Recorrências e Combinatória

Notas de aula da disciplina IME 04-10859
Des. e Implementação de Algoritmos

Paulo Eustáquio Duarte Pinto
(pauloedp arroba ime.uerj.br)

outubro/2018

Técnicas básicas de Contagem
- Técnicas
- Exemplos

Recorrências
- Formulação
- Solução de Recorrências
- Exemplos

Combinatória como Recorrência
- Combinações Simples/com repetições
- Conjuntos combinatórios especiais
- Exemplos

Exibição de Elementos

Contagem × Exibição de Conjuntos

Técnicas de Contagem:
- Regra do Produto
- Regra da Soma
- Regra da Inclusão/Exclusão
- Princípio da casa de pombo

Expressão da contagem:
- Fórmula combinatória
- Recorrência

Técnicas de Contagem: Regra do Produto

O resultado é a multiplicação de opções, quando elas se combinam

P: Quantas bandeiras distintas de 3 listras podem ser formadas usando 4 cores, tal que não haja listras de mesma cor adjacentes?

R: de 36 maneiras diferentes: 36 = 4.3.3
(a primeira listra pode ter qquer uma das 4 cores;
para cada primeira cor, a segunda pode ser 3 outras e,
finalmente, a última tb pode ser escolhida entre 3 opções.

Técnicas de Contagem: Regra da Soma

O resultado é a soma de opções, quando elas são independentes

P: Quantos números no intervalo [100..999] possuem 11 como parte do número?

R: existem 18 números diferentes: 18 = 10+8

(10 números da forma 11x, $0 \le x \le 9$
8 números da forma y11, $2 \le y \le 9$)

Técnicas Contagem: Regra da Inclusão/Exclusão

O resultado é a união de opções, quando elas se interceptam. $A \cup B = A + B - A \cap B$

P: Quantos múltiplos de 3 e de 5 existem no intervalo [1..999]?

R: existem 466 múltiplos diferentes: 466 = 333+199-66

(333 múltiplos de 3 +
199 múltiplos de 5 -
66 múltiplos de 15)

Técnicas Contagem: Princípio da casa de pombo

"Se n+1 pombos são colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deverá conter 2 ou mais pombos".

P: Uma urna tem 4 bolas vermelhas, 7 verdes, 9 azuis e 6 amarelas. Qual o número mínimo de bolas devemos tirar, cegamente, para ter certeza de conseguir 3 bolas de mesma cor?

R: deve-se tirar 9 bolas: 9 = 2.4+1

(generalização: se n gaiolas são ocupadas por nk+1 pombos, então pelo menos uma gaiola conterá k+1 pombos)

Exercícios:

1 - Há 12 moças e 10 rapazes, onde 5 são irmãos (3 moças e 2 rapazes) . Os outros não são parentes. Quantos casamentos são possíveis?

2 - Quantos números distintos podem ser formados com os dígitos 3, 4 e 6, sem repetir dígitos?

3 - Numa festa com 99 convidados, qual o número mínimo de cumprimentos necessários para que haja um um convidado que tenha sido cumprimentado pelo menos 3 vezes?

4 - Quantos múltiplos de 3 começando com 3 ou 5 existem no intervalo [0..999]?

Fórmulas combinatórias

Permutações, combinações e arranjos simples

P(n) = n!
A(n,p) = n(n-1)...(n-p+1)
C(n,p) = n!/(p!(n-p)!)

Permutações com repetições - n elementos com repetições: $r_1, r_2 \ldots r_k$ $\quad \Sigma r_i = n$

$Pr(n) = n!/(r_1!..r_k!)$

Exemplo: Quantos números distintos podem ser formados com os dígitos 3 3 2 2 2?

R: 5!/(2!.3!) = 10 (22233, 22323, 22332, 23223, 23232, 23322, 32223, 32232, 32322, 33222)

Arranjos com repetições - k elementos distintos tomados n vezes **$Ar(k, n) = k^n$**

Exemplo: Quantos números de 5 bits (0 ou 1) existem?

R: 2^5 (00000, 00001, 00010, 00011, ...11101, 11110, 11111)

Combinações com repetições - k elementos distintos tomados n vezes

Cr(n, k) = (n+k-1)!/(n!(k-1)!) = C(n+k-1, n)

Exemplo: Quantos conjuntos distintos de 5 frutas podem ser formados com maçãs, peras e laranjas?

R: (5+3-1)!/(5!.(3-1)!) = 21 (lllll, llllm, llllp, lllmm, lllmp, lllpp, llmmm, llmmp, llmpp, llppp, lmmmm, lmmmp, lmmpp, lmppp, lpppp, mmmmm, mmmmp, mmmpp, mmppp, mpppp, ppppp)

Exercícios:

5 - De quantas maneiras diferentes pode-se pintar as faces de um cubo usando 2 cores?

6 - Quantas soluções inteiras distintas tem a equação: $x + y + z = 20$, tal que $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$?

Recorrências - São funções para inteiros expressas sem usar uma fórmula, fazendo referência a outros valores da função.

Exs: **T(n) = T(n-1) + 1; T(0) = 0;**
T(n) = 2.T(n-1) + 1 T(0) = 0;
T(n) = n.T(n-1) T(0) = 1;

Solução de recorrências:

a) Indução Finita
b) Equações diferenciais
c) Solução padrão
d) Método Especial

Recorrências clássicas

a) Soma dos n primeiros inteiros positivos

$T(n) = T(n-1) + n$; $T(0) = 0$;

$T(n) = n(n+1)/2$

b) Produto dos n primeiros inteiros positivos

$T(n) = n.T(n-1)$ $T(0) = 1$;

$T(n) = n!$

c) Torre de Hanoi

$T(n) = 2.T(n-1) + 1$ $T(0) = 0$;

$T(n) = 2^n - 1$

Recorrências clássicas

d) Série de Fibonacci

$T(n) = T(n-1) + T(n-2), i > 1$ $T(0) = 0$, $T(1) = 1$

$T(n) = (A^n - B^n)/ 5^{1/2}$; $A = (1 + 5^{1/2})/2$; $B = (1 - 5^{1/2})/2$

e) Recorrência de Catalão

$T(n) = \Sigma T(i).T(n-i), 0 \le i \le n$, $T(0) = 1$

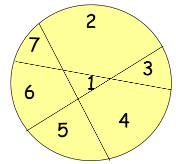
$T(n) = C(2n,n)/(n+1)$

f) Recorrências Polinomiais

$T(n) = T(n-1) + P(n, k)$; $T(1) = c$;

$T(n) = P(n, k+1)$

Pr. 1 – Pizza Cutting (10079)



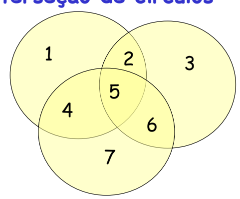
Qual o maior número de pedaços com n cortes?

$T(0) = 1$ $T(1) = 2$; $T(2) = 4$; $T(n) = 2^n$?

R: Não.

$T(n) = T(n-1) + n$ => $T(n) = ?$

Pr. 2 – Interseção de círculos



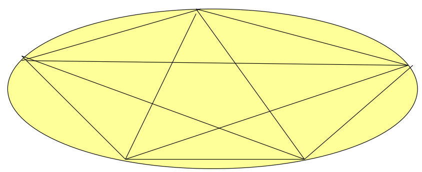
Qual o maior número de pedaços com n círculos?

$T(1) = 1$; $T(2) = 3$; $T(3) = 7$; $T(n) = 2^n - 1$?

R: Não.

$T(n) = T(n-1) + 2(n-1)$ => $T(n) = n(n-1)+1$

Pr. 3 – How many pieces of Land? (10213)



Maior número de pedaços com polígono de n vérti-ces, cuidadosamente colocados?

$T(0) = 1$ $T(1) = 1$; $T(2) = 2$; $T(3) = 4$

$T(4) = 8$ $T(5) = 16$ $T(n) = 2^{n-1}$?

Pr. 3 – How many pieces of Land? (10213)

R: Não.

$T(n) = T(n-1) + \Sigma\ i\ (n-i-2+1) + 2$, $1 \le i \le n-3$

$= T(n-1) + n-1 + (n-2)(n-3)(n-2)/2 - \ldots$

$= T(n-1) + (n-1)(n^2 - 5n + 12)/6$

$T(n) = n\ (n-1)(n^2 - 5n + 18)/24 + 1$

=> $T(6) = 31$ (!)

1. Combinações

C(n, p) = C(n-1, p).n/(n-p)
C(p, p) = 1, ou

C(n, p) = C(n, p-1)(n-p+1)/p
C(n, 1) = n,

2. Triângulo de Pascal

C(n, p) = C(n-1, p) + C(n-1, p-1)
C(n, 0) = 1
C(n, p) = 0, se (p > n)

Triângulo de Pascal

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	-	-	-	-	-	-	-
1	1	1	-	-	-	-	-	-
2	1	2	1	-	-	-	-	-
3	1	3	3	1	-	-	-	-
4	1	4	6	4	1	-	-	-
5	1	5	10	10	5	1	-	-
6	1	6	15	20	15	6	1	-
7	1	7	21	35	35	21	7	1

2. Algoritmo para o Triângulo de Pascal

C(n, p) = C(n-1, p) + C(n-1, p-1)
C(n, 0) = 1
C(n, p) = 0, se (p > n)

```
Triângulo(n);
    C[0,0] ← 1;
    para j ← 1 até n incl.:
        C[0,j] ← 0
    para i ← 1 até n incl.:
        C[i,0] ← 1
        para j ← 1 até i incl.:
            C[i,j] ← C[i-1,j]+C[i-1,j-1]
        para j ← i+1 até n incl.:
            C[i,j] ← 0
```


Triângulo de Pascal - Exercício para casa

Mostrar que a soma das diagonais invertidas são números de Fibonacci:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	-	-	-	-	-	-	-
1	1	1	-	-	-	-	-	-
2	1	2	1	-	-	-	-	-
3	1	3	3	1	-	-	-	-
4	1	4	6	4	1	-	-	-
5	1	5	10	10	5	1	-	-
6	1	6	15	20	15	6	1	-
7	1	7	21	35	35	21	7	1

2
3
5
8
13

3. Números de Euler: contam o número de permutações com dado número de "runs"

E(n, p) = E(n-1, p).p + E(n-1, p-1).(n-p+1)
E(n, 0) = 0
E(0, 1) = 1 (artificial)

Exemplo: E(4, 2)

E(3, 2) = 3 (132, 231, 312) E(3, 1) = 1 (123);

E(4, 2) = 3.2 + 1.3 = 9
(1342, 1324, 2341, 2314, 3412, 3124, 4123, 1423, 1243)

4. Números de Stirling: contam o número de permutações com dado número de ciclos

S(n, p) = S(n-1, p).(n-1) + S(n-1, p-1)
S(0, 0) = 1 (artificial)

Exemplo: S(4, 2)

S(3, 2) = 3 (132, 321, 213) S(3, 1) = 2 (231, 312,);

S(4, 2) = 3.3 + 1 = 11
(4321, 1423, 1342, 4213, 3412, 3241, 4132, 2431, 2143, 2314, 3124)

5. Desarranjos.

São permutações de 1..n onde nenhum elemento é igual ao próprio índice

D(n) = número de desarranjos de n

n	1	2	3	4	5	6	7
D(n)	0	1	2	9	44	256	1854

Exemplos de desarranjos:

n = 2. 1 desarranjo: (2,1)

n = 3. 2 desarranjos: (2,3,1) (3,2,1):

n = 4. 9 desarranjos: (2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2) , (4,3,2,1)

5. Desarranjos.

Recorrência para calcular D(n):

D(1) = 0;
D(2) = 1;
D(n) = (n-1)(D(n-1)+D(n-2)).

Confirmação:

D(3) = 2(0+1) = 2; D(4) = 3(1+2) = 9; D(5) = 4(2+9) = 44

Solução da recorrência:

D(n) = !n (Subfatorial de n) = $n!\sum^{n}_{k=0} (-1)^k/k!$

Confirmação:

D(4) = 4!(1-1+1/2!-1/3!+1/4!) = 4!/4!(24-24+12-4+1) = 9

6. Sequências de 1's. World Cup Noise (10450)

Dado n, quantos números binários T(n) com n bits não contêm 2 ou mais bits 1 em sequência?

Ex: T(3) = 5 (000, 100, 010, 001, 101)

Recorrência:

2 casos, pois o final do número é 0 ou 01

T(1) = 2; T(2) = 3
T(n) = T(n-1) + T(n-2), se (n > 2)

T(n) = FIB(n+2) !!!

7. Agrupamentos. n Group k (10568)

Quantos agrupamentos distintos T(n, k) existem para n elementos havendo k elementos por grupo, exceto 1 deles que contém os restantes, quando n mod k ≠ 0.

Exemplo: T(5, 2) = 15, correspondendo a:

A	BC	DE	AC	BE	D
A	BD	CE	AD	B	CE
A	BE	CD	AD	BC	E
AB	C	DE	AD	BE	C
AB	CD	E	AE	B	CD
AB	CE	D	AE	BC	D
AC	B	DE	AE	BD	C
AC	BD	E			

Exercícios:

8 - Quantos grupamentos de 6 elementos podem ser formados com 8 pessoas? E com 12?

Agrupamentos. n Group k (10568)

A B C D E T(5, 2) = 15

Recorrência: dividir em 2 casos

Seja q = n mod k

T(n, k) = 1, se (0 ≤ n ≤ k)

T(n, k) = C(n-1, k-1).T(n-k, k), se (n > k) e (q = 0)

T(n, k) = C(n-1, k-1).T(n-k, k) + C(n-1, q-1).T(n-q, k) , se (n > k) e (q ≠ 0)

Agrupamentos. n Group k (10568)

Seja $q = n \bmod k$

$T(n, k) = 1$, se ($n \le q$) e ($n \ge 0$)

$T(n, k) = C(n-1, k-1).T(n-k, k)$, se ($n > k$) e ($q = 0$)

$T(n, k) = C(n-1, k-1).T(n-k, k) + C(n-1, q-1).T(n-q, k)$, se ($n > k$) e ($q \ne 0$)

Exemplo: $T(7,4) = C(6,3).T(3,4) + C(6,2).T(4,4) = 20*1+15*1=35$

$T(10,3) = C(9,2).T(7,3) + C(9,0).T(9,3) = 2520+280=2800$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	3	3	15	15	105	105	945	945
3	1	1	1	4	10	10	70	280	280	2800
4	1	1	1	1	5	15	35	35	315	1575
5	1	1	1	1	1	6	21	56	126	126

8. Combinações com elementos repetidos. Combinations, Once Again (10532)

k elementos com repetições: $r_1, r_2 \ldots r_k$, $\Sigma r_i = n$

Quer-se saber $Cr(n, p)$

Ex: Dados 1 1 2 2 2 2 4 5 5 5 5 5 8 8, calcular $Cr(14, 5)$

Recorrência: trabalha-se com a recorrência T(p,q), que significa de quantas maneiras pode-se organizar os p tipos iniciais de elementos usando q elementos no total.

$T(p,0) = 1$;

$T(0,q) = 0, q > 0$

$T(p,q) = \Sigma_{i=0}^{\min(rp,q)} Cr(p-1,q-i)$

$T(p,q) = 0$, nos demais casos.

8. Combinações com elementos repetidos. Combinations, Once Again (10532) - Cr(14, 5)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1(2)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2(4)	1	2	3	3	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3(1)	1	3	5	6	6	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4(5)	1	4	9	15	21	26	28	26	21	15	9	4	1	0	0
5(2)	1	5	14	28	45	62	75	80	75	62	43	27	14	5	1

8. Combinações com (q) elementos repetidos

$T(p,0) = 1$;

$T(0,q) = 0, q > 0$

$T(p,q) = \Sigma_{i=0}^{\min(rp,q)} Cr(p-1,q-i)$

$T(p,q) = 0$, nos demais casos.

k elementos com repetições: $r_1, r_2 \ldots r_k$, $\Sigma r_i = n$

```
Combrep;
    T[0,0] ← 1;
    para j ← 1 até n incl.:
        T[0,j] ← 0
    para i ← 1 até k incl.:
        T[i,0] ← 1
        m ← min(r_i,q)
        Para j ← 1 até q incl.:
            ma ← min (m,j)
            para k ← 0 até ma incl.:
                T[i,j] ← T[i,j]+T[i-1,j-k];
```


Exercício 9: Calcular Cr(8,3) para a situação:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	2	3	3	3	4	4

Exercícios:

10 - Dadas 5 letras e 6 espaços em branco, de quantas maneiras diferentes se pode formatar o string de 11 caracteres correspondente, sem que 2 letras estejam em sequência?

9. Formatação. Stripes (10541)

Dados p objetos e n espaços consecutivos, quantas distribuições T(n, p) distintas existem tal que nunca haja dois objetos vizinhos?

Ex: T(5, 2) = 6 (10100, 10010, 10001, 01010, 01001, 00101)

Recorrência: 2 casos, considerando se a primeira posição do string é branco ou não.

T(n, 0) = 1; T(1, 1) = 1;
T(n, p) = 0, se (n < 2p-1)
T(n, p) = T(n-1, p) + T(n-2, p-1), c.c

9. Formatação. Stripes (10541)

T(n, 0) = 1; T(1, 1) = 1;
T(n, p) = 0, se (n < 2p-1)
T(n, p) = T(n-1, p) + T(n-2, p-1), c.c

T(n,p) = *C*(n-p-1, p) + *C*(n-p-1, p-2) + 2*C*(n-p-1, p-1)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
3	0	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	210

FIM