Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 9

Beispiele 326, 348, 356, 360, 364, 375, 395

Aufgabe 326. Gegeben seien die folgenden Permutationen der S_8:

$$\pi = (13746), \quad \rho = (143652), \quad \text{und } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi^2\rho\sigma^{-2}$ sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

Lösung.

$$\pi = (13746), \quad \rho = (143652), \quad \sigma = (24)(35)(67), \quad \rho^{-1} = (125634), \quad \sigma^2 = (1) = id$$

$$\pi^2 = (13746)(13746) = (17634)$$

$$\pi\rho^{-1}\sigma^2 = (13746)(125634)(1) = (13746)(125634) = (125)(6743)$$

$$\pi^2\rho\sigma^{-2} = (17634)(143652) = (6527)$$

Vorzeichen:

$$sign(\pi\rho^{-1}\sigma^2) = -1$$

$$sign(\pi^2\rho\sigma^{-2}) = -1$$

Aufgabe 348. Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

$$M = \mathbb{Q} \setminus \{1\},\ a \circ b = a + b - ab$$

Lösung. Eine algebraische Struktur kann folgende Eigenschaften annehmen:

1. **Abgeschlossenheit:** $G \times G = G$ für $a, b \in G \to a \circ b \in G$.
2. **Assoziativgesetz:** $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.
3. **Neutrales Element:** $\exists e \in G \mid \forall a \in G : a \circ e = e \circ a = a$.
4. **Inverses Element:** $\forall a \in G \mid \exists a' \in G : a \circ a' = a' \circ a = e$.
5. **Kommutativgesetz:** $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$.

1. Eigenschaft: *Gruppoid*.
1. und 2. Eigenschaft: *Halbgruppe*.
1. 2. und 3. Eigenschaft: *Monoid*.
1. 2. 3. und 4. Eigenschaft: *Gruppe*.
1. 2. 3. 4. und 5. Eigenschaft: *Abelsche Gruppe*.

Abgeschlossenheit

Kann das Ergebnis 1 ergeben?

$$a + b - ab = 1$$

$$a - ab = 1 - b$$

$$a \cdot (1 - b) = 1 - b$$

$$a = \frac{1 - b}{1 - b}$$

$$a = 1, \quad b = 0$$

Dasselbe mit b ergibt

$$b = 1, \quad a = 0$$

Das heißt das Ergebnis der Operation ist nur dann 1, wenn entweder a oder b eins sind, das ist aber von vornherein ausgeschlossen. Daraus folgt, dass die Operation **abgeschlossen** ist.

Assoziativität

Es muss gelten:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Linke Seite:

$$a \circ (b + c - bc) = a + b + c - bc - ab - ac + abc$$

Rechte Seite:

$$(a + b - ab) \circ c = a + b - ab + c - ac - bc + abc$$

Beide Seiten sind gleich, daher ist die **Assoziativität** gegeben.

Neutrales Element (Einheitselement)

Wir prüfen:

$$a \circ e = a + e - ae = a$$

Daraus folgt, dass das neutrale Element 0 sein muss, also ein Einheitselement existiert.

Inverses Element

Bei der Operation $a \circ a' = a' \circ a$ soll das Einheitselement e, also 0 herauskommen. Daraus folgt:

$$a + a' - a' \cdot a = 0$$

$$a + a' \cdot (1 - a) = 0$$

$$a' \cdot (1 - a) = -a$$

$$a' = -\frac{a}{1 - a}$$

Das ist das inverse Element, wobei a' nicht 1 sein darf, sonst folgt die Division durch Null, was aber sowieso ausgeschlossen ist durch $M = \mathbb{Q} \backslash \{1\}$.

Kommutativität

Es muss gelten: $a \circ b = b \circ a$

$$a \circ b = a + b - ab$$

$$b \circ a = b + a - ba$$

Daraus folgt, dass die Kommutativität gegeben ist.

Schlussfolgerung

Die Operation ist eine *Abelsche Gruppe*.

Aufgabe 356. Man ergänze die folgende Operationstafel so, dass $\langle G = \{a, b, c, d\}, *\rangle$ eine Gruppe ist.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Lösung.

Aufgabe 360. Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G (mit neutralem Element e) ist genau dann Untergruppe von G, wenn

(a) $a, b \in U \Rightarrow ab \in U$
(b) $e \in U$
(c) $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$

für alle $a, b \in G$ erfüllt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a, b \in U \Rightarrow ab^{-1} \in U$.

Lösung.

Aufgabe 364. Man bestimme alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe der Ordnung 6, d.h., von $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$.

Lösung.

Zyklische Gruppe

Eine zyklische Gruppe ist eine Gruppe, die von einem einzelnen Element a erzeugt wird. Sie besteht nur aus Potenzen des Erzeugers a.

Untergruppe

Eine Untergruppe ist eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe und ist selbst eine Gruppe (assoziativ, neutrales Element, Inverse zu jedem Element).

Kleiner Fermat'scher Satz

Für jedes Element $a \in G$ einer endlichen Gruppe $(G, \circ)$ gilt $a^{|G|} = e$. Auf dieses Beispiel angewandt heißt das: $a^6 = e$.

Lösung

Zwei Untergruppen haben wir bereits:

$$U_1 = \{e\}$$

und

$$U_2 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$$

Die anderen Untergruppen findet man, indem man schaut, wann die Gruppe ein neutrales Element besitzt und jedes Element ein Inverses hat. Die Assoziativität erbt die Untergruppe automatisch von der gegebenen Gruppe. Da zyklische Gruppen wie Restklassen gesehen werden können, gilt hier $a^6 = e$.
Die dritte Untergruppe ist

$$U_3 = \{e, a^3\}$$

da $a^3 \circ a^3 = a^6 = e$ ist. a^3 ist also das inverse Element zu sich selbst. $\{e, a^4\}$ und $\{e, a^5\}$ sind keine Untergruppen, da ein inverses Element fehlt.
Als nächstes gilt es Untergruppen mit drei Elementen zu finden. Dabei kann man sich das ganze Vereinfachen, indem man sich überlegt, dass die Exponenten der Elemente addiert die Ordnung, also 6, ergeben müssen. Daraus folgt:

$$U_4 = \{e, a^2, a^4\}$$

$$a^2 \circ a^4 = a^6 = e \text{ und } a^2 \circ a^2 = a^4 \text{ bzw. } a^4 \circ a^4 = a^8 = a^6 \circ a^2 = e \circ a^2 = a^2$$

Aufgabe 375. Man zeige, dass die von $\overline{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

Lösung. Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt Normalteiler, wenn stets LNK=RNK gilt, d.h. $aN = Na, \forall a \in G$. Außerdem gilt:

In abelschen Gruppen ist jede Untergruppe Normalteiler, somit lässt sich dort nach jeder Untergruppe die Faktorgruppe bilden.

$$U = \{0, 3, 6, 9\}$$

U ist Normalteiler, weil $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ kommutativ ist und daher die Linksnebenklassen mit den Rechtsnebenklassen übereinstimmen müssen.

Nebenklassen:

$$a := 0 + U = 3 + U = 6 + U = 9 + U = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$b := 1 + U = 4 + U = 7 + U = 10 + U = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$c := 2 + U = 5 + U = 8 + U = 11 + U = \{2, 5, 8, 11\}$$

Gruppentafel:

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

a ist das neutrale Element und b ist zu c invers.

Aufgabe 395. Von der Abbildung $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ sei bekannt, dass f ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition ist (die jeweils komponentenweise definiert sein soll), sowie dass $f(1, 0) = (1, 0, 0, 2), f(1, 1) = 1, 2, 0, 1$. Man ermittle daraus $f(w)$ für alle $w \in (\mathbb{Z}_3)^2$.

Lösung.