupo de k primeiras pessoas da fila e o grupo de k últimas têm uma interseção, somos obrigados a concluir que todas as pessoas da fila têm a mesma cor de olhos. \square