Lista 6 -- Notação Grande O

Matemática Discreta -- Prof. Jeroen van de Graaf

Leitura recomendada

- Slides elaborados pelo professor;
- Rosen 3.2 (3.1, 3.3)

Observações e lembretes

Simplificação

Vc pode supor que a imagem das funções f, g etc é náo-negativo, i.e. ≥ 0, para eliminar o valor absoluto na definição.

Teorema

Sejam f, g funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}^+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \tag{2}$$

existe e é igual a A. Então,

1. se $A = 0$, então $f(n) \in O(g(n))$.
2. se $A > 0$, então $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(f(n))$.
3. se $A = \infty$, considere $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ e aplique (1). Então $g(n) \in O(f(n))$.

Esse teorema é provado no livro do Brassard&Bratley -- Fundamentals of Algorithmics [pg 84], e pode ser usado nos exercícios e nas provas.

Notação logaritmo

- $\lg x$ é o logaritmo base 2;
- $\ln x$ é o logaritmo natural, ou seja, de base e;
- $\log x$ é o logaritmo base 10 na sua calculadora, senão é provavelmente base e. Mas pessoalmente prefiro usar $\ln x$ para $\log_e x$ e reservar $\log x$ para $\log_{10} x$.
- Na notação O(), a base não faz diferença, já que trocar de base é multiplicar por um constante. Exemplo: $\lg x = \ln x / \ln 2$; é assim que calculo logaritmos base 2 na calculadora.

Questões discursivas

1. Qual é a definição $f(n) \in O(g(n))$?
2. O que se sabe sobre a ordem da soma de duas funções?
3. O que se sabe sobre a ordem da soma de dois polinômios?

4. O que se sabe sobre a ordem do produto de duas funções?
5. Explique a notação $\Omega(n)$ usando grande $O(n)$.
6. Explique a notação $\Theta(n)$ usando grande $O(n)$.
7. Existem vários abusos de notação $O(n)$. Mencione no mínimo dois.

Exercícios

F=fácil, M=médio, D=difícil

(1) [M] 3.2.11 de Rosen

(2) [M] 3.2.12

(3) [M] 3.2.19

(4) [M] 3.2.21

(5) [M] Sejam $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Prove a transitividade da notação $O()$: Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.

(6) [M] Nos slides, e simplifiquei a prova de Exemplo 3.2.11 me restingindo a númoros n pares. Explique porque isso é permitido.

(7) [D] É óbvio que $O(2^n) \subset O(3^n)$. A questão é se o contrário também é verdade. Ou seja, se 2^n e 3^n são da mesma ordem, ou se 3^n é estritamente maior.

(8) [D] Usando apenas o símbolo $\subsetneq$ ou $=$ coloque as seguintes ordens de funções numa sequência (ordem):

$$O(n \log n), \;\; O(n^8), \;\; O(n^{1+\varepsilon}), \;\; O((1+\varepsilon)^n), \;\; O(n^2/\log n), \;\; O((n^2-n-100)^4).$$

Aqui ε é um constante real no intervalo $(0,1)$.

(9) [D**] Prove que $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n))) = \max(O(f(n), O(g(n)))$. A dificuldade reside na definição do primeiro e último termo.

(10) [D] Mostre que $\sum_{1 \leq i \leq n} i^k \in \Theta(n^{k+1})$ seguindo essas dicas. Suponha que n seja par (veja Pergunta 6).

(a) Explique porque $\sum_{1 \leq i \leq n} i^k \leq n \cdot n^k$;

(b) Explique porque $\sum_{\frac{n}{2}+1 \leq i \leq n} i^k \geq \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2})^k$