Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 8

Beispiele 207, 232, 331

Aufgabe 207. Wie viele Möglichkeiten gibt es, $2n$ Punkte auf einer Geraden so oberhalb der Geraden paarweise zu verbinden, dass sich die Verbindungslinien nicht kreuzen?

Lösung. Dieses Problem kann mithilfe der Catalan-Zahlen gelöst werden:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

wobei n die Anzahl der Punktpaare ist und C_n folglich alle Kombinationen diese Paare miteinander zu verbinden, ohne dass Überschneidungen stattfinden, darstellt. Das ganze als Rekursionsformel:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

Aufgabe 232. Lösen Sie die Rekursion mit der Ansatzmethode:

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1} \qquad (n \geq 1), a_0 = 2$$

Lösung.

Aufgabe 331. Gegeben seien die folgenden zweistelligen partiellen Operationen $\bullet$ in der Menge M. Man untersuche, in welchem Fall eine Operation in M vorliegt. Welche der Operationen sind assoziativ, welche kommutativ?

(a) $M = \{-1, 0, 1\}$, $\bullet$ gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation

(b) $M = \mathbb{N}$, $a \bullet b = 2^{ab}$

(c) $M = \mathbb{Q}$, $a \bullet b = ab + 1$

(d) $M = \mathbb{R}$, $a \bullet b = |a + b|$

(e) $M \neq \emptyset$, $a \bullet b = a$

Lösung.

(a)

Addition Keine Operation in M, weil $1 + 1 = 2 \notin M$ (nicht abgeschlossen, kommutativ, assoziativ)

Multiplikation Operation in M, weil alle Multiplikationen Elemente aus M sind. (abgeschlossen, kommutativ, assoziativ)

(b)

(c)

Addition Operation in $\mathbb{Q}$
Assoziativ: nein

$$(a \bullet b) \bullet c = (ab + 1) \bullet c = (ab + 1) + c + 1 = ab + c + 2$$

$$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (bc + 1) = a + 1 + (bc + 1) = a + bc + 2$$

$$\implies \text{nicht gleich, daher nicht assoziativ}$$

Kommutativ: ja

Multiplikation Operation in $\mathbb{Q}$
Assoziativ: nein

$$(a \bullet b) \bullet c = (ab + 1) \bullet c = (ab + 1) \cdot c + 1 = abc + c + 1$$

$$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (bc + 1) = a \cdot (bc + 1) + 1 = abc + a + 1$$

$$\implies \text{nicht gleich, daher nicht assoziativ}$$

Kommutativ: ja

(d)

abgeschlossen ja, kommutativ ja
assoziativ:

$$(a \bullet b) \bullet c = ||a + b| + c| = ||4 - 3| - 5| = 4$$
$$a \bullet (b \bullet c) = |a + |b + c|| = |4 + | - 3 - 5|| = 12$$
$$\implies \text{nicht gleich, daher nicht assoziativ}$$

(e)

abgeschlossen ja, kommutativ nein, denn $a \bullet b = a$, aber $b \bullet a = b$ assoziativ:

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet c = a$$

$$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet b = a$$

$$\implies \text{gleich, daher assoziativ}$$