Lista 4: Probabilidade II

Igor Lacerda

11 de maio de 2023

Questões discursivas

1. Considere E e F eventos como eventos com $p(F) > 0$. A **probabilidade condicional** de E dado F, indicada por $p(E \mid F)$ é dada por:

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

   Em outras palavras, ao calcular a probabilidade do evento E, assumimos que o evento F ocorre.

2. Os eventos E e F são **independentes** $\iff p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$

   Intuição: perceba que nesse caso, ao se calcular a probabilidade condicional $p(E \mid F)$, obtém-se $p(E)$ (E não depende de F).

3. Suponha que os E e F são eventos de um espaço amostral S, tal que $p(E) \neq 0 \wedge p(F) \neq 0$. Então, pelo **Teorema de Bayes**,

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F) \cdot p(F)}{p(E)}$$

   Isso nos permite inverter $p(E \mid F)$ com $p(F \mid E)$.

4. Estendendo a expressão anterior, obtemos:

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F) \cdot p(F)}{p(E \mid F) \cdot p(F) + p(E \mid \overline{F}) \cdot p(\overline{F})}$$

5. *Apenas dando mais ou menos um contexto para o caso laboratório médico*: há uma doença muito rara com um teste muito preciso. O que é surpreendente nessa situação é que as chances de alguém que recebeu um resultado positivo estar com a doença é *muito baixa*.

6. Uma **variável aleatória** é uma função do espaço amostral de um experimento para o conjunto dos números reais, ou seja, uma variável aleatória atribui um número real para cada resultado possível.

   Detalhe importante: lembre-se que a variável aleatória *não é nem uma variável e nem aleatória*.

   Exemplo: os resultados de um dado comum

x	1	2	3	4	5	6
$p(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   Exemplo: suponha que uma moeda seja lançada 3 vezes. Defina $X(t) = n$, onde n é o número de caras que aparecem. Então:

   - $X(HHH) = 3$
   - $X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2$
   - $X(TTH) = X(THT) = X(HTT) = 1$
   - $X(TTT) = 0$

x	0	1	2	3
$p(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

   Ou seja, a **variável aleatória** tanto pode ser uma função que associa a probabilidade de um evento ocorrer (como no exemplo da moeda), como pode associar o evento a alguma característica específica, e depois calcular a probabilidade desse característica.

   A *distribuição* de X em S é o conjunto de pares $(x, p(X = x)) \forall x \in S$, onde $p(X = x)$ é a probabilidade de X assumir o valor x.

7. A **esperança** (ou *valor esperado*) de uma variável aleatória $X(s)$ em um espaço amostral S é igual a:[1]

   $$E(X) = \sum_{s \in S} p(s)X(s)$$

   Ou seja, a **esperança** é soma dos produtos dos valores por suas probabilidades [2]. Usando o exemplo anterior do dado, podemos ver que a **esperança** para a variável aleatória $p(X = x)$ é $\frac{7}{2}$.

   ATENÇÃO: na prática, a definição quase nunca é usada. Em vez disso, é usado o seguinte teorema:

[1] Notação do livro, não do professor.

[2] Ou ainda, é a soma ponderada pela probabilidade.

> Se x é uma variável aleatória e $p(X = r)$ é a probabilidade de $X = r$, para que $p(X = r) = \sum_{s \in S, x(S) = r} p(S)$
>
> $$E(x) = \sum_{r \in X(S)} p(X = r)r$$

Ou seja, podemos agrupar todos os resultados determinados para o mesmo valor pela variável aleatória.

8. Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ com n um número inteiro positivo, forem variáveis aleatórias em S, e se a e b forem números reais, então pelo **Teorema da Linearidade da Esperança**

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$
$$E(aX + b) = a(Ex) + b$$

9. Um **ensaio de Bernoulli** (ou teste de Bernoulli) é um experimento em que apenas 2 resultados possíveis (naturalmente mutualmente excludentes), chamados *sucesso* e *fracasso*. Normalmente, chama-se de p a probabilidade de sucesso e de q a probabilidade de fracasso, onde temos que $p + q = 1$.

   A probabilidade de k sucessos em n **ensaios de Bernoulli** independentes, com probabilidade de sucesso p e probabilidade de fracasso $q = 1 - p$, é

$$C(n, k) \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

   A **esperança** do número de sucessos quando n **ensaios de Bernoulli** são realizados, em que p é a probabilidade de sucesso em cada teste é np.

10. A **distribuição binomial** é justamente a probabilidade de se obter k sucessos em n ensaios de Bernoulli, como apresentado no item anterior.

    Também podemos usar a seguinte notação do professor:

$$Bin_{n,p}(k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

    Consulte os slides para ver alguns histogramas de *distribuições binomiais*. E um teorema do valor máximo e afins.

11. Uma variável aleatória X tem uma **distribuição geométrica** de parâmetro p se, para $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$P(X = k) = q^{k-1}p$$

    Se a variável aleatória X tem distribuição geométrica de parâmetro p, então $E(x) = 1/p$ (i.e., **esperança**).

12. Esse item foi feito dentro dos anteriores.

Exercícios