Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 5

Beispiele 168, 170, 173, 178, 186, 191, 200

Aufgabe 168. Wie viele verschiedene Tipps müssen beim Lotto „6 aus 45“ abgegeben werden, um sicher einen Sechser zu erzielen? Wie viele verschiedene Tipps führen zu keinem Gewinn (d.h., diese Tipps enthalten maximal zwei richtige Zahlen), bei wie vielen möglichen Tipps stimmt mindestens eine Zahl, bei wie vielen sind alle Zahlen falsch?

Lösung. Um sicher einen Sechser zu erzielen, müssen von $\binom{45}{6}$ möglichen Tipps $\binom{45}{6}$ Tipps abgegeben werden, da einer von allen Tipps ein Sechser ist.

- Mögliche Tipps ohne richtige Zahlen: $\binom{6}{0} \cdot \binom{39}{6} = 3262623$
- Mögliche Tipps mit einer richtigen Zahl: $\binom{6}{1} \cdot \binom{39}{5} = 3454542$
- Mögliche Tipps mit zwei richtigen Zahlen: $\binom{6}{2} \cdot \binom{39}{4} = 1233765$

Nun müssen die einzelnen Tippmöglichkeiten addiert werden:

$$\binom{6}{0} \cdot \binom{39}{6} + \binom{6}{1} \cdot \binom{39}{5} + \binom{6}{2} \cdot \binom{39}{4} = 7950930$$

Aufgabe 170. Wieviele natürliche Zahlen $n < 100\,000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau dreimal die Ziffer drei?

Lösung. Da wir alle Zahlen von $0 - 99\,999$ betrachten, gibt es $100\,000$ Möglichkeiten. 3 von 5 Ziffern müssen einen dreier enthalten, 2 Ziffern dürfen alle Zahlen von $0 - 2$ und $4 - 9$ annehmen.

Alle möglichen Kombinationen, die an 3 von 5 Stellen dreier enthalten bekommt man durch

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{120}{12} = 10.$$

Nun werden die restlichen zwei Ziffern mit Kombinationen von $0 - 2$ und $4 - 9$ aufgefüllt, was 9 Möglichkeiten pro Ziffer entspricht. Das für beide Ziffern ist

$$9 \cdot 9 = 81$$

multipliziert mit 10:

$$10 \cdot 81 = 810 \text{ Kombinationen}$$

Aufgabe 173. Man beweise die Formel

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(Hinweis: Man betrachte die Koeffizienten von $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.)

Lösung.

Aufgabe 178. Berechnen Sie unter Benützung des Binomischen Lehrsatzes (und ohne Benützung der Differentialrechnung):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k 5^k$$

Lösung. Dafür muss der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n$$

so umgeformt werden, dass er auf die Angabe angewendet werden kann.

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} 5^k$$

Nun wird k ersteinmal in den Binomialkoeffizienten hineinmultipliziert.

$$k\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k!)} = \frac{k \cdot n!}{k! \cdot k \cdot (n-1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Anschließend wird in die Angabe eingesetzt:

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} 5^k = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 5^k = \underbrace{n \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} 5^{k+1}}_{\text{Indexverschiebung } k=k-1} = 5n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 5^k$$

Jetzt in binomischen Lehrsatz einsetzen mit $x = 1$, $y = 5$ und $n = n - 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^{n-1-k} 5^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 5^k = (1+5)^{n-1}$$

Das Ergebnis:

$$5n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 5^k = 5n(1+5)^{n-1}$$

Aufgabe 186. Zeigen Sie mithilfe des Schubfachprinzips: Unter je 15 natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 14 teilbar ist.

Lösung. Man betrachte alle Restklassen Modulo 14:

$$x \equiv y \pmod{} m \Leftrightarrow m \mid x - y$$

Nun gibt man jeder Restklasse ein Schubfach also bekommt man 14 Fächer. Da wir 15 Zahlen haben, können wir 14 im besten Fall so wählen, dass jede der 14 Zahlen in einem Schubfach landet. Die letzte Zahl muss nun wohl oder übel in ein Schubfach in dem schon eine Zahl ist. Dadurch liegen zwei Zahlen in einer Restklasse und daraus folgt, dass ihre Differenz durch 14 teilbar ist.

Aufgabe 191. Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder Quadrat, noch dritte, vierte oder fünfte Potenz einer natürlichen Zahl sind?

Lösung.

Aufgabe 200. Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a,b,c,d,e,f,g,h,` in denen weder der Block „`acg`" noch der Block „`cgbe`" vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

Lösung. Alle möglichen Anordnungen ohne Berücksichtigung der Aufgabenstellung:

$$8! = 40320$$

weil wir acht Buchstaben (`a-h`) haben. Für den Block `acg` ergeben sich sechs mögliche Anordnungen mit fünf anordbaren Buchstaben, das heißt:

$$6 \cdot 5! = 720$$

Für den Block `cgbe` gibt es fünf mögliche Anordnungen mit vier anordbaren Buchstaben, das heißt:

$$5 \cdot 4! = 120$$

Jetzt gibt es aber auch Anordnungen, in denen beide Blöcke vorkommen, das heißt Anordnungen nach dem Schema `acgbe`. Hier sind vier Anordnungen möglich mit drei anordbaren Buchstaben:

$$4 \cdot 3! = 24$$

Aus diesen Mengen von Anordnungen muss nun die korrekte Anzahl an Anordnungen ermittelt werden. Dazu müssen von der Gesamtmenge (8!) die Anordnungen für Block `acg` und für Block `cgbe` subtrahiert und die Möglichkeiten für Block `acgbe` addiert werden. Das muss deshalb geschehen, weil sonst die Anordnungen in denen beide Blöcke enthalten sind am Anfang nur einmal „hineinkommen" (8!), aber zweimal abgezogen werden, nämlich einmal bei Block `acg` und das zweite Mal bei Block `cgbe`. Also:

$$8! - 6 \cdot 5! - 5 \cdot 4! + 4 \cdot 3! = 40320 - 720 - 120 + 24 = 39504$$