Lista 8: Resolver Recorrências & Funções Geradoras

Igor Lacerda

11 de maio de 2023

Questões Discursivas

1. Uma **relação de recorrência** é uma equação em que cada termo de uma sequência é definido em função dos elementos anteriores.

2. Em uma RdR linear, a equação para se obter o n-ésimo termo a_n é uma combinação linear dos termos anteriores. Uma RdR ser linear significa que nenhum termo aparece sem estar multiplicado por um a_j. Por fim, o fato de os coeficientes serem constantes significa que eles não são uma função de n. Podemos representá-las assim:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

3. Você pode testar alguns valores (dado que você tem uma candidata a solução). Fora isso, existem os algoritmos fechados para se obter soluções em alguns casos, como no na RdR descrita no item anterior.

4. A equação característica de um RdR é obtida dividindo a equação da recorrência pelo termo de "maior grau", por exemplo: a equação característica da recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ é $r^2 - r - 1 = 0$. As raízes características são as raízes dessa equação e são importantes nas fórmulas fechadas para se calcular as fórmulas fechadas.

5. Encante a equação de recorrência. Resolva-a. A candidata a solução vai ser da forma $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ (para raízes distintas e recorrência de grau 2). Podemos generalizar isso para graus maiores e raízes iguais. Neste último caso, vamos escrevendo a solução da seguinte maneira: $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n + \alpha_3 n^2 r^n$ para uma raiz única raiz de multiplicidade 3 em um grau 3. Substitua nas condições iniciais e a resolva o sistema de equações linear associado. Se a equação for heterogênea, considere sua parte homogênea e a resolva. Se ela for um polinômio, exponencial ou produto destes, existem candidatos a resolução geral, que é como se fosse uma solução particular para a homogênea mais um termo especial. Por exemplo nos casos em $F(n)$ é um polinômio de grau 1, o candidato é uma função $cn + d$ e quando $F(n)$ é exponencial, o candidato é Cb^n (ver exemplos 10 e 11 da seção 7.2). Por fim, pode ser útil verificar se a solução encontrada de fato é válida, fazendo uns testes.

6. Como mencionado no item anterior, vamos adicionando graus em n para as raízes.

7. Uma RdR heterogênea é do formato:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

Em que $F(n)$ é uma função de n. A solução particular é uma solução que resolve a equação homogênea associada.

8. Um algoritmo de divisão e conquista particiona um problema grande em problemas menores até que eles sejam simples o suficiente para serem resolvidos rapidamente e depois combina as soluções individuais de forma adequada para criar uma solução final. Exemplos: *mergesort*, *quicksort*.

9. A função de complexidade desses algoritmos depende da complexidade de etapas menores, normalmente tendo o seguinte formato: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$.

10. O Teorema Mestre é uma forma conveniente de encontrar a complexidade de uma porrada de algoritmos recursivos. Seja $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ a função de complexidade do algoritmo, com $a \geq 1, b > 1 \wedge f(n) > 0$. Então, pelo Teorema Mestre:

(a) Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \mapsto T(n) = \Theta(n^{\log_b a - \epsilon})$, "$n$ é polinomialmente $< n^{\log_b a - \epsilon}$".
(b) Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \mapsto T(n) = \Theta(\log n \cdot n^{\log_b a - \epsilon})$
(c) Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \mapsto T(n) = \Theta(f(n))$, "$n$ é polinomialmente $> n^{\log_b a - \epsilon}$".

No último caso, a condição de regularidade também deve ser satisfeita:

$$af(n/b) \leq cf(n), c < 1, n \geq n_0$$

11. Uma **função geradora** é uma série formal cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão a_n cujo índice percorre os naturais.

12. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$, que é $\frac{1}{1+x}$ e $\sum_{n\geq 0} x^n$, que é $\frac{1}{1-x}$

13. Funções geradoras:

(a) $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$
(b) $\frac{1}{1-x^r} = \sum_{n\geq 0} x^{rn}$
(c) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$
(d) $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n\geq 0} C(m+n-1, n)x^n$
(e) $(1+x)^m = \sum_{n\geq 0} C(m, n)x^n$

14. Usando a fórmula para o coeficiente binomial estendido:

$$\sum_{n\geq 0} C(u, n)x^n = (1+x)^u$$

Ou, ainda:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k\geq 0} C(-n, k)x^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k C(n-k-1, k)x^k$$

15. Considere u como um número real e n como um número inteiro não negativo. Então, o **coeficiente binomial estendido** é definido por:

$$C(u, n) = u(u-1)\dots(u-n+1)/n!$$

se $n > 0$ e 1 se $n = 0$ (ver o item anterior também)

Exercícios