

Technische Grundlagen der Informatik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Gegeben sind die folgenden Dezimalzahlen:

$$A = (108.1625)_{10}$$

$$B = (-25.40625)_{10}$$

Wandeln Sie die Zahlen A und B direkt in die nachfolgend angegebenen Zahlensysteme um. Geben Sie das Ergebnis auf n Nachkommastellen genau an. Runden Sie Ihr Ergebnis durch *round to nearest* (Optimale Rundung) auf n Nachkommastellen. Falls es zwei nächstliegende Zahlen gibt, verwenden Sie *round to even*. Geben Sie Ihre Berechnungen sowie die verwendete Rundungsmethode an!

- (a) Binärsystem, $n = 4$
- (b) Hexadezimalsystem, $n = 2$
- (c) Ternäres Zahlensystem, $n = 4$

Lösung. (a) für A

$108 \bmod 2$	0	$0.1625 \cdot 2 = 0.3250$	0
$44 \bmod 2$	0	$0.3250 \cdot 2 = 0.65$	0
$27 \bmod 2$	1	$0.65 \cdot 2 = 1.3$	1
$13 \bmod 2$	1	$0.3 \cdot 2 = 0.6$	0
$6 \bmod 2$	0	$0.6 \cdot 2 = 1.2$	1
$3 \bmod 2$	1	$0.2 \cdot 2 = 0.4$	0
$1 \bmod 2$	1	$0.4 \cdot 2 = 0.8$	0
		$0.8 \cdot 2 = 1.6$	1

$$(108.1625)_{10} = (1101100.0011)_2$$

Rundungsmethode: *round to nearest*

(a) für B

$25 \bmod 2$	1	$0.40625 \cdot 2 = 0.8125$	0
$12 \bmod 2$	0	$0.8125 \cdot 2 = 1.625$	1
$6 \bmod 2$	0	$0.625 \cdot 2 = 1.25$	1
$3 \bmod 2$	1	$0.25 \cdot 2 = 0.5$	0
$1 \bmod 2$	1	$0.5 \cdot 2 = 1$	1

$$(-25.40625)_{10} = (-11001.0110)_2$$

Rundungsmethode: *round to even*(b) für A

$$\begin{array}{ll}
108 \bmod 16 & C \\
6 \bmod 16 & 6 \\
0.1625 \cdot 16 & = 2.6 \quad 2 \\
0.6 \cdot 16 & = 9.6 \quad 9 \\
0.6 \cdot 16 & = 9.6 \quad 9
\end{array}$$

$$(108.1625)_{10} = (6C.2A)_{16}$$

Rundungsmethode: *round to nearest*(b) für B

$$\begin{array}{ll}
25 \bmod 16 & 9 \\
1 \bmod 16 & 1 \\
0.40625 \cdot 16 & = 6.5 \quad 6 \\
0.5 \cdot 16 & = 8 \quad 8
\end{array}$$

$$(-25.40625)_{10} = (-19.68)_{16}$$

Rundungsmethode: *exakt*(c) für A

$$\begin{array}{ll}
108 \bmod 3 & 0 \\
36 \bmod 3 & 0 \\
12 \bmod 3 & 0 \\
4 \bmod 3 & 1 \\
1 \bmod 3 & 1 \\
0.1625 \cdot 3 & = 0.4875 \quad 0 \\
0.4875 \cdot 3 & = 1.4625 \quad 1 \\
0.4625 \cdot 3 & = 1.3875 \quad 1 \\
0.3875 \cdot 3 & = 1.1625 \quad 1 \\
0.1625 \cdot 3 & = 0.4875 \quad 0
\end{array}$$

$$(108.1625)_{10} = (11000.0111)_3$$

Rundungsmethode: *round to nearest*(c) für B

$$\begin{array}{ll}
25 \bmod 3 & 1 \\
8 \bmod 3 & 2 \\
2 \bmod 3 & 2 \\
0.40625 \cdot 3 & = 1.21875 \quad 1 \\
0.21875 \cdot 3 & = 0.65625 \quad 0 \\
0.65625 \cdot 3 & = 1.96875 \quad 1 \\
0.96875 \cdot 3 & = 2.90625 \quad 2 \\
0.90625 \cdot 3 & = 2.71875 \quad 2
\end{array}$$

$$(-25.40625)_{10} = (-221.1020)_3$$

Rundungsmethode: *round to nearest*

Aufgabe 2. Führen Sie die folgenden Umwandlungen *ohne* Umweg über das Dezimalsystem durch!

- (a) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl $(67.EC)_{16}$ in eine Binärzahl um.
- (b) Wandeln Sie die Binärzahl $(1101100.11101)_2$ in eine Quarterärzahl um.
- (c) Wandeln Sie die Zahl $(824.75)_9$ in eine ternäre Zahl um.

Lösung. (a)

6	7	.	E	C
0110	0111	.	1110	1100

$$(01100111.11101100)_2 = (67.EC)_{16}$$

(b)

01	10	11	00	.	11	10	10	00
1	2	3	0	.	3	2	2	0

$$(1101100.11101)_2 = (1230.322)_4$$

(c)

8	2	4	.	7	5
22	02	11	.	21	12

$$(824.75)_9 = (220211.2112)_3$$

Aufgabe 3. Es sind die folgenden Binärzahlen gegeben:

$$A = (10011.01)_2$$

$$B = (1110.11)_2$$

$$C = (100)_2$$

$$D = (-101.1)_2$$

Führen Sie mit diesen Zahlen die folgenden arithmetischen Operationen binär(!) durch. Berechnen Sie die Ergebnisse exakt und geben Sie Ihren Rechenweg an!

(a) Addition: $A + B$

(b) Subtraktion: $A - B$

(c) Division: $B \div C$

Lösung. (a)

$$\begin{array}{r} 10011.01 \\ + 1110.11 \\ \hline 100010.00 \end{array}$$

$$A + B = (100010)_2$$

(b)

$$\begin{array}{r} 10011.01 \\ - 1110.11 \\ \hline 00100.10 \end{array}$$

$$A - B = (100.1)_2$$

(c)

$$\begin{array}{r} 1110.11 \div 100 = 11.1011 \\ - 100 \\ \hline 0110 \\ - 100 \\ \hline 0101 \\ - 0100 \\ \hline 0011 \\ - 0000 \\ \hline 110 \\ - 100 \\ \hline 0100 \\ - 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$A \div B = (11.1011)_2$$

Aufgabe 4. Es sind folgende Zahlen gegeben:

$$A = (2A3)_{16}$$

$$B = (-102)_4$$

$$C = (0)_2$$

Geben Sie die Zahlen A , B und C als 12 Bit lange Maschinenwörter in den nachfolgenden Zahlendarstellungen jeweils in binärer – z.B. 010 1110 0111 – und in hexadezimaler – z.B. 2E7 – Notation an. Falls es in einer Zahlendarstellung für dieselbe Zahl unterschiedliche Darstellungen gibt, geben Sie alle an!

- (a) Vorzeichen und Betrag
- (b) Einerkomplementdarstellung
- (c) Zweierkomplementdarstellung
- (d) Exzessdarstellung ($\text{Exzess} = 2^7 - 1$)

Lösung. (a) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$

$$\text{Vorzeichen und Betrag: } 0 \mid 010\ 1010\ 0011 = (2A3)_{16}$$

(a) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$

$$\text{Vorzeichen und Betrag: } 1 \mid 000\ 0001\ 0010 = (812)_{16}$$

(a) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\text{Vorzeichen und Betrag: } 0 \mid 000\ 000\ 000 = (0)_{16} \text{ und}$$

$$1 \mid 000\ 000\ 000 = (800)_{16}$$

(b) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$

$$\text{Einerkomplement: } (0010\ 1010\ 0011)_2 = (2A3)_{16}$$

(b) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$

$$\text{Einerkomplement: } (1111\ 1110\ 1101)_2 = (7ED)_{16}$$

(b) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\begin{aligned} \text{Einerkomplement: } (0000\ 0000\ 0000)_2 &= (0)_{16} \text{ und} \\ (1111\ 1111\ 1111)_2 &= (FFF)_{16} \end{aligned}$$

(c) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$

$$\text{Zweierkomplement: } (0010\ 1010\ 0011)_2 = (2A3)_{16}$$

(c) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$

$$\text{Zweierkomplement: } (1111\ 1110\ 1110)_2 = (FEE)_{16}$$

(c) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\text{Zweierkomplement: } (0000\ 0000\ 0000)_2 = (0)_{16}$$

(d) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$

$$\begin{array}{r} \text{Exzessdarstellung mit Exzess} = 2^7 - 1: \quad \begin{array}{r} 001010100011 \\ + 000001111111 \\ \hline 001100100010 \end{array} \end{array}$$

$$(0011\ 0010\ 0010)_2 = (322)_{16}$$

(d) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$

$$\begin{array}{r} \text{Exzessdarstellung mit Exzess} = 2^7 - 1: \quad \begin{array}{r} - 000000010010 \\ + 000001111111 \\ \hline 000001101101 \end{array} \end{array}$$

(ist dasselbe wie Exzess weniger B)

$$(0000\ 0110\ 1101) = (06D)_{16}$$

(d) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\begin{array}{r} \text{Exzessdarstellung mit Exzess} = 2^7 - 1: \quad \begin{array}{r} 000000000000 \\ + 000001111111 \\ \hline 000001111111 \end{array} \end{array}$$

$$(0000\ 0111\ 1111)_2 = (07F)_{16}$$

Aufgabe 5. Folgende Bitmuster sind gegeben: $Z_1 = (00001100)_2$ und $Z_2 = (10011011)_2$. Interpretieren Sie Z_1 und Z_2 als Binärzahlen, die beide jeweils in einer der nachfolgend angegebenen Darstellungen a) bis c) codiert sind. Führen Sie damit die Berechnung $-(Z_1 + Z_2)$ mit einer Maschinenwortlänge von 8 Bit binär durch und geben Sie Zwischenschritte an. Geben Sie das Ergebnis der Berechnung auch als decodierte Dezimalzahl an!

- (a) Darstellung durch Vorzeichen und Betrag
- (b) Zweierkomplementdarstellung
- (c) Exzessdarstellung mit Exzess = $(10000001)_2$

Lösung. (a)

$$Z_1 = (0 \mid 0001100)_2 = (+12)_{10}$$

$$Z_2 = (1 \mid 0011011)_2 = (-27)_{10}$$

$$(Z_1 + Z_2) = \begin{array}{r} 00001100 \\ -00011011 \\ \hline 00001111 \end{array}$$

$$-(Z_1 + Z_2) = (-0000\ 1111)_2 = (1 \mid 0001111)_2$$

(b)

$$Z_1 = (1111\ 0100)_2 = (-244)_{10}$$

$$Z_2 = (0110\ 0101)_2 = (101)_{10}$$

$$(Z_1 + Z_2) = \begin{array}{r} 00001100 \\ +10011011 \\ \hline 10100111 \end{array}$$

$$-(Z_1 + Z_2) = (0101\ 1001)_2$$

(c)

$$Z_1 = (00001100)_2 - (01111111)_2 = (-01110011)_2 = (-115)_{10}$$

$$Z_2 = (10001101)_2 - (01111111)_2 = (00001110)_2 = (14)_{10}$$

$$(Z_1 + Z_2) = \begin{array}{r} 00001100 \\ +10011011 \\ \hline 10100101 \end{array}$$

$$-(Z_1 + Z_2) = (0010\ 1000)_2$$

Aufgabe 6. Wandeln Sie die Zahl $(1.6875)_{10}$ in eine Binärzahl mit 3 Nachkommastellen um - alle weiteren Nachkommastellen werden abgeschnitten.

- (a) Berechnen Sie den absoluten sowie den relativen Rundungsfehler, der bei der Umrechnung ins Binärsystem entstanden ist.
- (b) Durch die Rundungsmethode werden alle reellen Zahlen aus einem Intervall $[a, b[\in \mathbb{R}$ auf dieselbe Binärzahl abgebildet. Geben Sie die dezimalen Werte a, b für das Intervall an, in dem $(1.6875)_{10}$ liegt!

Lösung. (a)

$$(1.6875)_{10} = (1.1011)_2 \approx (1.101)_2 = (1.625)_{10}$$

$$\text{relativer Fehler: } 1 - (1.625 \div 1.6875) \approx 0.037 \approx 3.7\%$$

$$\text{absoluter Fehler: } 1.6875 - 1.6250 = 0.0625$$

(b)

$$[1.6250, 1.7499]$$

Aufgabe 7. Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen A und B im *Single Precision*-Format (mit implizitem ersten Bit) der IEEE 754 Gleitpunkt-Zahlensysteme dar.

$$A = (0.D266)_{16}$$

$$B = (-310.11)_4$$

Lösung.

$$(0.D266)_{16} = (0.1101\ 0010\ 0110\ 0110)_2$$

$$\text{Normalisierung: } (1.101\ 0010\ 0110\ 0110)_2 \cdot 2^{-1}$$

$$\text{Exponent: } (01111111) - (00000001) = (01111110)$$

$$\text{Vorzeichen: } (0)_2$$

$$0 \mid 01111110 \mid 110100100110011000000000$$

$$(-310.11)_4 = (-110100.0101)_2$$

$$\text{Normalisierung: } (1.101000101)_2 \cdot 2^5$$

$$\text{Exponent: } (01111111) + (00000101) = (10000100)$$

$$\text{Vorzeichen: } (1)_2$$

$$1 \mid 10000100 \mid 110100010100000000000000$$