

Teoria dos Números

Notas de aula da disciplina
TE: Técnicas de Construção de
Algoritmos

Fabiano de Souza Oliveira
(fabiano.oliveira@ime.uerj.br)

Paulo Eustáquio Duarte Pinto
(pauloedp arroba ime.uerj.br)

agosto/2020

TE: Técnicas de Construção de Algoritmos

Recorrências e Combinatória

Problemas de 15/08/2020:

- 1694 - Loteria
- 1221 - Primo Rápido
- 2892 - Treino no Velódromo
- 1233 - Estrela
- 1568 - $\{soma += i++\}$ até N

1694 - Loteria

Contexto: Pink Pie vai apostar numa loteria de números e quer escolher K números numa matriz $N \times M$, todos na mesma linha ou mesma coluna, mas nenhum primo pode ser escolhido. De quantas maneiras ela pode fazer sua escolha? A matriz $N \times M$ contém, em ordem, os números 0 a $N.M-1$.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

Entrada: Uma série de casos de testes descritos cada um em uma linha, terminados com 0 0 0, que não deve ser processado. Cada linha contém três inteiros N , M e K ($1 \leq N, M \leq 50$, $1 \leq K \leq 10$).

Saída: Para cada teste deve ser impresso o número de escolhas distintas que Pink pode fazer.

Exemplo de entrada:

```
2 3 4
3 6 3
25 14 8
0 0 0
```

Exemplo de saída:

```
0
11
7988161
```

1694 - Loteria

Dicas:

1. Solução para 3 6 3

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

Apostas:

- Linha 1: 1
- Linha 2: 4
- Linha 3: 4
- Coluna 1: 1
- Coluna 5: 1

2. Pensar nos casos especiais

1221 - Primo Rápido

Contexto: Mariazinha quer saber se um número X é primo.

Entrada: A primeira linha contém um inteiro N , o número de casos de teste. A seguir vêm N linhas, cada uma contendo um inteiro X ($1 < X < 2^{31}$).

Saída: Para cada teste, imprimir "Prime" ou "Not Prime" caso X seja primo ou não primo, respectivamente.

Exemplo de entrada:

```
3
123321
123
103
```

Exemplo de saída:

```
Not Prime
Not Prime
Prime
```

2892 - Treino no Velódromo

Contexto: Três ciclistas treinam num velódromo. São dados os tempos para completar uma volta dos dois primeiros e o tempo mínimo para os três se encontrarem novamente na partida. Quer-se saber os possíveis tempos de volta para o terceiro ciclista.



Entrada: Cada entrada contém 3 inteiros: T ($1 \leq T \leq 10^6$), o tempo de encontro dos três, A e B , os tempos de volta dos dois primeiros ciclistas ($1 \leq A, B \leq 100$). A última linha contém 0 0 0, que não deve ser processada.

Saída: Um ou mais inteiros, ordenados, indicando os possíveis tempos de volta do terceiro ciclista.

Exemplo de entrada:

```
42 6 7
40 5 4
58652 11 62
0 0 0
```

Exemplo de saída:

```
1 2 3 6 7 14 21 42
8 40
172 1892 5332 58652
```

2892 - Treino no Velódromo

1. Possível solução: analisar as fatorações

Ex: 20 1 4 $20 = 2^2 \cdot 5$ $1 = 1$ $4 = 2^2$ $1.4 = 2^2$

⇒ Backtracking fixando fator 5, combinado aos fatores de 2^2 de todas as maneiras possíveis.

$$T = 20, A = 1, B = 4 \qquad C = 5, 10, 20$$

2. Outra solução:

$$T = \text{MMC}(A, B, C) = \text{MMC}(\text{MMC}(A, B), C)$$

$$T = (A \times B / D) \times C / E \quad \Rightarrow \quad C \text{ é divisor de } T$$

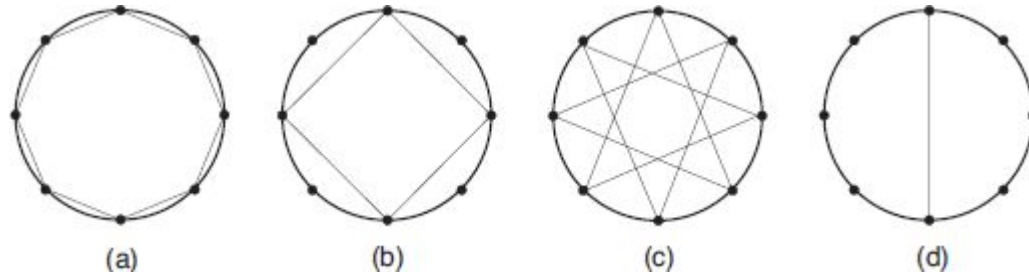
3. Alguns exemplos:

$$T = 105, A = 3, B = 5 \qquad C = 7, 21, 35, 105$$

$$T = 1500, A = 10, B = 25, \qquad C = 1500$$

1233 - Estrelas

Contexto: Dados N pontos igualmente espaçados numa circunferência, quantas estrelas fechadas diferentes pode-se fazer partindo de um ponto e ligando, sucessivamente cada ponto ao k -ésimo ponto seguinte, em ordem?



Entrada: Uma série de casos de testes, terminados por fim de arquivo. Cada teste em numa linha com um inteiro N , ($3 \leq N < 2^{31}$).

Saída: Para cada teste deve ser impresso o número de estrelas fechadas que podem ser formadas usando todos os pontos.

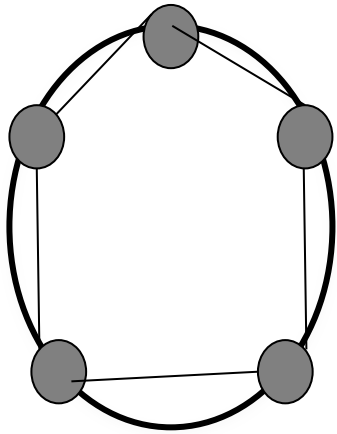
Exemplo de entrada:

3
5
18
360
2147483647

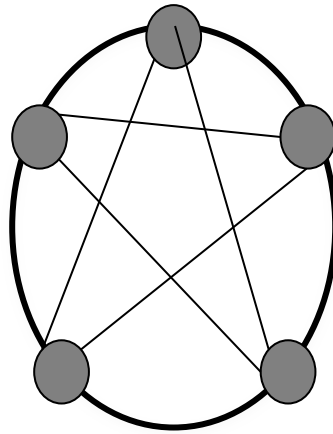
Exemplo de saída:

1
2
3
48
1073741823

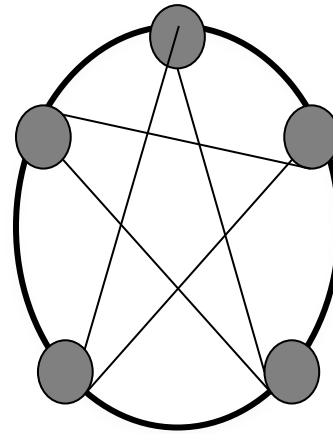
1233 - Estrelas



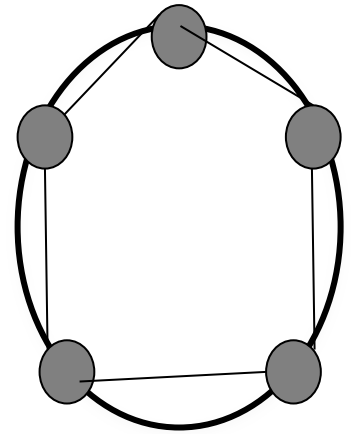
$k=1$



$k=2$



$k=3$



$k=4$

Observações a partir de $N=5$:

a) A estrela só é fechada para $MDC(k, N) = 1$

b) $MDC(K, N)=1 \Rightarrow MDC(N-K, N) = 1$

1568 - {soma+=i++} até N

Contexto: Quer-se saber de quantas maneiras distintas um inteiro **N** pode ser escrito como soma de números consecutivos.

Ex: $9 = 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 5$.

Entrada: Uma série de casos de testes, terminados por fim de arquivo. Cada caso de teste vem em uma linha, com um inteiro **N** ($0 \leq N \leq 9.0^{14}$).

Saída: Para cada teste deve ser impresso o número de possibilidades de escrever **N** como soma de inteiros consecutivos.

Exemplo de entrada:

9
11
12
9000000000000000

Exemplo de saída:

3
2
2
45

1568 - {soma+=i++} até N

Dicas:

1. Desenvolver o problema algebricamente

$$N = (a+1) + \dots + (a+k) = (a+k)(a+k+1)/2 - a(a+1)/2 = k(2a+k+1)/2$$

$$N = k(2a+k+1)/2$$

N ímpar \Rightarrow k (ímpar) divisor de N é solução

N par \Rightarrow k (ímpar) divisor de N é solução?
k (par) divisor de N é solução?

FIM