Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 7

Beispiele 212, 220, 228, 235, 254, 315, 320

Aufgabe 212. Gesucht ist die allgmeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}, \quad n = 0, 1, 2...$$

Lösung. Diese Art der Differenzengleichung bezeichnet man als *allgemeine lineare Differenzengleichung erster Ordnung* der Form $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ Daraus folgt folgendes Kochrezept:

1. Suche Lösung der homogenen Gleichung $x_{n+1} = a_n x_n$, die homogene Lösung $x_n^{(h)}$.
2. Suche eine Lösung der inhomogenen Gleichung $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$, die sogenannte partikuläre Lösung $x_n^{(p)}$, z.B. mittels Variation der Konstanten.
3. Bilde die Lösungsgesamtheit durch $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

Homogene Lösung

Aufgabe 220. Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

(a) $x_{n+2} + 12x_{n+1} + 36x_n = 0$
(b) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 5x_n = 0$
(c) $x_{n+2} + 11x_{n+1} + 28x_n = 0$

Lösung.
(a) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -6 \pm \sqrt{36 - 36} = \lambda_1 = \lambda_2 = -6$$

Allgemeine Lösung:

$$x_n = \lambda_1 \cdot (-6)^n + \lambda_2 \cdot n \cdot (-6)^n = (-6)^n \cdot (C_1 + C_2 \cdot n)$$

(b) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind:

$$+1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i \qquad \lambda_2 = 1 - 2i$$

Umwandlung in Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \varphi = atan(\frac{2}{1}) \approx 1.11$$

Daraus die allgemeine Lösung:

$$x_n = (\sqrt{5})^n \cdot (D_1 \cdot cos(1.11n) + D_2 \cdot sin(1.11n))$$

(c) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind:

$$\lambda_1 = -7 \qquad \lambda_2 = -4$$

Allgemeine Lösung:

$$x_n = C_1 \cdot (-7)^n + C_2 \cdot (-4)^n$$

Aufgabe 228. Berechnen Sie die folgende Summe durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion mittels Ansatzmethode.

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$$

Lösung.

Aufgabe 235. Lösen Sie die Rekursion mit der Ansatzmethode:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + sin(n\frac{\pi}{3}) \ (n \geq 2), a_0 = 3, a_1 = -1$$

Lösung.

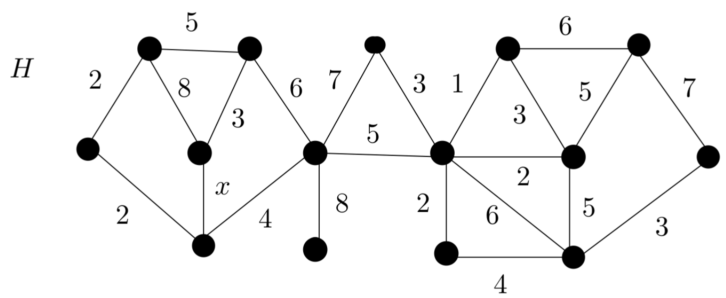
Aufgabe 254. Stellen Sie eine Rekursion für die gesuchten Zahlen a_n auf und lösen Sie diese:

a_n sei die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge n, in denen es keine benachbarten Nullen gibt.

Lösung. $a_1 = 2$, weil es zwei Möglichkeiten an Bitfolgen der Länge 1 gibt (0 und 1). $a_2 = 3$, weil es drei Möglichkeiten an Bitfolgen der Länge 2 gibt (01, 10, 11). Für $n \geq 3$ endet so eine Bitfolge entweder mit einer 1 oder mit einer 0. Das heißt, wenn das n-te Bit 1 ist, liefern die vorangehenden $n-1$ Bits bereits durch a_{n-1} erfasste Folgen; falls das n-te Bit 0 ist, müssen die letzten beiden Bits 10 sein und die vorangehenden $n-2$ Bits bilden eine Folge, die durch a_{n-2} mitgezählt wird. Daraus folgt:

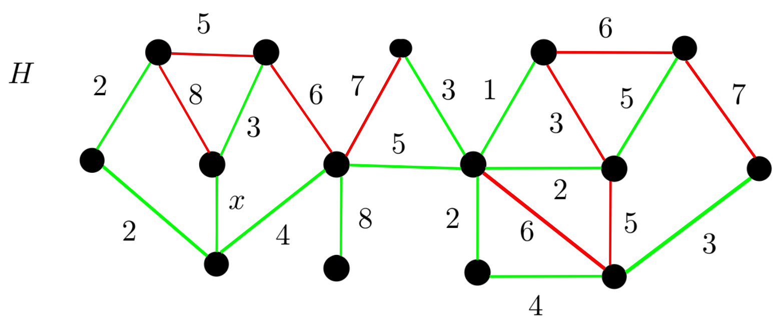
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 3 \text{ mit } a_1 = 2 \text{ und } a_2 = 3$$

Aufgabe 315. Man bestimme im folgenden Graphen H für den angegebenen Wert von x mit Hilfe des Kruskalalgorithmus einen minimalen und einen maximalen spannenden Baum.

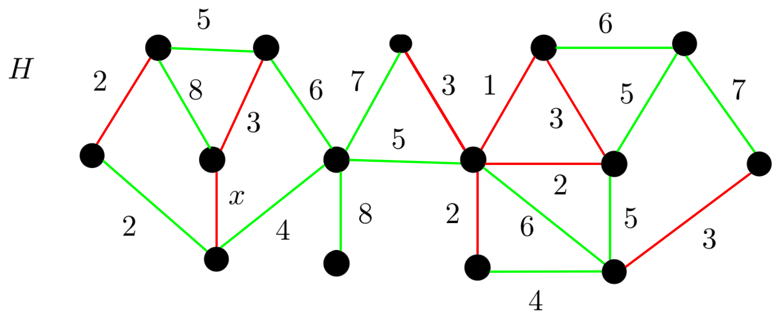


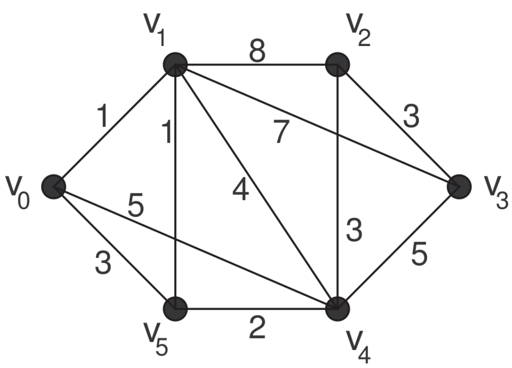
$$x = 2$$

Lösung. Minimaler Spannbaum:



Maximaler Spannbaum:



> **Aufgabe 320.** Im nachstehenden bewerteten Graphen bestimme man mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen Entfernungsbaum bezüglich des Knoten v_0.
>
> 
>

Lösung.