Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 3

Beispiele 95, 98, 104, 105, 125, 127, 151

Aufgabe 95. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen mit Hilfe von Elementtafeln oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

$$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$$

Lösung. Die beiden Formeln sind äquivalent!

A	B	C	A	$\cap$	$(B \,\Delta\, C)$	$(A \cap B)$	Δ	$(A \cap C)$
1	1	1	1	**0**	0	1	**0**	1
1	1	0	1	**1**	1	1	**1**	0
1	0	1	1	**1**	1	0	**1**	1
1	0	0	1	**0**	0	0	**0**	0
0	1	1	0	**0**	0	0	**0**	0
0	1	0	0	**0**	1	0	**0**	0
0	0	1	0	**0**	1	0	**0**	0
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**	0

Aufgabe 98. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Identität für Mengen:

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$$

Lösung. $(A \times B) : \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Das gilt aufgrund des Kommutativgesetzes auch für $(B \times A)$. Die Vereinigung der beiden ist $A \times B$, also $\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Auf der rechten Seite hat man nun $(A \cup B)$, was $\{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$ entspricht. Dasselbe gilt für den zweiten Faktor im kartesischen Produkt, welches nun wie folgt dargestellt wird: $\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Daraus folgt, dass die linke Seite der rechten entspricht:

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$$

$$\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Hiermit ist die Identität der Mengen bewiesen.

Aufgabe 104. Man untersuche nachstehend angeführte Relationen $R \subseteq M^2$ in Hinblick auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität:

(a) M = Menge aller Einwohner von Wien, $a\,R\,b \Leftrightarrow a$ ist verheiratet mit b

(b) M wie oben, $a\,R\,b \Leftrightarrow a$ ist nicht älter als b

(c) M wie oben, $a\,R\,b \Leftrightarrow a$ ist so groß wie b

(d) $M = \mathbb{R}$, $a\,R\,b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

(e) $M = \mathbb{R}^n$, $(x_1, ..., x_n)\,R\,(y_1, ..., y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i \;\forall i = 1, ..., n$

Lösung. (a)

Reflexivität $a\,R\,a \Longrightarrow a$ verheiratet mit a ↯

Symmetrie $a\,R\,b \Longrightarrow b\,R\,a$ ✓

Antisymmetrie $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Longrightarrow a = b$ mit sich selbst verheiratet? ↯

Transitivität $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Longrightarrow a\,R\,c$ ↯

(b)

Reflexivität $a\,R\,a \Longrightarrow (a \leq a) \wedge (b \leq b)$ ✓

Symmetrie $a\,R\,b \Longrightarrow b\,R\,a\ (a \leq b) \wedge (b \leq a)$ ✓

Antisymmetrie $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Longrightarrow (a \leq b) \vee (b \leq a) \Longrightarrow a = b$ ✓

Transitivität $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Longrightarrow a\,R\,c \Longrightarrow (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Longrightarrow (a \leq c)$ ✓

(c)

Reflexivität $a\,R\,a \Longrightarrow (a = a) \wedge (b = b)$ ✓

Symmetrie $a\,R\,b \Longrightarrow b\,R\,a \Longrightarrow (a = b) \wedge (b = a)$ ✓

Antisymmetrie $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Longrightarrow b = a$ ✓

Transitivität $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Longrightarrow a\,R\,c \Longrightarrow (a = b) \wedge (b = c) \Longrightarrow a = c$ ✓

(d)

Reflexivität $a - b \in a - b$ ✓

Symmetrie

Aufgabe 125. Welche der folgenden Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität hat folgende Relation R auf $\mathbb{Z}$:

$$mRn \Longleftrightarrow m^4 = n^4$$

Lösung. Die Relation $mRn \iff m^4 = n^4$ ist symmetrisch, antisymmetrisch, reflexiv und transitiv.

Symmetrie $mRn \implies nRm : m^4 = n^4 \implies n^4 = m^4$

Reflexivität $mRm \wedge nRn : m^4 = m^4 \wedge n^4 = n^4$

Antisymmetrie $mRn \wedge nRm \implies m = n : m^4 = n^4 \wedge n^4 = m^4 \implies m^4 = n^4$

Transitivität $mRn \wedge nRo \implies mRo : m^4 = n^4 \wedge n^4 = o^4 \implies m^4 = o^4$