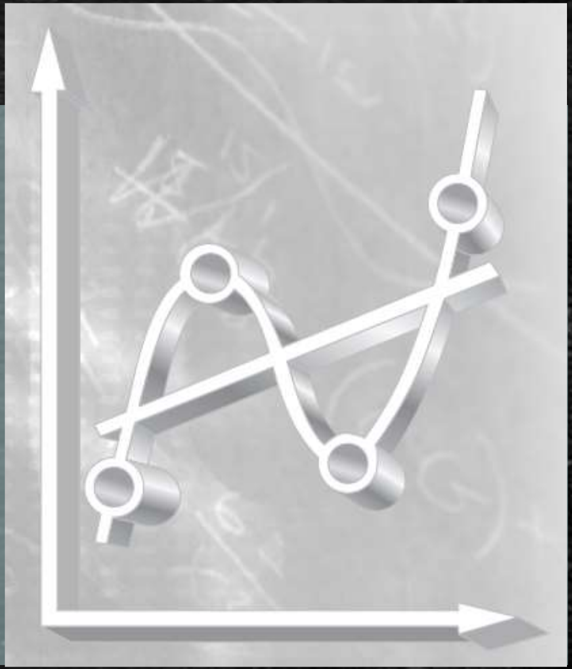
Ajustes Polinomiais de conjuntos de dados numéricos

Método dos Mínimos quadrados
Interpolação Polinomial



Análise Numérica & Cálculo Numérico
Gesil S. Amarante II

Departamento de Ciências Exatas (DCEx) - UESC

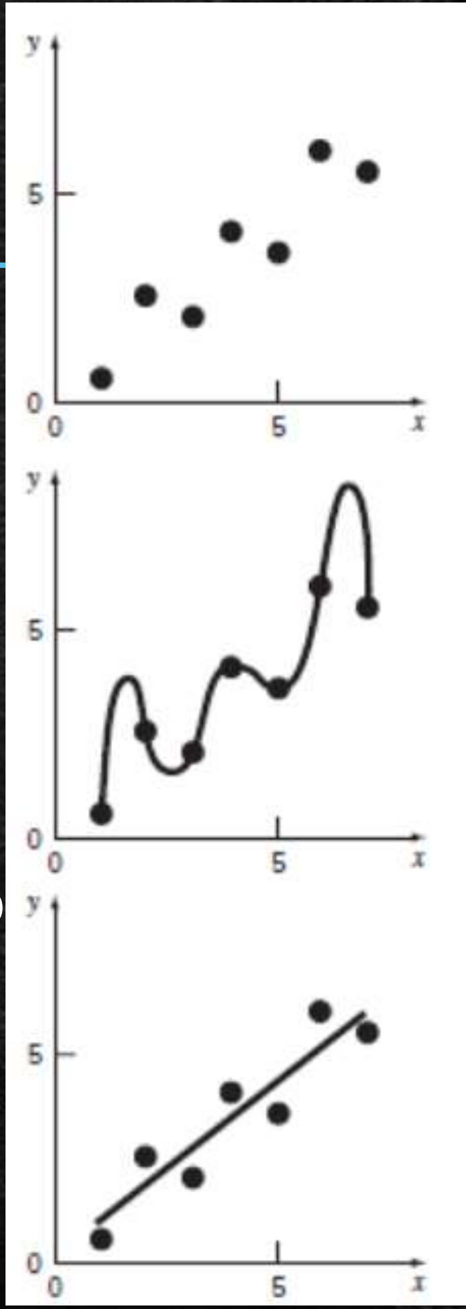
Introdução

Uma vez de posse de um conjunto de dados numéricos, expostos em pares ordenados ($x, f(x)$), por exemplo, dois tratamentos que podemos aplicar para encontrar uma expressão que reproduza o comportamento destes números são:

a)encontrar uma função que passe por todos os pontos

ou

b) encontrar uma dada forma matemática (uma reta, por exemplo que represente bem os dados mas aceitando a não exatidão desta representação.



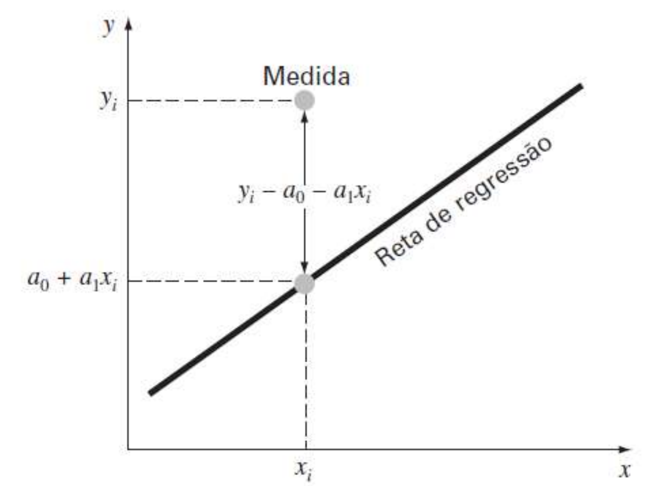
Essas formas de tratamentos são chamadas, respectivamente de

Interpolação e Aproximação

Aproximação - Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

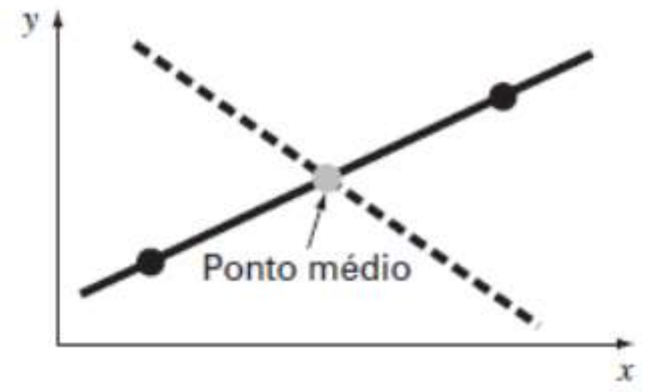
- Se estamos tentando aproximar o conjunto de números y_i por uma função linear $f(x)=a_0+a_1x_i$ e admitimos erros nessa aproximação, estes erros e_i, somados, para n pontos devem ser minimizados.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$



Podemos fazê-lo minimizando diretamente a sua soma.

Tal opção apresenta problemas de não prover uma única curva para um dado conjunto de dados.



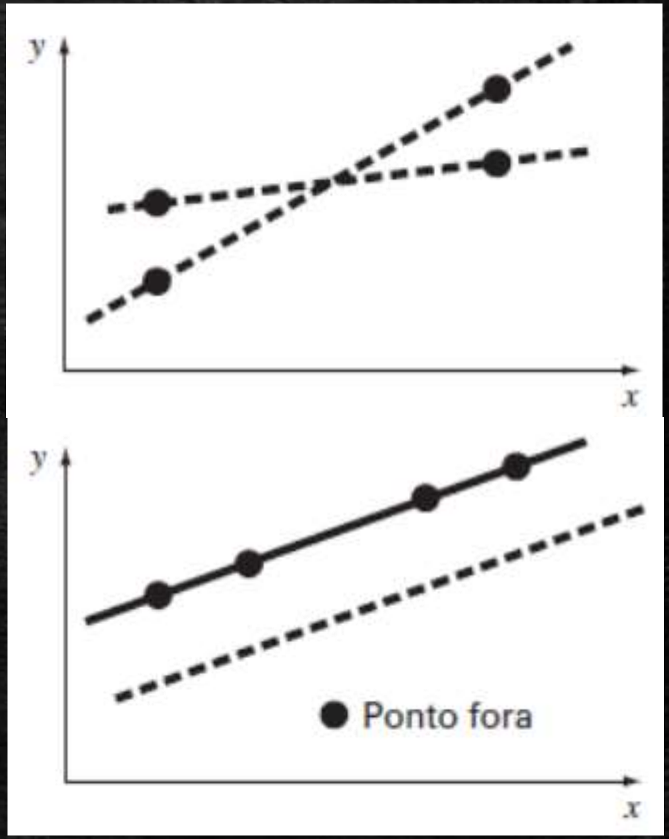
MMQ – Regressão Linear

- Outra alternativa é minimizar o módulo dos erros (vamos chamar de resíduos)

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - a_0 - a_1 x_i|$$

Mesmo isso não é adequado, como mostrado na figura ao lado porque minimizar o módulo do resíduo não gera única solução;

Outra opção é minimizar o erro máximo por qualquer ponto Individual, mas o resíduo criado por um único ponto pode gerar efeito desproporcional.



MMQ – Regressão Linear

- Uma técnica que apresenta várias vantagens sobre as mostrada anteriormente, inclusive por apresentar uma única curva possível para um dado conjunto de pontos é a minimização da soma dos quadrados dos resíduos.

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_{i,\text{medido}} - y_{i,\text{modelo}})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

MMQ – Regressão Linear

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

- Para determinar os parâmetros a_0 e a_1, temos que a variação do resíduo S_r com relação a cada um desses parâmetros,

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i]$$

deve ser mínima, daí

$$0 = \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i$$

$$0 = \sum y_i x_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2$$

MMQ – Regressão Linear

- Assim, temos

$$na_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 = \sum y_i$$

e

$$\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 = \sum x_i y_i$$

- A solução deste sistema nos fornece as chaves para encontrar a regressão por mínimos quadrados:

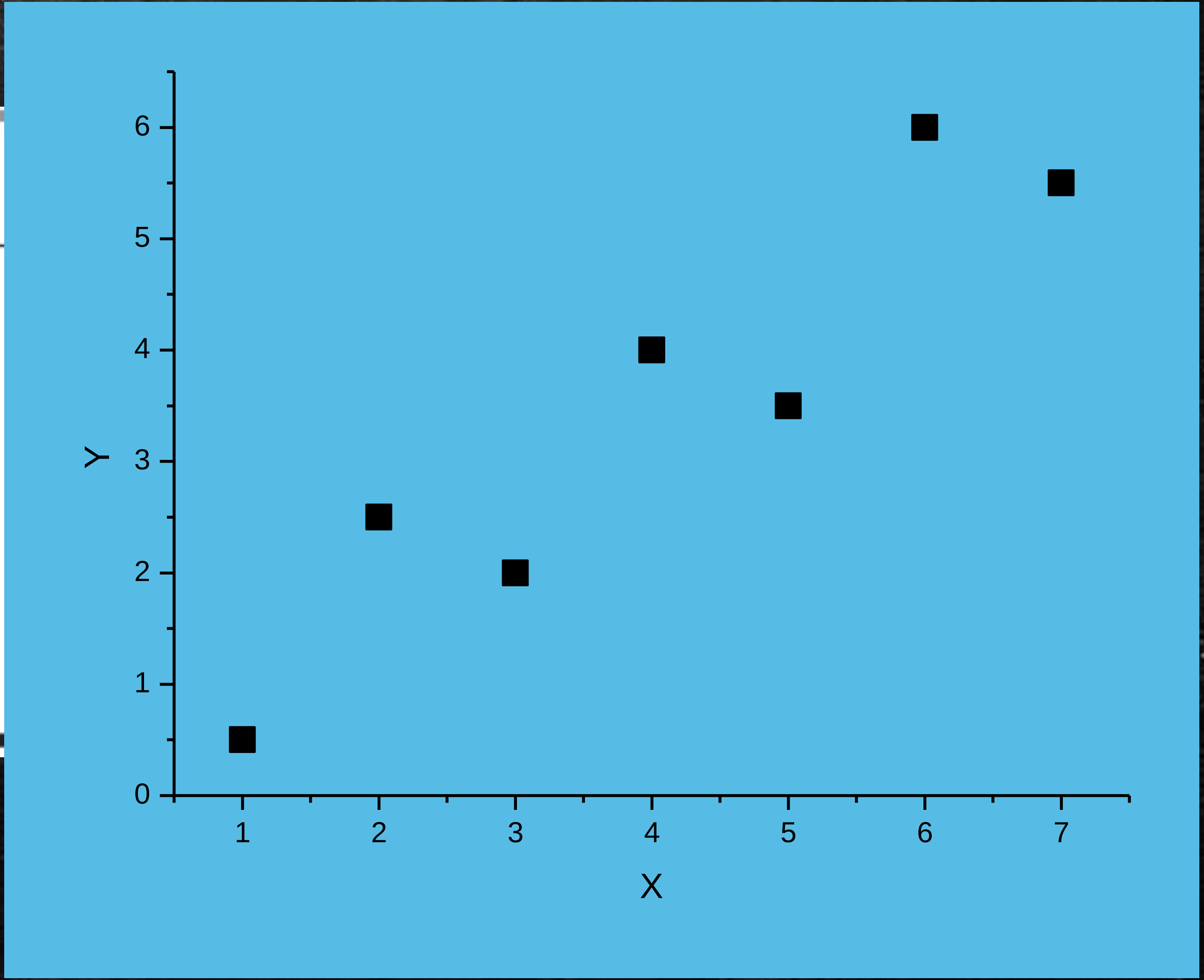
$$a_1 = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

MMQ – Regressão Linear

- Exemplo:

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$
1	0,5	8,5765
2	2,5	0,8622
3	2,0	2,0408
4	4,0	0,3265
5	3,5	0,0051
6	6,0	6,6122
7	5,5	4,2908
Σ	24,0	22,7143



MMQ – Regressão Linear

- Exemplo:

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$
1	0,5	8,5765
2	2,5	0,8622
3	2,0	2,0408
4	4,0	0,3265
5	3,5	0,0051
6	6,0	6,6122
7	5,5	4,2908
Σ	24,0	22,7143

$$a_1 = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}$$

$$n = 7 \qquad \sum x_i y_i = 119{,}5 \qquad \sum x_i^2 = 140$$

$$\sum x_i = 28 \qquad \bar{x} = \frac{28}{7} = 4$$

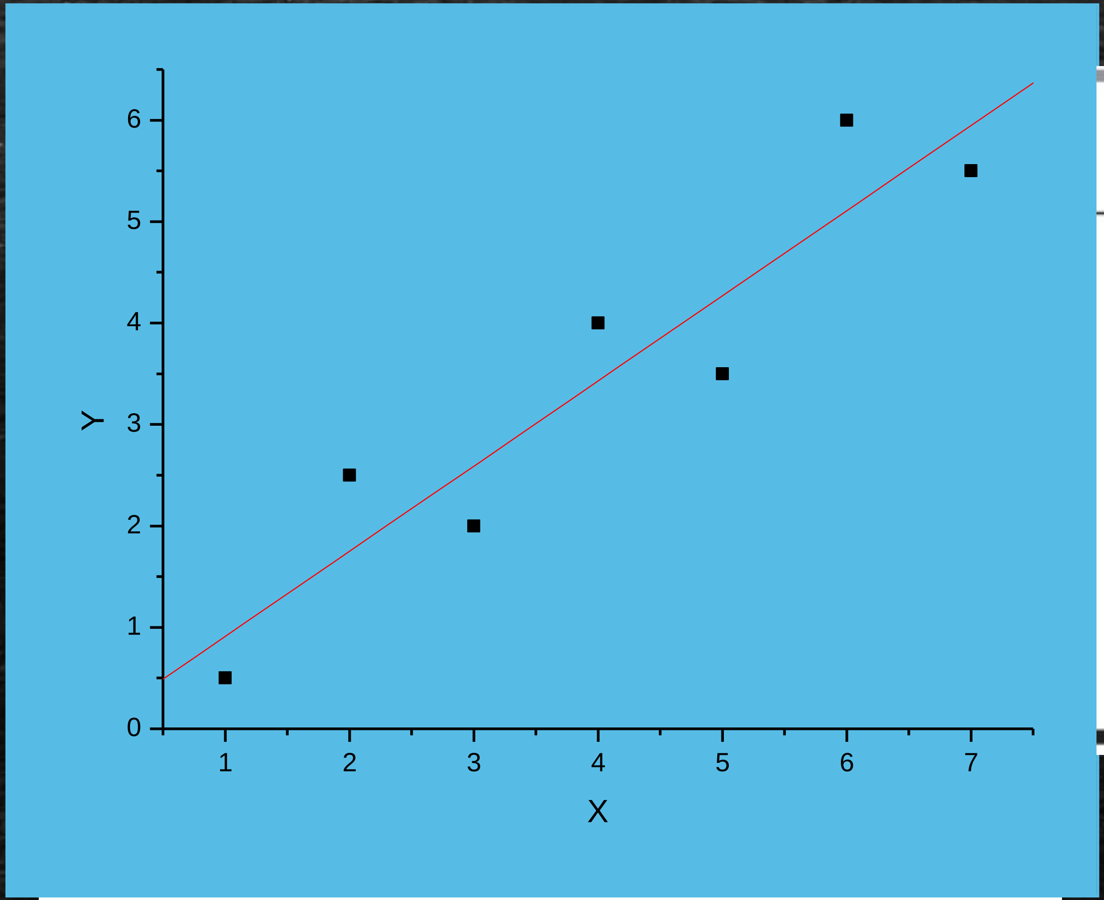
$$\sum y_i = 24 \qquad \bar{y} = \frac{24}{7} = 3{,}428571$$

$$a_1 = \frac{7(119{,}5) - 28(24)}{7(140) - (28)^2} = 0{,}8392857$$

$$a_0 = 3{,}428571 - 0{,}8392857(4) = 0{,}07142857$$

$$y = 0{,}07142857 + 0{,}8392857x$$

MMQ – Regressão Linear



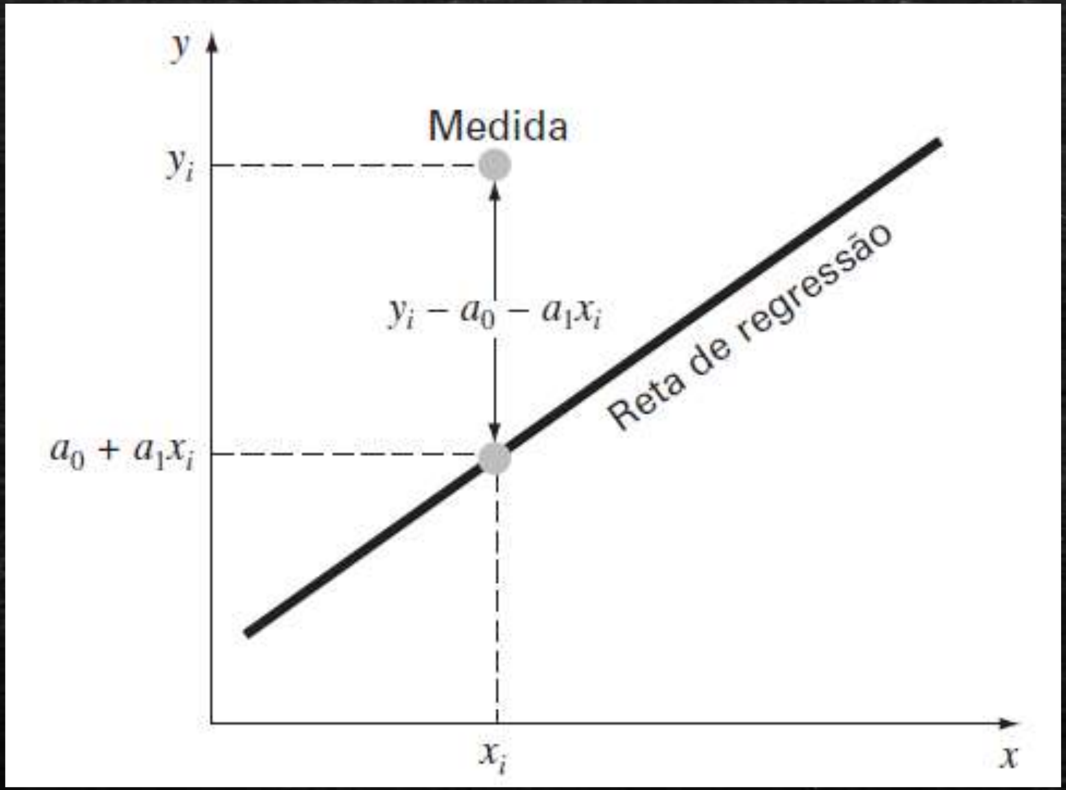
$(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$
0,1687
0,5625
0,3473
0,3265
0,5896
0,7972
0,1993
2,9911

$$y = 0{,}07142857 + 0{,}8392857x$$

MMQ – Regressão Linear

Estatisticamente, é útil analisar quantitativamente os resíduos.

Lembrando que o quadrado dos resíduos é o quadrado da distância vertical entre os dados individuais e a “melhor reta”.



MMQ – Regressão Linear

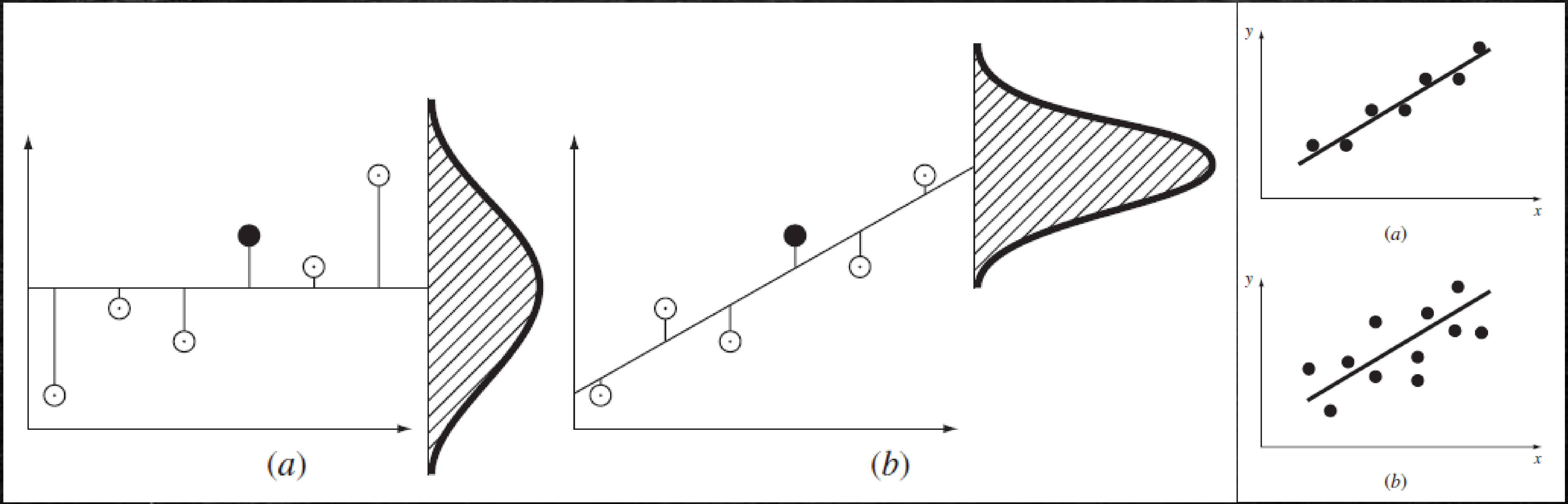
- Um "desvio padrão" pode ser associado a esta reta na forma da expressão

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$$

Este é o *erro padrão da estimativa*, onde n-2 é usado porque as quantidades a_0 e a_1 são derivadas dos n pontos, daí perdemos dois graus de liberdade. Só podemos falar de dispersão em redor de uma reta a partir de 3 pontos...

MMQ – Regressão Linear

Este desvio com relação à melhor reta é melhor medida quantitativa da aproximação que, por exemplo, uma medida da dispersão dos pontos, com relação ao y médio, S_t:



MMQ – Regressão Linear

A efetiva melhoria de S_r *frente a* S_t é dada pelo *coeficiente de determinação*

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

ou pelo *coeficiente de correlação,*

$$\sqrt{r^2}$$

que também pode ser calculado via

$$r = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{\sqrt{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}\sqrt{n\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2}}$$

MMQ – Regressão Linear

- Para o caso mostrado na tabela anterior, teríamos

$$s_y = \sqrt{\frac{22.7143}{7-1}} = 1.9457$$

e

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{2.9911}{7-2}} = 0.7735$$

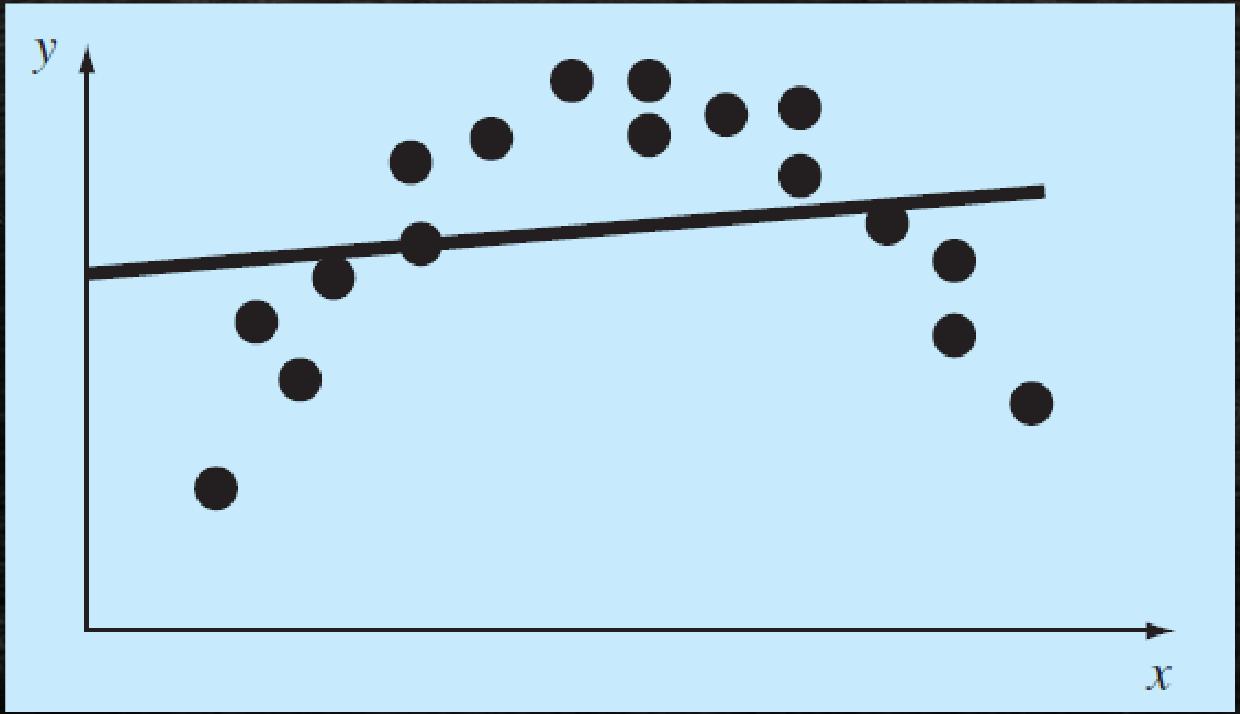
$$r^2 = \frac{22.7143 - 2.9911}{22.7143} = 0.868$$

ou

$$r = \sqrt{0.868} = 0.932$$

MMQ – Regressão Linear

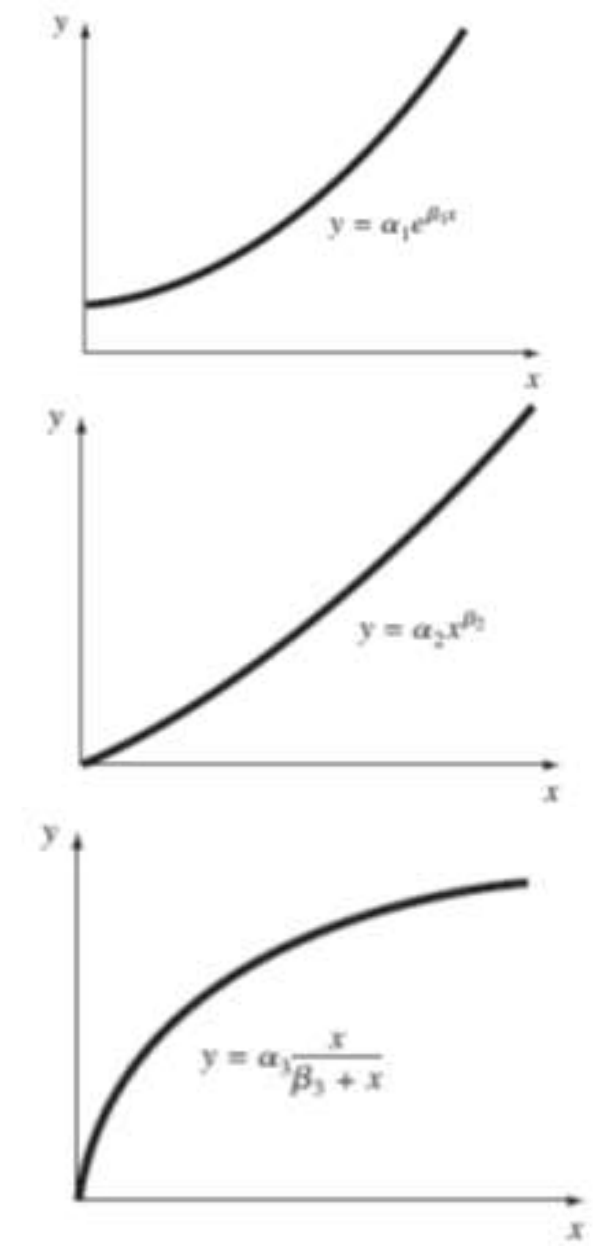
Nem sempre os dados podem ser representados por retas. Aplicar a regressão linear gerará os coeficientes, mas estes não farão sentido algum.



MMQ – Regressão Linear

Pode-se transformar um conjunto de dados não linear, por exemplo

- Exponencial: $$y = \alpha_1 e^{\beta_1 x}$$
- Função de potência: $$y = \alpha_2 x^{\beta_2}$$
- De saturação: $$y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x}$$



MMQ – Regressão Linear

- Por exemplo, usando a expressão exponencial,

$$y = \alpha_1 e^{\beta_1 x}$$

através de logaritmos

$$\ln y = \ln \alpha_1 + \beta_1 x \ln e \longrightarrow \boxed{\ln y} = \ln \alpha_1 + \beta_1 \boxed{x}$$

No caso da função de potência, também

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2} \longrightarrow \boxed{\log y} = \beta_2 \boxed{\log x} + \log \alpha_2$$

E no crescimento por saturação, apenas invertendo

$$y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{y}} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \boxed{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\alpha_3}$$

Temos que encontrar os coeficientes da reta, os mesmos necessários para caracterizar a expressão inicial.

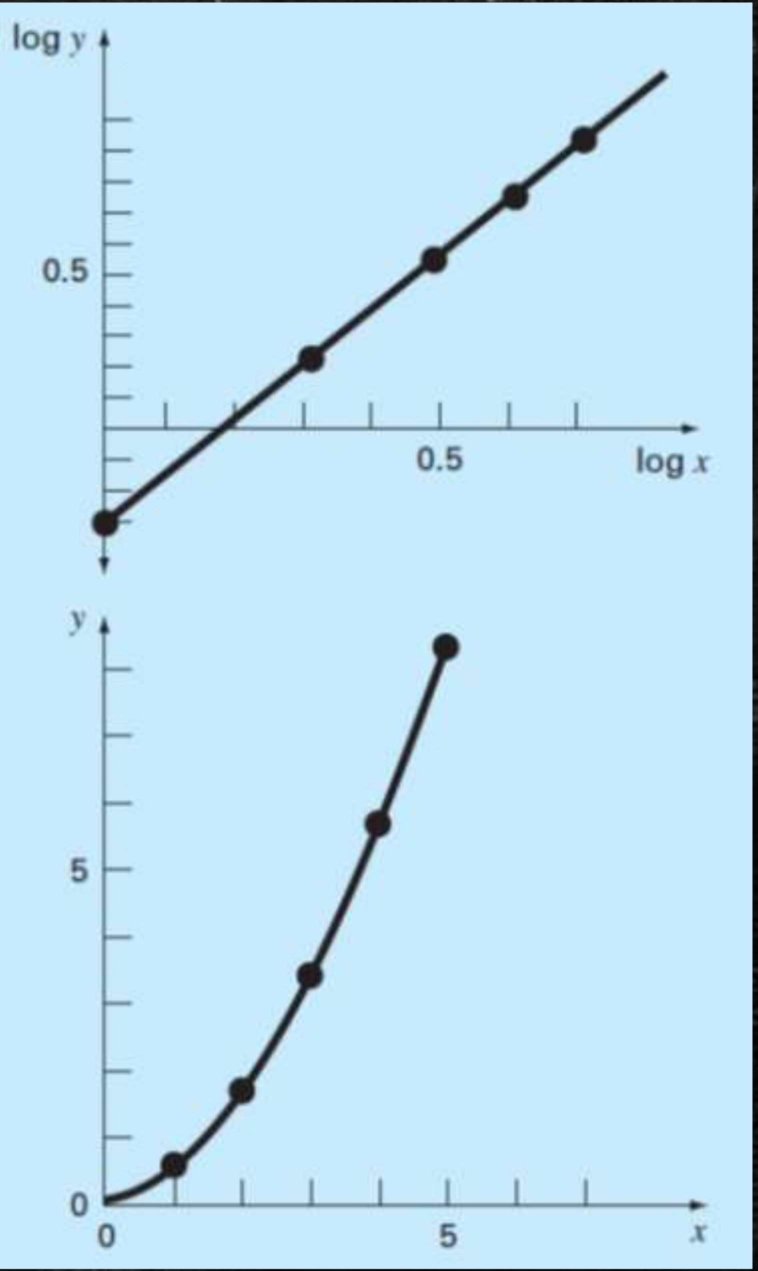
MMQ – Regressão Linear

Exemplo:

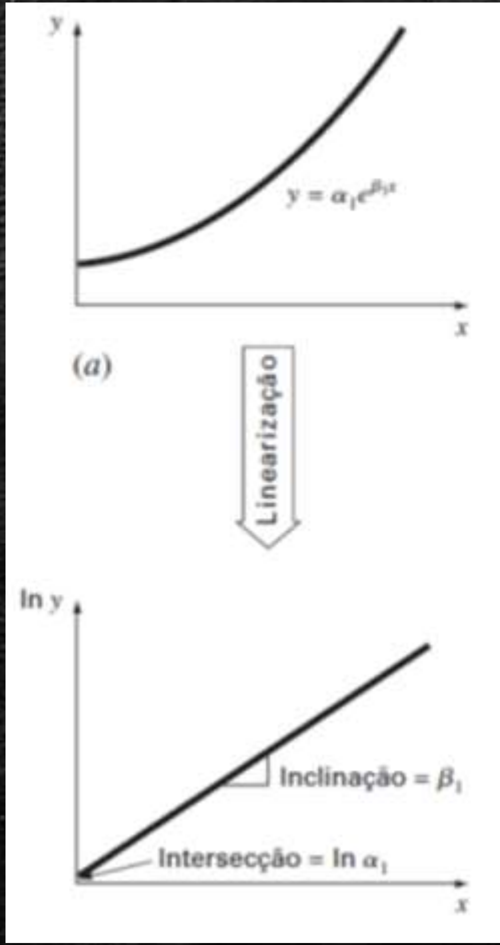
x	y	log x	log y
1	0.5	0	−0.301
2	1.7	0.301	0.226
3	3.4	0.477	0.534
4	5.7	0.602	0.753
5	8.4	0.699	0.922

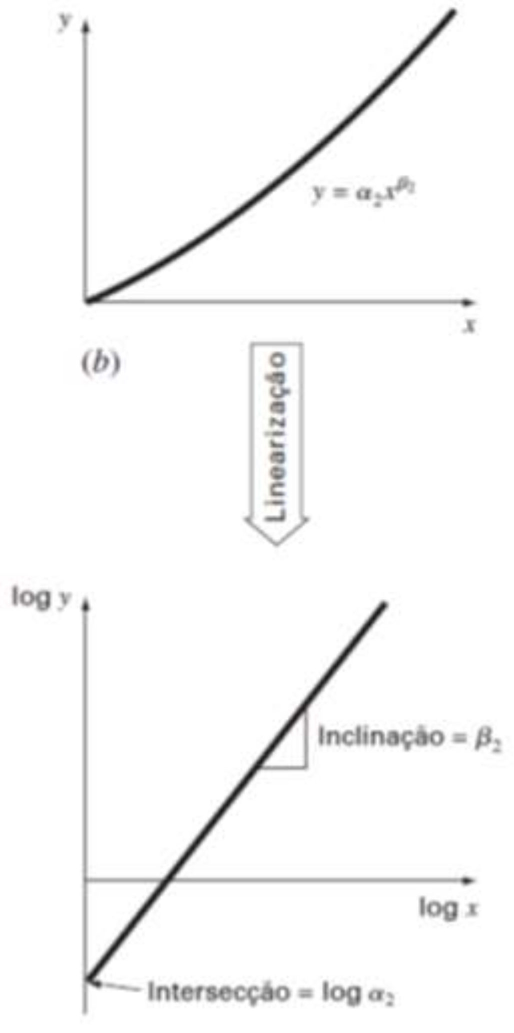
$$\log y = 1.75 \log x - 0.300$$

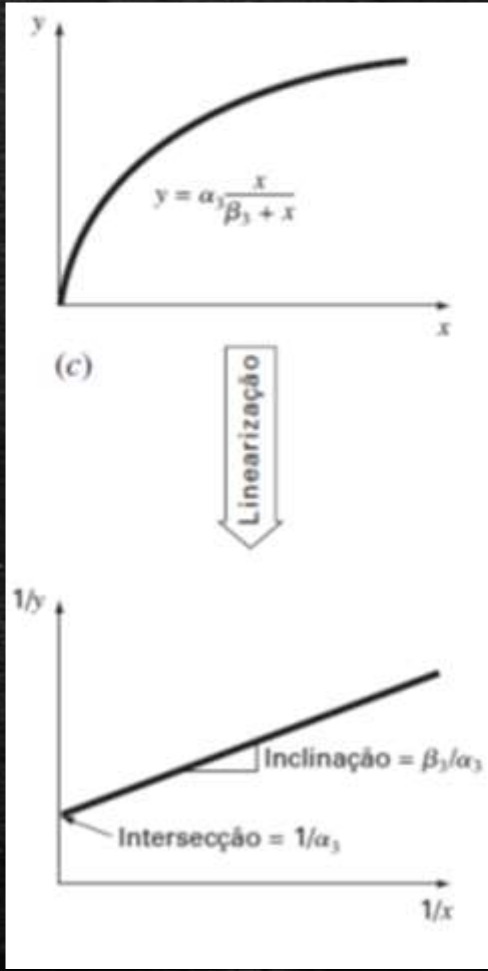
$$y = 0.5x^{1.75}$$



MMQ – Regressão Linear

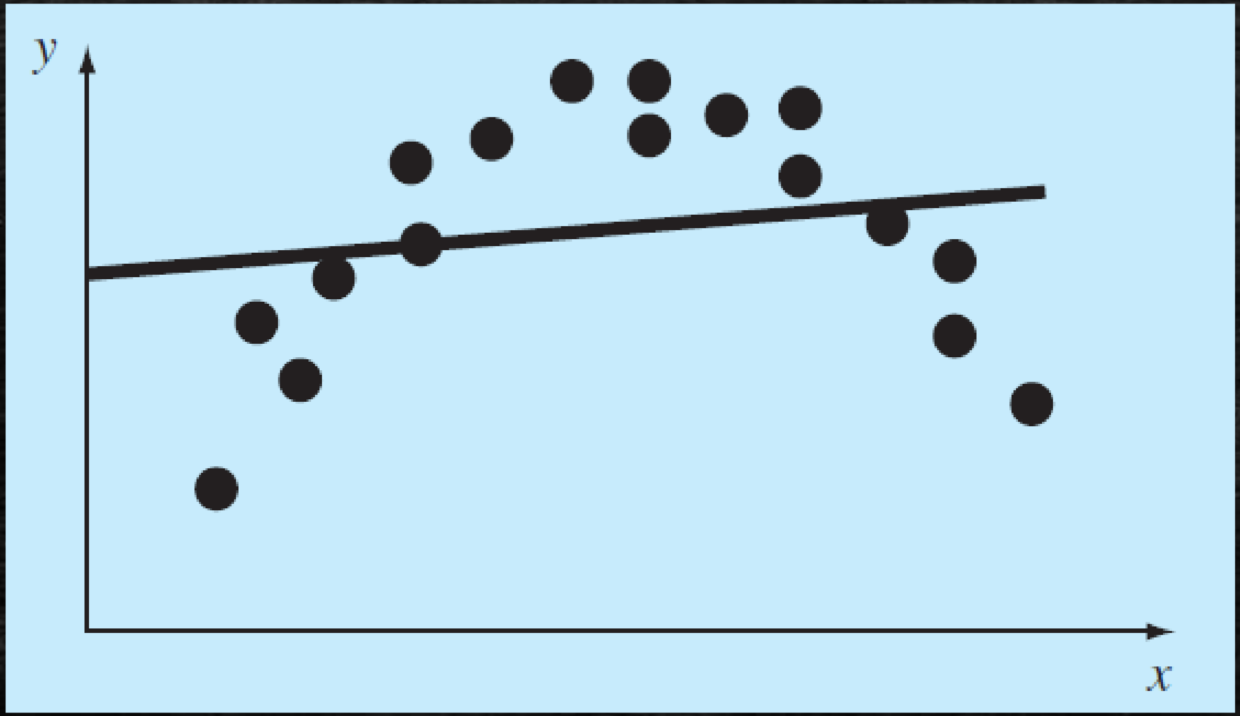






MMQ – Regressão Linear

E se precisarmos aproximar o conjunto de pontos para um polinômio de grau arbitrário, não por mudança de variável ?



MMQ-Aproximação Polinomial *Caso Discreto:*

Vamos aproximar um conjunto de pontos (x, y) por um polinômio de grau m, $P_m(x)$

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

que se aproximam dos pontos dados. Minimizando o quadrado dos resíduos

$$\sum_{k=0}^{n} (y_k - (a_0 + a_1 x_k + \ldots + a_m x_k^m))^2 .$$

Temos então que encontrar a menor diferença possível entre os vetores y e p

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} P_m(x_0) \\ P_m(x_1) \\ \vdots \\ P_m(x_n) \end{pmatrix}$$

MMQ-Aproximação Polinomial *Caso Discreto:*

p é, portanto, uma composição no espaço dos vetores de *x*

$$p = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \ldots + a_m \begin{pmatrix} x_0^m \\ x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix} .$$

A base espaço dos vetores de *x* é composta por

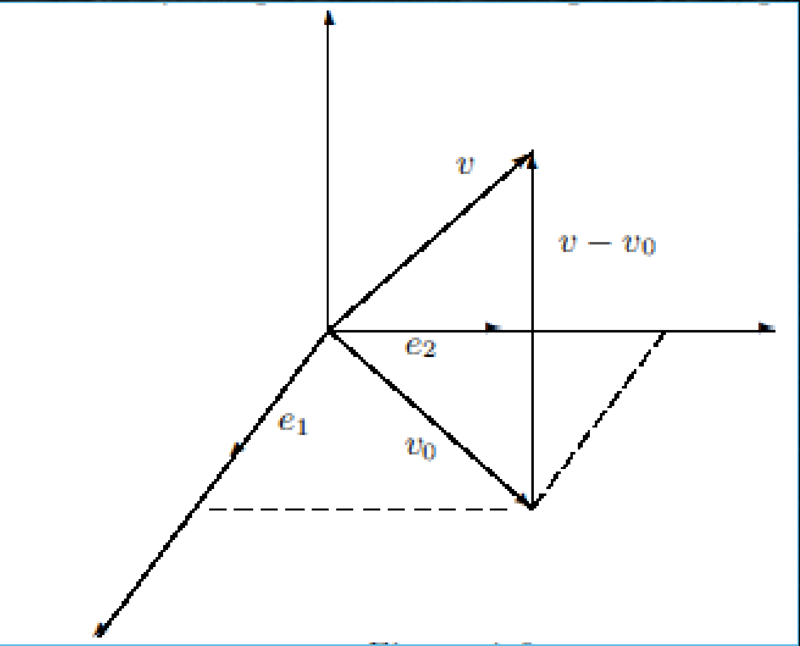
$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad u_i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \, ,$$

$$p = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m$$

MMQ-Aproximação Polinomial

Caso Discreto:

Dado um certo vetor v em um espaço vetorial E , a menor distância deste a um subespaço E' é dada pela projeção ortogonal v_0 de v em E'.



Plano E′ como subespaço do espaço E

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base de E'.
Como $v_0 \in E'$, v_0 pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base de E', isto é:

$$v_0 = a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots a_ne_n$$

Como a linha de projeção, $v - v_0$ é $\perp$ à base de v_0, o produto escalar entre este e os elementos da base é nulo

$$(v - v_0, e_j) = 0$$

Temos, portanto

$$\left(v - (a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots a_ne_n), e_j\right) = 0, \qquad j = 1,2,3 \ldots n$$

Reorganizando,

$$\boxed{((a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots a_ne_n), e_j) = \left(v, e_j\right), \qquad j = 1,2,3 \ldots n}$$

MMQ-Aproximação Polinomial

No caso de vetores expressos em como pontos (x, y) de uma distribuição discreta, a ser projetada na base do subespaço das potências de x, temos

$$((a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots a_n u_n), u_j) = \left(y, u_j\right), \qquad j = 1,2,3 \ldots n$$

Reorganizando esta equação para cada componente, podemos expressá-la na forma matricial

$$\begin{pmatrix} (u_0, u_0) & (u_0, u_1) & \ldots (u_0, u_n) \\ (u_1, u_0) & (u_1, u_1) & \ldots (u_1, u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_n, u_0) & (u_n, u_1) & \ldots (u_n, u_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, u_0) \\ (y, u_1) \\ \vdots \\ (y, u_n) \end{pmatrix}$$

MMQ-Aproximação Polinomial

Exemplo

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \; ; \; u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (u_0,u_0) & (u_1,u_0) & (u_2,u_0) \\ (u_0,u_1) & (u_1,u_1) & (u_2,u_1) \\ (u_0,u_2) & (u_1,u_2) & (u_2,u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y,u_0) \\ (y,u_1) \\ (y,u_2) \end{pmatrix} .$$

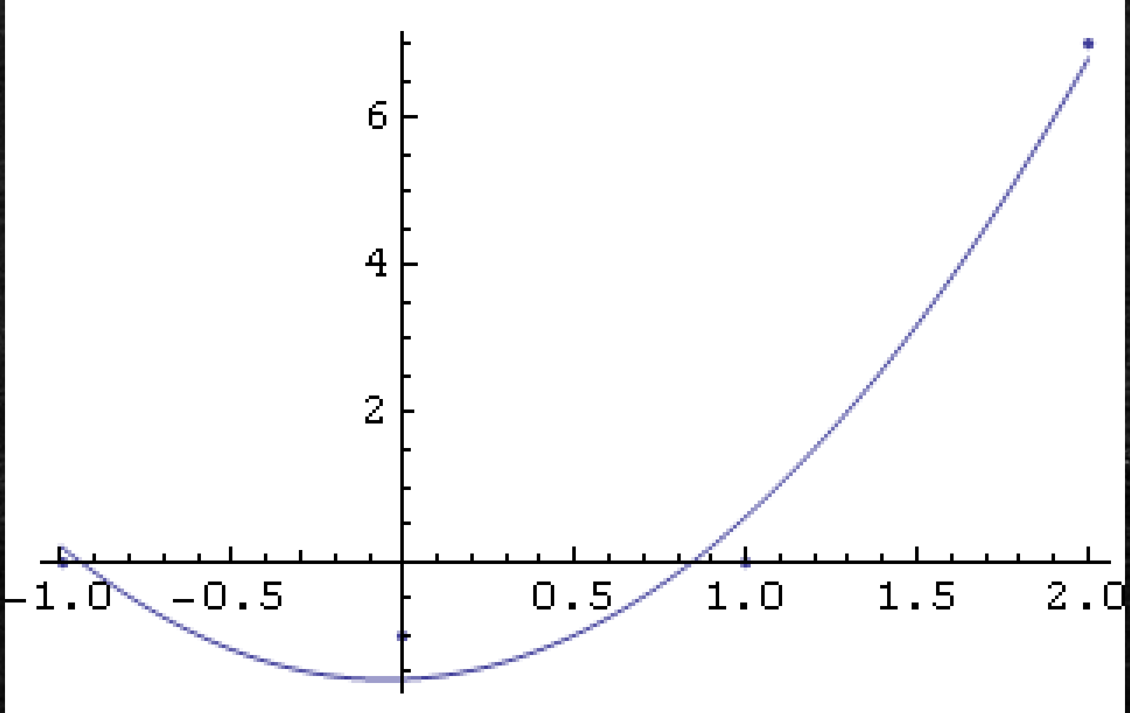
$$\begin{aligned}
(u_0,u_0) &= 1+1+1+1 = 4 , \\
(u_0,u_1) &= -1+0+1+2 = 2 = (u_1,u_0) , \\
(u_0,u_2) &= 1+0+1+4 = 6 = (u_2,u_0) , \\
(u_1,u_1) &= 1+0+1+4 = 6 , \\
(u_1,u_2) &= -1+0+1+8 = 8 = (u_2,u_1) , \\
(u_2,u_2) &= 1+0+1+16 = 18 , \\
(y,u_0) &= 0+-1+0+7 = 6 , \\
(y,u_1) &= 0+0+0+14 = 14 , \\
(y,u_2) &= 0+0+0+28 = 28 .
\end{aligned}$$

MMQ-Aproximação Polinomial

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{8}{5} \ ; \ a_1 = \frac{1}{5} \ ; \ a_2 = 2.$$

$$P_2(x) = -\frac{8}{5} + \frac{1}{5}\,x + 2\,x^2 \,.$$



MMQ-Aproximação Polinomial *Caso Contínuo:*

Vamos aproximar uma função qualquer $f(x)$ por um polinômio de grau m, $P_m(x)$

$$f(x) \simeq a_0 + a_1\, x + \ldots + a_m\, x^m = P_m(x)$$

Temos então que encontrar a menor diferença possível entre os vetores $f(x)$ e $P_m(x)$

$$dist\,(f, P_m) = \text{mínima.}$$

$$\begin{aligned} dist\,(f, P_m) &= ||f - P_m|| = [(f - P_m, f - P_m)]^{1/2} \\ &= \left[\int_a^b (f(x) - P_m(x))^2\, dx\right]^{1/2} = ||f - P_m||^2 . \end{aligned}$$

Da mesma forma eu no caso discreto, a distância de $f(x)$ a $P_m(x)$ será mínima quando $P_m(x)$ for a projeção ortogonal de $f(x)$ sobre o subespaço dos polinômios de x (do qual $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$ é uma base).

MMQ-Aproximação Polinomial

Caso Contínuo:

$$((a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots a_n u_n), u_j) = (y, u_j), \qquad j = 1,2,3 \ldots n$$

- As chamadas "equações normais" resultam então em

$$\begin{pmatrix} (u_0,u_0) & (u_0,u_1) \ldots & (u_0,u_n) \\ (u_1,u_0) & (u_1,u_1) \ldots & (u_1,u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_n,u_0) & (u_n,u_1) \ldots & (u_n,u_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v,u_0) \\ (v,u_1) \\ \ldots \\ (v,u_n) \end{pmatrix}$$

- Como queremos projetar $f(x)$ em um $P_m(x)$ na base canônica dos polinômios de x, $K_m(x)$, temos

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (x,1) & \ldots & (x^m,1) \\ (1,x) & (x,x) & \ldots & (x^m,x) \\ \ldots\ldots & & & \\ (1,x^m) & (x,x^m) & \ldots & (x^m,x^m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,1) \\ (f,x) \\ \vdots \\ (f,x^m) \end{pmatrix}$$

Onde o produto escalar entre funções é dado por $(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$.

MMQ-Aproximação Polinomial

- Exemplo: Aproximar, por uma parábola $f(x) = x^4 - 5\,x, \;\; x \in [-1,1]$

Devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (x,1) & (x^2,1) \\ (1,x) & (x,x) & (x^2,x) \\ (1,x^2) & (x,x^2) & (x^2,x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,1) \\ (f,x) \\ (f,x^2) \end{pmatrix}$$

- onde

$$(1,1) = \int_{-1}^{1} dx = x\Big]_{-1}^{1} = 2\,,$$

$$(1,x) = \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = 0 = (x,1)\,,$$

$$(1,x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = (x^2,1) = (x,x)$$

$$(x,x^2) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{1} = 0 = (x^2,x)$$

MMQ-Aproximação Polinomial

$$(f,1) \;=\; \int_{-1}^{1} (x^4 - 5\,x)\,dx \;=\; -\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5\,x^2}{2}\right)\Bigg]_{-1}^{1} \;=\; -\frac{2}{5}$$

$$(f,x) \;=\; \int_{-1}^{1} (x^5 - 5\,x^2)\,dx \;=\; -\left(\frac{x^6}{6} - \frac{5\,x^3}{3}\right)\Bigg]_{-1}^{1} \;=\; -\frac{10}{3}$$

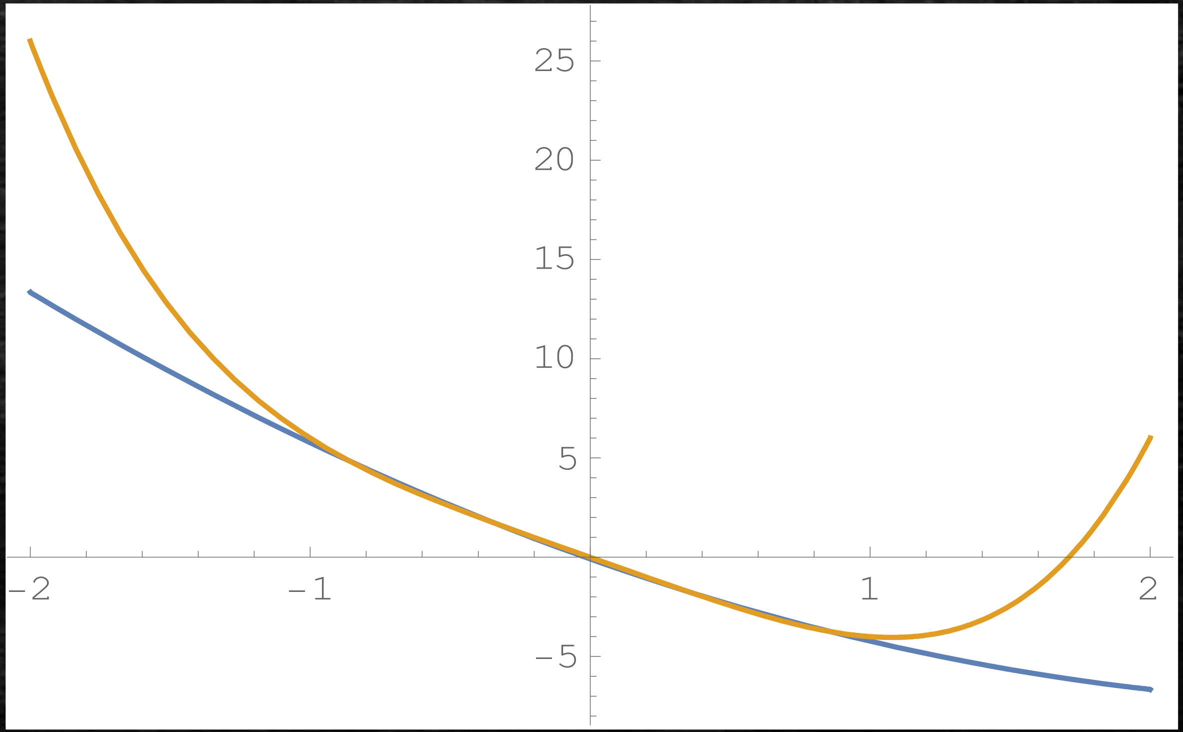
$$((f,x^2) \;=\; \int_{-1}^{1} (x^6 - 5\,x^3)\,dx \;=\; -\left(\frac{x^7}{7} - \frac{5\,x^4}{4}\right)\Bigg]_{-1}^{1} \;=\; \frac{2}{7}$$

MMQ-Aproximação Polinomial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{10}{3} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$a_0 = -(3/35)$; $a_1 = -5$; $a_2 = 6/7$;

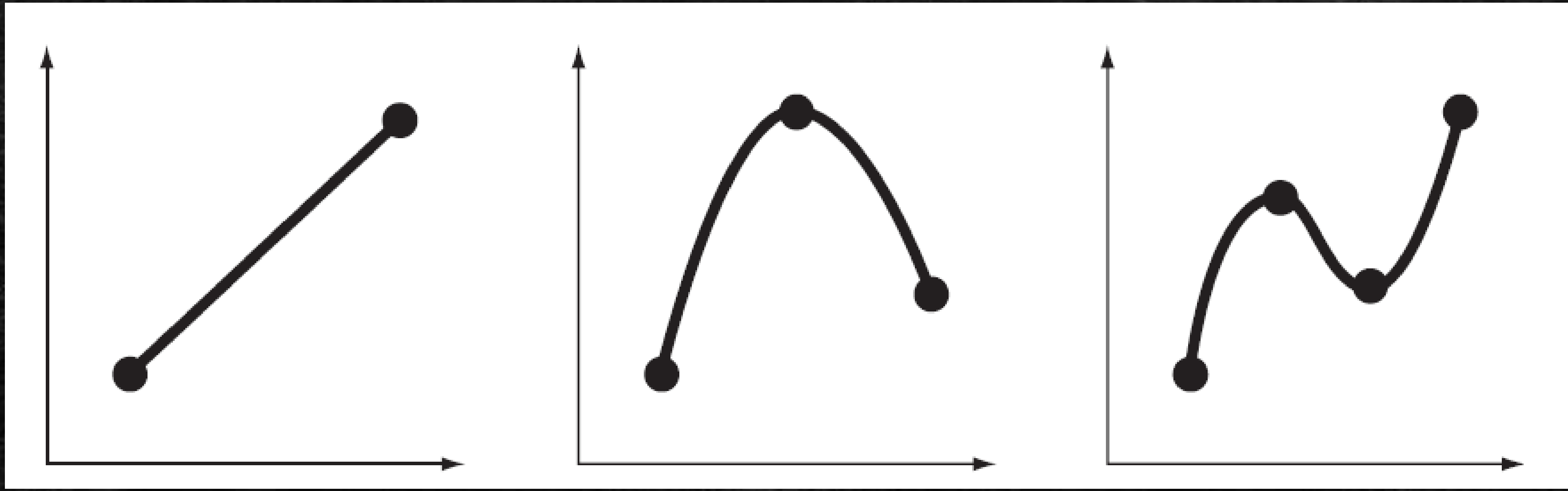
$$P_2(x) = -\frac{3}{35} - 5x + \frac{6}{7}x^2$$



Interpolação

- Queremos uma função que passe exatamente por todos os pontos dados.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$



Interpolação usando a Fórmula de Lagrange

Procuramos montar o polinômio interpolador $P_n(x)$ através de polinômios $\ell_k(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, \ell_k(x)$$

de forma que

$$\ell_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k \neq j \,, \\ 1, & \text{se} \quad k = j \,. \end{cases}$$

Isso pode ser atingido pelos seguintes polinômios $\ell_k(x)$:

$$\ell_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} \,.$$

Interpolação

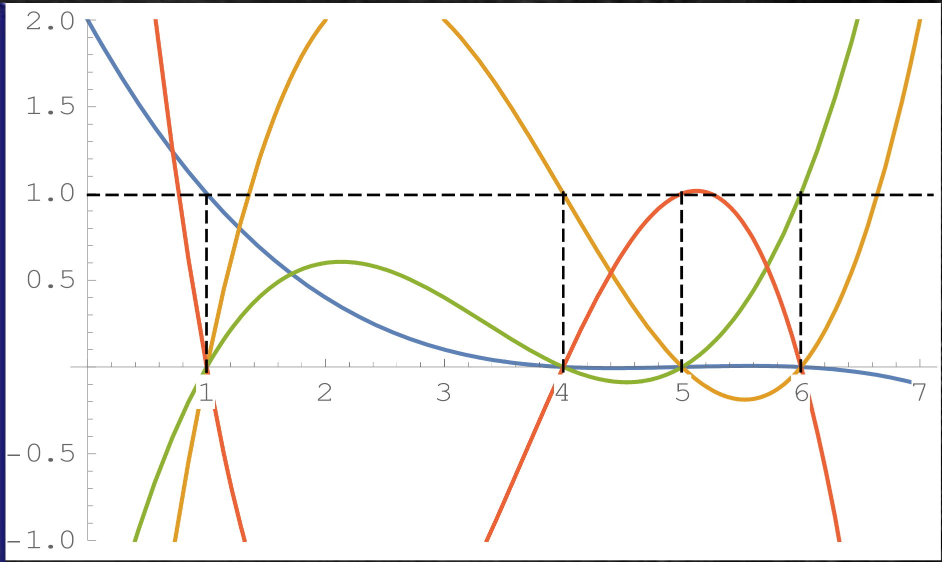
- Exemplo: Interpolar *ln*2 usando os dados de *ln* de $x_0=1$, $x_1=4$, $x_2=6$ e $x_3=5$.

$$l_0(x) = \frac{(x-4)(x-6)(x-5)}{(1-4)(1-5)(1-6)} = \frac{1}{-60}(x-4)(x-6)(x-5);$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-6)(x-5)}{(4-1)(4-5)(4-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-6)(x-5);$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(6-1)(6-4)(6-5)} = \frac{1}{10}(x-1)(x-4)(x-5);$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(5-1)(5-4)(5-6)} = \frac{1}{-4}(x-1)(x-4)(x-6).$$



$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, \ell_k(x)$$

Interpolação

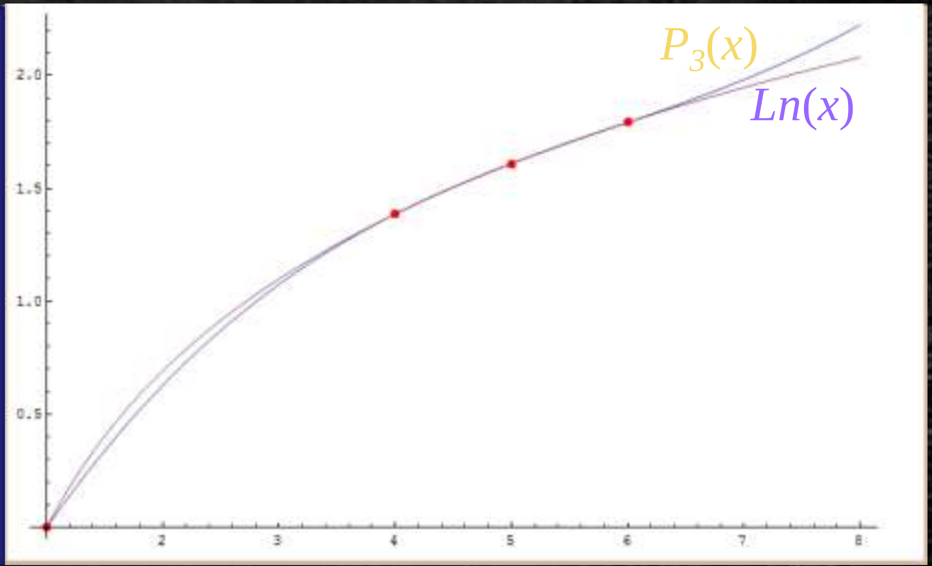
- Exemplo: Interpolar *ln*2 usando os dados de *ln* de $x_0=1$, $x_1=4$, $x_2=6$ e $x_3=5$.

$$l_0(x) = \frac{(x-4)(x-6)(x-5)}{(1-4)(1-5)(1-6)} = \frac{1}{-60}(x-4)(x-6)(x-5);$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-6)(x-5)}{(4-1)(4-5)(4-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-6)(x-5);$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(6-1)(6-4)(6-5)} = \frac{1}{10}(x-1)(x-4)(x-5);$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(5-1)(5-4)(5-6)} = \frac{1}{-4}(x-1)(x-4)(x-6).$$



$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, \ell_k(x)$$

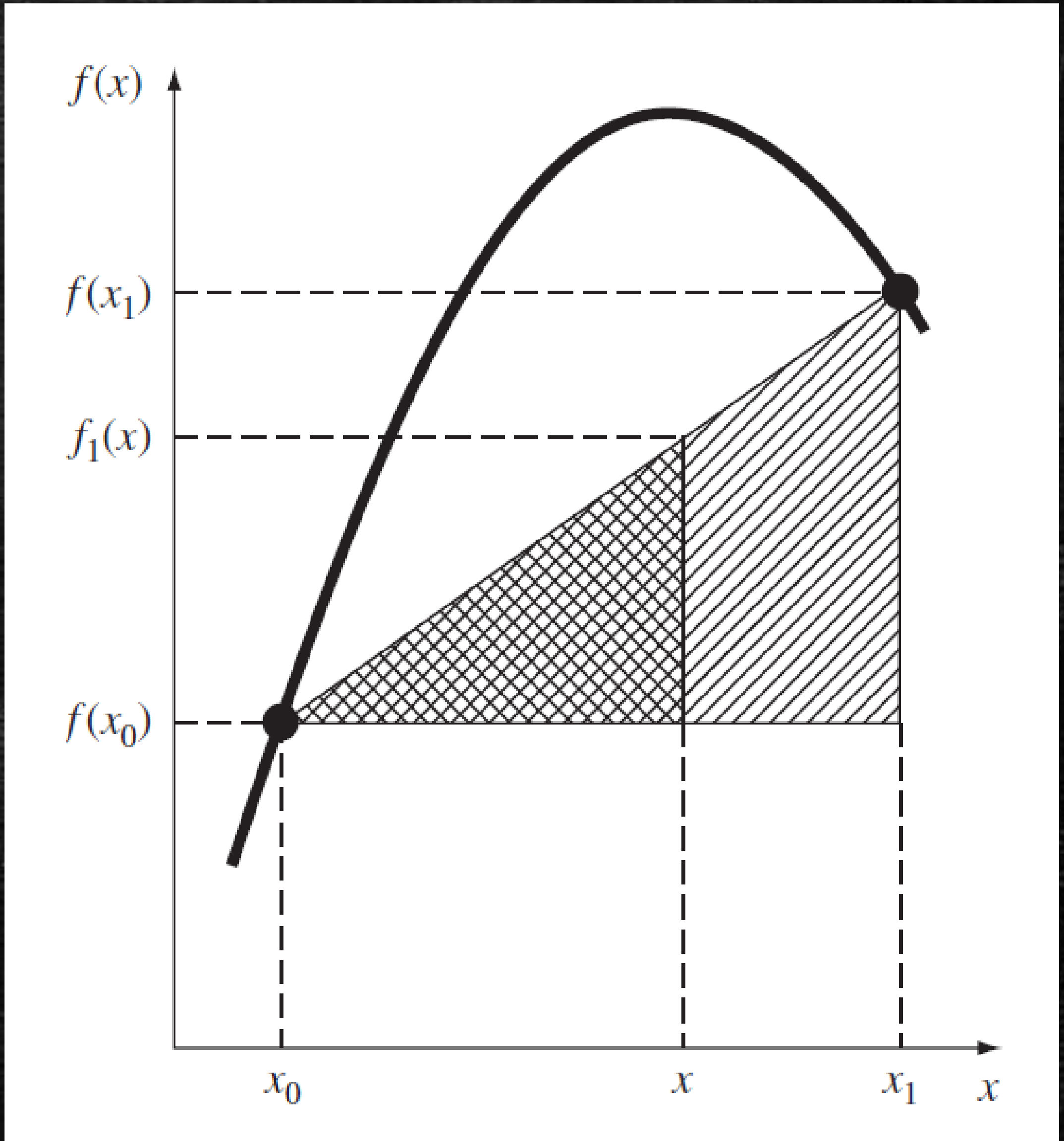
$$P_3(x) = -0.858363 + 0.988892x - 0.138394x^2 + 0.00786553x^3$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

- Interpolação linear (dois pontos)

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

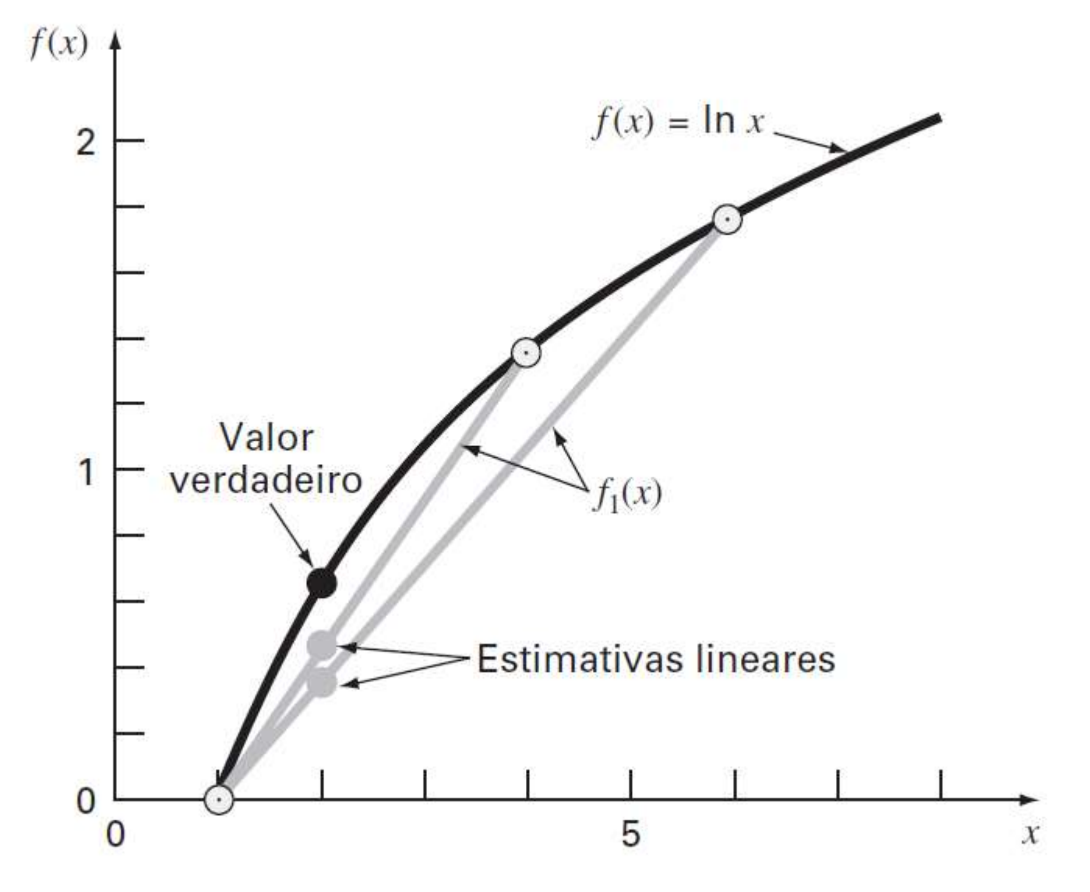


Interpolação por diferenças divididas de Newton

Ex: Interpolação linear para ln(2) de $x_0 = 1$ a $x_1 = 6$

$$f_1(2) = 0 + \frac{1{,}791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0{,}3583519$$

$$f_1(2) = 0 + \frac{1{,}386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0{,}4620981$$



Interpolação por diferenças divididas de Newton

- Interpolação quadrática (três pontos)

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1$$
$$a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1$$
$$a_2 = b_2$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

- Interpolação quadrática (três pontos)

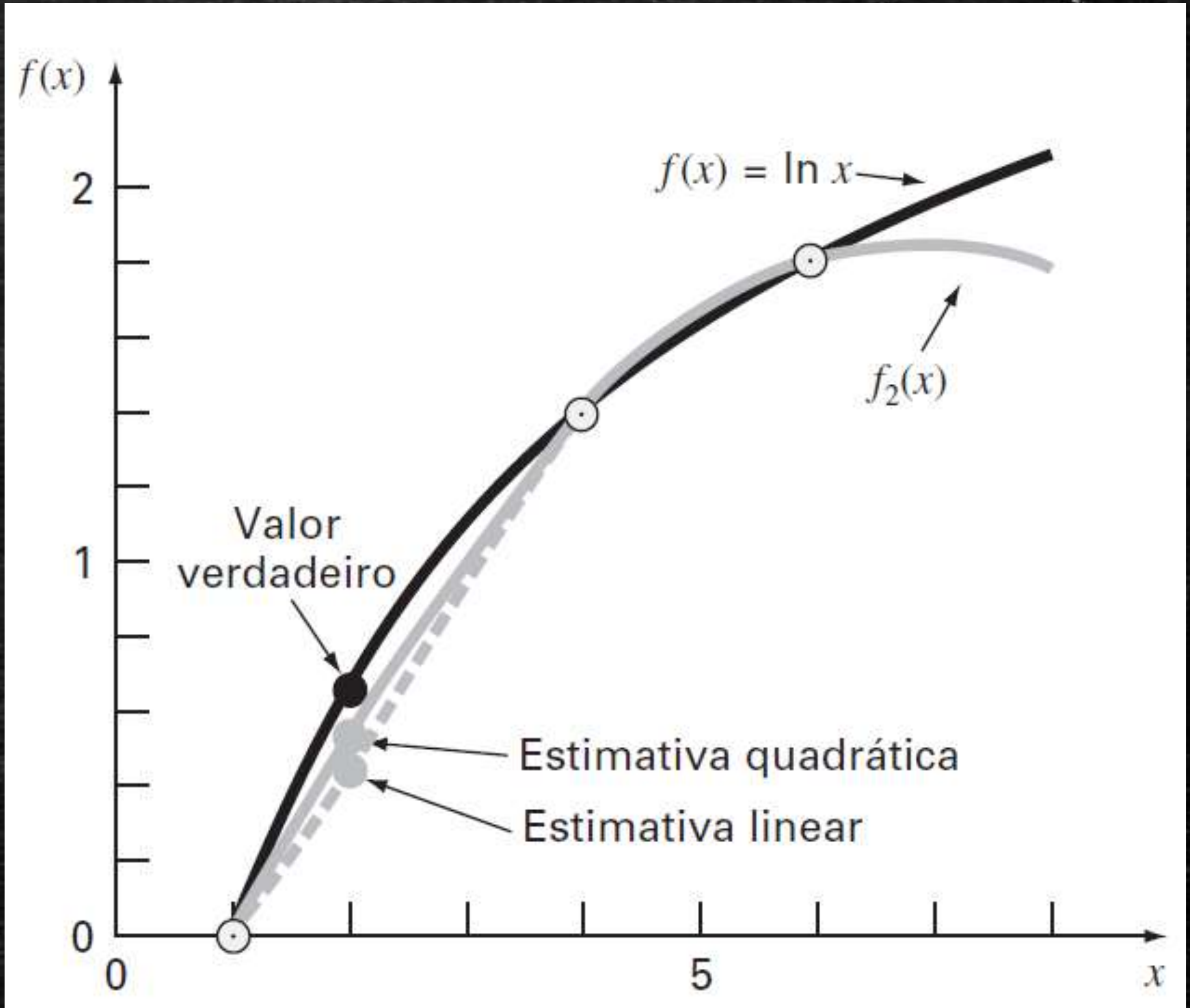
$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 0$$
$$x_1 = 4 \qquad f(x_1) = 1{,}386294$$
$$x_2 = 6 \qquad f(x_2) = 1{,}791759$$

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = \frac{1{,}386294 - 0}{4 - 1} = 0{,}4620981$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{1{,}791759 - 1{,}386294}{6 - 4} - 0{,}4620981}{6 - 1}$$

$$= -0{,}0518731$$



$$f_2(x) = 0 + 0{,}4620981(x - 1) - 0{,}0518731(x - 1)(x - 4)$$

$$f_2(2) = 0{,}5658444$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

- **Forma Geral dos Polinômios Interpoladores de Newton**

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= f(x_0) \\
b_1 &= f[x_1, x_0] \\
b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\
&\ \ \vdots \\
b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]
\end{aligned}$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

- **Forma Geral dos Polinômios Interpoladores de Newton**

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f(x_i)}$	**Primeira**	**Segunda**	**Terceira**
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

- Exemplo: Interpolar $ln2$ usando os dados de ln de x_0=1, x_1=4, x_2=6 e x_3=5.

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{1{,}386294 - 0}{4 - 1} = 0{,}4620981$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1{,}791759 - 1{,}386294}{6 - 4} = 0{,}2027326$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1{,}609438 - 1{,}791759}{5 - 6} = 0{,}1823216$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

- Exemplo: Interpolar *ln*2 usando os dados de *ln* de x_0=1, x_1=4, x_2=6 e x_3=5.

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0{,}2027326 - 0{,}4620981}{6 - 1} = -0{,}05187311$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0{,}1823216 - 0{,}2027326}{5 - 4} = -0{,}02041100$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0{,}02041100 - (-0{,}05187311)}{5 - 1} = 0{,}007865529$$

Interpolação por diferenças divididas de Newton

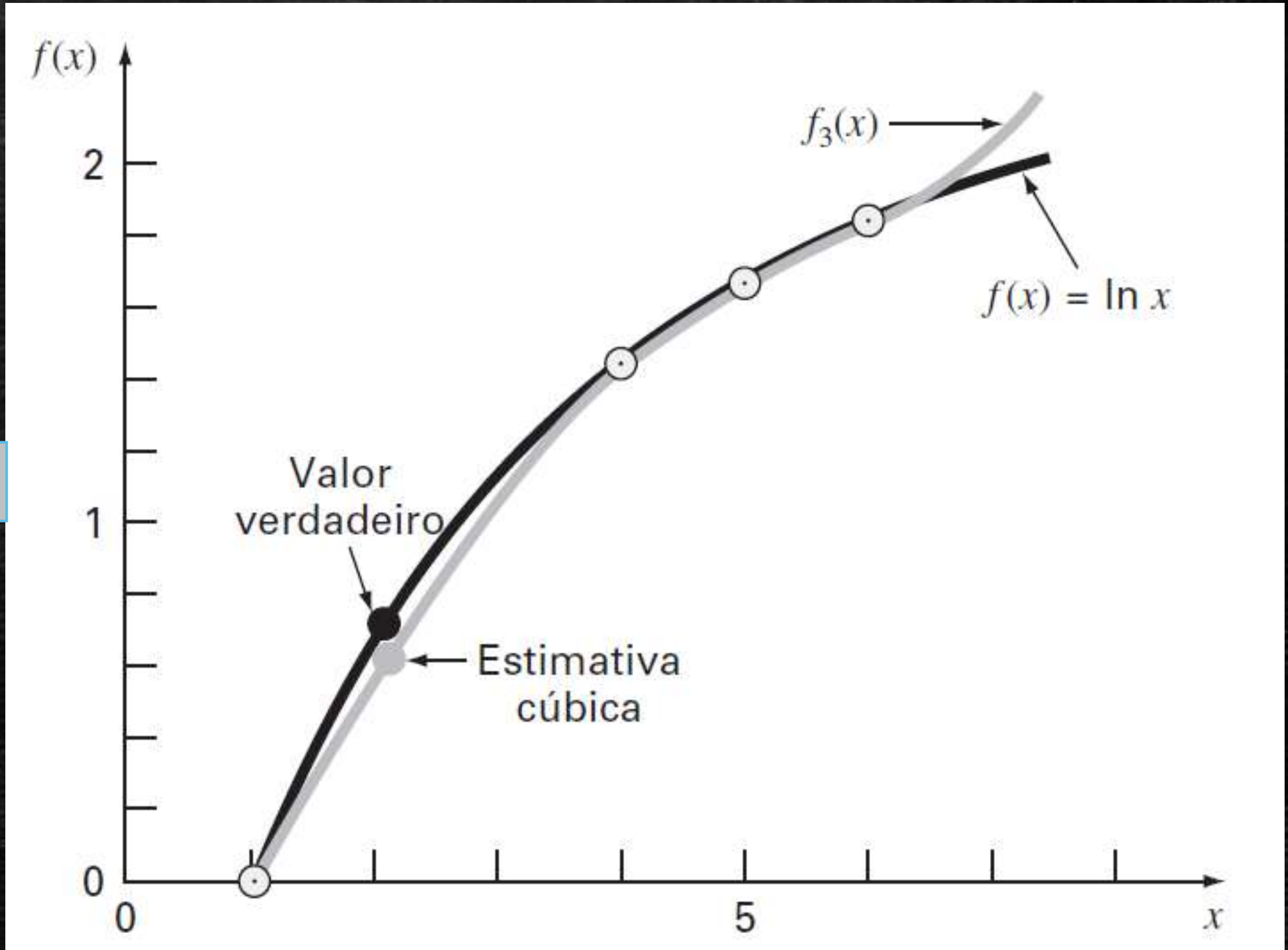
- Exemplo: Interpolar $ln2$ usando os dados de ln de x_0=1, x_1=4, x_2=6 e x_3=5.

$$f_3(x) = 0 + 0{,}4620981(x - 1)$$
$$- 0{,}05187311(x - 1)(x - 4)$$
$$+ 0{,}007865529(x - 1)(x - 4)(x - 6)$$

$$f_3(x) = -0.858363 + 0.988892x - 0.138394x^2 + 0.00786553x^3$$

$$\boxed{f_3(2) = 0{,}6287686}$$

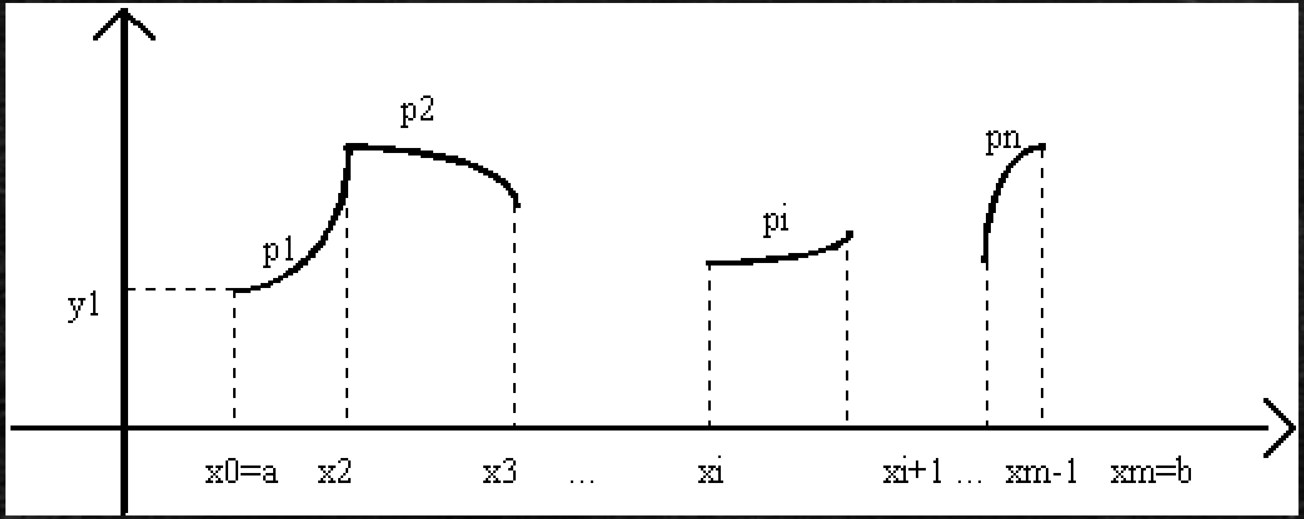
Compare com o resultado da Forma de Lagrange

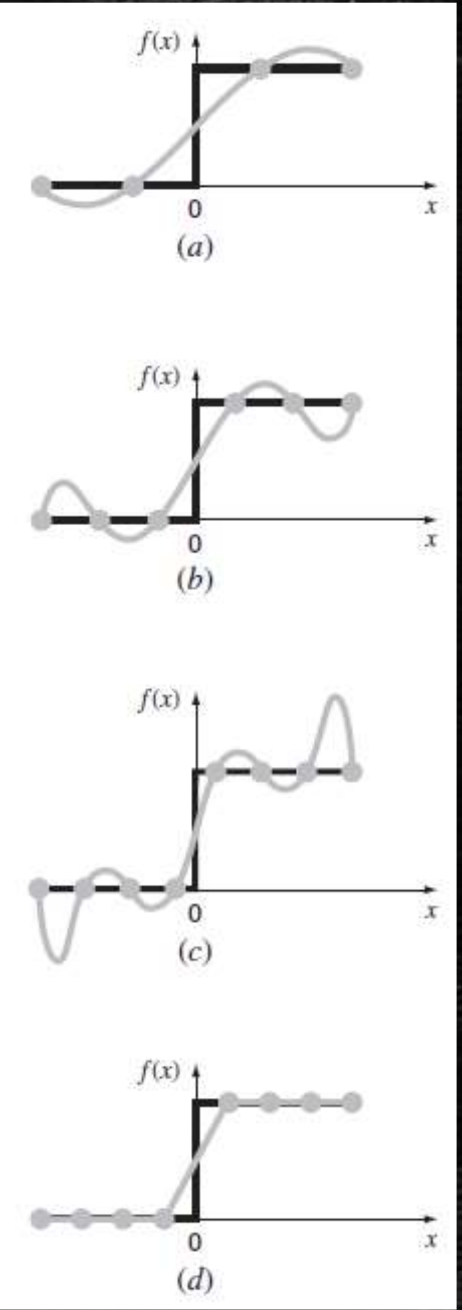


Material Extra

Interpolação por SPLINES

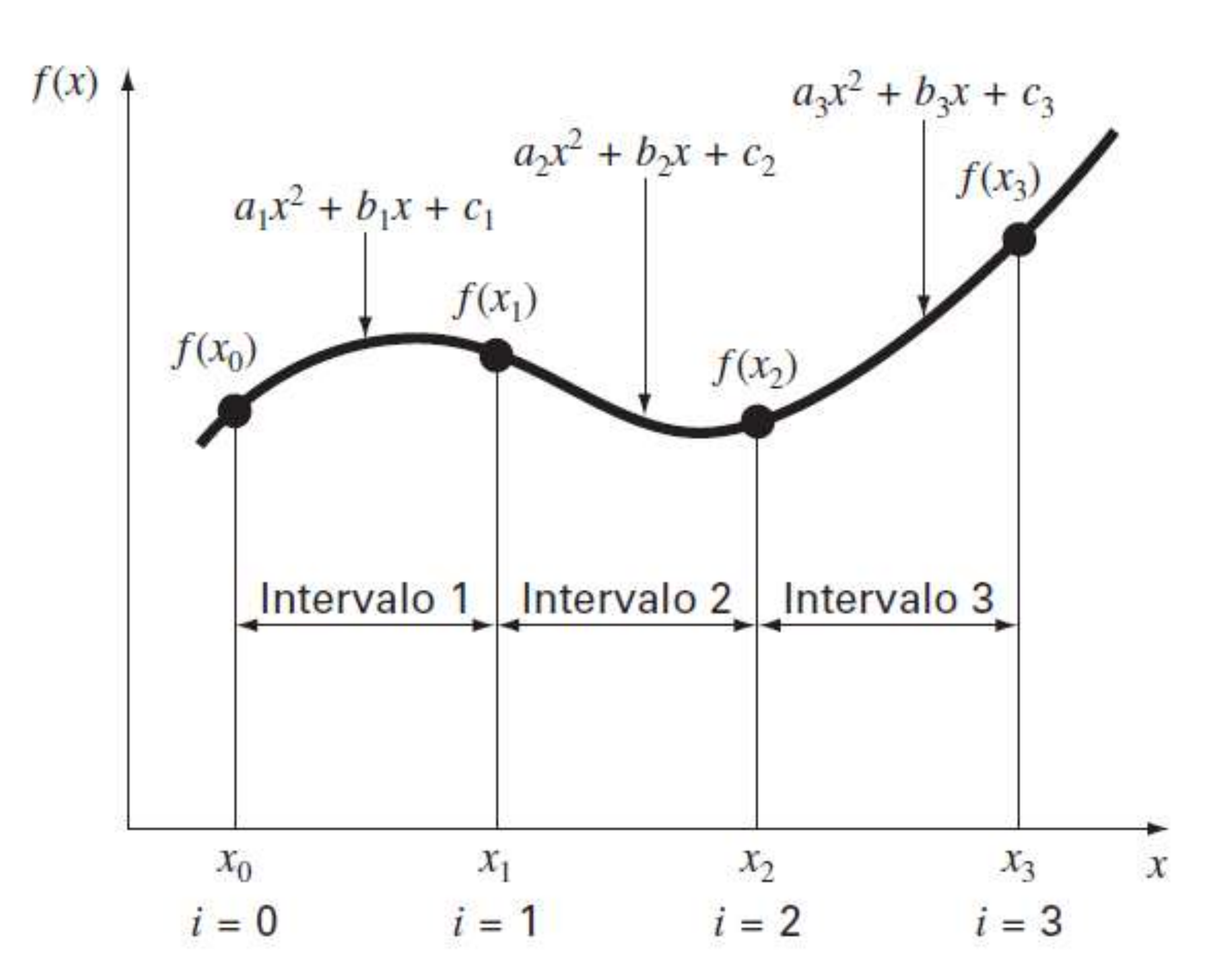
- a) em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (i=0,m-1), $sp(x)$ é um polinômio de grau p.
- b) $sp(x)$ é contínuo em $[a,b]$ e tem derivada contínua em $[a,b]$ até ordem p.
- A spline interpolante é a função $sp(x)$ tal $sp(x_i)=f(x_i)$ (i=0,m).

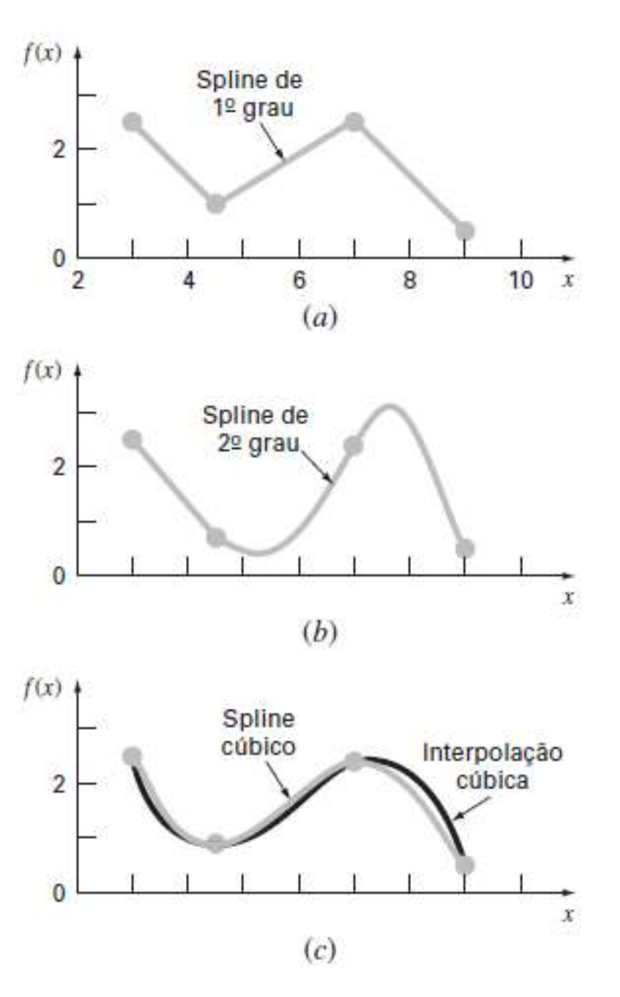




Interpolação por SPLINES

Splines podem ser compostos por polinômios de diferentes ordens

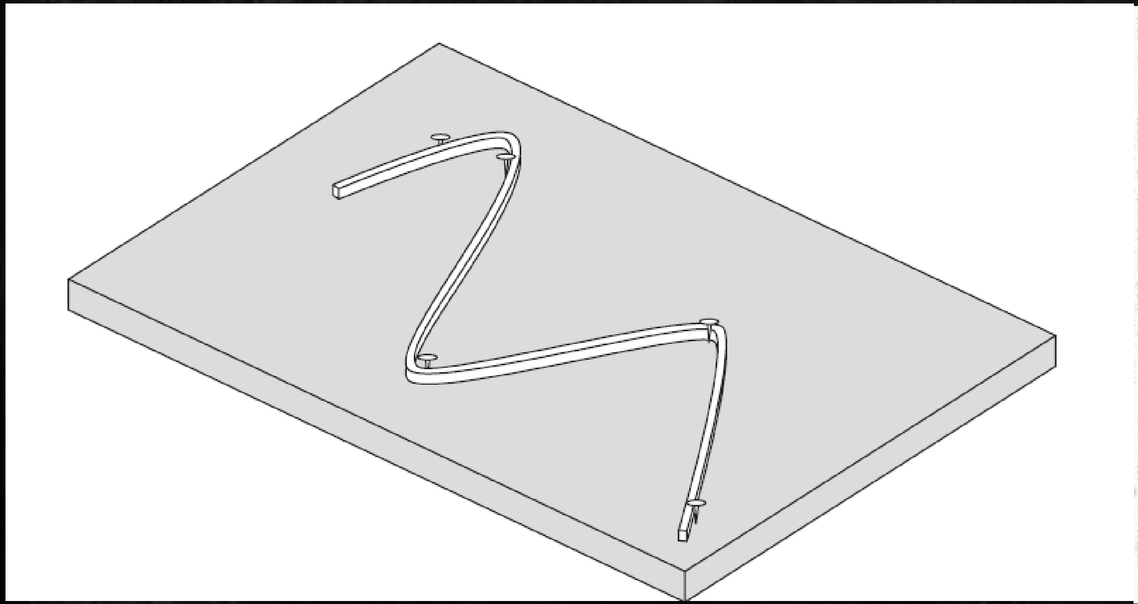


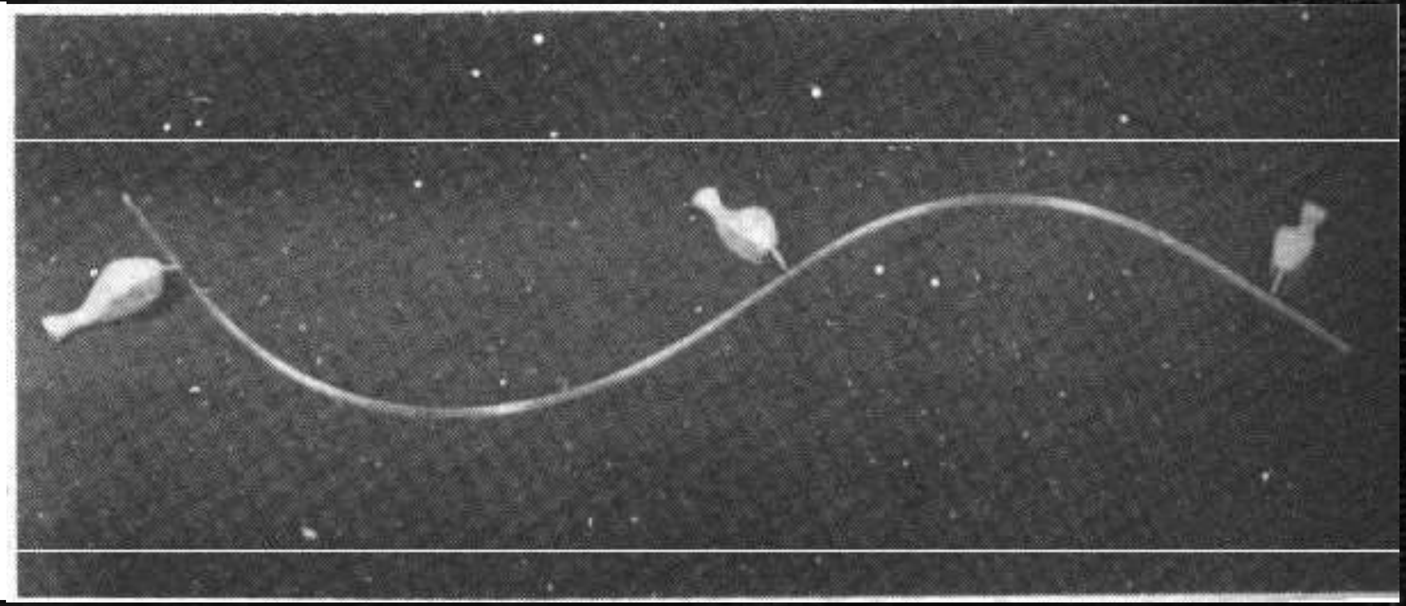


Interpolação por SPLINES

- (Equação de Euler para o momento de defletor)
- *E* – cte determinada pelo material da estrutura física.
- $R(x)$ - raio de curvatura.
- *I* - é o momento de inércia.

$$M(x) = \frac{E \cdot I}{R(x)}$$





Interpolação por SPLINES

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I}$$

$$M(x) = Ax + B$$

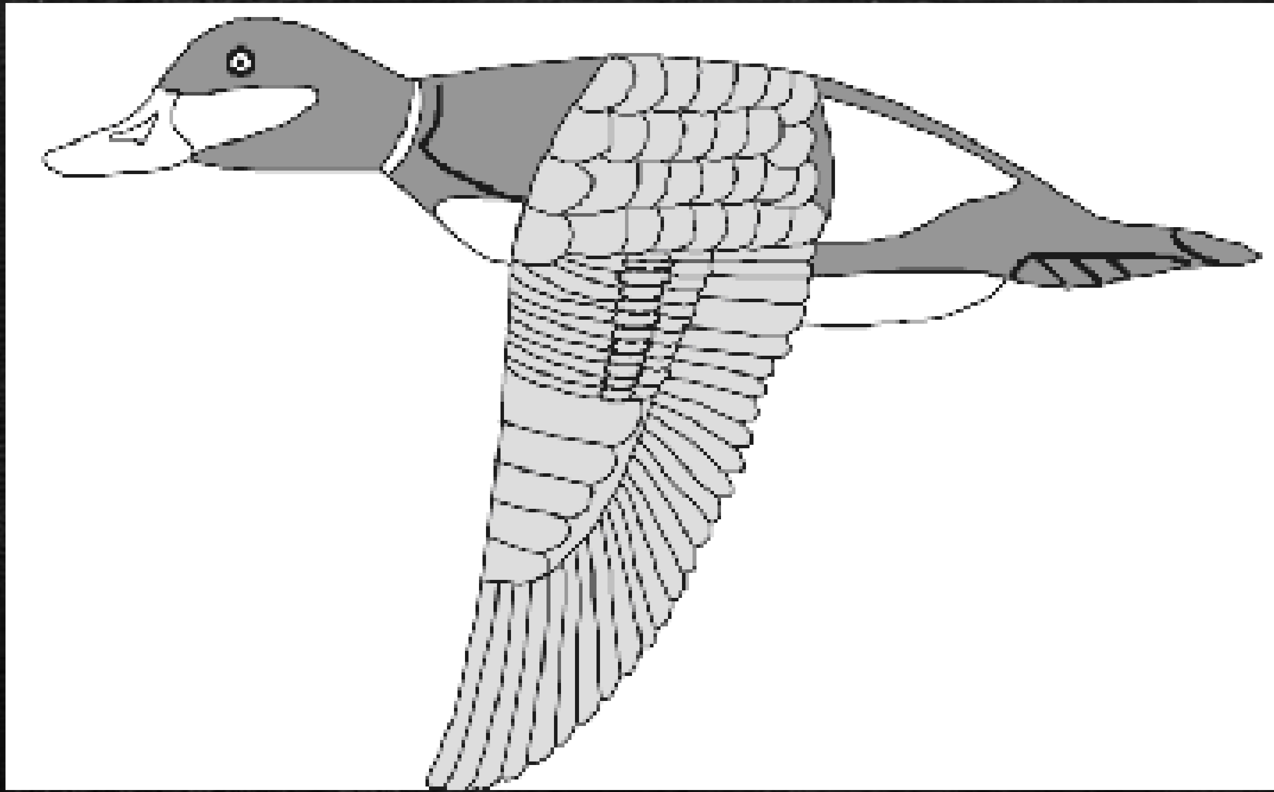
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{Ax + B}{E \cdot I}$$

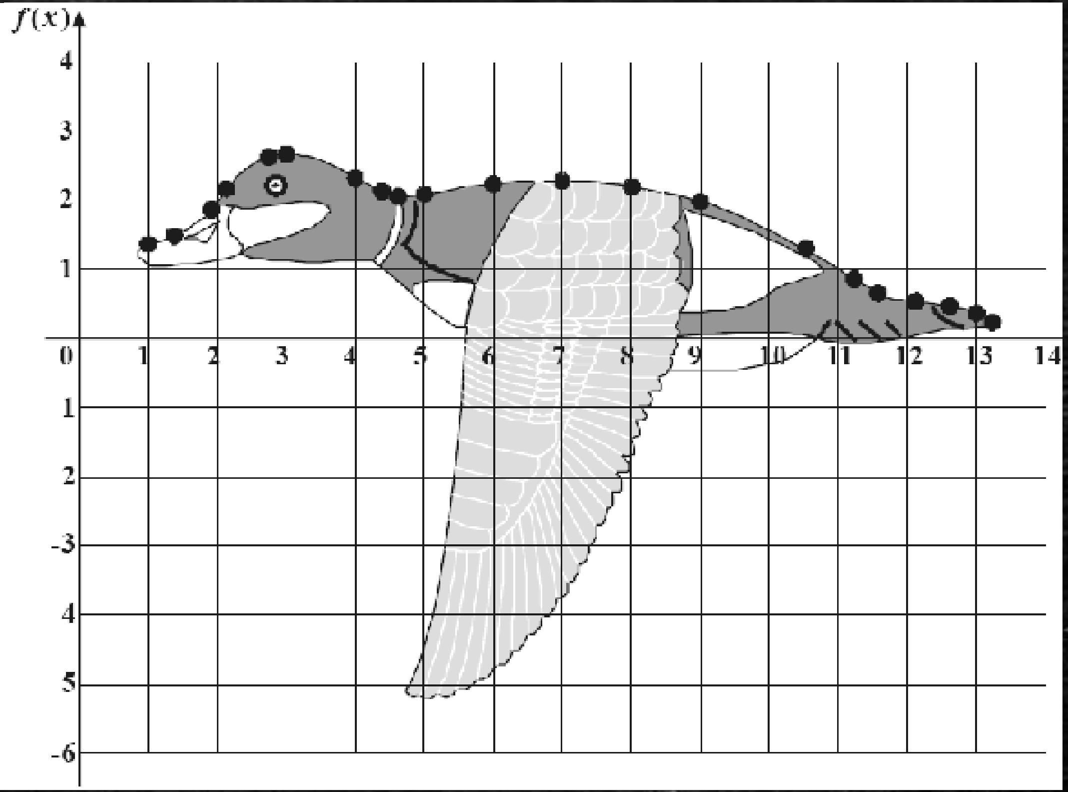
Solução é da forma

$$y = A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1$$

A solução é uma *Spline* cúbica (daí que é chamada de *spline* natural)

Exemplo de aproximação por Spline Cúbico Natural



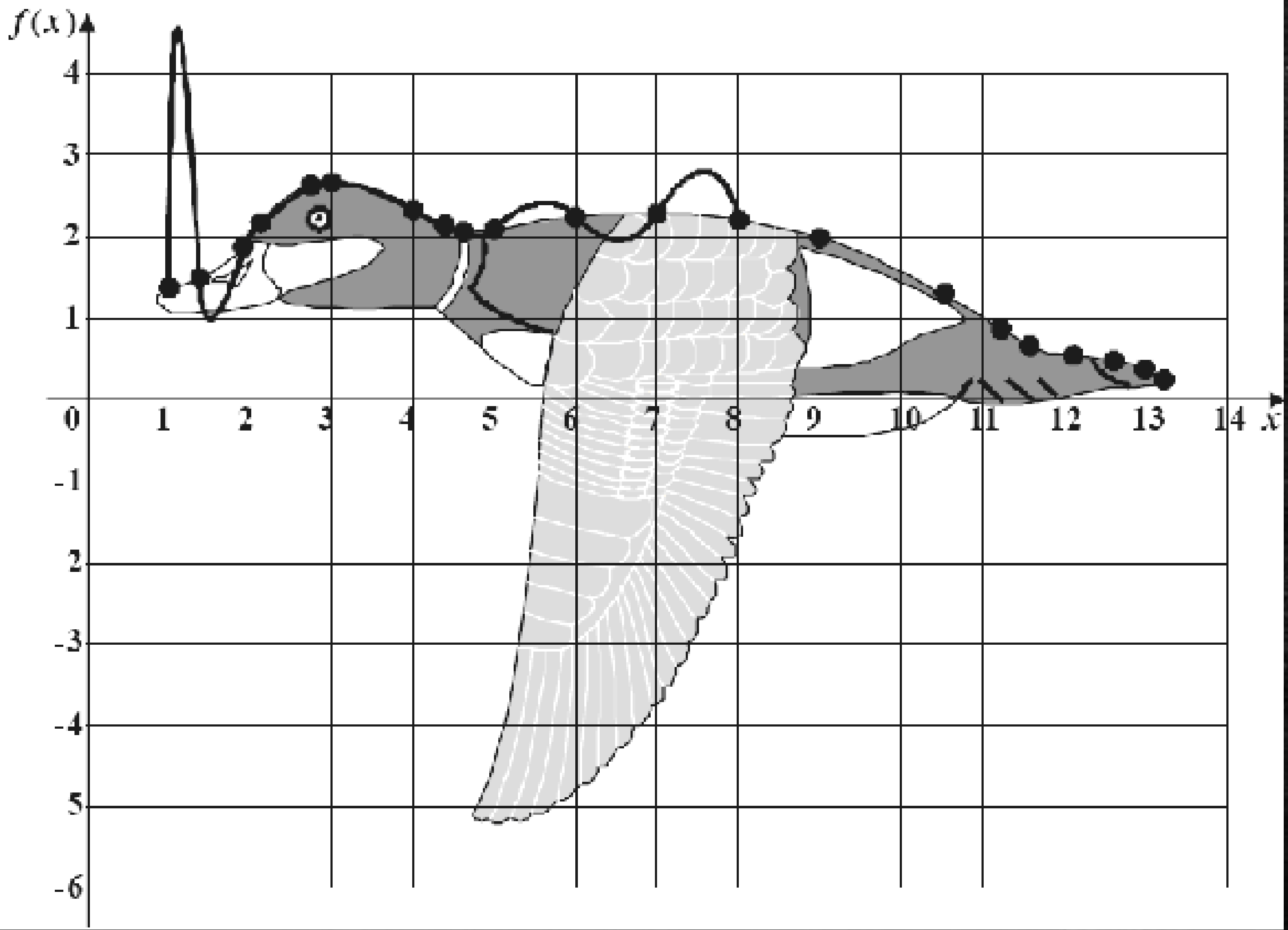


x	0,9	1,3	1,9	2,1	2,6	3,0	3,9	4,4	4,7	5,0	6,0
f(x)	1,3	1,5	1,85	2,1	2,6	2,7	2,4	2,15	2,05	2,1	2,25

X	7,0	8,0	9,2	10,5	11,3	11,6	12,0	12,6	13,0	13,3
f(x)	2,3	2,25	1,95	1,4	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,25

Interpolação por SPLINES

Borda superior por Interpolação polinomial...



Interpolação por SPLINES

Condições:

- As funções devem ser contínuas em cada nó. (2n-2 condições);

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i)$$

- A primeira e a última funções têm de passar pelos pontos extremos. (2 condições);

- As derivadas primeiras devem ser contínuas nos nós. (n-1 condições);

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i)$$

- As derivadas segundas devem ser contínuas nos nós. (n-1 condições);

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i)$$

- A derivada segunda nos pontos extremos é zero (condição de spline natural, 2 condições).

Interpolação por SPLINES

Condições:

- Derivada segunda de polinômio de 3º grau é uma reta, que pode ser interpolada como

$$f_i''(x) = f''(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f''(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Integrando duas vezes e aplicando as continuidades:

$$\begin{aligned} f_i(x) = {} & \frac{f''(x_{i-1})}{6\left(x_i - x_{i-1}\right)}\left(x_i - x\right)^3 + \frac{f''(x_i)}{6\left(x_i - x_{i-1}\right)}\left(x - x_{i-1}\right)^3 \\ & + \left[\frac{f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''\left(x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)}{6}\right]\left(x_i - x\right) \\ & + \left[\frac{f\left(x_i\right)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''\left(x_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)}{6}\right]\left(x - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Interpolação por SPLINES

Condições:

- Derivando a equação e usando as continuidades,

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

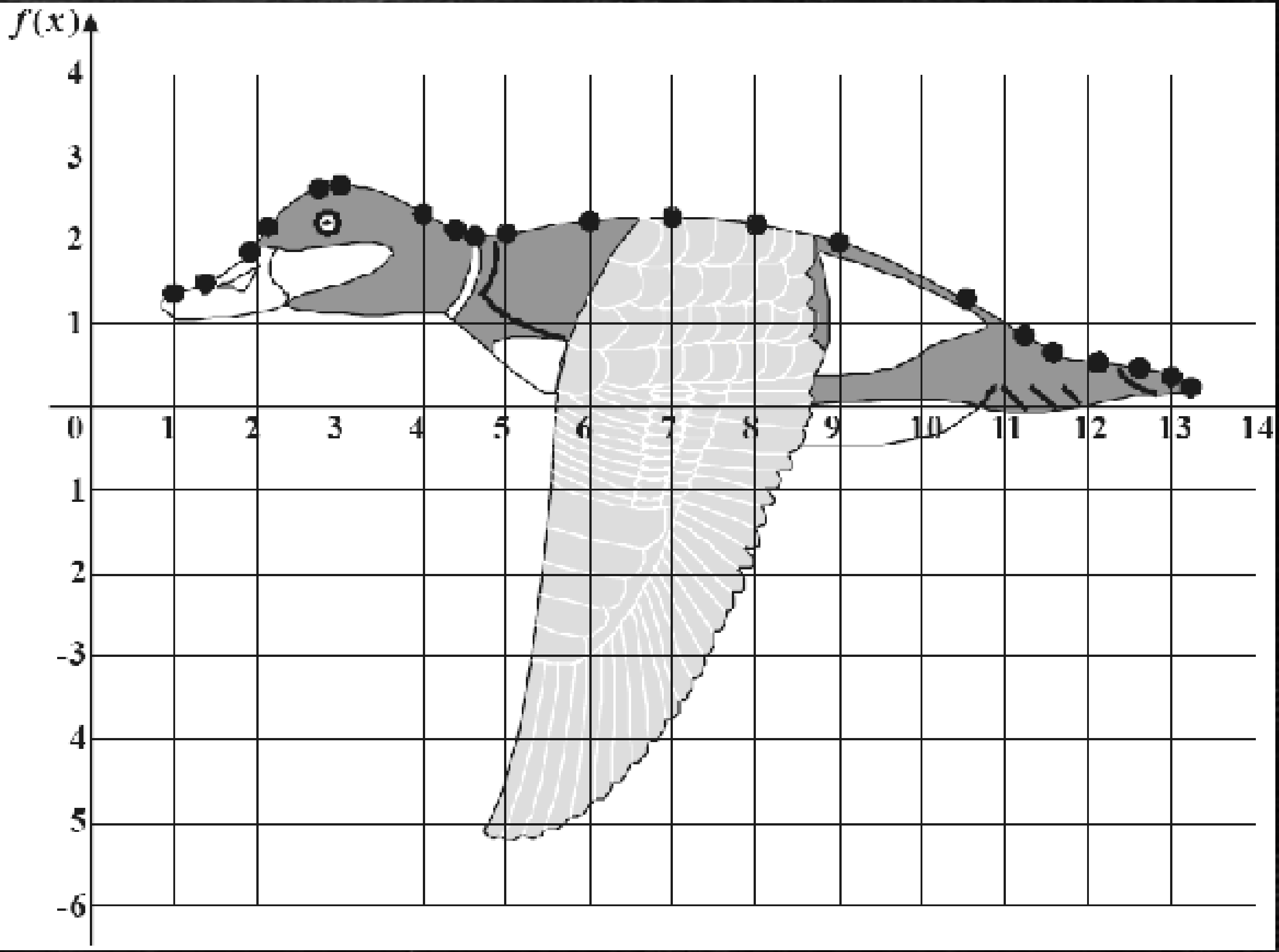
Resolvendo sistema tridiagonal resultante, com a condição de spline natural, temos as derivadas segundas. Inserindo-as em (8), encontra-se os coeficientes para todos os intervalos.

Interpolação por SPLINES

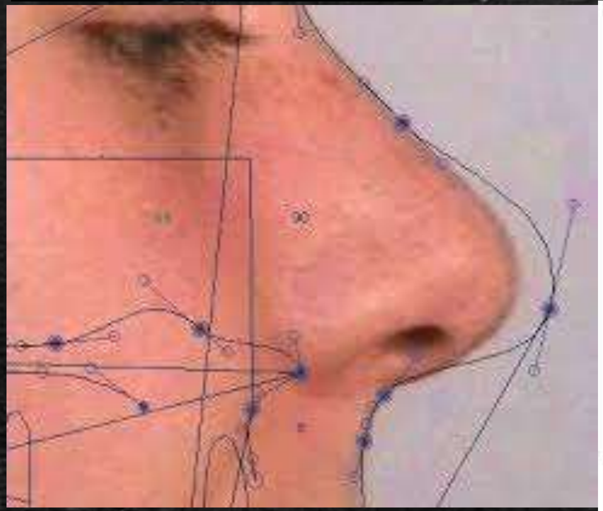
Resultados dos coeficientes dos splines em cada intervalo:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

	a_k	b_k	c_k	d_k
1	-0,25	-0,30	0,42	1,50
2	0,95	1,41	1,09	1,85
3	-2,96	-0,37	1,29	2,10
4	-0,45	-1,04	0,59	2,60
5	0,45	-0,50	-0,02	2,70
6	0,17	-0,03	-0,50	2,40
7	0,08	0,08	-0,48	2,15
8	1,31	1,27	-0,07	2,05
9	-1,58	-0,16	0,26	2,10
10	0,04	-0,03	0,08	2,25
11	0,00	-0,04	0,01	2,30
12	-0,02	-0,11	-0,14	2,25
13	0,02	-0,05	-0,34	1,95
14	-0,01	-0,10	-0,53	1,40
15	-0,02	-0,15	-0,73	0,90
16	1,21	0,94	-0,49	0,70
17	-0,84	-0,06	-0,14	0,60
18	0,04	0,00	-0,18	0,50
19	-0,45	-0,54	-0,39	0,40
20	0,60	0,00	-0,55	0,25



Curvas (e superfícies) de Bélzier
(aplicação de Splines)



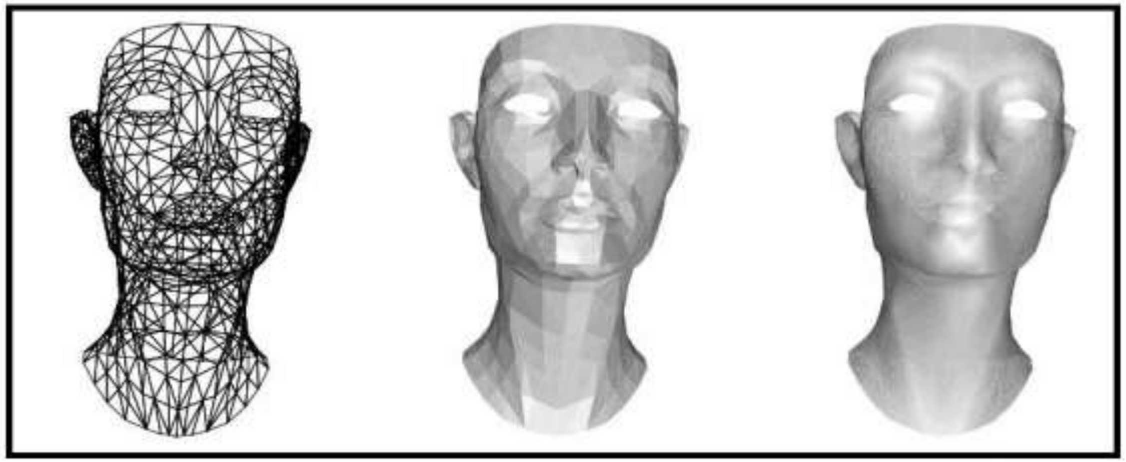
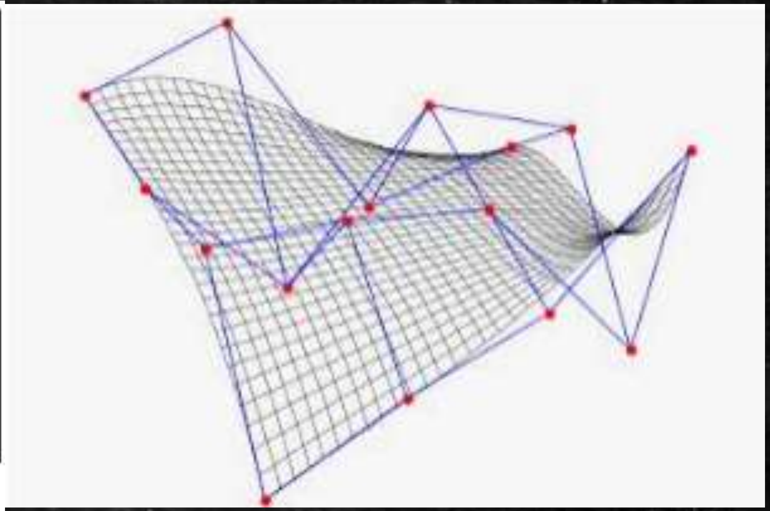
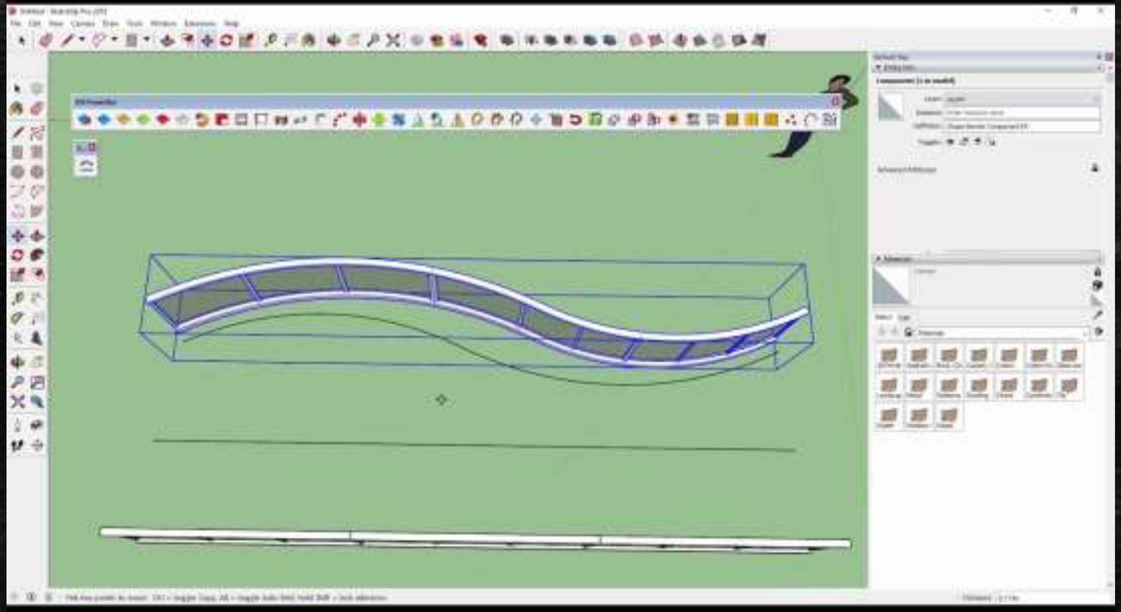
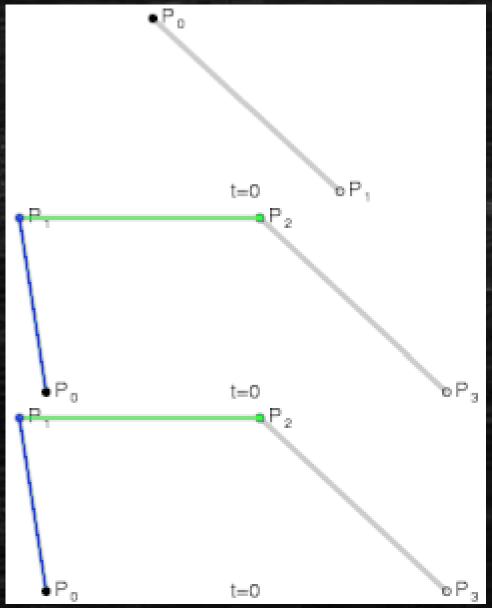
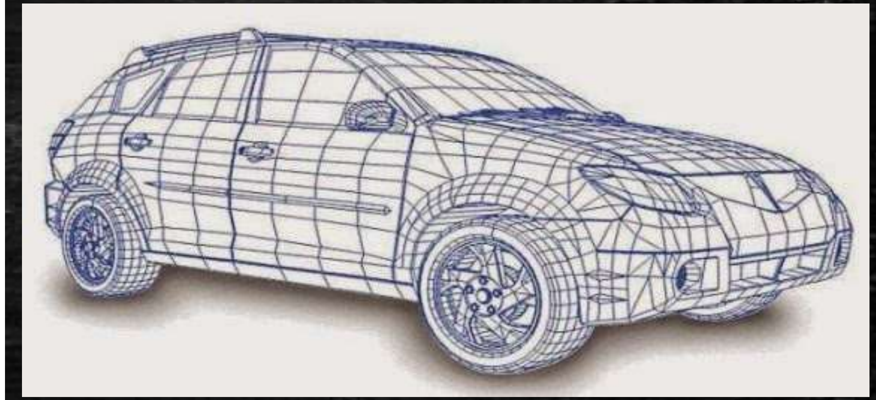


Figura 9. Processo de aproximação por meio da superfície de Bezier em 3D

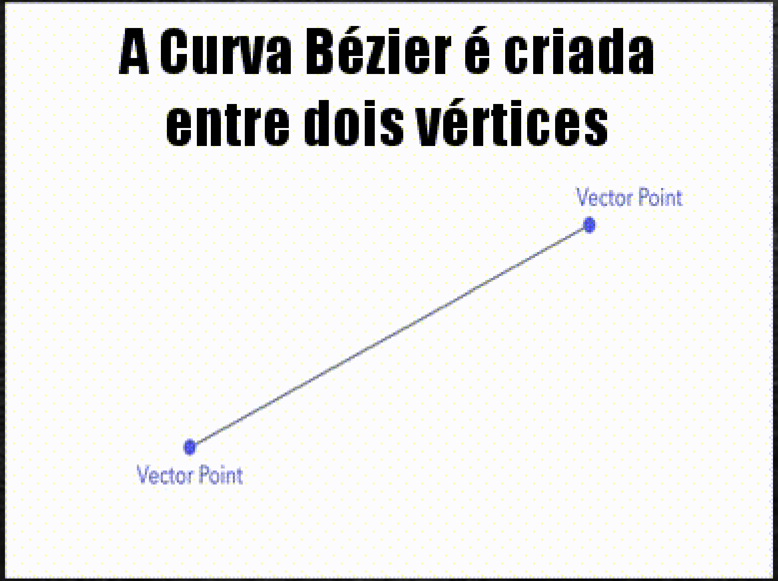


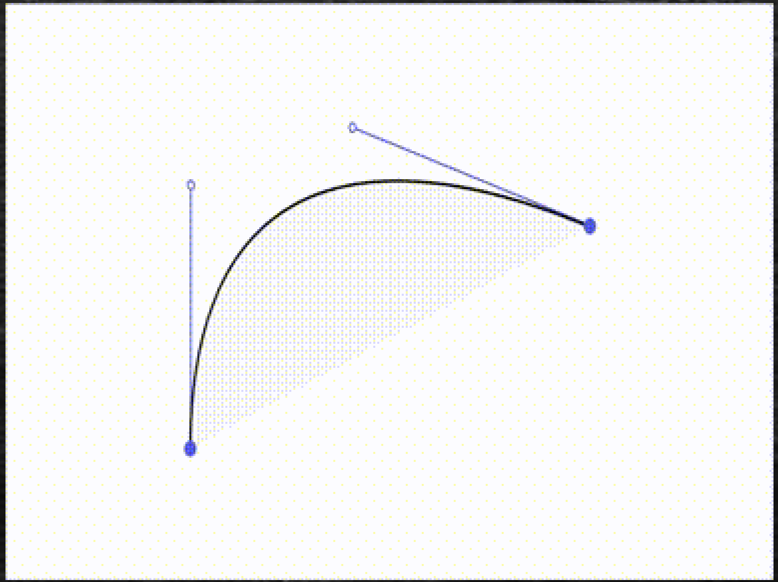


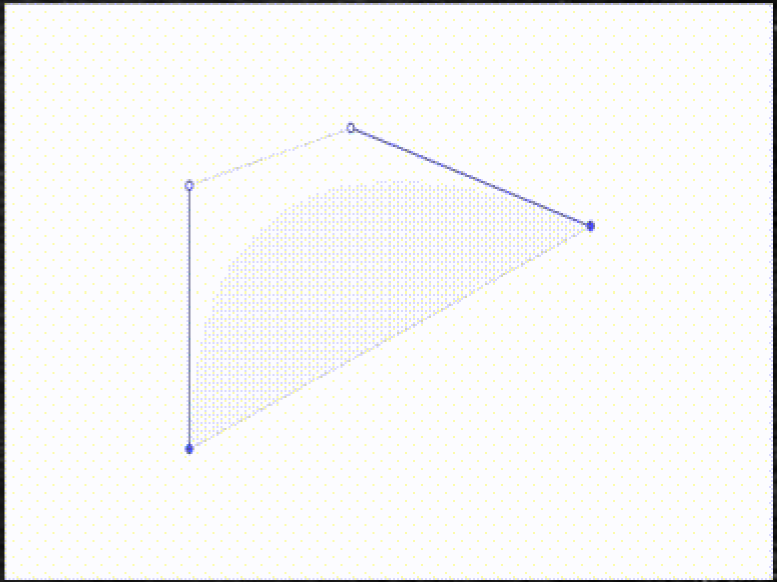




Curvas (e superfícies) de Bélzier (aplicação de Splines)







https://vimeo.com/106757336