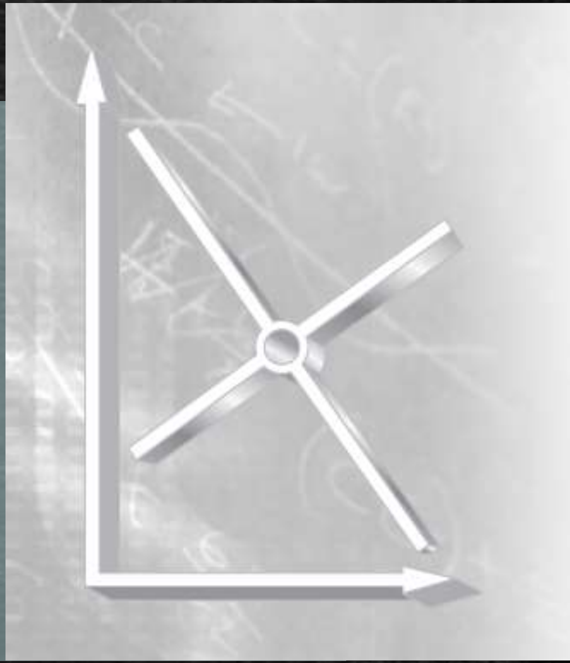
Solução Numérica de Sistemas Lineares



Análise Numérica
Gesil S. Amarante II
UESC

Solução de Sistemas lineares

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Na parte anterior estávamos resolvendo os problemas envolvendo identificar x quando

$$f(x) = 0.$$

Agora precisamos resolver problemas em que há n variáveis

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$

o que só pode ser determinado com n equações

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0. \end{gathered}$$

As f_n podem ser lineares ou não-lineares. Trabalharemos aqui apenas com as lineares.

Solução de Sistemas lineares

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Uma forma adequada de dispor dos sistemas de equações lineares é

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}\,x_3 \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

A forma geral mais prática para os cálculos é a forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Solução de Sistemas lineares

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Um exemplo simples é o de um sistema de dimensão 2 é:

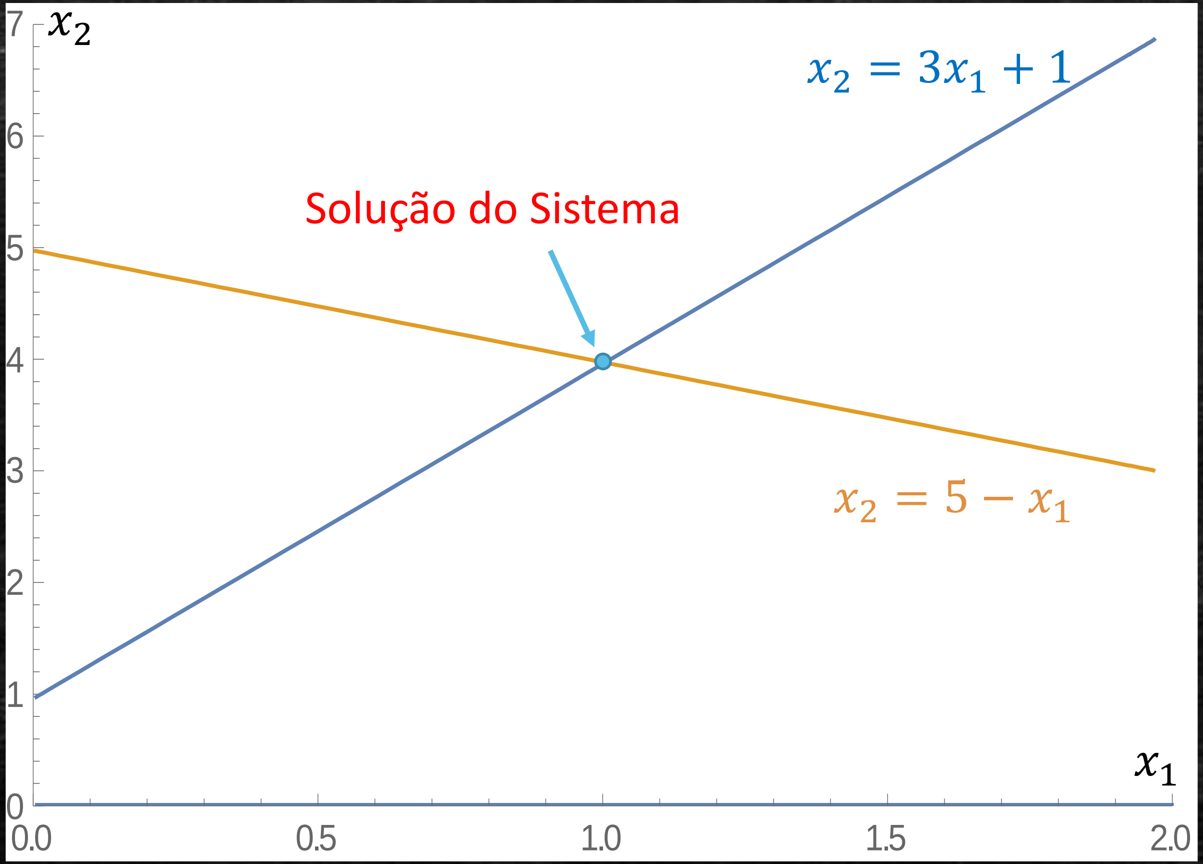
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

que podemos dispor como

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 1 \\ x_2 = -x_1 + 5 \end{cases}$$

E podemos resolver com

$$\boxed{x_1 = 5 - x_2}$$
$$x_2 = 3(5 - x_2) + 1$$
$$x_2 = 15 - 3x_2 + 1$$



$$4x_2 = 16$$
$$x_2 = 4$$
$$x_1 = 5 - 4$$
$$x_1 = 1$$

Solução de Sistemas lineares

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Supondo outro sistema:

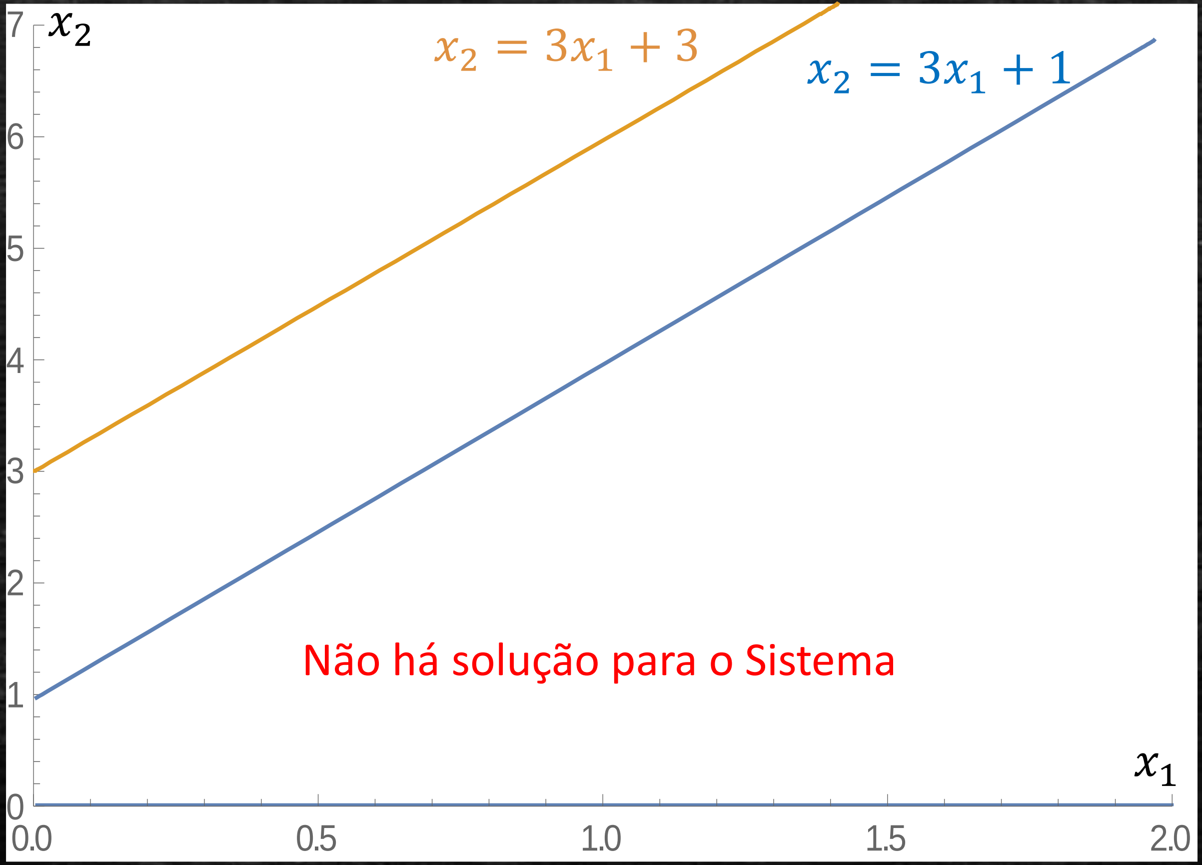
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

que podemos dispor como

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 1 \\ x_2 = 3x_1 + 3 \end{cases}$$

Tentando resolver ...

$$x_1 = (x_2 - 3)/3$$
$$x_2 = 3(x_2 - 3)/3 + 1$$
$$x_2 = x_2 - 2$$



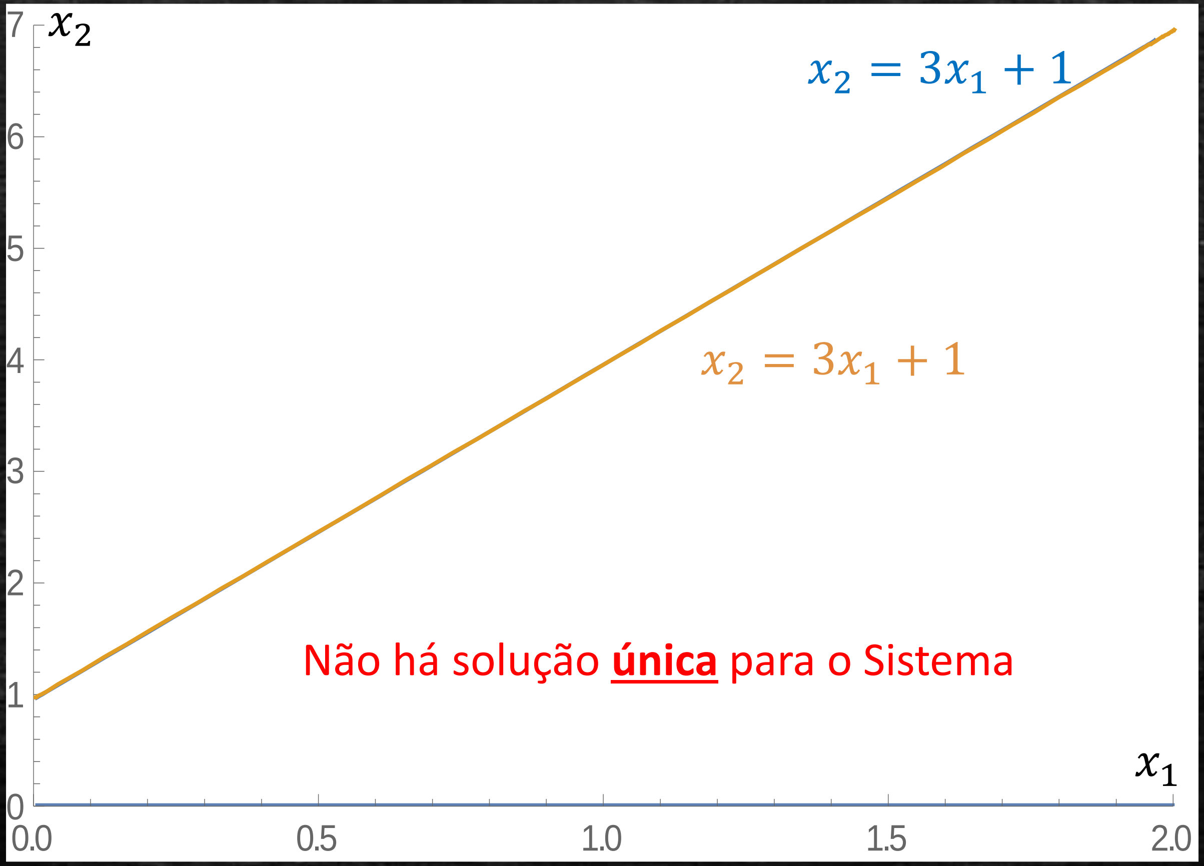
Solução de Sistemas lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Mesma coisa com:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ 9x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 1 \\ x_2 = 3x_1 + 1 \end{cases}$$



Solução de Sistemas lineares

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3.
\end{aligned}
$$

Em cada um dos casos o sistema, na forma matricial $(A\vec{x} = \vec{b})$, ficaria

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$Determinante\ de\ A =$

$$3 \times 1 - (-1 \times 1)$$

$$=4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$Determinante\ de\ A =$

$$3 \times (-1) - (-1 \times 3)$$

$$=0$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ 9x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Determinante\ de\ A =$

$$3 \times (-1) - (-1 \times 3)$$

$$=0$$

Determinante não nulo é condição para existência de solução única do sistema!

Solução de Sistemas lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Com sistemas grandes, a solução do sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ por substituição é inviável.

Temos que imaginar uma forma “automatizável”. E há, na verdade, algumas:

Os métodos básicos que veremos são de dois grandes grupos:

Métodos Diretos

Métodos Iterativos

Métodos Diretos: Eliminação de Gauss

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

O método envolve sequência de operações para identificar o valor de uma das variáveis.

Ao obtê-lo, é aplicado em outra das equações, progressivamente resolvendo o sistema.

Para isso, é necessário transformar a matriz quadrada original em matriz triangular (superior ou inferior):

Para $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{pmatrix}$$

Uma sequência de substituições reversas retornaria os valores de x_1, x_2 e x_3.

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}} \qquad x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}} \qquad x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

Mas como obter a versão triangular mantendo a solução $\vec{x}$?

Métodos Diretos: Eliminação de Gauss

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

As operações das linhas l_i abaixo da primeira ($i > 1$) são feitas observando

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}; \qquad l'_i = l_i - m_{i1} l_1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

Operações semelhantes sobre as linhas l_i abaixo da segunda ($i > 2$) são executadas

$$m'_{i2} = \frac{a'_{i2}}{a'_{22}}; \qquad l'_i = l_i - m'_{i2} l_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{pmatrix}$$

E assim por diante, nas linhas subsequentes (para os casos em que $n > 3$).

Métodos Diretos: Eliminação de Gauss

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\0,1\\0,3\end{matrix}} & \begin{matrix}-0,1\\7\\-0,2\end{matrix} & \begin{matrix}-0,2\\-0,3\\10\end{matrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{0,1}{3} = 0,0333..$$

$$m_{31} = \frac{0,3}{3} = 0,1$$

$$l'_2 = l_2 - m_{21} l_1$$
$$l'_3 = l_3 - m_{31} l_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333\ldots & -0,29333\ldots \\ 0 & -0,19 & 10,020 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,6150 \end{pmatrix}$$

$$m'_{32} = \frac{-0,19}{7,00333} = -0,0271299$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333\ldots & -0,29333\ldots \\ 0 & 0 & 10,012 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,0843 \end{pmatrix}$$

$$l''_3 = l'_3 - m'_{32} l'_2$$

$$x_3 = \frac{70,0843}{10,012} = 7,0$$

$$x_2 = \frac{-19,5617 + 0,29333 \times 7,0}{7,00333} = -2,5$$

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1 \times (-2,5) + 0,2 \times 7,0}{3} = 3,0$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2,5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Métodos Diretos: Eliminação de Gauss

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3.
\end{aligned}
$$

Testando:

$$
\begin{aligned}
3(3) - 0{,}1(-2{,}5) - 0{,}2(7) &= 7{,}85\\
0{,}1(3) + 7(-2{,}5) - 0{,}3(7) &= -19{,}3\\
0{,}3(3) - 0{,}2(-2{,}5) + 10(7) &= 71{,}4
\end{aligned}
$$

Métodos Diretos: Eliminação de Gauss

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Possíveis problemas

Divisão por Zero

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$m_{21} = \frac{4}{0}\ !$$

Erros de Arredondamento/truncamento

Sistemas Mal Condicionados

Métodos Diretos: Eliminação de Gauss

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Recomendações

Uso de Mais Algarismos Significativos

Pivoteamento

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Suponha que haja um conjunto de matrizes triangulares inferior e superior

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \qquad [U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

tais que

$$L\,U = A$$

$$L\,U\vec{x} = A\vec{x} = \vec{b} \qquad \begin{cases} L\,\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

Substituição direta

Substituição reversa

Dessa forma, para um vetor $\vec{b}$ diferente, e mesma A, posso reaproveitar o conjunto $L\,U$

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Como fatorar?

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

3º) $$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \leq j, \\ \ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Métodos Diretos: Fatoração LU

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

3º)
$$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \le j, \\ \mathbf{\ell_{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0333\ldots & 1 & 0 \\ 0{,}1 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

3º)
$$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \le j, \\ \ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0{,}1}{3} = 0{,}0333\ldots$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1$$

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0333\ldots & 1 & 0 \\ 0{,}1 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

3º)
$$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \le j, \\ \ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12}$$
$$= 7 - 0{,}033 \cdot (-0{,}1)$$
$$= 7{,}00333\ldots$$

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0333\ldots & 1 & 0 \\ 0{,}1 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333\ldots & -0{,}29333 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

3º) $$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}u_{kj}, & i \leq j, \\ \ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$
$$= -0{,}3 - 0{,}033 \cdot (-0{,}2)$$
$$= -0{,}29333\ldots$$

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0333\ldots & 1 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}0271299 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333\ldots & -0{,}29333 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

3º)
$$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \leq j, \\ \ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$$l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31}u_{12})}{u_{22}}$$

$$= \frac{-0{,}2 - 0{,}1 \cdot (-0{,}1)}{7{,}00333\ldots}$$

$$= -0{,}0271299$$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$

Métodos Diretos: Fatoração LU

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{pmatrix}$$

1º) $u_{1j} = a_{1j}$

2º) $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,0333\ldots & 1 & 0 \\ 0,1 & -0,0271299 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333\ldots & -0,29333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{pmatrix}$

3º) $$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \le j, \\ \ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$u_{33} =$
$a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$

$= 10 - 0,1 \cdot (-0,2) - (-0,2) \cdot (-0,29333)$

$=10,0120$

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{pmatrix}$$

$$L\,\vec{y} = \vec{b} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,0333\ldots & 1 & 0 \\ 0,1 & -0,0271299 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,0843 \end{pmatrix}$$

$$U\vec{x}=\vec{y} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333\ldots & -0,29333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,0843 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2,5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Obs:Mesmo sistema final do método de Eliminação de Gauss!

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Importante comparar :
$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

com (da Eliminação de Gauss)..

$$m_{21} = \boxed{0{,}0333\ldots}$$

$$m_{31} = \boxed{0{,}1}$$

$$m'_{32} = \boxed{-0{,}0271299}$$

$$L\,\vec{y} = \vec{b} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0{,}0333\ldots} & 1 & 0 \\ \boxed{0{,}1} & \boxed{-0{,}0271299} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}5617 \\ 70{,}0843 \end{pmatrix}$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333\ldots & -0{,}29333 \\ 0 & 0 & 10{,}0120 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}5617 \\ 70{,}0843 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Os dois métodos são, afinal, equivalentes!

Métodos Diretos: Fatoração LU

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

A vantagem do método $L\,U$ repousa na possibilidade de repetição do processo para situações em que eu tenho a mesma matriz A mas mudo o vetor de entradas $\vec{b}$.

Substituição direta

$$L\,U\vec{x} = A\vec{x} = \vec{b} \quad \begin{cases} L\,\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

Substituição reversa

Lembrando que L, U apenas dependem de A, apenas fatoro uma vez.

Métodos Iterativos: Método de Jacobi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Sendo os sistemas de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}\,x_3 \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos fazer

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}\,x_3 \ldots - a_{1n}\,x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}\,x_3 \ldots - a_{2n}\,x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n3}\,x_3 \ldots - a_{n\,n-1}\,x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Métodos Iterativos: Método de Jacobi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

No problema já trabalhado anteriormente

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7.85 - (-0{,}1)x_2 - (-0{,}2)x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{-19{,}3 - 0{,}1x_1 - (-0{,}3)x_3}{7} \\ x_3 = \dfrac{71{,}4 - 0{,}3x_1 - (-0{,}2)x_2}{10} \end{cases}$$

Caso não saibamos por onde começar, podemos usar $x^{(0)} = (0{,}0{,}0)$. Nesse caso,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.6166\ldots \\ -2.7571\ldots \\ 7.1400\ldots \end{pmatrix}$$

Variação Absoluta $= \{2.61666.., -2.757.., 7.1400..\}$

Variação relativa $= \{0.36648.., -0.386154.., 1.\}$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.0008\ldots \\ -2.4885\ldots \\ 7.0064\ldots \end{pmatrix}$$

Variação Absoluta $= \{0.3841\ldots, 0.2686\ldots, -0.1336\ldots\}$

Variação relativa $= \{0.05482\ldots, 0.0383\ldots, -0.01907\ldots\}$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.0008\ldots \\ -2.4997\ldots \\ 7.0002\ldots \end{pmatrix}$$

Variação Absoluta $= \{0.00004\ldots, -0.0112\ldots, -0.006\ldots\}$

Variação relativa $= \{0.000006\ldots, -0.0016\ldots, -0.000878\ldots\}$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 3.000\ldots \\ -2.5000\ldots \\ 6.9999\ldots \end{pmatrix}$$

Variação Absoluta e relativa abaixo de 10^{-4}...

Métodos Iterativos: Método de Jacobi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

E se fizermos um pouco diferente?...

Ao invés de substituir o vetor tentativa apenas ao final de cada iteração, eu mudar x_i na iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}\, x_3^{(0)}}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}\, x_3^{(0)}}{a_{22}} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{23}\, x_2^{(1)}}{a_{33}} \end{cases}$$

Será que acelera os cálculos?

Métodos Iterativos: Método de Gauss- Seidel

No problema já trabalhado anteriormente

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7.85 - (-0,1)x_2 - (-0,2)x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{-19,3 - 0,1x_1 - (-0,3)x_3}{7} \\ x_3 = \dfrac{71,4 - 0,3x_1 - (-0,2)x_2}{10} \end{cases}$$

Ainda usando $x^{(0)} = (0,0,0)$. Nesse caso,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.6166\ldots \\ -2.79452\ldots \\ 7.00561\ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{Variação Absoluta} = \{2.61666.., -2.794.., 7.005..\}$$

$$\text{Variação relativa} = \{0.37351.., -0.398898.., 1.\}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.99056\ldots \\ -2.49962\ldots \\ 7.00029\ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{Variação Absoluta} = \{0.3739\ldots, 0.2949\ldots, -0.0053\ldots\}$$

$$\text{Variação relativa} = \{0.0534106\ldots, 0.0421\ldots, 0.00007\ldots\}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.00003\ldots \\ -2.49999\ldots \\ 7.0000000\ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{Variação Absoluta} = \{0.00947\ldots, -0.00036112\ldots, -0.0002\ldots\}$$

$$\text{Variação relativa} = \{0.00135363, -0.0000519011, -0.0000416468\}$$

Métodos Iterativos (Jacobi e G-Seidel)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Método de Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)} \ldots - a_{1n}\,x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}\,x_3^{(k)} \ldots - a_{2n}\,x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} \ldots - a_{n,n-1}\,x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)} \ldots - a_{1n}\,x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}\,x_3^{(k)} \ldots - a_{2n}\,x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} \ldots - a_{n,n-1}\,x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Métodos Iterativos (Jacobi e G-Seidel)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Atenção. Nem sempre converge!

Critério simples (há outros mais complexos/melhores) de convergência: **critério das linhas/colunas.**

Se os somatórios dos módulos dos elementos não diagonais for menor que o valor do elemento diagonal, para todas as linhas, o sistema convergirá.

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad (i \neq j)$$

No exemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{pmatrix}$$

Linhas

$$\begin{aligned} 3 &\geq 0{,}1 + 0{,}2 \\ 7 &\geq 0{,}1 + 0{,}3 \\ 10 &\geq 0{,}3 + 0{,}2 \end{aligned}$$

Colunas

$$\begin{aligned} 3 &\geq 0{,}1 + 0{,}3 \\ 7 &\geq 0{,}1 + 0{,}2 \\ 10 &\geq 0{,}2 + 0{,}3 \end{aligned}$$

Até a próxima!