Sistemas Lineares II

Igor Macedo Quintanilha[1], **Roberto de Moura Estevão Filho**[1]

[1]Departamento de Eng. Elet. e de Comp. - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - RJ - Brazil

{igormq, robertomest}@poli.ufrj.br

Resumo. *Como relacionar a **DFT** de um conjunto de N amostras de um sinal com a transformada de Fourier do sinal?*

1. Notação

- Geral:
  - $x(t)$ é o sinal contínuo
  - $X(j\omega)$ é a **FT**
  - $\omega(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- Janela de Observação:
  - $W(j\omega)$ é a **FT** janela (sinc)
  - $y(t) = x(t)w(t)$ é a porção de interesse
  - $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$
  - $p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lh)$ é o trem de impulsos
  - $y^\star = y(t)p(t)$ é o trem de impulsos modulados
  - $y[n]$ são as amostras correspondentes

2. Passo 1 - Multiplicação pela janela

$$Y(j\omega) = X(j\omega) * W(j\omega) \tag{2.1}$$

3. Passo 2 - Amostragem

$$Y^*(j\omega) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(j\omega - jk\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{h} \tag{3.1}$$

4. Passo 3 - DTFT de y[n] e a transformada de Fourier de $\boldsymbol{y[n]}$

$$DTFT\{y[n]\} = FT\{Y^*(j\omega)\}|_{\omega=\frac{\Omega}{h}}, \quad t = nh \tag{4.1}$$

5. Passo 4 - DFT do y[n] com a DTFT de y[n]

$$DFT\{y[n]\} = DTFT\{y[n]\}|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \tag{5.1}$$

6. Passo 5

Relacionar a $DFT\{y[n]\}$ com $X(jw)$

7. Hipóteses

- A janela é muito grande (infinita)
- O sinal $x(t)$ possui banda limitada
- O sinal $x(t)$ foi amostrado a uma taxa suficientemente alta para evitar aliasing

$$DFT\{y[n]\} = \frac{1}{h}\bigg|_{\omega=\frac{n}{Nh}} \tag{7.1}$$

8. Nova notação

- h é o período de amostragem
- N é o número de pontos da janela
- $T_0 = (N-1)h$ é a janela de observação (tamanho)
- $N \to \infty$: a resolução (frequência) é aproximadamente $\frac{1}{T_0}$

9. Tarefa

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{a}t + A, & -a \leq t \leq 0 \\ -\frac{A}{a}t + A, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{9.1}$$

- $A = 1$
- $a = 10^{-3}$

(a) Mostre que:

$$X(f) = \frac{2A}{a(2\pi f)^2}(1 - cos(2\pi f a)) \tag{9.2}$$

(b) Crie um script que implementa $X(f)$

(c) Desloque circularmente a parte negativa para usar o comando ***fft()*** do matlab

(d) Utilize a propriedade do deslocamento circular da DFT para determinar a DFT do sinal deslocado

OBS.: Propriedade do deslocamento: Seja x_0 o sinal e X_{0shift} o sinal deslocado de m amostras circularmente:

$$DFT\{X_0shift[n]\} = DFT\{x_0[n]\}e^{j\frac{2\pi mk}{N}} \tag{9.3}$$

(e) Desloque circularmente a DFT no sentido reverso para obter a DFT do sinal original

(f) Defina um vetor de frequências "adequado"

(g) Construir gráficos de:
  - Sinal no tempo;
  - $\|DFT\|$;
  - $\angle DFT$.

(h) Comparar no mesmo gráfico a DFT e FT analítica

9.1. Casos

$N = 512$ e resolução $= 100Hz$
$N = 2^{14}$ e resolução $= 20Hz$

9.2. Sinal 2

$$x(t) = 2sinc(2t) + 0.2sinc(0.2t) \tag{9.4}$$

(a) Obtenha uma expressão para $X(f)$ e repita o exemplo anterior para:

- $N = 64, \quad h = 0.5;$
- $N = 64, \quad h = 0.05;$
- $N = 1024, \quad h = 0.4.$