Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 2

Beispiele 11, 12, 43, 47, 53, 59, 64

Aufgabe 11. Handelt es sich bei der aussagenlogischen Formel

$$[(A \to B) \land (B \to C)] \leftrightarrow (A \to C)$$

um eine Tautologie, um eine Kontradiktion oder um eine erfüllbare Formel?

Lösung. Es handelt sich um eine erfüllbare Formel, da die Aussage für mindestens eine Interpretation wahr ist.

A	B	C	$[(A \to B)$	$\land$	$(B \to C]$	$\leftrightarrow$	$(A \to C)$
1	1	1	1	1	1	**1**	1
1	1	0	1	0	0	**1**	0
1	0	1	0	0	1	**0**	1
1	0	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	1	1	1	**1**	1
0	1	0	1	0	0	**0**	1
0	0	1	1	1	1	**1**	1
0	0	0	1	1	1	**1**	1

Aufgabe 12. Gelten folgende Formeln? Geben Sie jeweils eine verbale Begründung.
(a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
(b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} : x < y$
(c) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : y < x$
(d) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : y < x$

Lösung. (a) Aussage stimmt, weil die natürlichen Zahlen unendlich sind und somit jede Zahl einen Nachfolger hat.
(b) Aussage ist falsch, weil es einerseits keine negativen Zahlen in $\mathbb{N}$ gibt und damit beispielsweise 0 keinen Vorgänger hat, andererseits, weil es nie eine Zahl geben kann, die größer als alle anderen ist, da $\mathbb{N}$ unendlich ist.
(c) Aussage ist falsch, da die Zahl 0 keinen Vorgänger hat.
(d) Aussage ist wahr, da jede Zahl in $\mathbb{Z}$ einen Vorgänger hat.

Aufgabe 43. Man bestimme den ggT(1109,4999) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

Lösung.

$$\begin{aligned} 4999 \bmod 1109 &= 563 \\ 1109 \bmod 563 &= 546 \\ 563 \bmod 546 &= 17 \\ 546 \bmod 17 &= 2 \\ 17 \bmod 2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathrm{ggT}(1109,\ 4999) = 1$$

Aufgabe 47. Man bestimme zwei ganze Zahlen x, y, welche die Gleichung $243x + 198y = 9$ erfüllen.

Lösung.

$$\begin{aligned} 243 &= 1 \cdot 198 + 45 \\ 198 &= 4 \cdot 45 + 18 \\ 45 &= 2 \cdot 18 + 9 \end{aligned}$$

$$\mathrm{ggT}(243,\ 198) = 9$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned} 9 &= 45 - 2 \cdot (198 - 4 \cdot 45) \\ 9 &= -(2 \cdot 198 - 9 \cdot 45) \\ 9 &= -2 \cdot 198 + 9 \cdot 45 \\ 9 &= -2 \cdot 198 + 9 \cdot (243 - 198) \\ 9 &= 9 \cdot 243 - 11 \cdot 198 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x = 9$ und $y = -11$

Aufgabe 53. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Kongruenzen bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$):

(a) $6x \equiv 3 \bmod 9$

(b) $6x \equiv 4 \bmod 9$

Lösung. (a) Lösbar, weil ggT(6, 9) = 3 und 3 ein Teiler von 3 ist. Nach erweitertem euklidischen Algorithmus gilt $3 = -1 \cdot 6 + 1 \cdot 9$. Daraus folgt, dass $x \equiv -1 + k \cdot \frac{9}{ggT(6,9)}$, also $x \equiv -1 + k \cdot 3$

(b) Nicht lösbar, weil ggT(6,9) = 3 und 3 kein Teiler von 4 ist.
$\Longrightarrow$ Wenn $ggT(a, m)|b$, dann kann die Kongruenz durch den größten gemeinsamen Teiler dividiert werden und es folgt daraus eine neue Kongruenz mit $ggT(a', m') = 1 \Longrightarrow$ es gibt eine Zahl c, sodass $a' \cdot c = 1 \bmod m'$ ist. Da die Voraussetzung aber nicht gegeben ist, gibt es auch kein Inverses und daraus folgt die Unlösbarkeit.

Aufgabe 59. Im europäischen Artikelnummernsystem EAN werden Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1\, a_2 \ldots a_{12}\, p$ verwendet. Dabei wird die letzte der 13 Ziffern, das ist die Prüfziffer p im EAN-Code so bestimmt, dass

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \ldots + a_{11} + 3a_{12} + p \equiv 0 \bmod 10$$

gilt. Man zeige, dass beim EAN-Code ein Fehler in einer einzelnen Ziffer stets erkannt wird, während eine Vertauschung von zwei benachbarten Ziffern genau dann nicht erkannt wird, wenn die beiden Ziffern gleich sind oder sich um 5 unterscheiden.

Lösung. Wenn ein Fehler in einer einzelnen Ziffer auftritt, dann ist die Summe der Ziffern eine Andere und ergibt nach dem Addieren der Prüfziffer p nicht mehr 0 mod 10. Wenn zwei benachbarte, gleiche Ziffern vertauscht werden, ändert sich nichts an der Summe und der Fehler wird somit nicht erkannt. Wenn sich die beiden Ziffern um 5 unterscheiden, ändert sich ebenfalls nichts an dem Ergebnis, weil

$$\begin{aligned}
\overbrace{x + 3(x+5) \bmod 10}^{\text{Richtig}} &\equiv \overbrace{(x+5) + 3x \bmod 10}^{\text{Vertauscht}} \\
4x + 15 \bmod 10 &\equiv 4x + 5 \bmod 10 \\
4x + 5 &\equiv 4x + 5
\end{aligned}$$

Das heißt die Vertauschung verändert die Summe in diesem Fall nicht und der Fehler bleibt unerkannt.

Aufgabe 64. Man zeige, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets durch 3 teilbar ist, mittels
(a) eines direkten Beweises,
(b) eines Beweises durch vollständige Induktion.

Lösung. (a)

$$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n-1) \cdot (n+1)$$

$\Longrightarrow$ Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen eine zwangsläufig durch 3 teilbar ist.
$\Longrightarrow$ Das ganze Produkt ist durch 3 teilbar.
$\Longrightarrow$ Somit ist bewiesen, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.

(b) Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1: \qquad 1^3 - 1 = 0 \qquad 3 \mid 0$$

Induktionsschritt:

$$A(n) \to A(n+1)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$A(n) \text{ gilt für ein bestimmtes } n \in \mathbb{N}$$

Induktionsbehauptung:

$$A(n+1) \text{ gilt}$$

$(n+1)^3 - (n+1) \iff n^3 + 3n^2 + 2n \iff (n^3 - n) + 3n^2 + 3n \iff (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$

$\implies n^3 - n$ ist laut Induktionsannahme durch 3 teilbar.
$\implies 3(n^2 + n)$ ist aufgrund des Faktors 3 durch 3 teilbar.
$\implies (n+1)^3 - (n+1)$ ist durch 3 teilbar.
$\implies n^3 - n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.