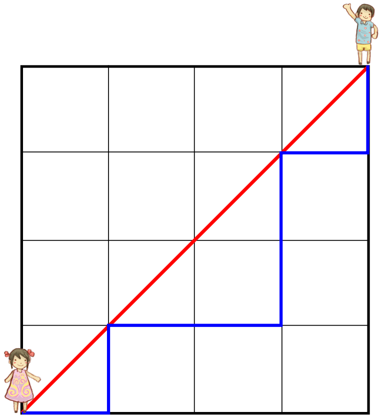
Forma Fechada para os Números de Catalão

Luís Fernando Schultz Xavier da Silveira

Departamento de Informática e Estatística - INE - CTC - UFSC

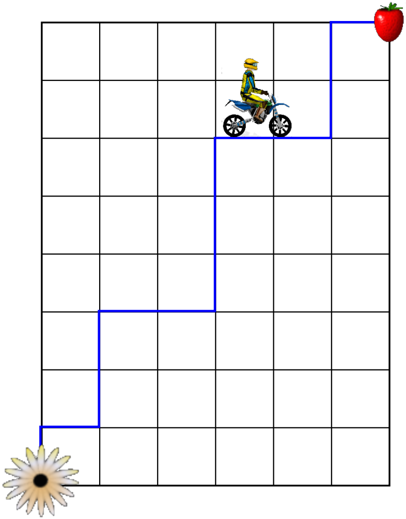
13 de abril de 2010

O Problema



Alice gostaria de se deslocar até onde Bob está permanecendo sempre em cima de uma linha de um grid $n \times n$, indo apenas para frente ou para cima e nunca ficando na parte superior do grid.

Lembrando...



O número de maneiras de se percorrer um grid $m \times n$ de forma qualquer é

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n},$$

pois o número de passos será sempre $m+n$ e devemos escolher m passos para serem passos verticais e n passos para serem passos horizontais (ou vice-versa).

Voltando ao Problema Original

Nossa estratégia será apresentar uma bijeção entre o conjunto A dos caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal e o conjunto B dos caminhos quaisquer num grid $(n-1) \times (n+1)$.

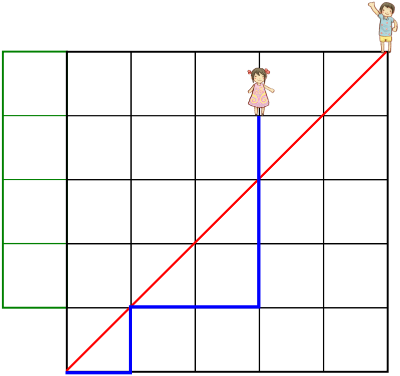
Voltando ao Problema Original

Nossa estratégia será apresentar uma bijeção entre o conjunto A dos caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal e o conjunto B dos caminhos quaisquer num grid $(n-1) \times (n+1)$. Se obtivermos essa bijeção, então o número de caminhos num grid $n \times n$ que não ultrapassam a diagonal será

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

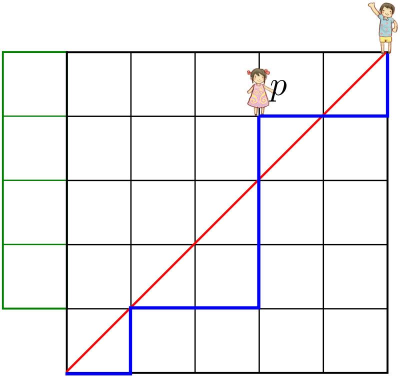
e o problema estará resolvido.

Mãos a Obra!

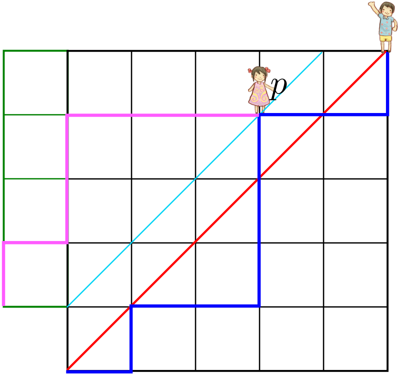


Suponha que Alice fique acima da diagonal.

Mãos a Obra!



Suponha que Alice fique acima da diagonal. Nesse caso seja p o primeiro ponto do caminho onde Alice estava acima da diagonal.



Suponha que Alice fique acima da diagonal. Nesse caso seja p o primeiro ponto do caminho onde Alice estava acima da diagonal. Rebata o prefixo do caminho que acaba em p em torno da reta $y = x + 1$ e obtenha um caminho de $(-1, 1)$ até (n, n), ou seja, um caminho em um grid $(n-1) \times (n+1)$.

O que fizemos?

Acabamos de definir uma função $f : A \to B$.

O que fizemos?

Acabamos de definir uma função $f : A \to B$.
Para mostrar que f é bijetiva, basta mostrar que ela é injetiva e sobrejetiva.

O que fizemos?

Acabamos de definir uma função $f : A \to B$.
Para mostrar que f é bijetiva, basta mostrar que ela é injetiva e sobrejetiva.
Então vamos lá.

Sobrejetividade

Seja $Q \in B$ um caminho qualquer num grid $(n-1) \times (n+1)$ cuja origem é o ponto $(-1, 1)$.

Sobrejetividade

Seja $Q \in B$ um caminho qualquer num grid $(n-1) \times (n+1)$ cuja origem é o ponto $(-1, 1)$.
Necessariamente, em algum ponto, esse caminho fica à direita da reta $y = x + 2$, pois o destino desse caminho é o ponto (n, n), que está à direita dessa reta.

Sobrejetividade

Seja $Q \in B$ um caminho qualquer num grid $(n-1) \times (n+1)$ cuja origem é o ponto $(-1, 1)$.
Necessariamente, em algum ponto, esse caminho fica à direita da reta $y = x+2$, pois o destino desse caminho é o ponto (n, n), que está à direita dessa reta.
Seja p o primeiro ponto onde este caminho esteve à direita da reta $y = x + 2$. Necessariamente este não é o primeiro ponto do caminho e o ponto anterior a ele estava à sua esquerda.

Sobrejetividade

Seja $Q \in B$ um caminho qualquer num grid $(n-1) \times (n+1)$ cuja origem é o ponto $(-1, 1)$.
Necessariamente, em algum ponto, esse caminho fica à direita da reta $y = x + 2$, pois o destino desse caminho é o ponto (n, n), que está à direita dessa reta.
Seja p o primeiro ponto onde este caminho esteve à direita da reta $y = x + 2$. Necessariamente este não é o primeiro ponto do caminho e o ponto anterior a ele estava à sua esquerda.
Rebata o prefixo do caminho Q até p em torno da reta $y = x + 1$ e obtenha um caminho P de $(0, 0)$ até (n, n).

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.
Qualquer ponto do caminho Q até p deve satisfazer $y \geqslant x + 2$.

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.
Qualquer ponto do caminho Q até p deve satisfazer $y \geqslant x + 2$.
A transformação que rebate os pontos em torno de $y = x + 1$ é $(x, y) \mapsto (y - 1, x + 1)$.

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.
Qualquer ponto do caminho Q até p deve satisfazer $y \geqslant x + 2$.
A transformação que rebate os pontos em torno de $y = x + 1$ é $(x, y) \mapsto (y - 1, x + 1)$.
Então qualquer ponto do caminho P até p satisfaz

$$x + 1 \geqslant y - 1 + 2 \iff x \geqslant y.$$

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.
Qualquer ponto do caminho Q até p deve satisfazer $y \geqslant x + 2$.
A transformação que rebate os pontos em torno de $y = x + 1$ é $(x, y) \mapsto (y - 1, x + 1)$.
Então qualquer ponto do caminho P até p satisfaz

$$x + 1 \geqslant y - 1 + 2 \iff x \geqslant y.$$

Mas em p temos $y = x + 1$ e isso mostra que $P \in A$.

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.
Qualquer ponto do caminho Q até p deve satisfazer $y \geqslant x + 2$.
A transformação que rebate os pontos em torno de $y = x + 1$ é $(x, y) \mapsto (y - 1, x + 1)$.
Então qualquer ponto do caminho P até p satisfaz

$$x + 1 \geqslant y - 1 + 2 \iff x \geqslant y.$$

Mas em p temos $y = x + 1$ e isso mostra que $P \in A$.
Ainda, como p é o primeiro ponto de P que está acima da diagonal, $f(P) = Q$.

Sobrejetividade

Vamos provar que $f(P) = Q$.
Qualquer ponto do caminho Q até p deve satisfazer $y \geqslant x + 2$.
A transformação que rebate os pontos em torno de $y = x + 1$ é $(x, y) \mapsto (y - 1, x + 1)$.
Então qualquer ponto do caminho P até p satisfaz

$$x + 1 \geqslant y - 1 + 2 \iff x \geqslant y.$$

Mas em p temos $y = x + 1$ e isso mostra que $P \in A$.
Ainda, como p é o primeiro ponto de P que está acima da diagonal, $f(P) = Q$.
E isso mostra que f é sobrejetiva.

Injetividade

Sejam $P, Q \in A$ dois caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal tais que $f(P) = f(Q)$.

Injetividade

Sejam $P, Q \in A$ dois caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal tais que $f(P) = f(Q)$.
Começamos argumentando que se p é o primeiro ponto acima da diagonal em P e q é o primeiro ponto acima da diagonal em Q, então $p = q$.

Injetividade

Sejam $P, Q \in A$ dois caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal tais que $f(P) = f(Q)$.
Começamos argumentando que se p é o primeiro ponto acima da diagonal em P e q é o primeiro ponto acima da diagonal em Q, então $p = q$.
De fato, como todo ponto até p satisfaz $x \geqslant y$, temos que ao rebatê-los em torno de $y = x + 1$ eles satisfarão $y \geqslant x + 2$ (como na demonstração anterior). Assim, p é o primeiro ponto em $f(P)$ que está à direita da diagonal $y = x + 1$. Por simetria, $p = q$.

Injetividade

Sejam $P, Q \in A$ dois caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal tais que $f(P) = f(Q)$.

Começamos argumentando que se p é o primeiro ponto acima da diagonal em P e q é o primeiro ponto acima da diagonal em Q, então $p = q$.

De fato, como todo ponto até p satisfaz $x \geqslant y$, temos que ao rebatê-los em torno de $y = x + 1$ eles satisfarão $y \geqslant x + 2$ (como na demonstração anterior). Assim, p é o primeiro ponto em $f(P)$ que está à direita da diagonal $y = x + 1$. Por simetria, $p = q$.

Assim, o caminho $f(P)$ é composto de um mapeamento bijetivo (rebatimento em torno de $y = x + 1$) dos pontos do caminho até p e um outro mapeamento bijetivo (identidade) dos pontos de p em diante. $f(Q)$ também é construído de forma análoga, então $P = Q$.

Injetividade

Sejam $P, Q \in A$ dois caminhos num grid $n \times n$ que ultrapassam a diagonal tais que $f(P) = f(Q)$.
Começamos argumentando que se p é o primeiro ponto acima da diagonal em P e q é o primeiro ponto acima da diagonal em Q, então $p = q$.
De fato, como todo ponto até p satisfaz $x \geqslant y$, temos que ao rebatê-los em torno de $y = x + 1$ eles satisfarão $y \geqslant x + 2$ (como na demonstração anterior). Assim, p é o primeiro ponto em $f(P)$ que está à direita da diagonal $y = x + 1$. Por simetria, $p = q$.
Assim, o caminho $f(P)$ é composto de um mapeamento bijetivo (rebatimento em torno de $y = x + 1$) dos pontos do caminho até p e um outro mapeamento bijetivo (identidade) dos pontos de p em diante. $f(Q)$ também é construído de forma análoga, então $P = Q$.
Isso mostra a injetividade.

É Isso

Acabou, tchau!