

# Teoria dos Números

Notas de aula da disciplina  
TE: Técnicas de Construção de  
Algoritmos

Fabiano de Souza Oliveira  
([fabiano.oliveira@ime.uerj.br](mailto:fabiano.oliveira@ime.uerj.br))

Paulo Eustáquio Duarte Pinto  
(pauloedp arroba ime.uerj.br)

agosto/2020

# TE: Técnicas de Construção de Algoritmos

## Teoria dos Números

### Problemas de 22/08/2020:

- 2667 - Jogo de Boca
- 1656 - Doces do dia das Bruxas
- 1831 - Dia Difícil de Trabalho
- 2788 - Aula
- 2859 - Digit Root

## 2667 - Jogo de Boca

**Contexto:** Nesse jogo, entre dois jogadores, é escolhido um inteiro  $N$  e os jogadores alternam. O primeiro começa com 1 ou 2 e, a cada nova jogada, o jogador pode escolher o número do adversário mais 1 ou mais 2. Ganha quem escolher  $N$ .

**Entrada:** Um único caso de teste, contendo o inteiro  $N$  ( $3 \leq N \leq 10^{100}$ ).

**Saída:** Para cada teste deve ser impresso o número inicial que o primeiro jogador deve escolher para ganhar. Se não for possível ele forçar a vitória, imprimir 0.

Exemplo de entrada 1:  
7

Exemplo de saída 1:  
1

Exemplo de entrada 2:  
9

Exemplo de saída 2:  
0

Exemplo de entrada 3:  
1234123412341234123412341234 2

Exemplo de saída 3:

## 2667 - Jogo de Boca

Dica:

1. Para  $N = 21$ , quem começa perde

|   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 |   | 4 |   | 7 |   | 10 |    | 13 |    | 16 |    | 19 |    |
| 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 21 |



Segundo jogador

Primeiro jogador

2. O problema se reduz a achar resto da divisão

3. Processar o número como um polinômio, avaliando esquerda  $\rightarrow$  direita ou direita  $\rightarrow$  esquerda.

## 1656 - Doces do dia das Bruxas

**Contexto:** Um grupo de  $c$  crianças vai pedir doces nas  $n$  casas da vizinhança. Elas querem recolher um total de doces que possa ser igualmente dividido pelo grupo.

**Entrada:** Cada entrada vem em duas linhas. A primeira contém 2 inteiros:  $c$  e  $n$  ( $1 \leq c \leq n \leq 10^5$ ), o número de crianças e de casas. Na segunda linha vêm  $n$  inteiros, contendo a quantidade de doces que cada casa pode dar. Cada um desses inteiros está entre 1 e  $10^5$ . A última linha contém 0 0, e não deve ser processada.

**Saída:** Para cada teste, imprimir os índices das casas que devem ter os doces recolhidos para poderem ser igualmente divididos. Qualquer resposta válida é aceita.

**Exemplo de entrada:**

```
4 5
1 2 3 7 5
3 6
7 11 2 5 13 17
0 0
```

**Exemplo de saída:**

```
3 5
2 3 4
```

# 1656 - Doces do dia das Bruxas

## Dicas:

1. Pegadinha na saída: sempre tem solução
2. Cuidado com "Presentation Error": 2 3 4 5
3. Técnica para resolver: adaptação princípio da casa de pombo, nos conjuntos de doces  $d_i$  acumulados  $(d_1 \dots d_n)$ 
  - a) se algum resto da divisão por  $c$  desses conjuntos se repetir: i.e,  $\text{soma}(d_1 \dots d_i) \bmod c = x$  e  $\text{soma}(d_1 \dots d_j) \bmod c = x$ .  
Tomamos o conjunto  $\{d_{i+1} \dots d_j\}$ .  
Ex:  $c = 4, n=5$  doces até  $d_4$ :  $\{7, 11, 2, 7\}$ ,  $x = 3$   
O subconjunto  $\{7\}$  tem também  $x = 3$ . Usar  $\{11, 2, 7\}$ .
  - b) se for encontrado um conjunto cujo resto da divisão é zero, não precisa fazer a acumulação. Basta tomar esse conjunto.  
Ex:  $c = 4, n=5$  doces:  $\{7, 11, 2, 7, 3\}$   
O subconjunto  $\{7, 11, 2\}$  tem soma 20 e pode ser usado.

# 1831 - Dia Difícil de Trabalho

**Contexto:** Empregados embalaram um conjunto de  $n$  laranjas em sacos com capacidade  $c_1$  e sobraram  $s_1$  laranjas. Desfizeram e reembalaram em sacos com capacidade  $c_2$  e sobraram  $s_2$  laranjas. Finalmente embalaram em sacos com capacidade  $c_3$  e sobraram  $s_3$  laranjas. Quer-se saber o valor de  $n$ .

**Entrada:** Cada entrada contém 3 linhas com dois inteiros cada:  $s_i$  ( $0 \leq s_i < c_i$ ), e  $c_i$  ( $1 \leq c_i \leq 1000$ ). Além disso, as capacidades são tais que  $\text{MDC}(c_i, c_j) = 1$ , para todo  $i \neq j$ . A entrada termina por fim de arquivo.

**Saída:** Para cada teste  $t$  deve ser impressa a mensagem: "**Caso #t: n laranja(s)**", onde  $n$  o número de laranjas.

**Exemplo de entrada:**

```
2 5
3 7
0 9
4 5
6 7
8 9
```

**Exemplo de saída:**

```
Caso #1: 297 laranja(s)
Caso #2: 314 laranja(s)
```

## 1831 - Dia Difícil de Trabalho

1. Aplicação direta do algoritmo do Teorema Chinês do Resto



## 2788 - Aula

**Contexto:** Ajudem Gina a resolver o seguinte problema: dados os inteiros  $N$  e  $M$ , qual o menor múltiplo de  $M$  que pode ser formado a partir de  $N$ , acrescentando dígitos à direita ou esquerda de  $N$ ?

**Entrada:** Um único caso de teste contendo dois inteiros  $N$ , ( $1 \leq N < 10^{12}$ ) e  $M$ , ( $1 \leq M < 2 \cdot 10^5$ ).

**Saída:** Para cada teste deve ser impresso o menor múltiplo de  $M$  que pode ser formado a partir de  $N$ .

Exemplo de entrada 1:

1 2

Exemplo de saída 1:

10

Exemplo de entrada 2:

7 107

Exemplo de saída 2:

107

Exemplo de entrada 3:

12345854321 199999

Exemplo de saída 3:

11234585432191973

## 2788 - Aula

Propriedade básica a ser usada na solução:

Seja  $xxx\text{yyyyyy}xxx$  a solução (menor múltiplo de  $M$ ) e  $yyyyyy$  um trecho que contém  $N$ . Então  $yyyyyy$  é o menor número que contém  $N$  cujo resto da divisão por  $N$  seja  $yyyyyy \bmod N$ .

Portanto, a idéia é construir progressivamente a solução, considerando sua construção por ordem do número de dígitos inseridos até ser encontrado resto de divisão = 0.

Usar um vetor  $R$  que guarda, para cada resto da divisão por  $M$  o menor número contendo  $N$  com esse resto.

Usar também uma fila  $F$  para guardar as tentativas válidas.

Observe que a colocação das tentativas na fila é por tamanho.

# 2788 - Aula

Ex: N=6, M=4

R

F

Inserir 6 em R e F

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
|   |   | 6 |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |

Retira 6 de F

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
|   |   | 6 |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |

Termina o processamento do tamanho 1. Como ainda não tem solução, vai se tentar o tamanho 2.

Inserir 60 em R e F

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
| 0  | 1 | 2 | 3 |
| 60 |   | 6 |   |

|    |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 |   |   |   |   |   |   |   |

Inserir 61 em R e F

|    |    |   |   |
|----|----|---|---|
| 0  | 1  | 2 | 3 |
| 60 | 61 | 6 |   |

|    |    |   |   |   |   |   |   |
|----|----|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 61 |   |   |   |   |   |   |

Abandona 62

Inserir 63 em R e F

|    |    |   |    |
|----|----|---|----|
| 0  | 1  | 2 | 3  |
| 60 | 61 | 6 | 63 |

|    |    |    |   |   |   |   |   |
|----|----|----|---|---|---|---|---|
| 0  | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 61 | 63 |   |   |   |   |   |

# 2788 - Aula

Ex: N=6, M=4

R

F

Abandona 64 a 69

|    |    |   |    |
|----|----|---|----|
| 0  | 1  | 2 | 3  |
| 60 | 61 | 6 | 63 |

|    |    |    |   |   |   |   |   |
|----|----|----|---|---|---|---|---|
| 0  | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 61 | 63 |   |   |   |   |   |

Substitui 6 por 06  
e insere 06 em F

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 2  | 3  |
| 60 | 61 | 06 | 63 |

|    |    |    |    |   |   |   |   |
|----|----|----|----|---|---|---|---|
| 0  | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 61 | 63 | 06 |   |   |   |   |

Substitui 60 por 16  
e insere 16 em F

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 2  | 3  |
| 16 | 61 | 06 | 63 |

|    |    |    |    |    |   |   |   |
|----|----|----|----|----|---|---|---|
| 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 61 | 63 | 06 | 16 |   |   |   |

Abandona 26 a 96

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 2  | 3  |
| 16 | 61 | 06 | 63 |

|    |    |    |    |    |   |   |   |
|----|----|----|----|----|---|---|---|
| 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 61 | 63 | 06 | 16 |   |   |   |

Retira 60 da fila

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 2  | 3  |
| 16 | 61 | 06 | 63 |

|   |    |    |    |    |   |   |   |
|---|----|----|----|----|---|---|---|
| 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 |
|   | 61 | 63 | 06 | 16 |   |   |   |

Com o fim do processamento do tamanho 2, o processo termina porque foi achada solução (que está na posição 0).

## 2788 - Aula

Tamanho da fila: 4000000 (20 x tamanho do vetor R)

Tem sempre solução?

Sim. A solução tem tamanho menor ou igual à soma dos tamanhos de  $n$  e  $m$ .

## 2859 - Digit Root

**Contexto:** Dados dois inteiros **B** e **E**, quer-se saber o resultado dos “noves fora” (digit root) do resultado **B<sup>E</sup>**.

**Entrada:** Um único caso com dois inteiros, um em cada linha: **B** e **E** ( $1 \leq \mathbf{B}, \mathbf{E} \leq 10^{100.000}$ ).

**Saída:** Um inteiro de 1 a 9, contendo o “digit root”.

Exemplo de entrada 1:

2  
7

Exemplo de entrada 2:

25  
5

Exemplo de entrada 3:

1234567891011121314152  
1514131211109876543212

Exemplo de saída 1:

2

Exemplo de saída 2:

4

Exemplo de saída 3:

7

## 2859 - Digit Root

### Dicas:

1. "Noves Fora" de um número pode ser feito somando os dígitos e reduzindo progressivamente ou ...

obtendo o resto da divisão por 9. Nesse caso, se der 0 tem que mudar para 9.

$$\begin{aligned} \text{EX: } NF(123456) &= NF(1+2+3+4+5+6) = NF(21) = NF(2+1) = 3 \\ \text{ou } NF(123456) &= F(123456 \bmod 9) = NF(3) = 3 \\ NF(180) &= NF(180 \bmod 9) = NF(0) = 9 \end{aligned}$$

2. Temos:  $NF(A.B) = NF(NF(A).NF(B))$

Logo:  $NF(B^E) = NF((NF(B))^E)$

3. O problema pode ser resolvido com Avaliação de Polinômio

4. Ler os números com string. Avaliar como polinômio usando uma das técnicas: (direita-esquerda) ou (esquerda-direita).

## 2859 - Digit Root

Dicas:

Exemplo:  $NF(23^{345}) = NF(5^{345})$

Avaliação polinômio direita-esquerda:

$$\begin{array}{ll} 5^1 = 5 & 5^5 = NF(5.5.5.5.5) = 2 \\ 5^{10} = NF(5.5...5) = 4 & 5^{40} = NF(4.4.4.4) = 4 \\ 5^{100} = NF(4.4...4) = 4 & 5^{300} = NF(4.4.4) = 1 \\ NF(5^{345}) = NF(NF(2.4).1) = & NF(8.1) = 8 \end{array}$$

Avaliação do polinômio esquerda-direita:

$$\begin{array}{l} 345 = (3.10+4).10+5 \\ NF(5^3) = NF(5.5.5) = 8 \\ NF(8^{10}) = 1 \\ NF(5^4) = 4 \quad NF(1.4) = 4 \\ NF(4^{10}) = 4 \quad NF(5^5) = 2 \quad NF(4.2) = NF(8) = 8 \end{array}$$



FIM