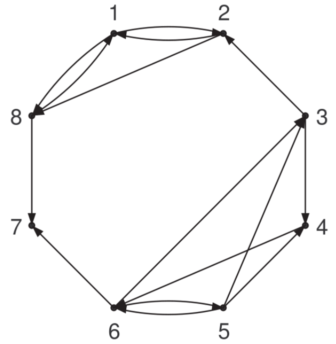
Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 6

Beispiele 270, 279, 294, 297, 302, 308, 310

Aufgabe 270.
(a) In nachstehendem Graphen gebe man je ein Beispiel für eine Kantenfolge, die kein Kantenzug ist, einen Kantenzug, der keine Bahn ist, bzw. eine Bahn, jeweils vom Knoten 6 zum Knoten 1 an.
(b) Desgleichen finde man eine geschlossene Kantenfolge, die kein geschlossener Kantenzug ist, einen geschlossenen Kantenzug, der kein Zyklus ist, bzw. einen Zyklus, jeweils durch den Knoten 5.
(c) Man zeige, dass G schwach, aber nicht stark zusammenhängend ist, und bestimme die starken Zusammenhangskomponenten.



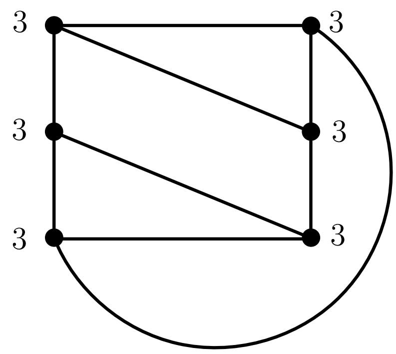
Lösung.
(a) Kantenfolge, aber kein Kantenzug (Kanten merhmals verwenden):

$$6 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$$

Kantenzug, aber keine Bahn ()

Aufgabe 279. Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ heißt kubisch, wenn jeder Knoten $v \in V$ Knotengrad $d(v) = 3$ hat.
(a) Geben Sie ein Beispiel für einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 6$ an!
(b) Gibt es einen kubischen Graphen mit ungerader Knotenanzahl $\alpha_0(G)$?
(c) Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \geq 2$ einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 2n$ gibt!

Lösung.
(a)



(b) Das Handschlaglemma besagt, dass in jedem Graph die Summe der Grade aller Knoten genau doppelt so groß ist wie die Anzahl seiner Kanten:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

daraus folgt, da bei kubischen Graphen jeder Knoten v den Knotengrad $d(v) = 3$ hat, dass die Summe aller Grad die Anzahl der Knoten multipliziert mit 3 ist:

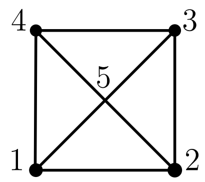
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 3 \cdot \alpha_0(G)$$

$$3 \cdot \alpha_0(G) = 2 \cdot |E(G)|$$

Da das doppelte der Kantenanzahl immer gerade ist (weil Faktor 2), muss die Knotenanzahl auch gerade sein, weil nur eine gerade Zahl mit drei multipliziert wieder eine gerade Zahl ergibt.

(c) Der Mittelteil des oben gezeichneten Graphen kann beliebig oft hinzugefügt werden und man erhält somit zu jedem Graphen einen Graphen mit doppelt so vielen Knoten.

Aufgabe 294. Man bestimme im Graphen G_{10} mit Hilfe von $A^3_{G_{10}}$ die Anzahl der Dreiecke (d. h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).



Lösung.

$$\text{Adjazenzmatrix } A_{G_{10}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 297.

Lösung.

Aufgabe 302.

Lösung.

Aufgabe 308.

Lösung.

Aufgabe 310.

Lösung.