Tobias Eidelpes
2015WS

Algebra und Diskrete Mathematik Übungsblatt 1

Beispiele 18, 25, 26, 67, 74, 81, 85

Aufgabe 18. Zeigen Sie, dass $\sqrt{10}$ irrational ist.

Lösung. Angenommen $\sqrt{10}$ ist eine rationale Zahl, so ist sie als Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ darstellbar. Außerdem sind a und b teilerfremd.

$$\begin{aligned}
\sqrt{10} &= \frac{a}{b} \\
10 &= \frac{a^2}{b^2} \\
a^2 &= 10 \cdot b^2 \Rightarrow 10 \mid a^2 \Rightarrow 10 \mid a \\
10b^2 &= (10c)^2 \\
b^2 &= 10c^2 \Rightarrow 10 \mid b^2 \Rightarrow 10 \mid b
\end{aligned}$$

a und b sollten teilerfremd sein, lassen sich jedoch beide durch 10 teilen. Daraus folgt, dass $\sqrt{10}$ nicht als Bruch dargestellt werden kann und somit nicht rational, also irrational, ist.

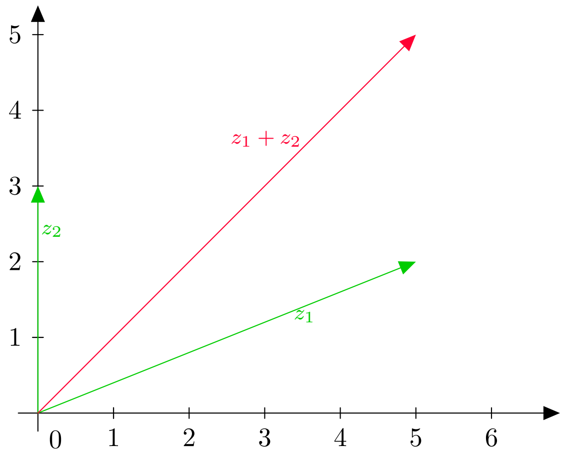
Aufgabe 25. Man bestimme rechnerisch und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = [2, \frac{\pi}{2}]$.

Lösung. Umwandeln von z_2 in kartesische Form:

$$\begin{aligned}
a &= 3cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\
b &= 3sin(\frac{\pi}{2}) = 3 \\
z_2 &= 0 + 3i
\end{aligned}$$

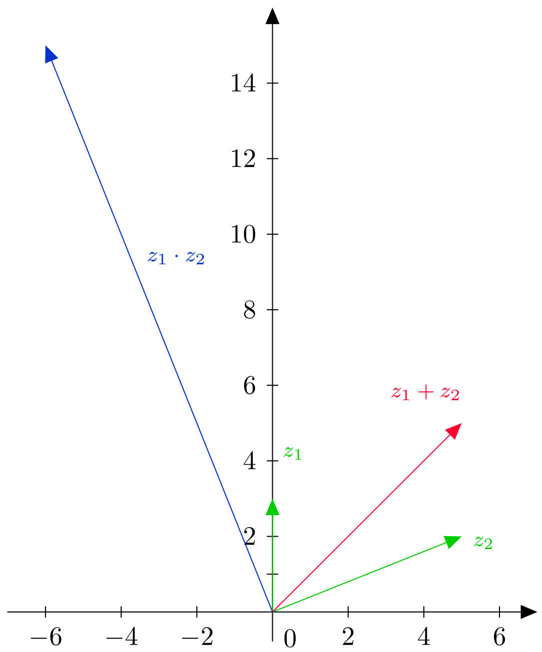
Addieren der beiden Zahlen:

$$(5 + 2i) + (0 + 3i) = 5 + 5i$$



Multiplizieren der beiden Zahlen:

$$(5 + 2i) \cdot (0 + 3i) = 15i + 6i^2 = 15i + 6 \cdot (-1) = -6 + 15i$$



Aufgabe 26. Man berechne ohne Taschenrechner alle Werte von $\sqrt[4]{1+i}$ in der Form $[r, \varphi]$.

Lösung.

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \varphi = \arctan(\frac{b}{a}), \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Nach

$$\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{r},\ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n} \right]$$

folgt:

$$L_1 = \left[\sqrt[8]{2},\ \frac{\pi}{16}\right]$$
$$L_2 = \left[\sqrt[8]{2},\ \frac{3\pi}{20}\right]$$
$$L_3 = \left[\sqrt[8]{2},\ \frac{5\pi}{20}\right]$$
$$L_4 = \left[\sqrt[8]{2},\ \frac{7\pi}{20}\right]$$

Aufgabe 67. Man beweise mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (n \geq 1)$$

Lösung. Induktionsanfang:

$$n = 1: \qquad \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

Induktionsschritt:

$$n \to n+1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Induktionsbehauptung:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Aufgabe 81. Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt:

$$4n^2 \leq 2^n$$

Lösung. Finden des Induktionsanfangs:

	$4n^2$	2^n
$n = 0$	0	1
$n = 1$	4	2
$n = 2$	16	4
$n = 3$	36	8
$n = 4$	64	16
$n = 5$	100	32
$n = 6$	144	64
$n = 7$	196	128
$n = 8$	256	256
$n = 9$	324	512

Vermutung, dass Ungleichung für $n \geq 8$ gilt.
Induktionsvoraussetzung:

$$n: \quad 4n^2 \leq 2^n, \quad (n \geq 8)$$

Induktionsbehauptung:

$$n+1: \quad 4(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

Induktionsschritt:

$$n \to n+1$$

$$\begin{aligned} 4(n+1)^2 &\leq 2 \cdot 2^n \\ 2(n+1)^2 &\leq 2^n \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung für rechte Seite einsetzen:

$$2(n+1)^2 \leq 4n^2 \leq 2^n$$

$\rightarrow$ Wenn gültig, dann ist auch ursprüngliche Ungleichung gültig.

$$2(n+1)^2 \leq 4n^2$$

$$\begin{aligned} 2(n+1)^2 &\leq 4n^2 \\ (n+1)^2 &\leq 2n^2 \\ n^2 + 2n + 1 &\leq 2n^2 \quad \mid -n^2 - 2n - 1 \\ 0 &\leq n^2 - 2n - 1 \quad \mid +2 \\ 2 &\leq (n+1)^2 \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für $n \geq 3$ wahr ist, gilt auch die ursprüngliche Ungleichung $4n^2 \leq 2^n$ für $n \geq 8$.