Sistemas Lineares II

Igor Macedo Quintanilha[1], **Roberto de Moura Estevão Filho**[1], **Tiago Monnerat de Faria Lopes**[1]

[1]Departamento de Eng. Elet. e de Comp. - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - RJ - Brazil

{igormq, robertomest, tiagomflopes}@poli.ufrj.br

Resumo. *Como relacionar a DFT de um conjunto de* ***N*** *amostras de um sinal com a Transformada de Fourier (FT) do sinal?*

1. Notação

Em todo o trabalho iremos considerar a seguinte notação:

- Geral:
  - $x(t)$ é o sinal contínuo
  - $X(j\omega)$ é a **FT**
  - $\omega(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- Janela de Observação:
  - $W(j\omega)$ é a **FT** janela
  - $y(t) = x(t)w(t)$ é a porção de interesse
  - $y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$
  - $p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lh)$ é o trem de impulsos
  - $y^{\star} = y(t) * p(t)$ é o trem de impulsos modulados
  - $y[n]$ são as amostras correspondentes

2. Multiplicação pela janela

Para calcularmos o sinal $x(t)$ multiplicado pela janela $w(t)$, devemos encontrar a $\mathcal{F}\{w(t)\}$:

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\mathrm{e}^{-j\omega t} dt \tag{2.1}$$

No entanto para $t > \left|\frac{T_0}{2}\right|$ o resultado é zero, então:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{e}^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega}\left(\mathrm{e}^{-j\omega T_0/2} - \mathrm{e}^{j\omega T_0/2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)}{\omega} \\ &= T_0 \frac{\sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)} = T_0 sinc\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2a}$$

Agora, multiplicando o sinal no tempo equivale a convolução na frequência:

$$y(t) = x(t) * w(t) \implies Y(j\omega) = X(j\omega) \star W(j\omega)$$

Então:

$$Y(j\omega) = \int_{\infty}^{-\infty} X(\tau)W(jw - \tau)d\tau \tag{2.3}$$

3. Amostragem

Observamos que o sinal $p(t)$ é periódico, portanto podemos representá-lo em sua série de Fourier:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} p(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lh)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt, \quad \omega_0 = 2\pi/h \end{aligned} \tag{3.1a}$$

Como a integral está definida dentro do período fundamental, temos que a única solução não trivial é para $l = 0$, portanto:

$$P_k = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\delta(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{h} \tag{3.2}$$

Com isso, temos o sinal $p(t)$ em sua série de Fourier:

$$p(t) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jk\omega_0 t} \tag{3.3}$$

Portanto, o sinal amostrado será:

$$y^*(t) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{jk\omega_0 t} \tag{3.4}$$

Aplicando a Transformada de Fourier no sinal 3.4, temos:

$$Y^*(j\omega) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}\mathrm{e}^{-j\omega t}dt$$

Utilizando a propriedade do deslocamento (?):

$$Y^*(j\omega) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(j\omega - jk\omega_0) \tag{3.5}$$

4. Associando a $DTFT\{y[n]\}$ com a $\mathcal{F}\{y^*(t)\}$

Realizando a DTFT do sinal $y[n]$:

$$Y(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{e}^{-j\Omega n} \tag{4.1}$$

Utilizando uma outra abordagem para a transformada do sinal amostrado:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t-lh) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lh)\delta(t-lh) \end{aligned} \tag{4.2a}$$

Realizando a FT no sinal 4.2a:

$$
\begin{aligned}
Y^*(j\omega) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(lh)\delta(t-lh)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lh) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-lh)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lh)\mathrm{e}^{-j\omega lh} \qquad (4.3a)
\end{aligned}
$$

Para $\omega = \frac{\Omega}{h}$:

$$Y^*(j\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lh)\mathrm{e}^{-j\Omega l} = Y(\mathrm{e}^{j\Omega})$$

Adotando $y(lh) = y[l]$:

$$Y^*(j\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l]\mathrm{e}^{-j\Omega l} = Y(\mathrm{e}^{j\Omega}) \qquad (4.4)$$

5. Relacionar a $DFT\{y[n]\}$ com $DTFT\{y[n]\}$

$$DTFT: \quad Y(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{e}^{-j\Omega n} \qquad (5.1a)$$

$$DFT: \quad Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\mathrm{e}^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

Como $y[n] = 0$, para todo $(N-1) < n < 0$, temos em 5.1a:

$$Y(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\mathrm{e}^{-j\Omega n} \qquad (5.2)$$

Para $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$, finalmente temos:

$$Y(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = Y[k] \qquad (5.3)$$

6. Relacionar a $DFT\{y[n]\}$ com a $FT\{x(t)\}$

Como hipótese, sugerindo a janela infinita, a tranformada seria:

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1\mathrm{e}^{-j\omega t} = \delta(\omega) \qquad (6.1)$$

Portanto, multiplicando pela janela, teremos o seguinte sinal:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\delta(j\omega - \tau)d\tau = X(j\omega) \qquad (6.2)$$

Utilizando as propriedades encontradas nos passos anteriores, temos:

$$Y^*(j\omega) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(j\omega - k\omega_0) = Y(\mathrm{e}^{j\Omega})\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{h}} \tag{6.3a}$$

$$Y(\mathrm{e}^{j\Omega}) = Y[k]|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} \tag{6.3b}$$

$$Y[k] = Y^*(j\omega)|_{w=\frac{2\pi k}{hN}} \tag{6.3c}$$

Como na equação 6.3a o sinal $X(j\omega)$ é amostrado em infinitas amostras, podemos aproximar o somatório para o próprio sinal, portanto:

$$Y[k] = \frac{1}{h}X(j\omega)\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi k}{hN}} \tag{6.4}$$

7. Relacionar a $DFT\{y[n]\}$ com a $DTFS\{x[n]\}$

$$\frac{1}{N}DFT\{x[n]\} = DTFS\{x[n]\}|_{\Omega_0=\frac{2\pi}{N}} \tag{7.1}$$