	UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET CURSO: ENGENHARIA MECÂNICA	CA III 2021.1

Cálculo Aplicado III

Professor	Afonso Henriques	
Estudante	Igor Lima Rocha	**Data: 21/10/2021**
Unidade II	**Segunda avaliação escrita de CA III CC 2021_2**	

Obs. Abra o arquivo pdf e leia atentamente a observação e o enunciado de cada tarefa antes de começar a resolução.
Atenção: Lembre-se de assinar a avaliação colocando o seu nome no espaço correspondente acima e em cada folha de respostas (se utilizar o ambiente papel/lápis)!

Utilize este espaço ou se preferir utilize o ambiente papel/lápis seguindo as orientações indicadas na avaliação em pdf. Boa sorte!

Resolução da T1 da GT1

Para responder essa questão devemos, inicialmente, calcular o vetor gradiente de f(x, y).

$$f(x,\ y)\ =\sqrt{(9x^2 - 4y^2 - 1)}$$

Precisamos encontrar o vetor gradiente da função f(x, y). Para isso devemos calcular a derivada parcial em relação a X e Y:
Calculando a derivada parcial em relação a X:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1})$$

Reescrevendo, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)^{1/2}\right)$$

Podemos utilizar a regra da cadeia, para poder remover a raiz quadrada da derivada:

$$\frac{1}{2} * \left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}-1} * \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)$$

$$\frac{1}{2} * \left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} * \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)$$

$$\frac{1}{2*\sqrt{\left(9x^2-4y^2-1\right)}} * \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)$$

Resolvendo a derivada normalmente:

$$\frac{1}{2*\sqrt{(9x^2-4y^2-1)}} \quad * \quad (9 * 2x)$$

$$\frac{1}{2*\sqrt{(9x^2-4y^2-1)}} \quad * \quad (18x)$$

$$\frac{18x}{2*\sqrt{(9x^2-4y^2-1)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9x}{\sqrt{(9x^2-4y^2-1)}}$$

Agora devemos calcular a derivada parcial em relação a Y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}\right)$$

Reescrevendo, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)^{1/2}\right)$$

Podemos utilizar a regra da cadeia, para poder remover a raiz quadrada da derivada:

$$\frac{1}{2} * \left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}-1} \quad * \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)$$

$$\frac{1}{2} * \left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \quad * \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)$$

$$\frac{1}{2*\sqrt{\left(9x^2-4y^2-1\right)}} \quad * \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 - 4y^2 - 1\right)$$

Resolvendo a derivada normalmente:

$$\frac{1}{2*\sqrt{\left(9x^2-4y^2-1\right)}} \quad * \quad (- 4 * 2y)$$

$$\frac{1}{2*\sqrt{\left(9x^2-4y^2-1\right)}} \quad * \quad (- 8y)$$

$$\frac{-8y}{2*\sqrt{\left(9x^2-4y^2-1\right)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y}{\sqrt{\left(9x^2-4y^2-1\right)}}$$

No final, nós temos o vetor gradiente de f(x, y):

$$\triangledown f(x,\ y) = < \frac{9x}{\left(9x^2-4y^2-1\right)^{1/2}},\ -\frac{4y}{\left(9x^2-4y^2-1\right)^{1/2}} >$$

Substituindo o ponto P no vetor gradiente, temos:

$$\triangledown f(3,\ -2) = < \frac{9*3}{\left(9*3^2-4*(-2)^2-1\right)^{1/2}},\ -\frac{4*(-2)}{\left(9*3^2-4*(-2)^2-1\right)^{1/2}} >$$

$$\triangledown f(3,\ -2) = < \frac{27}{(81-16-1)^{1/2}}, -\frac{-8}{(81-16-1)^{1/2}} >$$

$$\triangledown f(3,\ -2) = < \frac{27}{64^{1/2}}, -\frac{-8}{64^{1/2}} >$$

$$\triangledown f(3,\ -2) = < \frac{27}{8}, -\frac{-8}{8} >$$

$$\triangledown f(3,\ -2) = < \frac{27}{8}, \frac{8}{8} >$$

$$\triangledown f(3,\ -2) = < \frac{27}{8}, 1 >$$

Agora devemos verificar se o vetor v é unitário, então:

$$|v| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Como o vetor v não é unitário, devemos encontrar um vetor unitário que tenha a mesma direção e sentido do vetor v, o qual podemos obtê-lo da seguinte forma:

$$u = \frac{v}{|v|}$$

$$v = i + 5j = < 1,\ 5 >$$

$$u = \frac{<1, 5>}{\sqrt{26}} = < \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}} >$$

Finalmente, podemos calcular a derivada direcional de f(x, y), utilizando a equação:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \ \triangledown f(p) * \ u$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) \ = \ < \frac{27}{8}, 1 \ >*< \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}} >$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) \ = \left(\frac{27}{8} * \frac{1}{\sqrt{26}}\right) \ + \ \left(1 \ * \ \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) = \left(\frac{27}{8*\sqrt{26}}\right) \ + \ \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) = \left(\frac{27}{8*\sqrt{26}} * \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}}\right) + \left(\frac{5}{\sqrt{26}} * \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) \ = \left(\frac{27*\sqrt{26}}{8*26}\right) \ + \ \left(\frac{5*\sqrt{26}}{26}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) = \frac{27*\sqrt{26}}{208} \ + \ \frac{5*\sqrt{26}}{26}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,5) = \frac{26*(27*\sqrt{26})+208*(5*\sqrt{26})}{208*26}$$

Resolução da T2 da GT1

A direção em que a função f(x, y) cresce mais rapidamente no ponto P, é o módulo do vetor gradiente de f naquele ponto. Como já calculamos o vetor gradiente na T1 da GT1, podemos calcular o seu módulo da seguinte forma:

$$\triangledown f(3, \ -2) = \ < \frac{27}{8}, 1 \ >$$

$$|\triangledown f| \ = \ \sqrt{(\frac{27}{8})^2 \ + \ 1^2}$$

$$|\triangledown f| \ = \ \sqrt{\frac{729}{64} \ + \ 1}$$

$$|\triangledown f| \ = \ \sqrt{\frac{729}{64} \ + \ \frac{64}{64}}$$

$$|\nabla f| = \sqrt{\frac{729 + 64}{64}}$$

$$|\nabla f| = \sqrt{\frac{793}{64}}$$

$$|\nabla f| = \frac{\sqrt{793}}{8}$$

Agora para calcularmos as taxas de variação nessa direção, utilizaremos o vetor gradiente já calculado. Portanto a taxa de crescimento de f(x, y) no ponto P ocorre na direção:

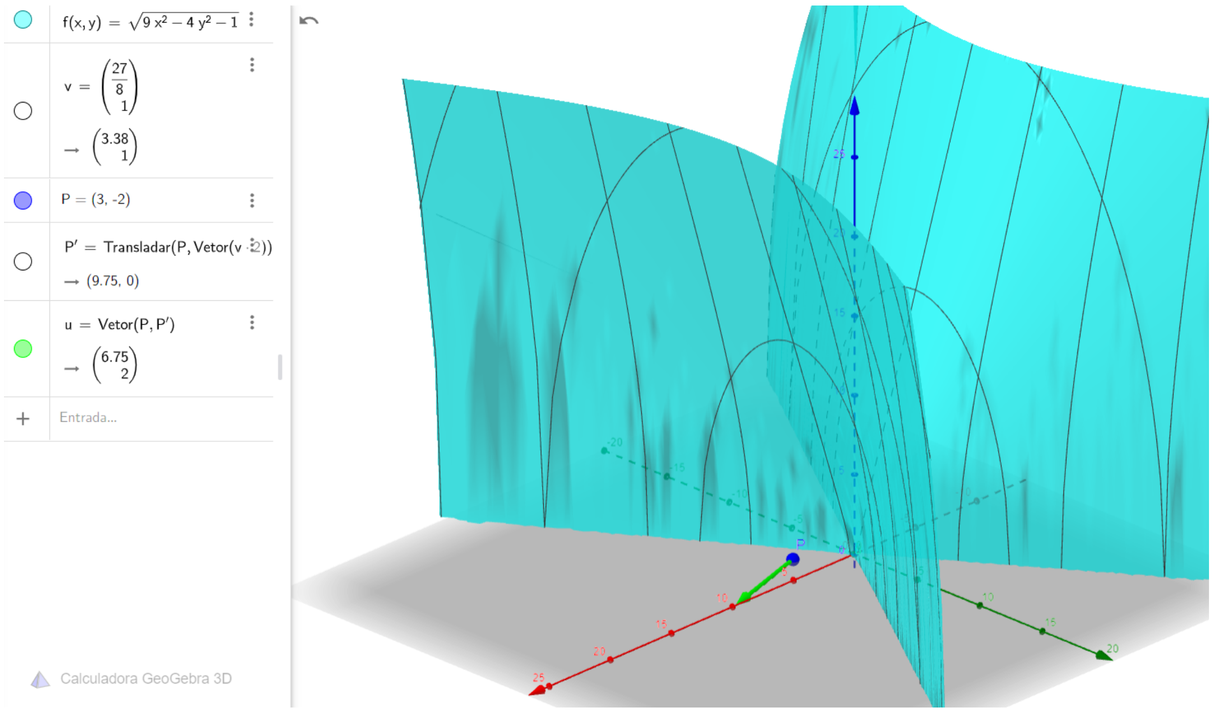
$$\nabla f(3, \ -2) = \ < \frac{27}{8}, 1 \ >$$

Já a taxa de decrescimento de f(x, y) no ponto P ocorre na direção:

$$-\nabla f(3, \ -2) = \ <-\frac{27}{8}, -1 \ >$$

Resolução da T3 da GT1

A representação gráfica do gradiente de f no ponto P é o vetor u (em verde no gráfico):



Resolução da T1 da GT2

Para realizar esta tarefa, devemos considerar que, como a função f(x,y,z) possui 3 variáveis , podemos utilizar a seguinte relação:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(P_o\right)\left(X - X_o\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(P_o\right)\left(Y - Y_o\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(P_o\right)\left(Z - Z_o\right) = 0$$

Calculando a derivada parcial de f(x,y,z) em relação a X:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(- 4z^2 - 9y^2 + 36 - 9x^2\right)$$

$$0 - 0 + 0 - 9 * 2x$$

$$- 18x$$

Aplicando ela ao ponto:

$$Q\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$$

Temos:

$$- 18\sqrt{2}$$

Calculando a derivada parcial de f(x,y,z) em relação a Y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(- 4z^2 - 9y^2 + 36 - 9x^2\right)$$

$$0 - 9 * 2y + 0 - 0$$

$$- 18y$$

Aplicando ela ao ponto:

$$Q\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$$

Temos:

$$- 18\sqrt{2}$$

Calculando a derivada parcial de f(x,y,z) em relação a Z:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(- 4z^2 - 9y^2 + 36 - 9x^2\right)$$

$$- 4 * 2z - 0 + 0 - 0$$

$$- 8z$$

Aplicando ela ao ponto:

$$Q\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$$

Temos:

$$-\ 8 * 0 \ = \ 0$$

Agora nós podemos utilizar a relação da equação do plano com os dados que temos:

$$-\ 18\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + (-\ 18)\sqrt{2}\left(y - \sqrt{2}\right) + \ 0(z - 0) \ = \ 0$$

$$-\ 18\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + (-\ 18)\sqrt{2}\left(y - \sqrt{2}\right) = \ 0$$

Essa é a equação do plano tangente da função f no ponto Q.

Para calcular o gradiente da função f, temos a seguinte relação:

$$\nabla f \ = \frac{\partial f}{\partial x} * i \ + \frac{\partial f}{\partial y} * j \ + \frac{\partial f}{\partial z} * k$$

Como já temos os valores das derivadas parciais da função f em relação a X, Y e Z, podemos substituir os seus valores na relação, para obtermos o vetor gradiente:

$$\nabla f \ = \ -\ 18x * i \ + (-\ 18y) * j \ + (-\ 8z) * k$$

$$\nabla f \ = \ -\ 18x * i \ -\ 18y * j \ -\ 8z * k$$

Aplicando o ponto Q ao vetor gradiente, temos que:

$$\nabla f\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right) \ = \ -\ 18\sqrt{2} * i \ -\ 18\sqrt{2} * j \ -\ 8 * 0 * k$$

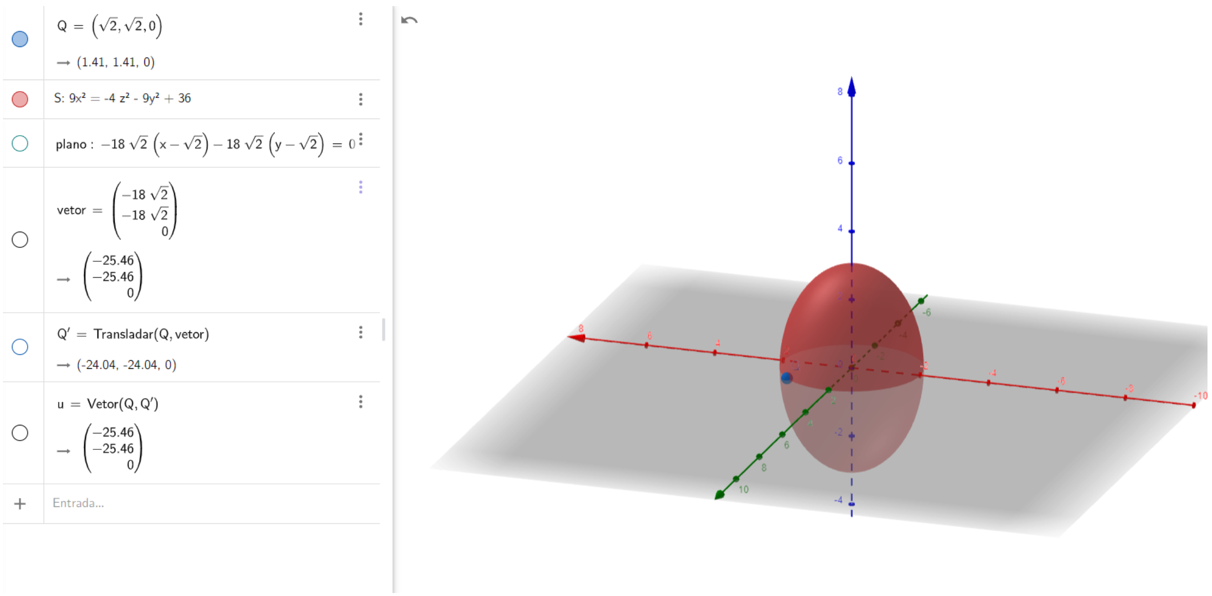
$$\nabla f\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right) \ = \ -\ 18\sqrt{2} * i \ -\ 18\sqrt{2} * j \ + \ 0k$$

Podemos reescrever o gradiente da seguinte forma:

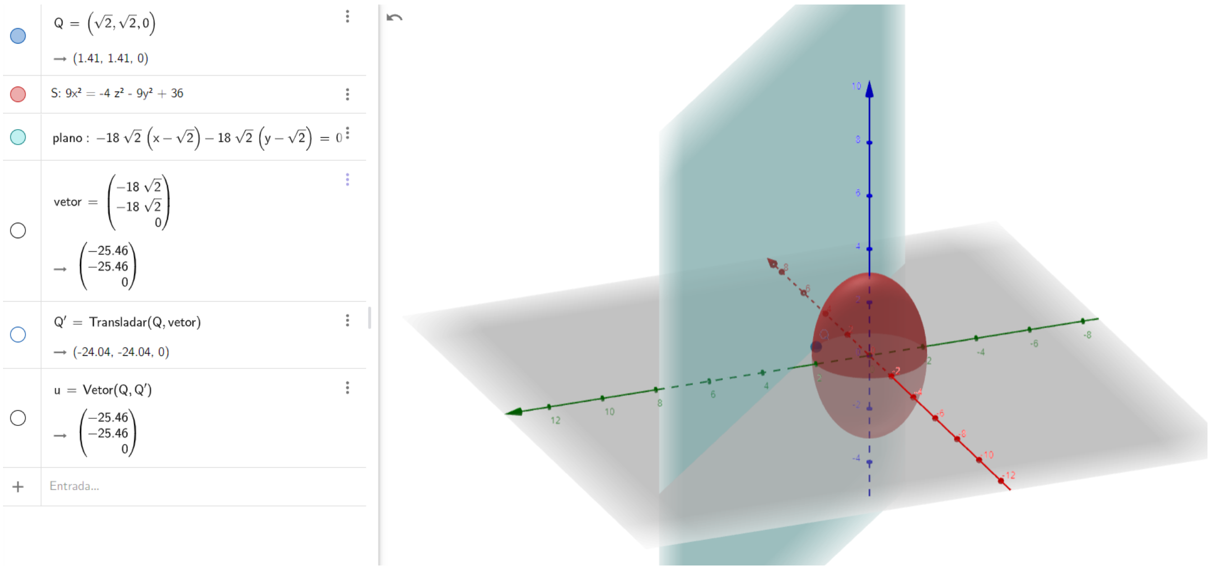
$$\nabla f\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right) \ = \ <-\ 18\sqrt{2},\ -\ 18\sqrt{2},\ 0 \ >$$

Resolução da T2 da GT2

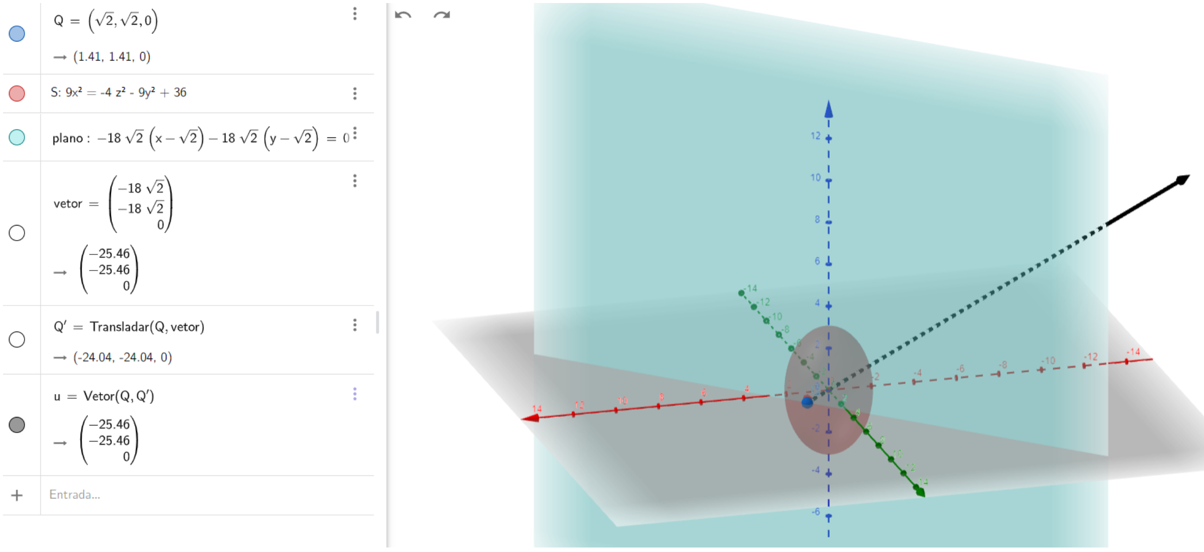
Podemos visualizar no ambiente gráfico, a superfície S e o ponto Q:



Visualizamos também o plano tangente a S:



Juntamente com o vetor gradiente de f no ponto Q:



Resolução da T1 da GT3

Para realizarmos essa tarefa, devemos considerar:

$$g(x,\ y,\ z)\ =\ 4x^2 + y^2 + 5z^2$$

$$\pi:\ 2x\ +\ 3y\ +\ 4z\ -\ 12\ =\ 0$$

Percebemos que temos o π como restrição.

Primeiro vamos obter as derivadas parciais da função g(x,y,z) em relação a x:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \ 4\ *\ 2x\ +\ 0\ +\ 0\ =\ 8x$$

Agora vamos obter as derivadas parciais da função g(x,y,z) em relação a y:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \ 0\ +\ 2y\ +\ 0\ =\ 2y$$

E por fim, as derivadas parciais da função g(x,y,z) em relação a z:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \ 0\ +\ 0\ +\ 5\ *\ 2z\ =\ 10x$$

Logo o vetor gradiente da função g é:

$$\nabla g\ =\ <\ 8x,\ 2y,\ 10z\ >$$

Em seguida devemos calcular as derivadas parciais de restrição.

Considerando a superfície π da seguinte forma:

$$\pi(x,\ y,\ z) = \ 2x\ +\ 3y\ +\ 4z\ \ -\ 12$$

Iremos calcular a derivada parcial da superfície π(x, y, z) em relação a x:

$$\frac{\partial\pi}{\partial x} = \ 2\ +\ 0\ +\ 0\ \ -\ 0\ \ =\ \ 2$$

Em seguida, calcular a derivada parcial da superfície π(x, y, z) em relação a y:

$$\frac{\partial\pi}{\partial y} = \ 0\ +\ 3\ +\ 0\ \ -\ 0\ \ =\ \ 3$$

E, por fim, calcular a derivada parcial da superfície π(x, y, z) em relação a z:

$$\frac{\partial\pi}{\partial z} = \ 0\ +\ 0\ +\ 4\ \ -\ 0\ \ =\ \ 4$$

Logo, o vetor gradiente da superfície é:

$$\bigtriangledown\pi\ \ =\ \ \ <\ 2,\ 3,\ 4\ \ >$$

Para nós obtermos o gradiente da função, utilizaremos a seguinte relação:

$$<\ 8x,\ 2y,\ 10z\ \ >\ \ \ =\ \lambda\ {*}<\ 2,\ 3,\ 4\ \ >$$

Podemos, então, resolver o sistema de equações:

1)

$$8x\ \ =\ \lambda\ *\ \ 2$$

2)

$$2y\ \ =\ \lambda\ *\ \ 3$$

3)

$$10z\ \ =\ \ \lambda\ *\ \ 4$$

Isolando o lambda em cada equação, teremos o seguinte:

$$\textbf{1)}\ \lambda\ = \frac{2}{8x}$$

$$\textbf{2)}\ \lambda\ = \frac{3}{2y}$$

$$\textbf{3)}\ \lambda = \frac{4}{10z}$$

Juntando as equações 1 e 2, temos que:

$$\frac{3}{2y} = \frac{2}{8x}$$

$$3 * 8x = 2 * 2y$$

$$24x = 4y$$

$$x = \frac{4y}{24} \qquad\qquad y = \frac{24x}{4}$$

$$x = \frac{y}{6} \qquad\qquad y = 6x$$

Juntando as equações 1 e 3, e usando o valor que obtivemos de X, temos que:

$$\frac{4}{10z} = \frac{2}{8x}$$

$$4 * 8x = 2 * 10z$$

$$32x = 20z$$

$$x = \frac{20z}{32}$$

$$x = \frac{5z}{8}$$

$$\frac{8x}{5} = z$$

Agora que temos todos em relação a X, podemos substituir na restrição:

$$\pi\text{:}\ 2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

$$2x + 3y + 4z = 12$$

$$2x + 3 * 6x + 4 * \frac{8x}{5} = 12 \qquad *(5)$$

$$5 * 2x + 5 * 3 * 6x + 4 * 8x = 5 * 12$$

$$10x + 90\,x + 32\,x = 60$$

$$132\,x = 60$$

$$x = \frac{60}{132}$$

Substituiremos nas relações que tínhamos antes:

$$y = 6x \qquad\qquad z = \frac{8x}{5}$$

$$y = 6\frac{60}{132} \qquad\qquad z = \frac{8*132}{5*60}$$

$$y = \frac{360}{132} \qquad\qquad z = \frac{1056}{300}$$

$$y = \frac{30}{11} \qquad\qquad z = \frac{88}{25}$$

Por fim, descobrimos que o ponto crítico é:

$$\left(\frac{60}{132}, \frac{30}{11}, \frac{88}{25}\right)$$

Resolução da T2 da GT3