Tobias Eidelpes
2015WS

Technische Grundlagen der Informatik
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Gegeben sind die folgenden Dezimalzahlen:

$$A = (108.1625)_{10}$$
$$B = (-25.40625)_{10}$$

Wandeln Sie die Zahlen A und B direkt in die nachfolgend angegebenen Zahlensysteme um. Geben Sie das Ergebnis auf n Nachkommastellen genau an. Runden Sie Ihr Ergebnis durch *round to nearest* (Optimale Rundung) auf n Nachkommastellen. Falls es zwei nächstliegende Zahlen gibt, verwenden Sie *round to even.* Geben Sie Ihre Berechnungen sowie die verwendete Rundungsmethode an!

(a) Binärsystem, $n = 4$
(b) Hexadezimalsystem, $n = 2$
(c) Ternäres Zahlensystem, $n = 4$

Lösung. (a) für A

$$\begin{array}{rl} 108 \bmod 2 & 0 \\ 44 \bmod 2 & 0 \\ 27 \bmod 2 & 1 \\ 13 \bmod 2 & 1 \\ 6 \bmod 2 & 0 \\ 3 \bmod 2 & 1 \\ 1 \bmod 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.1625 \cdot 2 = 0.3250 & 0 \\ 0.3250 \cdot 2 = 0.65 & 0 \\ 0.65 \cdot 2 = 1.3 & 1 \\ 0.3 \cdot 2 = 0.6 & 0 \\ 0.6 \cdot 2 = 1.2 & 1 \\ 0.2 \cdot 2 = 0.4 & 0 \\ 0.4 \cdot 2 = 0.8 & 0 \\ 0.8 \cdot 2 = 1.6 & 1 \end{array}$$

$$(108.1625)_{10} = (1101100.0011)_2$$

Rundungsmethode: *round to nearest*

(a) für B

$$\begin{array}{rl} 25 \bmod 2 & 1 \\ 12 \bmod 2 & 0 \\ 6 \bmod 2 & 0 \\ 3 \bmod 2 & 1 \\ 1 \bmod 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.40625 \cdot 2 = 0.8125 & 0 \\ 0.8125 \cdot 2 = 1.625 & 1 \\ 0.625 \cdot 2 = 1.25 & 1 \\ 0.25 \cdot 2 = 0.5 & 0 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 & 1 \end{array}$$

$$(-25.40625)_{10} = (-11001.0110)_2$$

Rundungsmethode: *round to even*

(b) für A

$$\begin{array}{rl} 108 \bmod 16 & C \\ 6 \bmod 16 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.1625 \cdot 16 = 2.6 & 2 \\ 0.6 \cdot 16 = 9.6 & 9 \\ 0.6 \cdot 16 = 9.6 & 9 \end{array}$$

$$(108.1625)_{10} = (6C.2A)_{16}$$

Rundungsmethode: *round to nearest*

(b) für B

$$\begin{array}{rl} 25 \bmod 16 & 9 \\ 1 \bmod 16 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.40625 \cdot 16 = 6.5 & 6 \\ 0.5 \cdot 16 = 8 & 8 \end{array}$$

$$(-25.40625)_{10} = (-19.68)_{16}$$

Rundungsmethode: *exakt*

(c) für A

$$\begin{array}{rl} 108 \bmod 3 & 0 \\ 36 \bmod 3 & 0 \\ 12 \bmod 3 & 0 \\ 4 \bmod 3 & 1 \\ 1 \bmod 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.1625 \cdot 3 = 0.4875 & 0 \\ 0.4875 \cdot 3 = 1.4625 & 1 \\ 0.4625 \cdot 3 = 1.3875 & 1 \\ 0.3875 \cdot 3 = 1.1625 & 1 \\ 0.1625 \cdot 3 = 0.4875 & 0 \end{array}$$

$$(108.1625)_{10} = (11000.0111)_3$$

Rundungsmethode: *round to nearest*

(c) für B

$$\begin{array}{rl} 25 \bmod 3 & 1 \\ 8 \bmod 3 & 2 \\ 2 \bmod 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.40625 \cdot 3 = 1.21875 & 1 \\ 0.21875 \cdot 3 = 0.65625 & 0 \\ 0.65625 \cdot 3 = 1.96875 & 1 \\ 0.96875 \cdot 3 = 2.90625 & 2 \\ 0.90625 \cdot 3 = 2.71875 & 2 \end{array}$$

$$(-25.40625)_{10} = (-221.1020)_3$$

Rundungsmethode: *round to nearest*

Aufgabe 2. Führen Sie die folgenden Umwandlungen *ohne* Umweg über das Dezimalsystem durch!

(a) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl $(67.EC)_{16}$ in eine Binärzahl um.

(b) Wandeln Sie die Binärzahl $(1101100.11101)_2$ in eine Quarterärzahl um.

(c) Wandeln Sie die Zahl $(824.75)_9$ in eine ternäre Zahl um.

Lösung. (a)

6	7	.	E	C
0110	0111	.	1110	1100

$$(01100111.11101100)_2 = (67.EC)_{16}$$

(b)

01	10	11	00	.	11	10	10	00
1	2	3	0	.	3	2	2	0

$$(1101100.11101)_2 = (1230.322)_4$$

(c)

8	2	4	.	7	5
22	02	11	.	21	12

$$(824.75)_9 = (220211.2112)_3$$

Aufgabe 3. Es sind die folgenden Binärzahlen gegeben:

$$A = (10011.01)_2$$
$$B = (1110.11)_2$$
$$C = (100)_2$$
$$D = (-101.1)_2$$

Führen Sie mit diesen Zahlen die folgenden arithmetischen Operationen binär(!) durch. Berechnen Sie die Ergebnisse exakt und geben Sie Ihren Rechenweg an!

(a) Addition: $A + B$

(b) Subtraktion: $A - B$

(c) Division: $B \div C$

Lösung. (a)

$$\begin{array}{r} 10011.01 \\ + \quad 1110.11 \\ \hline 100010.00 \end{array}$$

$$A + B = (100010)_2$$

(b)

$$\begin{array}{r} 10011.01 \\ - \quad 1110.11 \\ \hline 00100.10 \end{array}$$

$$A - B = (100.1)_2$$

(c)

$$\begin{array}{l} \ \ 1110.11 \div 100 = 11.1011 \\ -100 \\ \hline \ \ 0110 \\ - \ \ 100 \\ \hline \ \ \ \ 0101 \\ - \ \ 0100 \\ \hline \ \ \ \ \ \ 0011 \\ - \ \ \ \ 0000 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 110 \\ - \ \ \ \ \ \ \ \ 100 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0100 \\ - \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 100 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$$A \div B = (11.1011)_2$$

Aufgabe 4. Es sind folgende Zahlen gegeben:

$$A = (2A3)_{16}$$
$$B = (-102)_4$$
$$C = (0)_2$$

Geben Sie die Zahlen A, B und C als 12 Bit lange Maschinenwörter in den nachfolgenden Zahlendarstellungen jeweils in binärer – z.B. 010 1110 0111 – und in hexadezimaler – z.B. $2E7$ – Notation an. Falls es in einer Zahlendarstellung für dieselbe Zahl unterschiedliche Darstellungen gibt, geben Sie alle an!

(a) Vorzeichen und Betrag
(b) Einerkomplementdarstellung
(c) Zweierkomplementdarstellung
(d) Exzessdarstellung (Exzess $= 2^7 - 1$)

Lösung. (a) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$
$$\text{Vorzeichen und Betrag: } 0 \mid 010\ 1010\ 0011 = (2A3)_{16}$$

(a) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$
$$\text{Vorzeichen und Betrag: } 1 \mid 000\ 0001\ 0010 = (812)_{16}$$

(a) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\begin{aligned}\text{Vorzeichen und Betrag: } & 0 \mid 000\ 000\ 000 = (0)_{16} \text{ und} \\ & 1 \mid 000\ 000\ 000 = (800)_{16}\end{aligned}$$

(b) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$
$$\text{Einerkomplement: } (0010\ 1010\ 0011)_2 = (2A3)_{16}$$

(b) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$
$$\text{Einerkomplement: } (1111\ 1110\ 1101)_2 = (7ED)_{16}$$

(b) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\begin{aligned}\text{Einerkomplement: } & (0000\ 0000\ 0000)_2 = (0)_{16} \text{ und}\\ & (1111\ 1111\ 1111)_2 = (FFF)_{16}\end{aligned}$$

(c) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$
$$\text{Zweierkomplement: } (0010\ 1010\ 0011)_2 = (2A3)_{16}$$

(c) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$
$$\text{Zweierkomplement: } (1111\ 1110\ 1110)_2 = (FEE)_{16}$$

(c) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$
$$\text{Zweierkomplement: } (0000\ 0000\ 0000)_2 = (0)_{16}$$

(d) für A

$$(2A3)_{16} = (0010\ 1010\ 0011)_2$$

$$\text{Exzessdarstellung mit Exzess} = 2^7 - 1\text{:}\quad \begin{array}{r} 0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ +\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

$$(0011\ 0010\ 0010)_2 = (322)_{16}$$

(d) für B

$$(-102)_4 = (-0000\ 0001\ 0010)_2 = (-012)_{16}$$

$$\text{Exzessdarstellung mit Exzess} = 2^7 - 1\text{:}\quad \begin{array}{r} -\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ +\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1 \end{array}$$

(ist dasselbe wie Exzess weniger B)

$$(0000\ 0110\ 1101) = (06D)_{16}$$

(d) für C

$$(0)_2 = (0)_{16}$$

$$\text{Exzessdarstellung mit Exzess} = 2^7 - 1\text{:}\quad \begin{array}{r} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ +\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{array}$$

$$(0000\ 0111\ 1111)_2 = (07F)_{16}$$

Aufgabe 5. Folgende Bitmuster sind gegeben: $Z_1 = (00001100)_2$ und $Z_2 = (10011011)_2$. Interpretieren Sie Z_1 und Z_2 als Binärzahlen, die beide jeweils in einer der nachfolgend angegebenen Darstellungen *a*) bis *c*) codiert sind. Führen Sie damit die Berechnung $-(Z_1 + Z_2)$ mit einer Maschinenwortlänge von 8 Bit binär durch und geben Sie Zwischenschritte an. Geben Sie das Ergebnis der Berechnung auch als decodierte Dezimalzahl an!

(a) Darstellung durch Vorzeichen und Betrag
(b) Zweierkomplementdarstellung
(c) Exzessdarstellung mit Exzess = $(10000001)_2$

Lösung. (a)

$$Z_1 = (0\,|\,0001100)_2 = (+12)_{10}$$

$$Z_2 = (1\,|\,0011011)_2 = (-27)_{10}$$

$$(Z_1 + Z_2) = \begin{array}{r} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ \text{-}\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{array}$$

$$-(Z_1 + Z_2) = (-0000\ 1111)_2 = (1\ |\ 0001111)_2$$

(b)

$$Z_1 = (1111\ 0100)_2 = (-244)_{10}$$

$$Z_2 = (0110\ 0101)_2 = (101)_{10}$$

$$(Z_1 + Z_2 =) \begin{array}{r} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ +\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \end{array}$$

$$-(Z_1 + Z_2) = (0101\ 1001)_2$$

(c)

$$Z_1 = (00001100)_2 - (01111111)_2 = (-01110011)_2 = (-115)_{10}$$

$$Z_2 = (10001101)_2 - (01111111)_2 = (00001110)_2 = (14)_{10}$$

$$(Z_1 + Z_2) = \begin{array}{r} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ +\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \end{array}$$

$$-(Z_1 + Z_2) = (0010\ 1000)_2$$

Aufgabe 6. Wandeln Sie die Zahl $(1.6875)_{10}$ in eine Binärzahl mit 3 Nachkommastellen um - alle weiteren Nachkommastellen werden abgeschnitten.

(a) Berechnen Sie den absoluten sowie den relativen Rundungsfehler, der bei der Umrechnung ins Binärsystem entstanden ist.

(b) Durch die Rundungsmethode werden alle reellen Zahlen aus einem Intervall $[a, b[\in \mathbb{R}$ auf dieselbe Binärzahl abgebildet. Geben Sie die dezimalen Werte a, b für das Intervall an, in dem $(1.6875)_{10}$ liegt!

Lösung. (a)

$$(1.6875)_{10} = (1.1011)_2 \approx (1.101)_2 = (1.625)_{10}$$

$$\begin{aligned} \text{relativer Fehler: } & 1 - (1.625 \div 1.6875) \approx 0.037 \approx 3.7\% \\ \text{absoluter Fehler: } & 1.6875 - 1.6250 = 0.0625 \end{aligned}$$

(b)

$$[1.6250, 1.7499]$$

Aufgabe 7. Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen A und B im *Single Precision*-Format (mit implizitem ersten Bit) der IEEE 754 Gleitpunkt-Zahlensysteme dar.

$$A = (0.D266)_{16}$$

$$B = (-310.11)_4$$

Lösung.

$$(0.D266)_{16} = (0.1101\ 0010\ 0110\ 0110)_2$$

$$\text{Normalisierung: } (1.101\ 0010\ 0110\ 0110)_2 \cdot 2^{-1}$$

$$\text{Exponent: } (01111111) - (00000001) = (01111110)$$

$$\text{Vorzeichen: } (0)_2$$

$$0 \mid 01111110 \mid 11010010011001100000000$$

$$(-310.11)_4 = (-110100.0101)_2$$

$$\text{Normalisierung: } (1.101000101)_2 \cdot 2^5$$

$$\text{Exponent: } (01111111) + (00000101) = (10000100)$$

$$\text{Vorzeichen: } (1)_2$$

$$1 \mid 10000100 \mid 11010001010000000000000$$