Lista de Exercícios 0.8

Igor Lacerda Faria

[1]Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Belo Horizonte - MG - Brasil

igorlfs@ufmg.br

Legenda

- PIM: Princípio da Indução Matemática;
- HI: Hipótese de Indução;
- TI: Tese de Indução;

Revisão

1. (a) O PIM fraca é um método de demonstração para proposições em $\mathbb{N}$ que funciona a partir da prova de um caso base e da prova de que se a proposição é verdadeira para um dado $n = k$, ela também é verdadeira para $n = k + 1$.

   (b) O PIM forte é um método de demonstração como o PIM forte, exceto que como hipótese, ao invés de tomar a veracidade de uma proposição para um dado $n = k$, é assumida a validade da proposição para $1 \leq k < m$, que é subsequentemente usada para mostrar a validade de $n = m$.

   (c) A principal diferença é que as hipóteses do PIM forte são consideravelmente mais fortes (haha), necessitando da validade de toda uma gama de proposições.

   (d) O princípio da boa ordenação é um teorema[1] que estabelece que qualquer subconjunto (não vazio) dos números naturais possui um menor elemento.

   (e) *Em papel.*

   (f) Dada a validade para um caso inicial e dado que se a proposição é válida para $n = k$ ela também é válida para $n = k + 1$, então ela é válida para todo n maior ou igual ao caso inicial.

[1]Ou axioma, ele é equivalente ao PIM mas é mais complicado de lidar

Exercícios

2. (a) $P(1) : 1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$.
   (b) $1 \cdot 2 \cdot 3/6 = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1 = 1^2$.
   (c) Para $n = k, k \in \mathbb{N}, P(k) : 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$
   (d) Que a partir da hipótese é possível concluir a tese.
   (e) *Em papel.*
   (f) Se a fórmula vale para $n = 1$ e dado que vale para $n = k$ também vale para $n = k + 1$, é possível cobrir a validade para todos os números naturais.

3. *Em papel.*

4. *Em papel.*

5. *Em papel.*

6. $\models n \equiv n^5 \mod 5$

   Para $n = 1$, essa propridade é válida, uma vez que $1 \equiv 1^5 \mod 5$. Supomos que a proposição vale para $n = k$, ou seja, $5 \mid k^5 - k$. Para $n = k+1$, temos:

$$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$$

   $\Rightarrow k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 4k = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Por hipótese, $k^5 - k$ é múltiplo de 5, e a segunda parcela também é múltipla de 5. Portanto, conclui-se a tese de indução e a demonstração.

7. A Lei de De Morgan é um dos casos base. O outro é trivial: $\neg p_1 \equiv \neg p_1$.

   HI: para $n = k, k \in \mathbb{N}$: $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_k$

   TI: para $n = k+1$: $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k \vee p_{k+1}) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_k \wedge \neg p_{k+1}$

   • Tomando a HI e adicionando $\wedge \neg p_{k+1}$:

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \wedge \neg p_{k+1} \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_k \wedge \neg p_{k+1}$$

   • Aplicando De Morgan para $p = (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k)$ e $q = p_{k+1}$:

$$\neg((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \vee p_{k+1}) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_k \wedge \neg p_{k+1}$$

   • Removendo os parênteses internos do lado esquerdo (pois o $\vee$ não depende de parênteses), concluímos a TI.

8. (a) $P(8) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5, P(9) = 3 \cdot 3, P(10) = 2 \cdot 5$.
   (b) Para todo $k \mid 8 \leq k < n$, vale $P(k) : \exists a, b \in \mathbb{N} \mid k = a \cdot 3 + b \cdot 5$.

(c) Que dada a hipótese indutiva é possível concluir que $P(n)$ é verdadeira.

(d) Não é preciso fazer nada para mostrar $P(10)$, esse é um caso base. Supondo $k > 10$, podemos argumentar pela hipótese indutiva que para $m = k - 3$, $P(m)$ é valida, ou seja, $m = a_m \cdot 3 + b_m \cdot 5$. Então:

$$k = (a_m + 1) \cdot 3 + b_m \cdot 5$$

Assim mostramos a TI.

(e) Dado que a proposição é válida para os casos iniciais e que é possível usar os casos base para mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 11$, então a proposição é verdadeira.

9. *** Para $n = 1$, temos: $1 = 2^0$ e para $n = 2$, temos: $2 = 2^1$. Suponha que todo $m \mid 1 \leq m \leq k$ tem uma representação binária. Se $k + 1$ for ímpar, basta tomar a representação binária de $n = k$ e adicionar 2^0 (podemos fazer isso porque k é par, ou seja, não pode conter 2^0). Se $k + 1$ for par, exclua o bit 0, e para os bits seguintes se eles estiverem presentes, os remova, repita até o número terminar ou encontrar um bit ausente. O resultado, mantendo os outros bits, vai ser uma representação binária única. (Basicamente incremento em binário).

10. Para uma barra de um quadradinho, não é preciso quebrar, e para uma barra de 2 quadradinhos, uma quebra é suficiente. Suponha que a HI vale para $n = k$ e vamos mostrar que a proposição também vale para uma barra de $n = k+1$ quadradinhos. Pois bem, basta considerar que o quadradinho 1 na barra k são 2 quadradinhos, de modo que são feitos $k - 1$ cortes para se separar todos os quadrados, excluindo o que é "duplo", e para separá-lo, é necessário um corte adicional, totalizando k cortes para uma barra de tamanho $k + 1$. *not really indução forte...*

11. Esse argumento é inválido pois não funciona para $n = 2$, porque a pessoa do começo não necessariamente vai ter a mesma cor de olhos que a última (esse argumento toma como hipótese implícita que as "filas" de pessoas do começo e do fim se sobrepõe).