Lista 10: Grafos I

Igor Lacerda

11 de maio de 2023

Questões Discursivas

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado com e arestas. Então

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Essa relação é válida pois cada aresta é contada duas vezes quando se soma os graus dos vértices (uma vez para saída e uma vez para entrada).

2. Pelo resultado anterior. Para garantir a condição enunciada, é preciso que a soma dos graus dos vértices cujo grau é ímpar seja par.

3. Seja $G = (V, E)$ um grafo com arestas orientadas. Então

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

Essa relação é válida pois todo grau de saída de um vértice é aresta de outro (ou ele mesmo) e vice-versa.

4. Grafos.

(a) K_n: O grafo que liga todo vértice (cada um dos n) a todos os outros vértices.

(b) $K_{m,n}$: O grafo que liga todos os m vértices aos n vértices.

(c) C_n: O grafo que liga os n vértices 2 a 2 formando um ciclo.

(d) W_n: extensão do grafo anterior adicionando um vértice que é ligado a todos os outros.

(e) Q_n: o grafo que conecta as *strings* de tamanho n permitindo apenas alterações de 1 bit.

5. Grafos.

(a) K_n: vértices: n, arestas: $n(n-1)/2$

(b) $K_{m,n}$: vértices: $n + m$, arestas: nm

(c) C_n: vértices: n, arestas: n

(d) W_n: vértices: $n + 1$, arestas: $2n$

(e) Q_n: vértices: n, arestas: 2^n

6. Grafos.

(a) Um grafo bipartido é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e V tais que toda aresta conecta um vértice em U a um vértice em V.

(b) Apenas C_n é bipartido.

(c) Tentar colorir as arestas usando apenas duas cores.

7. Grafos.

(a) Matrizes de adjacência, matrizes de incidência e listas de adjacência.

(b) *Não é nada prático fazer isso no LaTeX.*

8. Grafos.

(a) Isso significa que é possível fazer uma bijeção de um grafo para o outro de tal maneira que a função preserva vértices adjacentes.

(b) Invariantes são propriedades que permanecem após a aplicação do isomorfismo. Exemplos de invariantes são: número de vértices, número de arestas, grau dos vértices, existência de ciclos (de mesmo tamanho) e o número de pontes (num grafo conexo).

(c) *Os grafos do exemplo 10 da seção 2 do capítulo*

(d) Não existe não.

9. Grafos.

(a) *In an undirected graph G, two vertices u and v are called connected if G contains a path from u to v. Otherwise, they are called disconnected. If the two vertices are additionally connected by a path of length 1, i.e. by a single edge, the vertices are called adjacent. A graph is said to be connected if every pair of vertices in the graph is connected.* (da Wikipédia, em inglês). Basicamente, existe um caminho entre quaisquer dois vértices do grafo.

(b) As componentes conexas de um grafo são os maiores subgrafos de um dado grafo G tais que sua união é o grafo G, sua interseção é disjunta e cada subgrafo é conexo.

10. Grafos.

(a) Um **ciclo Euleriano** é um ciclo que passando por todas as arestas de um grafo uma única vez, retorna ao vértice de partida. Um **caminho Euleriano** é um caminho que passa por todas as arestas de um grafo uma única vez.

(b) O problema das sete pontes de Königsberg consiste em atravessar 7 pontes passando uma única vez em cada e voltando para onde se partiu. Enunciá-lo em termos de um ciclo Euleriano: desenhe um grafo correspondente. Este grafo é tal que não atende a condição para que se tenha um ciclo Euleriano.

(c) Um grafo não orientado tem um caminho Euleriano **sse** ele possui exatamente 2 vértices de grau ímpar.

(d) Um grafo não orientado possui um ciclo Euleriano **sse** todos os seus vértices têm grau par.

Exercícios