Pesquisa Operacional

Igor M. Coelho

18 de Junho de 2020

1. Modelagem em Pesquisa Operacional
2. Aplicações de PO
3. O problema da mistura
4. O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

Section 1

Modelagem em Pesquisa Operacional

Sobre esse material

Esses slides foram preparados com base em diversos materiais da literatura, em especial:

- [1] Profa. Maristela Oliveira dos Santos (ICMC/USP): "Introdução à Pesquisa Operacional - Otimização Linear", 2010.
- [2] Tutorial ilectures (https://igormcoelho.github.io/ilectures-pandoc/)
- Prof. Luiz Satoru Ochi (dicas)

Section 2

Aplicações de PO

Algumas aplicações

- indústria de petróleo: extração, refinamento, mistura e distribuição.
- indústria de alimentos: ração animal (problema da mistura).
- planejamento da produção: dimensionamento de lotes (o que, quando e quanto produzir?).
- indústria siderúrgica: ligas metálicas (problema da mistura).
- indústria de papel: otimização do processo de cortagem de bobinas.
- indústrias de móveis: otimização do processo de cortagem de placas retangulares.
- aplicações financeiras: otimização do fluxo de caixa, análise de carteiras de investimento.

Section 3

O problema da mistura

Problema da mistura

- Materiais disponíveis são combinados para gerar novos produtos com características convenientes;
- Um dos primeiros problemas de otimização linear implementados com sucesso na prática.
- Abordagens:
  - Ração;
  - Ligas metálicas;
  - Composição de filtros de areia.

Problema da mistura - Ração

- Queremos saber quais as quantidades ideais de cada ingrediente para fazer uma quantidade de ração, com as necessidades nutricionais atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível.
- Temos os ingredientes e seus custos:
  - Milho (A_1) - $R\$65,00/Kg$
  - Farinha de ossos (A_2) - $R\$30,00/Kg$

Problema da mistura - Ração

- Para fazer uma certa quantidade de ração para, digamos, aves, é necessário uma certa quantidade nutrientes, digamos, vitamina A (V_a), vitamina B (V_b) e proteína (V_c).
- Os ingredientes apresentam esses nutrientes determinadas unidades (un):
  - A_1 - 2 un. de V_a, 3 un. de V_b e 1 un. de V_c;
  - A_2 - 3 un. de V_a, 2 un. de V_b;

Problema da mistura - Ração

- Deseja-se prepara uma ração que contenha no mínimo 7 unidades de V_a, 9 unidades de V_b e 1 unidade de V_c.
- Determinar a quantidade dos alimentos necessárias para satisfazer a necessidades da ração.

Nutrientes	Ingredientes		Qtde
	A1	A2	Mínima
Vitamina A	2	2	7
Vitamina B	3	2	9
Proteína	1	0	1
Custos ($R\$/kg$)	65	30	

Problema da mistura - Pergunta-se

- Como misturar (as quantidades) dos ingredientes para produzir a ração de menor custo possível?
- A mistura atende as necessidades de nutrientes?

Problema da mistura - O que decidir?

- *Quantidades dos ingredientes presentes na mistura?*
- **Decisões:** Denominadas Variáveis de decisão.
- **Definindo:**
- x_1 = quantidade de ingrediente do tipo 1 presente na mistura (u.m).
- x_2 = quantidade de ingrediente do tipo 2 presente na mistura (u.m)

Problema da mistura - Decidir para que?

- função custo (z)
- O custo mínimo seria nulo se não fosse as quantidades mínimas de nutrientes a serem atendidas (Vitamina A, Vitamina B e Proteína). OBS.: *os custos são positivos*.
- **Objetivo:** minimizar o custo total da mistura.
- Custo total é dado por uma função objetivo.
- $z(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$.
- Devemos determinar x_1 e x_2 tal que $z(x_1, x_2)$ seja o menor possível. $\min z(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$

Modelagem do Exemplo 1

- Considere que as composições de vitamina A, vitamina B e proteína na ração sejam satisfeitas.
- **Modelo Matemático:**

$$\min z(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 9$$

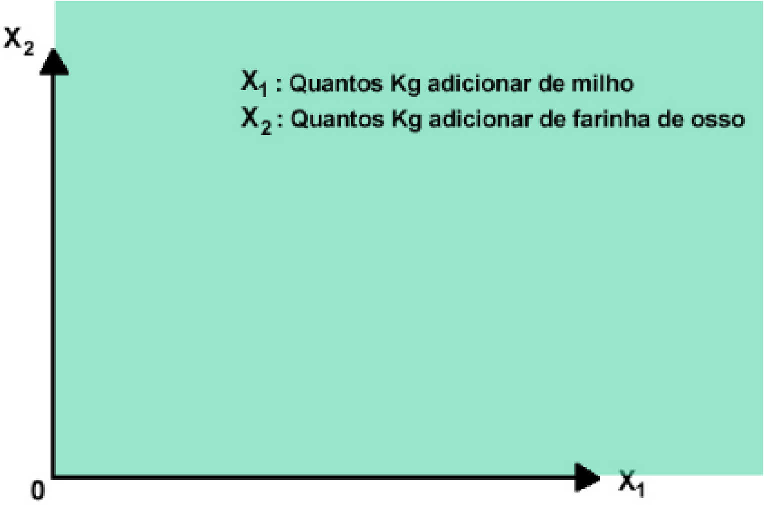
$$1x_1 + 0x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

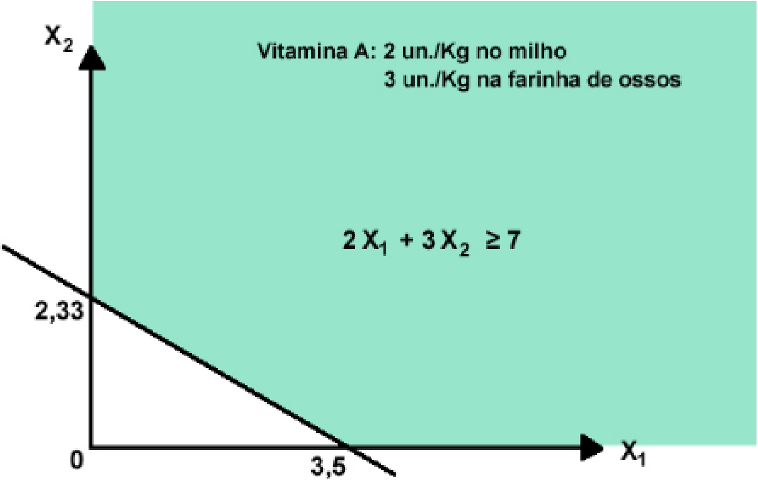
Visualização do Modelo

Próximas Imagens de [1]

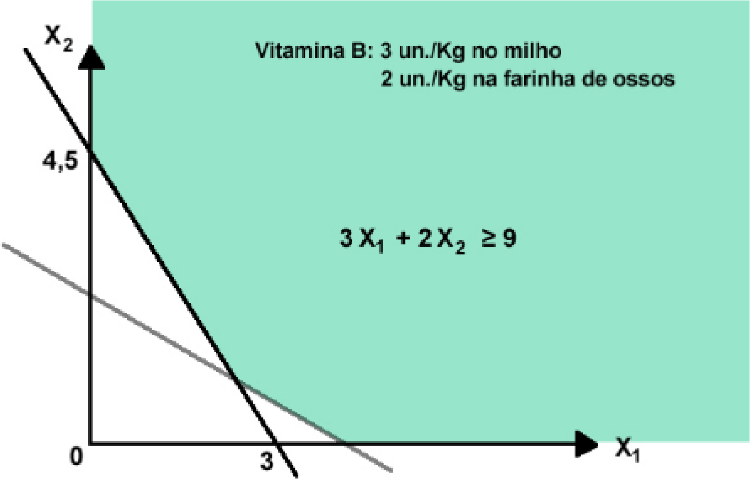
Problema da mistura - Ração



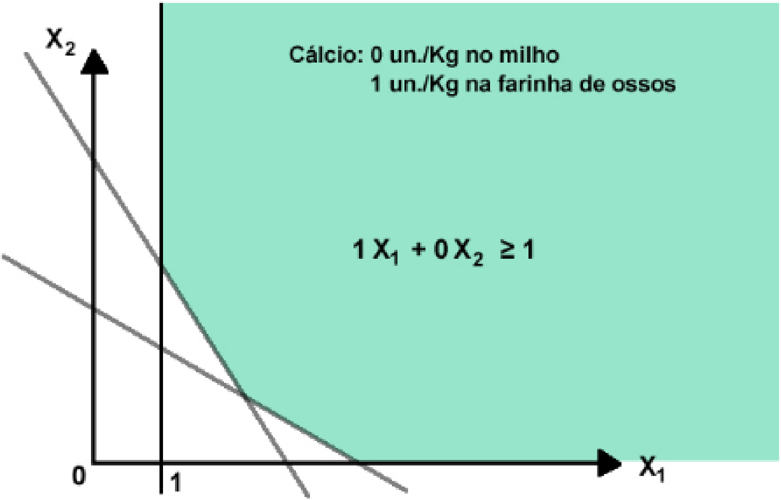
Problema da mistura - Ração



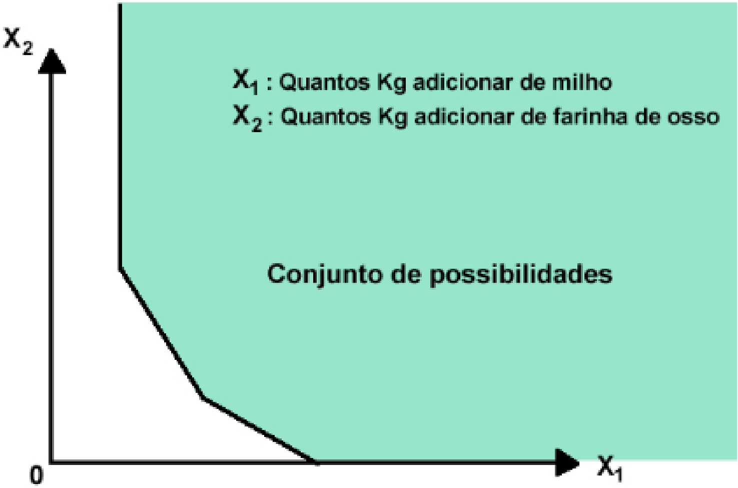
Problema da mistura - Ração



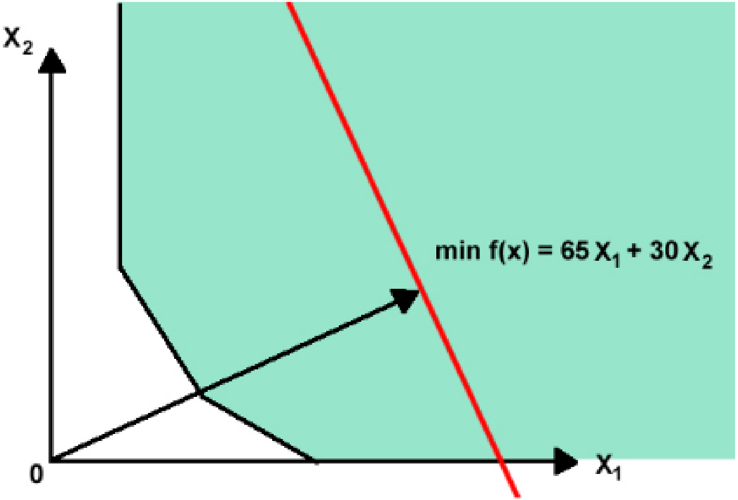
Problema da mistura - Ração



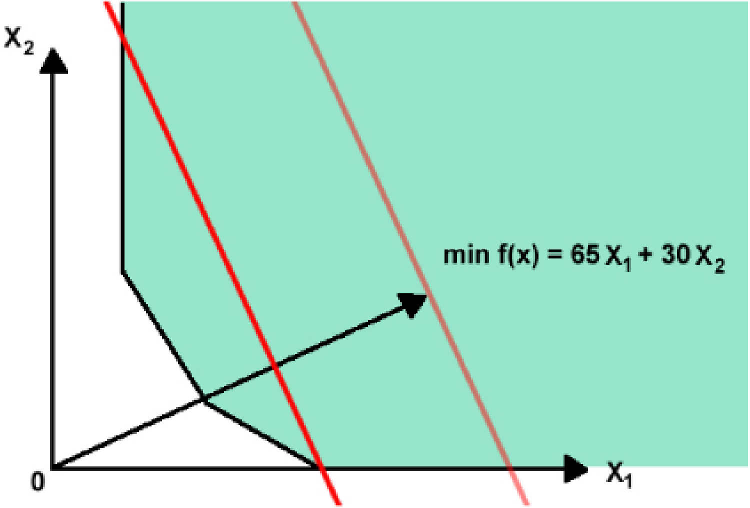
Problema da mistura - Ração



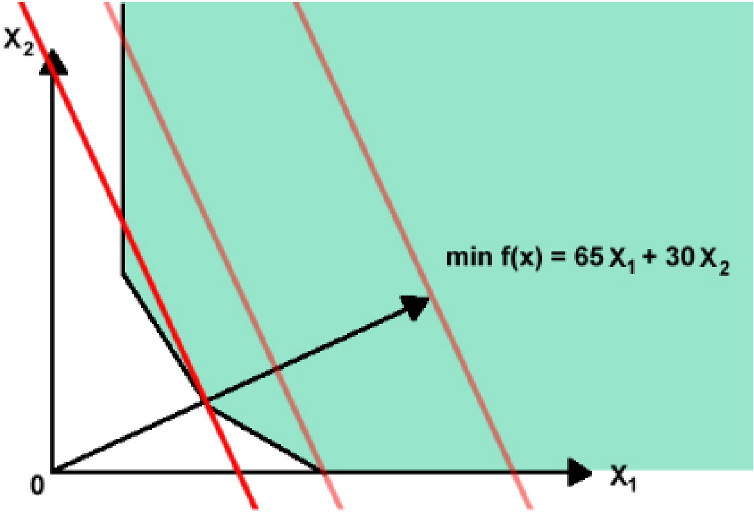
Problema da mistura - Ração



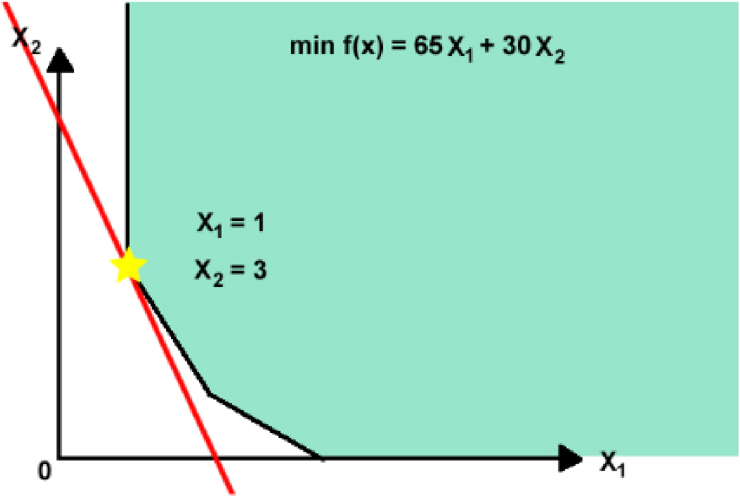
Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração



Outras aplicações

- Ligas metálicas são produzidas a partir de vários insumos (lingotes de ferro, grafite, sucatas industriais, entre outros).
- Cada insumo tem uma composição (quantidades de carbono, silício, manganês etc) e custo conhecidos.
- A composição da liga é determinada por normas técnicas da metalurgia (quantidades de carbono, silício, manganês etc).
- Deseja-se determinar as quantidades de cada insumo a serem fundidas, satisfazendo as normas técnicas da metalurgia com o menor preço final possível.

OUTRAS APLICAÇÕES - Composição de areias para filtro

- Areias são usadas na constituição de filtros de Estações de Tratamento de Águas de abastecimento;
- Diferentes tipos de areias com composições granulométricas distintas estão disponíveis em vários locais;
- Custos de dragagem, transporte, seleção e preparo para utilização de cada areia variam;
- Areias devem ser dispostas em camadas que devem obedecer composições granulométricas estabelecidas por norma;
- O problema consiste em combinar os volumes de areia provenientes de cada local de modo a atender às especificações da norma, com o menor custo possível.

Exemplo 2 - Barragem de concreto

- Na implantação de uma barragem de grande consumo de concreto, decidiu-se utilizar como fontes de agregados graúdos: Britas graníticas, seixos rolados e pedra britada comercial.
- Os custos e as composições granulométricas de cada agregado e a composição granulométrica ideal são dados no gráfico a seguir.

Dados do problema da barragem de concreto

Faixas gran.	Agregados Graúdos			Comp. Ideal(%)
^	Britas	Seixos	Pedras	^
2,4-19	0	0,05	0,20	0,10
19-38	0,10	0,35	0,78	0,20
38-76	0,20	0,60	0,02	0,35
76-152	0,70	0	0	0,35
Custos	$R\$6$	$R\$7$	$R\$18$	

Variáveis de decisão:

x_1 = qde de britas graníticas (m^3);

x_2 = qde de seixos rolados (m^3);

x_3 = qde de pedras britadas comercial (m^3).

Modelagem do exemplo do problema da barragem de concreto

$$\min z(x1, x2, x3) = 6x1 + 7x2 + 18x3$$

	0,05x2	+ 0,20x3	$\geq$	0,10
0,10x1	+ 0,35x2	+ 0,78x3	$\geq$	0,20
0,20x1	+ 0,60x2	+ 0,02x3	$\geq$	0,35
0,70x1			$\geq$	0,35
x1	+ x2	+ x3	=	1

$$x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3 \geq 0$$

Section 4

O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

O Problema de Produção

- Função objetivo – maximizar a margem de contribuição dos produtos;
- Primeiro conjunto de restrições – fabricação dos produtos deve levar em conta a capacidade limitada dos recursos;
- Segundo conjunto de restrições – quantidade de produtos produzida não deve ser inferior à mínima e nem superior à máxima preestabelecida.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- Uma padaria produz dois tipos de produtos: pão (P_1) e massa de pizza (P_2).
- Quatro diferentes matérias primas são utilizadas para a fabricação destes produto: farinha (M_1), fermento (M_2), ovos (M_3) e manteiga (M_4), em que temos em estoque, respectivamente, 60 unidades, 38 unidades, 18 unidades e 55 unidades.
- Para produzir 1 kg de pão são necessárias 1 un. de farinha, 2 un. de fermento e 3 un. de manteiga.
- Para produzir 1 kg de massa de pizza são necessárias 3 un. de farinha, 1 un. de ovo e 1 un. de manteiga.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O pão e massa de pizza são vendidos ao custo de $R\$22/Kg$ e $R\$20/Kg$.
- Deseja-se determinar a quantidade de cada produto a ser fabricada que maximize as vendas e respeite as restições de estoque.

Matéria Prima	Produto		Estoque
^	P1	P2	^
Farinha	1	3	60
Fermento	2	0	30
Ovos	0	1	18
Manteiga	3	1	55
Custos ($R\$/kg$)	22	20	

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O que devemos decidir?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- **Definindo:**
- x_1 =quantidade produzida de pão em kilos.
- x_2 =quantidade produzida de pizza em kilos.

Modelagem do Exemplo 1 - Problema de Produção

Modelo Matemático:

$$\max z(x_1, x_2) = 22x_1 + 20x_2$$

$$1x1 + 3x2 \leq 60$$

$$2x1 + 0x2 \leq 30$$

$$0x1 + 1x2 \leq 18$$

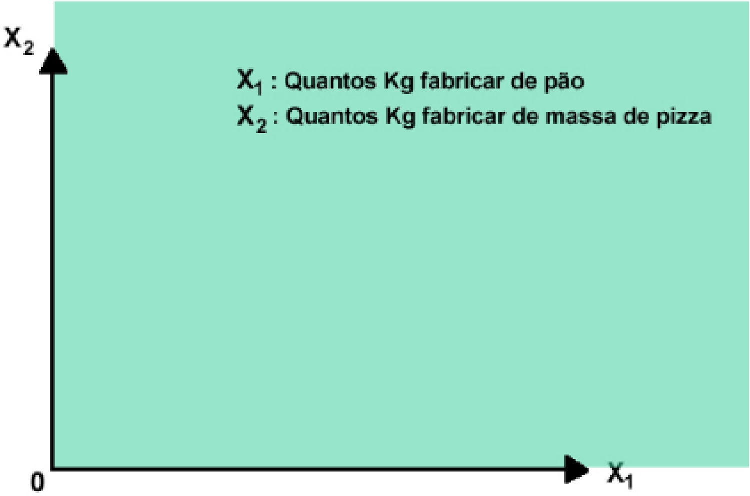
$$3x1 + 1x2 \leq 55$$

$$x1 \geq 0, x2 \geq 0$$

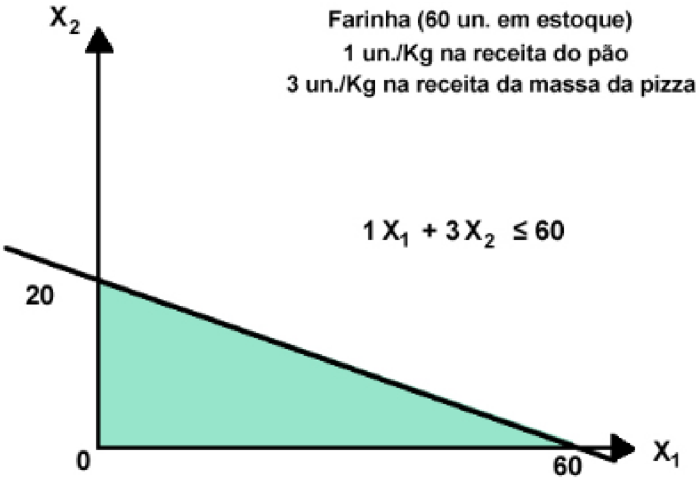
Visualização do Modelo

Próximas Imagens de [1]

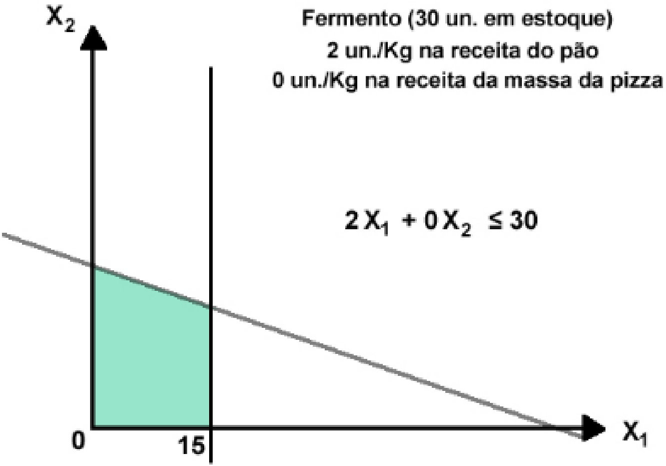
Exemplo 1 - Problema de Produção



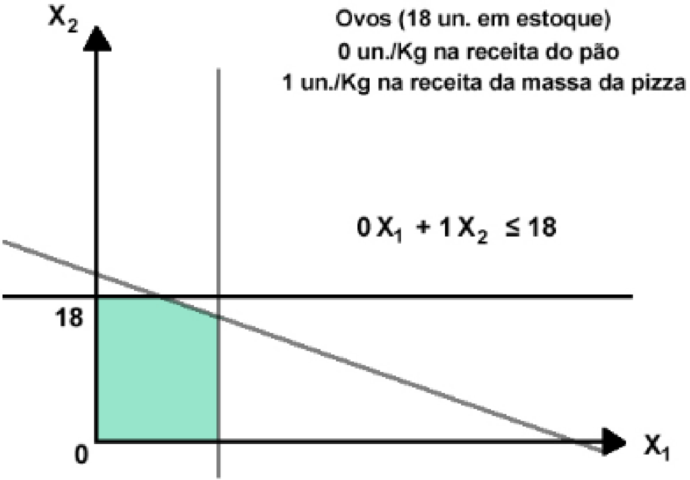
Exemplo 1 - Problema de Produção



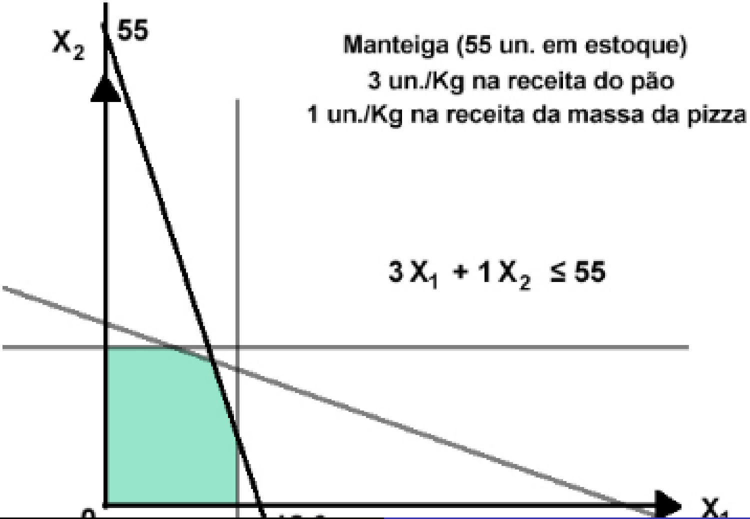
Exemplo 1 - Problema de Produção



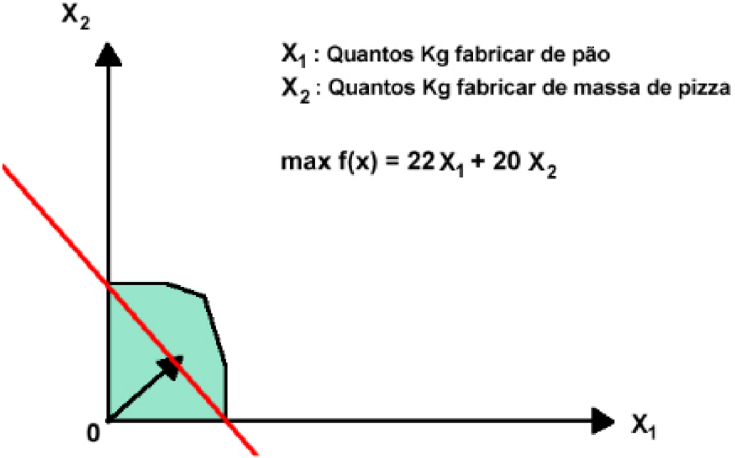
Exemplo 1 - Problema de Produção



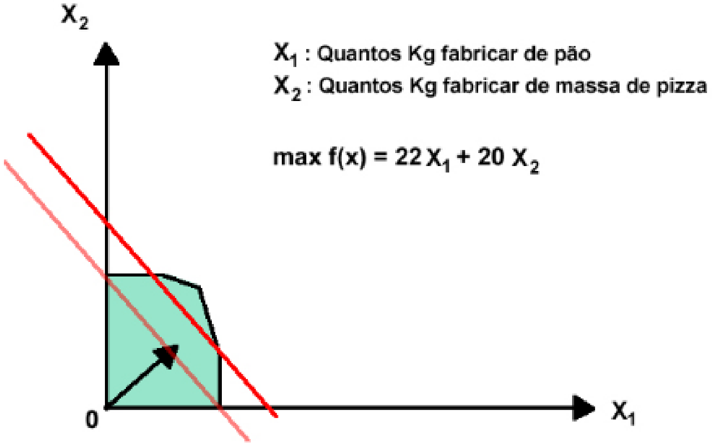
Exemplo 1 - Problema de Produção



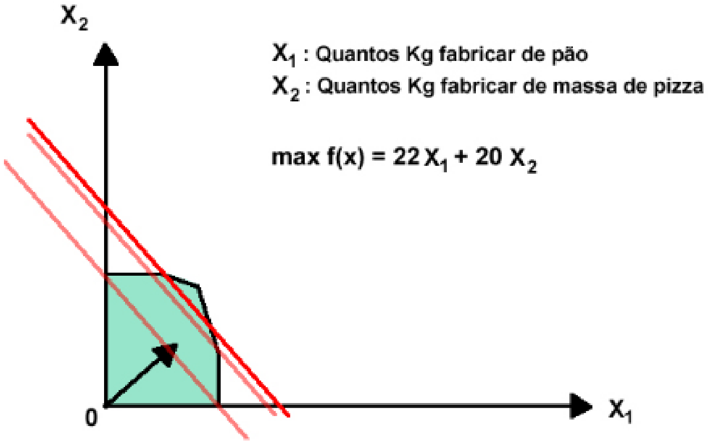
Exemplo 1 - Problema de Produção



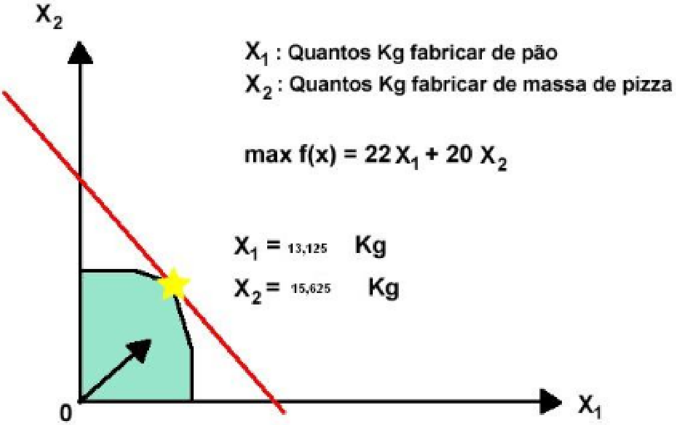
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 2 - Produção de geladeiras

- Empresa precisa decidir quais modelos de geladeira instalar em sua nova planta;
- Dois possíveis modelos: luxo e básico.
- No máximo, 1500 unidades do modelo luxo e 6000 unidades do modelo básico podem ser vendidas por mês.
- Empresa contratou 25000 homens-hora de trabalho por mês;
- Os modelos luxos precisam de 10 homens-hora de trabalho para serem produzidos e os modelos básicos, 8 homens-hora.
- A capacidade da linha de montagem é de 4500 geladeiras por mês, pois as geladeiras dividem a mesma linha;
- O lucro unitário do modelo luxo é $\$100,00$ por mês, enquanto o modelo básico lucra $\$50,00$ durante o mesmo período.

Exemplo 1 - Produção de geladeiras

- **Objetivo:** determinar quanto produzir de cada geladeira, de modo a satisfazer todas as restrições e maximizar o lucro da empresa.

Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.
x_2 = quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

Modelo Matemático

Modelo Matemático:

$$\max z(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$$

$$10x1 + 8x2 \leq 25000$$

$$x1 + x2 \leq 4500$$

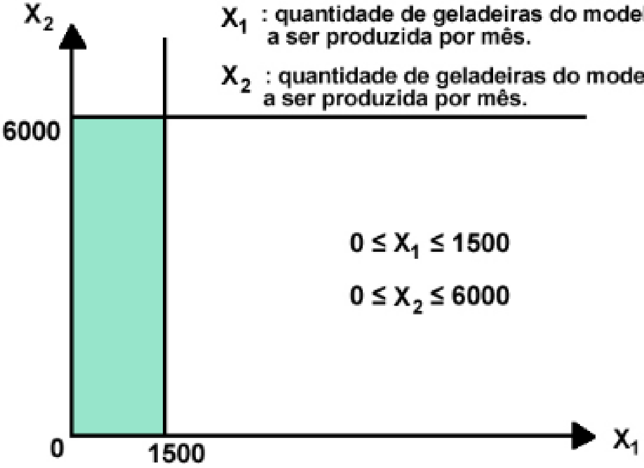
$$0 \leq x1 \leq 1500$$

$$0 \leq x2 \leq 6000$$

Visualização do Modelo

Próximas Imagens de [1]

Exemplo 1 - Problema de Produção



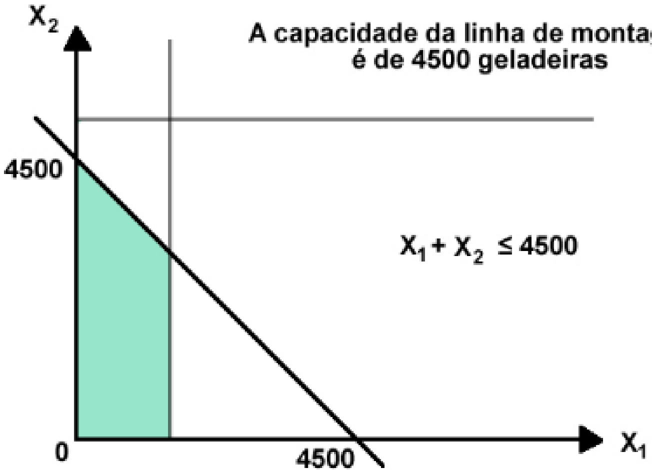
X_1 : quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.

X_2 : quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

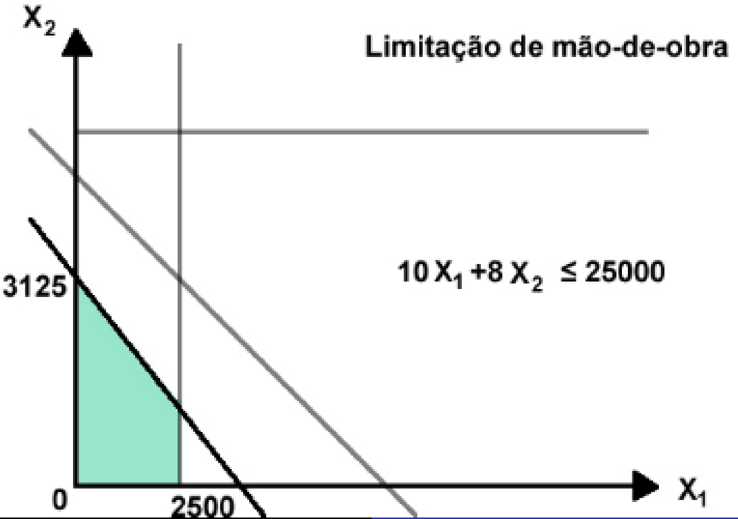
$0 \le X_1 \le 1500$

$0 \le X_2 \le 6000$

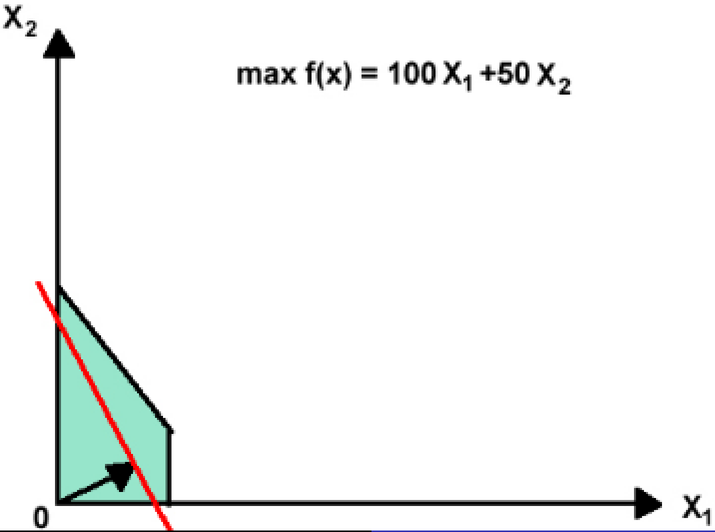
Exemplo 1 - Problema de Produção



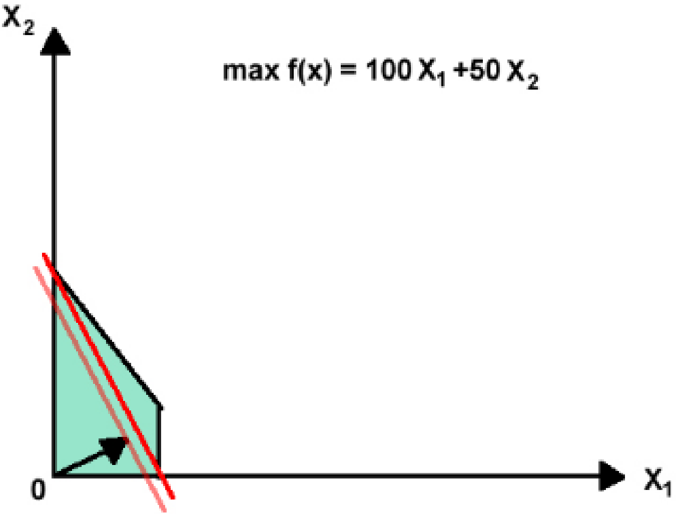
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção

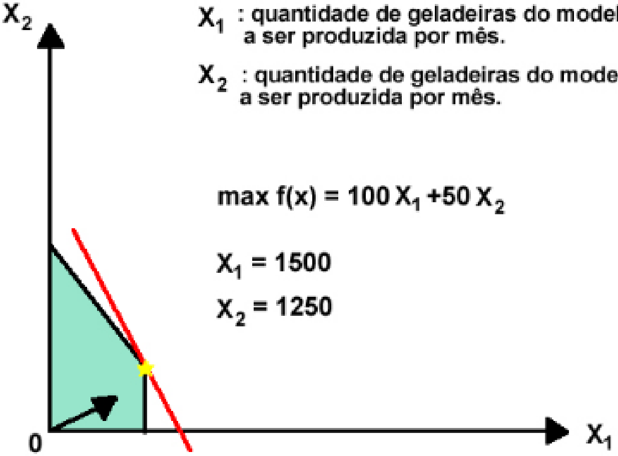
X_1 : quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.

X_2 : quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

$$\max f(x) = 100\,X_1 + 50\,X_2$$

$X_1 = 1500$

$X_2 = 1250$



Dica para Cálculo do Gradiente

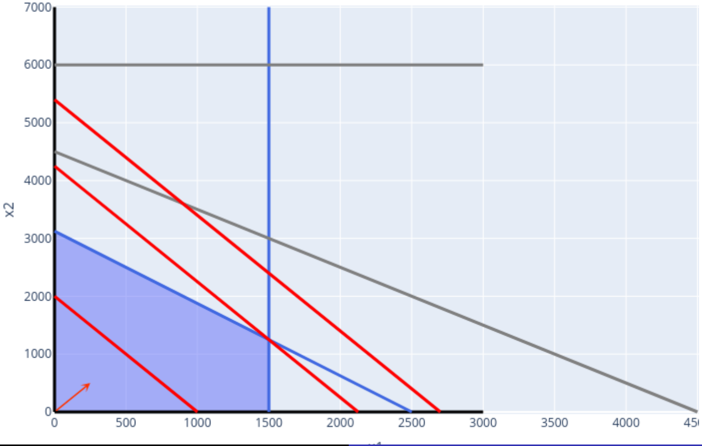
Lembramos que a direção e sentido de **máximo** crescimento de uma função f é determinada por seu gradiente $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$.

Assim, para $\max z(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$, temos $\nabla z(x) = (100, 50)$. Caso fosse minimização, poderíamos transformar o problema em maximização (e obter valores negativos no vetor gradiente).

Naturalmente, o feixe de retas da função objetivo é perpendicular ao vetor gradiente.

Visualização Gráfica com Plotly

O que significam as três linhas vermelhas?



Lista de Exercícios

A lista de exercícios está disponibilizada no site.