Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 4

Beispiele 138, 142, 155

Aufgabe 138. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass aus der Surjektivität von $g \circ f$ die Surjektivität von g und aus der Injektivität von $g \circ f$ die Injektivität von f folgt.

Lösung. Aus der Surjektivität von $g \circ f$ folgt, dass es für jedes $c \in C$ ein $a \in A$ geben muss, für das gilt: $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. $f(a)$ wird mit b substituiert und es gilt: $g(b) = c$. Damit $g \circ f$ surjektiv sein kann, muss g surjektiv sein, damit jedem $c \in C$ ein $b \in B$ zugeordnet wird. f muss aber auch surjektiv sein, da sonst b nicht jedes Element aus B sein kann.

Aus der Injektivität von $g \circ f$ folgt

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b) \Rightarrow a = b$$

Für $f(a)$ setzen wir m ein und für $f(b)$ n. Daraus folgt:

$$(a = b) \Longleftrightarrow f(a) = f(b) \Longleftrightarrow m = n$$

In die obige Formel für $f(a)$ m, für $f(b)$ n und für $(a = b)$ $(m = n)$ eingesetzt:

$$g(m) = g(n) \Rightarrow m = n$$

Somit ist g injektiv. Dadurch gilt:

$$g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow f(a) = f(b) \text{ außerdem}$$

$$g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow a = b$$

Deshalb gilt auch

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

was wiederum aussagt, dass f ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe 142. Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{6\} \to \mathbb{R}\backslash\{-10\}$, $y = \frac{10x+1}{6-x}$ bijektiv ist und bestimme ihre Umkehrfunktion.

Lösung.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{10x+1}{6-x} \\
y \cdot (6-x) &= 10x+1 \\
6y - xy &= 10x+1 \\
6y - 1 &= 10x + xy \\
6y - 1 &= x \cdot (10+y) \\
x &= \frac{6y-1}{10+y}
\end{aligned}
$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{6x-1}{10+x}$

Injektivität wird dadurch überprüft, dass zwei idente Funktionswerte den gleichen Ausgangswert besitzen.
$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$$
\begin{aligned}
\frac{10x_1+1}{6-x_1} &= \frac{10x_2+1}{6-x_2} \\
(10x_1+1) \cdot (6-x_2) &= (10x_2+1) \cdot (6-x_1) \\
60x_1 - 10x_1x_2 + 6 - x_2 &= 60x_2 - 10x_1x_2 + 6 - x_1 \\
60x_1 - x_2 &= 60x_2 - x_1 \\
61x_1 &= 61x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Surjektivität wird dadurch überprüft, dass die Funktion für jeden Funktionswert mindestens einen Ausgangswert haben muss.

$$f^{-1} = \frac{6x-1}{10+x} \in \mathbb{R} \backslash \{-10\} \quad \checkmark$$

Aufgabe 155. Wieviele „Wörter“ der Länge 28 gibt es, bei denen genau 5-mal der Buchstabe `a`, 14-mal `b`, 5-mal `c`, 3-mal `d` vorkommen und genau einmal `e` vorkommt?

Lösung.

$$\frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!} = \frac{(5+14+5+3+1)!}{5! \cdot 14! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 1!} \approx 4.048 \cdot 10^{13}$$