Discentes
Evilim Gabriela
Igor Lima Rocha
Isaac Lima
João Rupp
Maria Gabriella

Avaliação 4 - Cálculo

Questão 1

Expresse o número $6,2\overline{54}$ como razão de inteiros.

Resposta

$$\frac{3096}{495}$$

Resolução

Para realizar essa questão, utilizaremos a série geométrica, pois conseguimos facilmente extrair o seu resultado numérico.

Separando o número $6,2\overline{54}$, sua parte fixa é $6,2$ e a parte repetida é 54, portanto:

$$6,2\overline{54} = 6,2 + \frac{54}{10*100} + \frac{54}{10*100^2} + \frac{54}{10*100^3} + ...$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$eq_1 = 6,2\overline{54} = 6,2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{54}{10} * \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

A série ainda não é geométrica, pois o n não inicia em 0. Para corrigirmos isso, podemos somar $5,4$ em cada lado da equação:

$$6,2\overline{54} \ + \ \frac{54}{10} \ = \ 6,2 \ + \ \frac{54}{10} \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{54}{10} * \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$eq_2 \ = \ 6,2\overline{54} \ + \ \frac{54}{10} \ = \ 6,2 \ + \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{54}{10} * \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

Agora que temos a série geométrica, podemos utilizar a fórmula para calcular o resultado dessa série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \ = \ \frac{a}{1-r}$$

Considerando $a \ = \ \frac{54}{10}$ e $r \ = \ \frac{1}{100}$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{54}{10} \left(\frac{1}{100}\right)^n \ = \ \frac{\frac{54}{10}}{1-\frac{1}{100}} \ = \ \frac{\frac{54}{10}}{\frac{99}{100}} \ = \ \frac{54 * 100}{10 * 99} \ = \ \frac{540}{99}$$

Voltando para a equação 2, temos:

$$6,2\overline{54} \ + \ \frac{54}{10} \ = \ 6,2 \ + \ \frac{540}{99}$$

Fazendo a subtração do $5,4$ que fizemos no início e reescrevendo a equação, temos:

$$6,2\overline{54} \ = \ \frac{62}{10} \ - \ \frac{54}{10} \ + \ \frac{540}{99} \ = \ \frac{8}{10} \ + \ \frac{540}{99} \ = \ \frac{4}{5} \ + \ \frac{540}{99}$$

Para finalizar, podemos simplificar as frações, fazendo o MMC

$$\frac{4}{5} + \frac{540}{99} = \frac{396 + 2700}{495} = \frac{3096}{495}$$

Portanto:

$$6,\overline{254} = \frac{3096}{495}$$

Questão 2

Encontre os valores de x para os quais a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ converge.

Calcule a soma da série.

Resposta

Resolução

Questão 3

Use o Teste da Integral determinar se a série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ é convergente ou divergente.

Resposta

Convergente.

Resolução

O primeiro passo a se fazer para realizar o teste da integral é utilizar o termo geral da série em uma função onde possamos calcular sua antiderivada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \Rightarrow \int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx$$

Agora podemos calcular o limite dessa integral:

$$eq_1 = \lim_{m\to\infty}\left(\int_1^m e^{-x}\,dx\right)$$

Primeiro, calculamos a integral:

$$eq_2 = \int_1^m e^{-x}\,dx$$

Seja $u = -x$, temos $du = -dx$. Reescrevendo e resolvendo a equação 2:

$$\int_1^m -e^u\,du = -\int_1^m e^u\,du = -\left[e^u\right]_1^m = -\left[e^{-x}\right]_1^m$$

$$-\left[e^{-m} - e^{-1}\right]$$

Retornando para a equação 1, temos o seguinte:

$$\lim_{m\to\infty}\left(-\left[e^{-m} - e^{-1}\right]\right)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(-\left[\frac{1}{e^m} - \frac{1}{e^1}\right]\right)$$

Percebemos então que $\frac{1}{e^m}$ tende a 0, quando m tende a ∞. Podemos reescrever o limite da seguinte forma:

$$\lim_{m \to \infty} (-[0 - 0]) = 0$$

Como descobrimos que a integral converge, podemos afirmar, então, que a série inicial, também converge.

Questão 4

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n*(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Resposta

Resolução

Questão 5

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+sen(n)}{n^{10}}$ é convergente.

Resposta

Convergente.

Resolução

Pelo teste da comparação, seja $\sum_{n=1}^{\infty} an$ e $\sum_{n=1}^{\infty} bn$ duas séries de termos não negativos, então se $0 \leq an \leq bn$, para todo $n \geq p$, e se a segunda série converge, então a primeira também converge.

Aplicando:

$$-1 \leq sen(n) \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+sen(n)}{10^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+1}{10^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+1}{10^n} = 2 * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

Pelo teste da geométrica, temos que:

$$r = \frac{1}{10}, |r| = 0.1 < 1$$

Logo, a série converge para:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

Então, $2 * \frac{10}{9} = \frac{20}{9}$, portanto a série converge.

Pelo teste da comparação, se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+1}{10^n}$ converge, logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+sen(n)}{10^n}$ também converge.

Questão 6

Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+cos(n)}{n^5}$ (DICA: aproxime baseado no Teste da Comparação)

Resposta

Resolução

Questão 7

Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p * ln(n)}$ converge.

Resposta

Resolução

Questão 8

Quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ precisamos adicionar para encontrar a soma parcial com a precisão de erro $< 0,001$?

Resposta

Resolução

Questão 9

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} * \frac{n}{n^2+1}$ é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

Resposta

Resolução

Questão 10

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n * \frac{(2x+3)^n}{n * ln(n)}$$

Resposta

Resolução