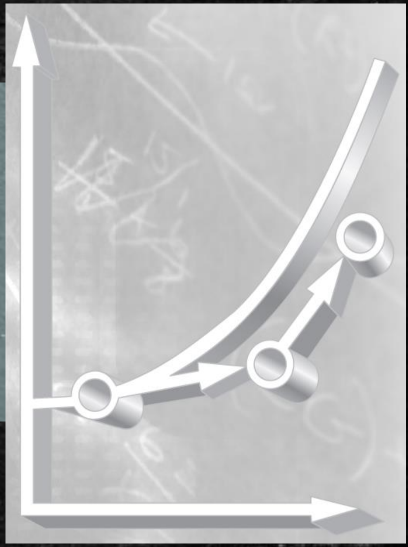
Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias



Análise Numérica
Gesil Amarante

Equações Diferenciais

- As equações diferenciais são caracterizadas pela presença de derivadas

e não apenas quantidades fixas.

2ª Lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ $\longrightarrow$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ (para massas constantes)

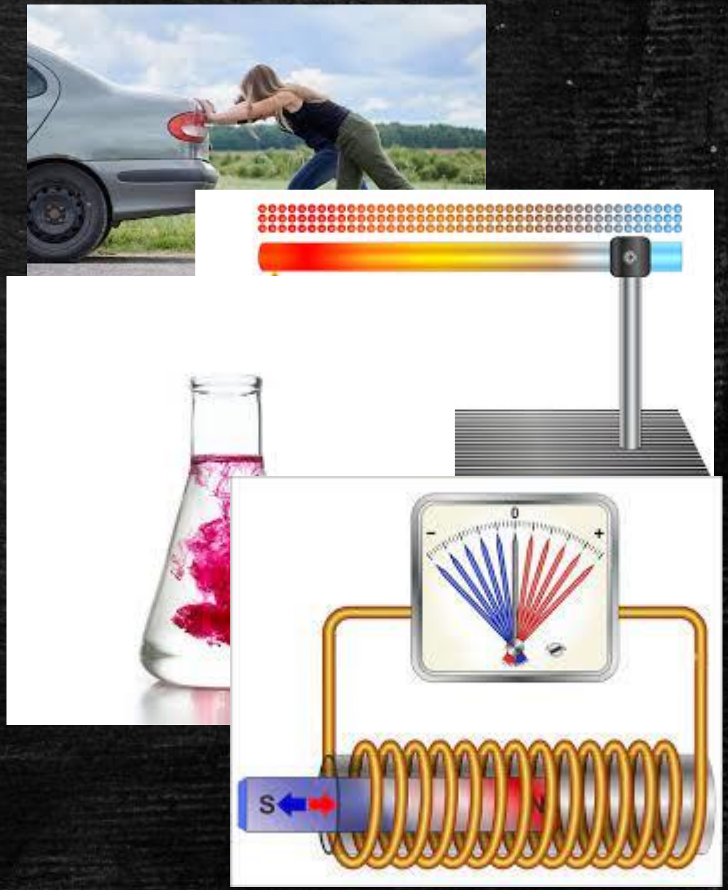
$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{x}}{dt}$ (momento linear)

- Sua solução resulta em funções (trajetórias) e não apenas valores específicos.
- No caso acima, se temos uma particular expressão para $\vec{F}(\vec{x}, t)$, podemos obter $\vec{x}(t)$.

Exemplos de Equações Diferenciais na Física

As equações diferenciais são as principais ferramentas matemáticas usadas para modelar matematicamente os fenômenos observados nas mais diversas áreas.

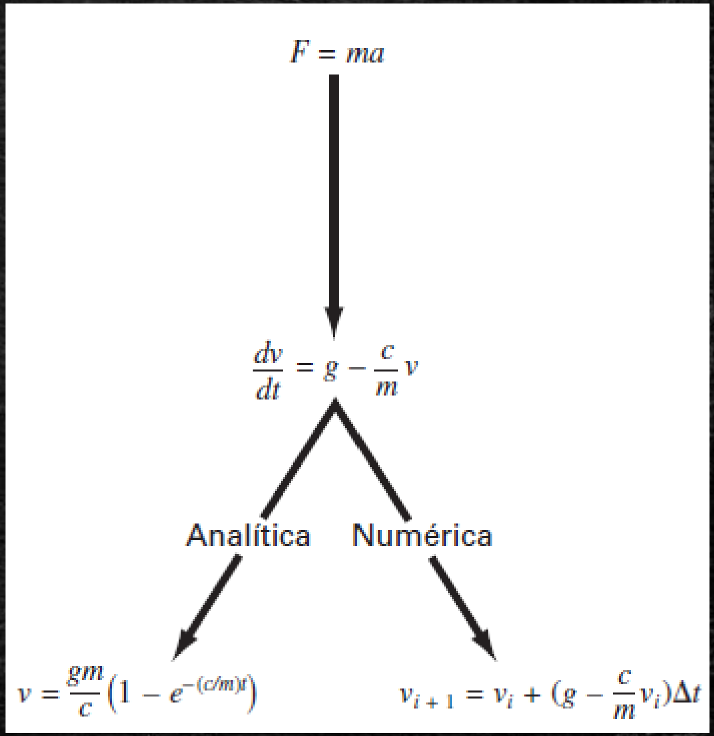
Lei	Expressão Matemática	Variáveis e Parâmetros
Segunda lei de movimento de Newton	$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$	Velocidade (v), força (F) e massa (m)
Lei de Fourier do calor	$q = -k' \frac{dT}{dx}$	Fluxo de calor (q), condutividade térmica (k') e temperatura (T)
Lei de difusão de Fick	$J = -D \frac{dc}{dx}$	Fluxo de massa (J), coeficiente de difusão (D) e concentração (c)
Lei de Faraday (queda de voltagem em um indutor)	$\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$	Queda de voltagem (ΔV_L), indutância (L) e corrente (i)



Equações Diferenciais

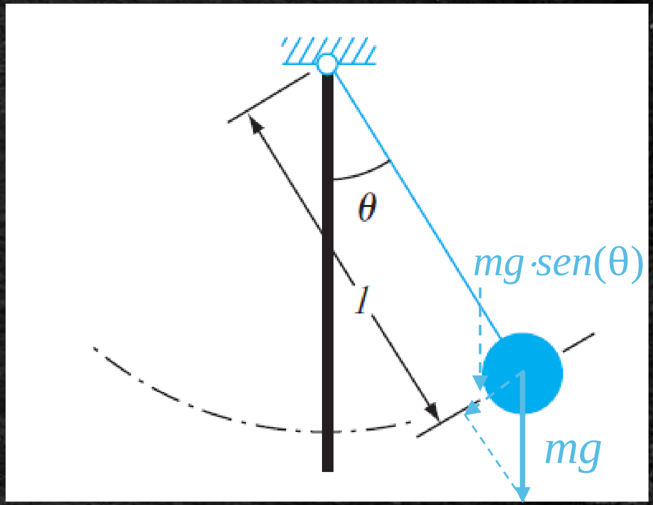
Há vários métodos diferentes para se encontrar soluções analíticas para estas equações, mas nem sempre é possível encontrar soluções as analíticas.

Há, frequentemente, dois caminhos para resolver este problema. Fazer muitas aproximações que tornem as soluções analíticas possíveis para situações bastante específicas ou resolver as equações numericamente, o que gera erros de truncamento, mas permite uma variedade muito maior de situações tratáveis.



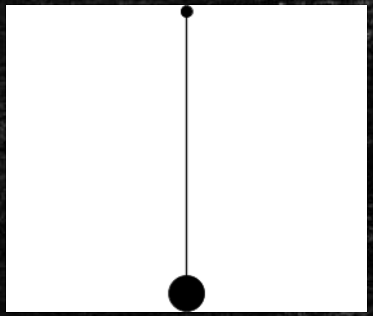
Aproximações

O exemplo ao lado é o de uma situação bem conhecida da física. O pêndulo simples, constituído de uma massa m presa a um fio de comprimento fixo l e massa desprezível. Da segunda lei de Newton a equação que representa a dinâmica deste sistema é



$$F = m \cdot a \longrightarrow m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = -mg \cdot \operatorname{sen}\theta$$

ou $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$ que não tem solução analítica simples.



Todavia, para ângulos pequenos, vale a aproximação $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$

e a equação fica na forma $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

que tem solução analítica simples. $\theta(t) = A\,Sen(\omega t) + B\cos(\omega t)$ $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Tipos de Equações Diferenciais

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto às derivadas com relação a uma ou mais variáveis independentes.

No primeiro caso as chamamos de equações diferenciais ordinárias (EDOs), no último de equações diferenciais parciais (EDPs).

Também são classificadas quanto à maior ordem da derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

E.D.O. de segunda ordem

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dt} - 2x = 0$$

E.D.P. de primeira ordem

Soluções de EDOs de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

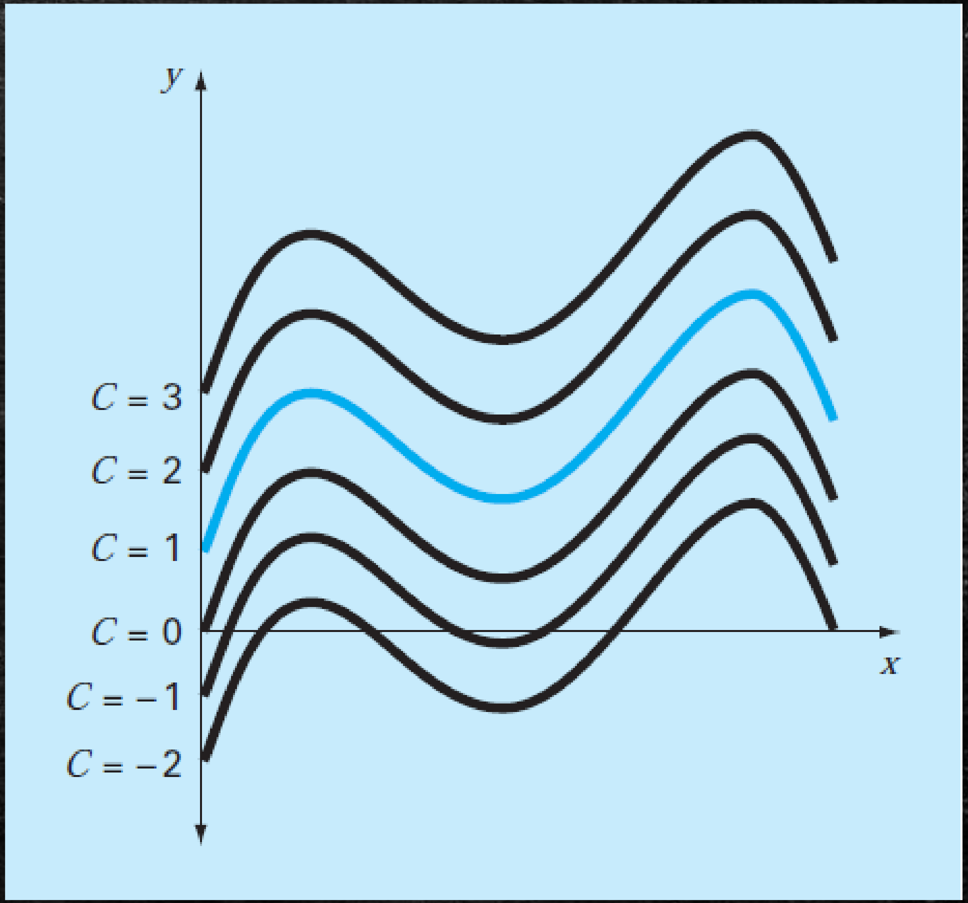
Caso mais simples, $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5)\,dx$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$y(x) = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + C$$



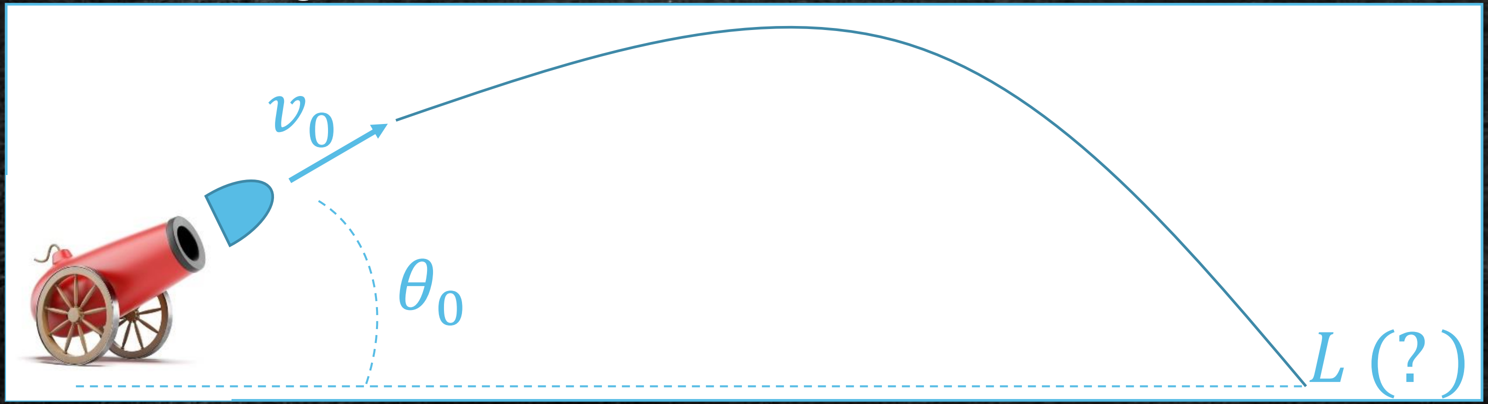
Necessário, para que a solução seja única, fixar valor em um ponto específico (Problema de Valor Inicial - PVI) ou em mais de um ponto (Problema de Valor de Contorno – PVC).

PVI ou PVC?

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Problema(s) do artilheiro.

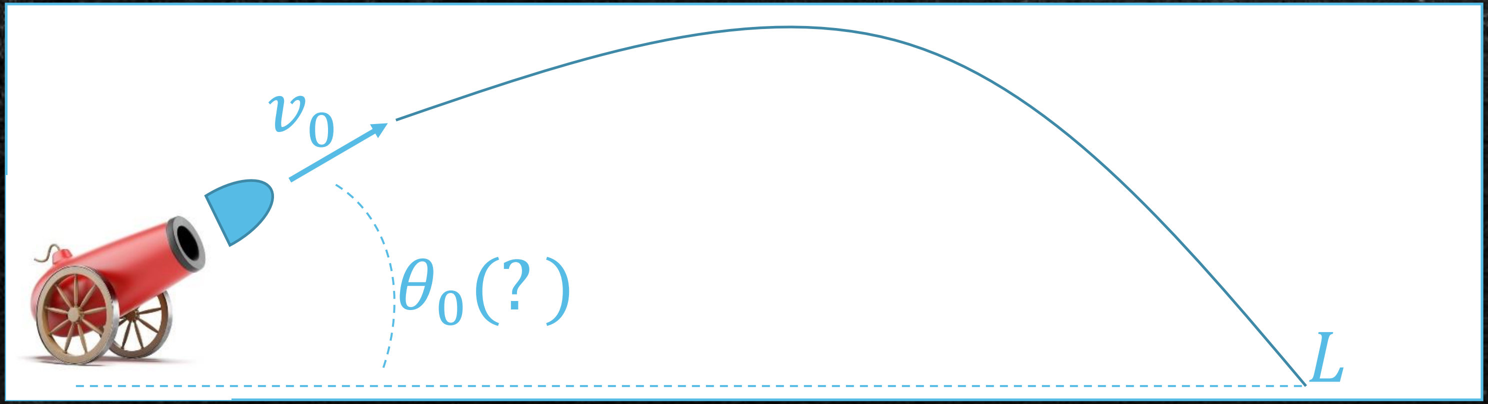
Caso 1: Ângulo e velocidade inicial fixos. Calcule L.



Problema de Valor Inicial – PVI.

Valores fixados todos em x_0

Caso 2: L e velocidade inicial fixos. Calcule ângulo inicial θ_0.

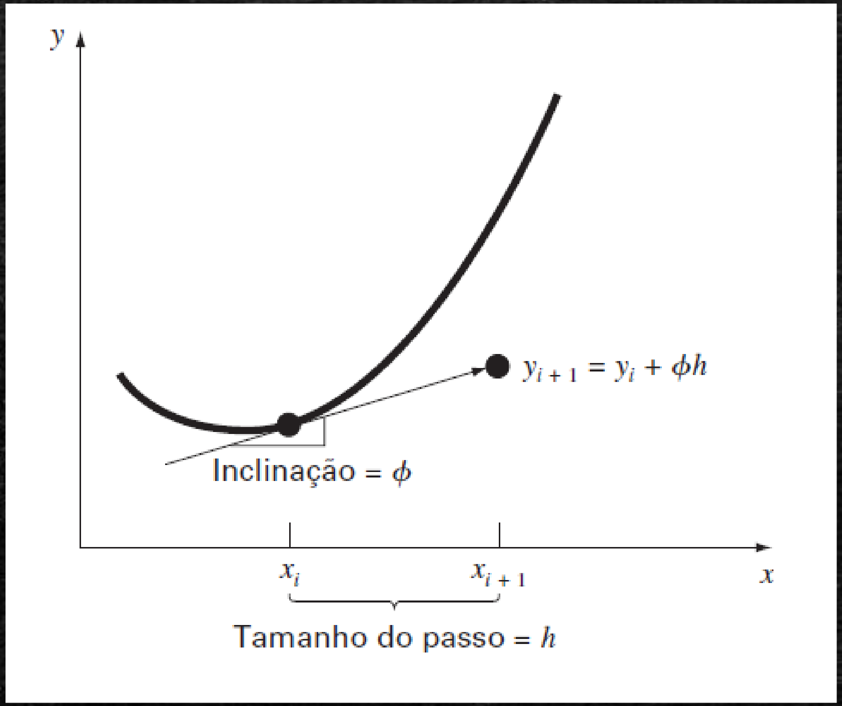


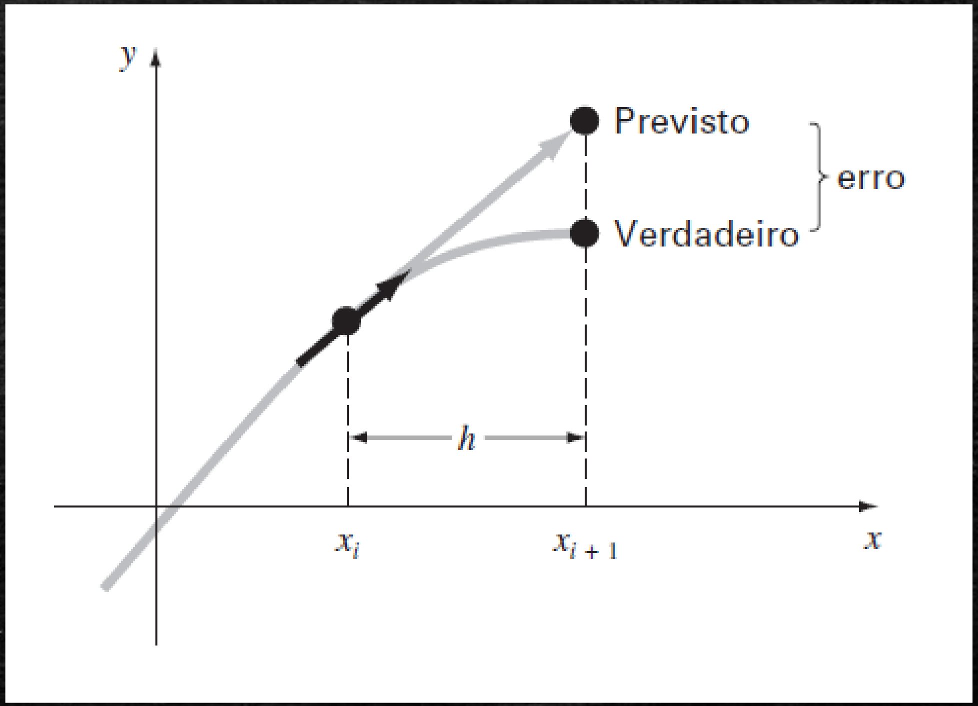
Problema de Valor de Contorno – PVC.

Valores fixados em posições diferentes (x_0 e L).

Métodos numéricos de passo único $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$





Método de Euler

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \qquad \boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h} \qquad \phi = f(x_i, y_i)$$

Exemplo: $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$ Cuja solução analítica é : $y(x) = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$

Para valor inicial y = 1 quando *x* = 0.

Com *h* = 0,5 $y(0{,}5) = y(0) + f(0,1)0{,}5$

$f(0,1) = -2(0^3) + 12(0^2) - 20\,(0) + 8{,}5 = 8{,}5 \longrightarrow y(0{,}5) = y(0) + 8{,}5 \cdot 0{,}5 = 5{,}25$

Sendo que a solução exata para x = 0,5 é

$$y = -0{,}5(0{,}5)^4 + 4(0{,}5)^3 - 10(0{,}5)^2 + 8{,}5(0{,}5) + 1 = 3{,}21875$$

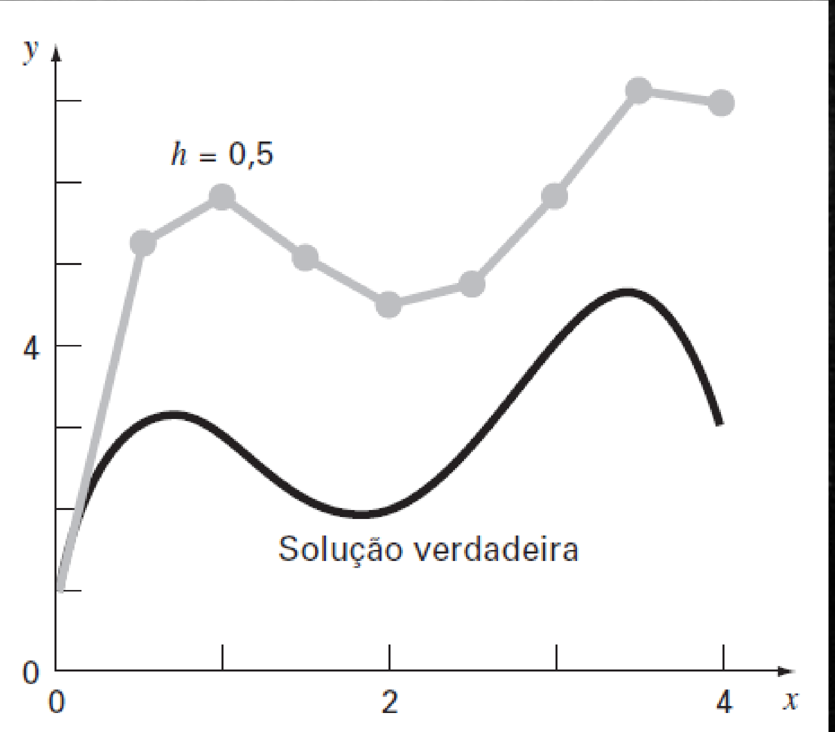
E_t = verdadeiro − aproximado = 3,21875 − 5,25 = −2,03125

$\varepsilon_t = -63{,}1\%.$

Método de Euler

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

			Erro Porcentual Relativo	
x	$y_{verdadeiro}$	y_{Euler}	Global	Local
0,0	1,00000	1,00000		
0,5	3,21875	5,25000	−63,1	−63,1
1,0	3,00000	5,87500	−95,8	−28,0
1,5	2,21875	5,12500	131,0	−1,41
2,0	2,00000	4,50000	−125,0	20,5
2,5	2,71875	4,75000	−74,7	17,3
3,0	4,00000	5,87500	46,9	4,0
3,5	4,71875	7,12500	−51,0	−11,3
4,0	3,00000	7,00000	−133,3	−53,0



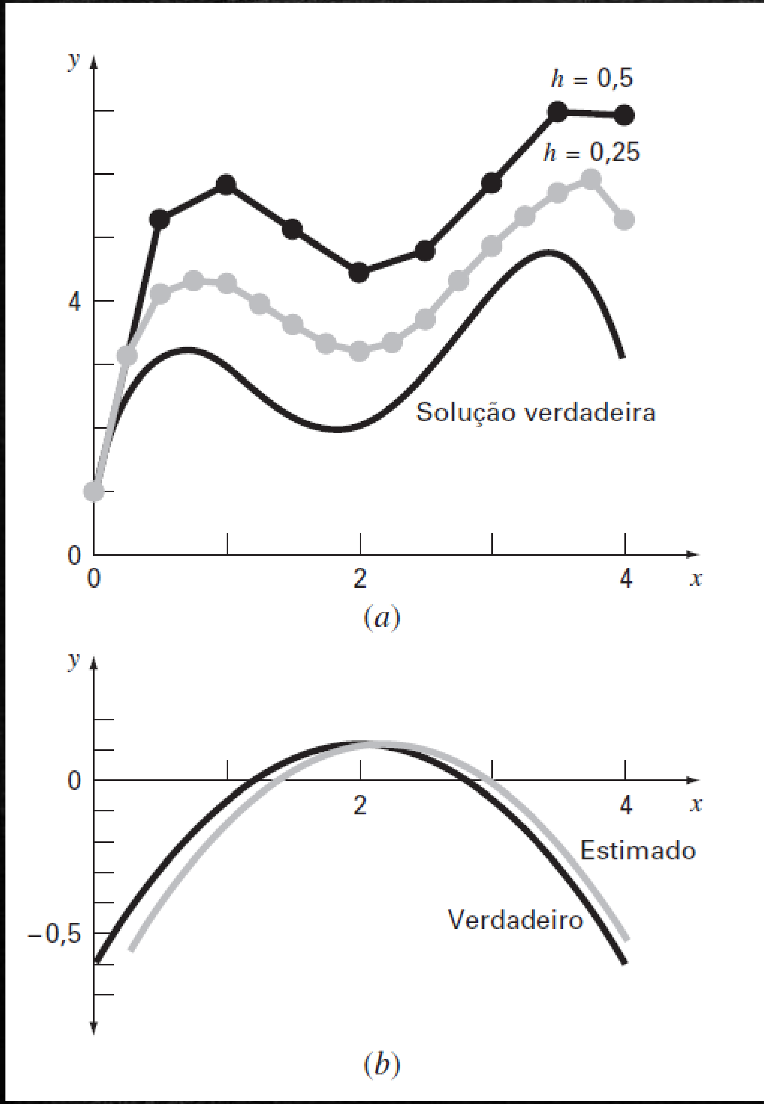
Para métodos baseados na série de Taylor: $y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y_i''(\xi)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}(\xi)}{(n)!}h^n$

Para o Método de Euler $E_a = \frac{f'(x_i,y_i)}{2!}h^2$

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Método de Euler

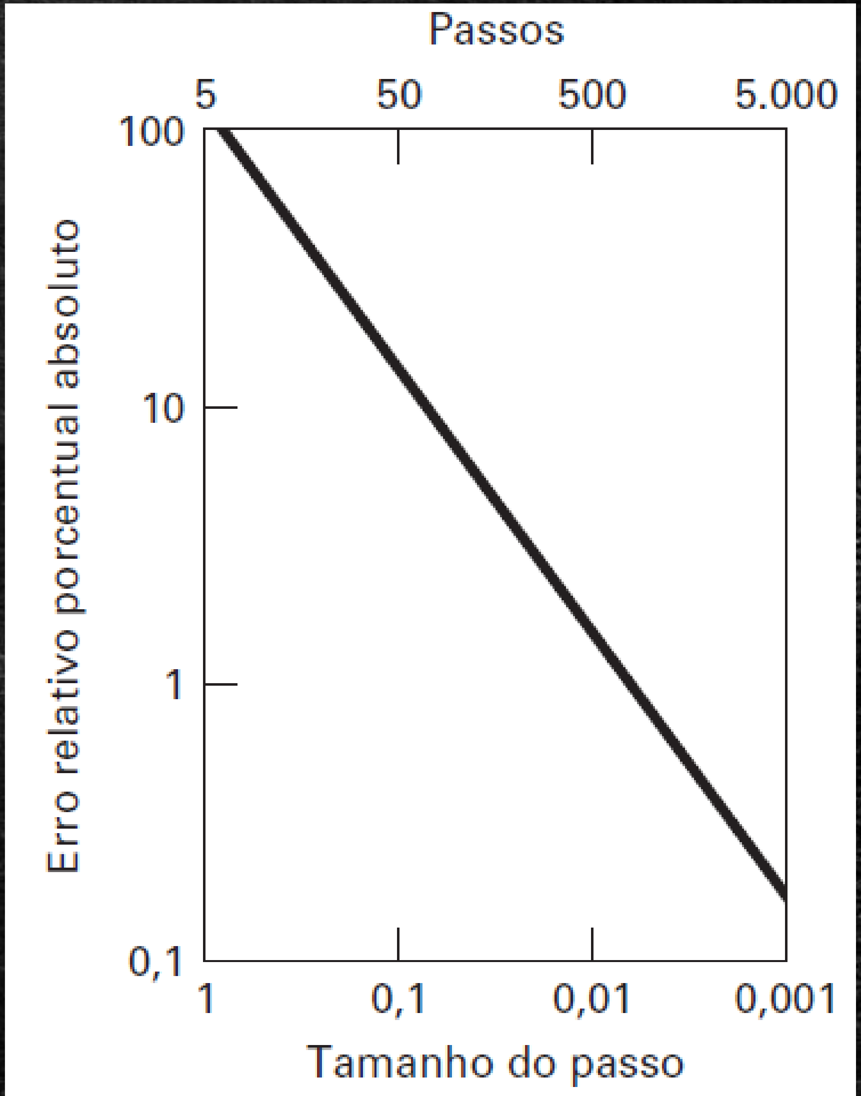
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$



Fazendo todos os pontos do intervalo com h=0,5 e com h=0,25.

valor absoluto do erro global relativo porcentual em x=5 como uma função do tamanho do passo.

Erro relativo com h=0,5 e com h=0,25.



Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y_i''(\xi)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}(\xi)}{(n)!}h^n$$

Método de Heun

$$\left.\begin{aligned} y^0_{i+1} &= y_i + f(x_i, y_i)h \\ y'_{i+1} &= f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)h \end{aligned}\right\} \quad \bar{y'} = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}$$

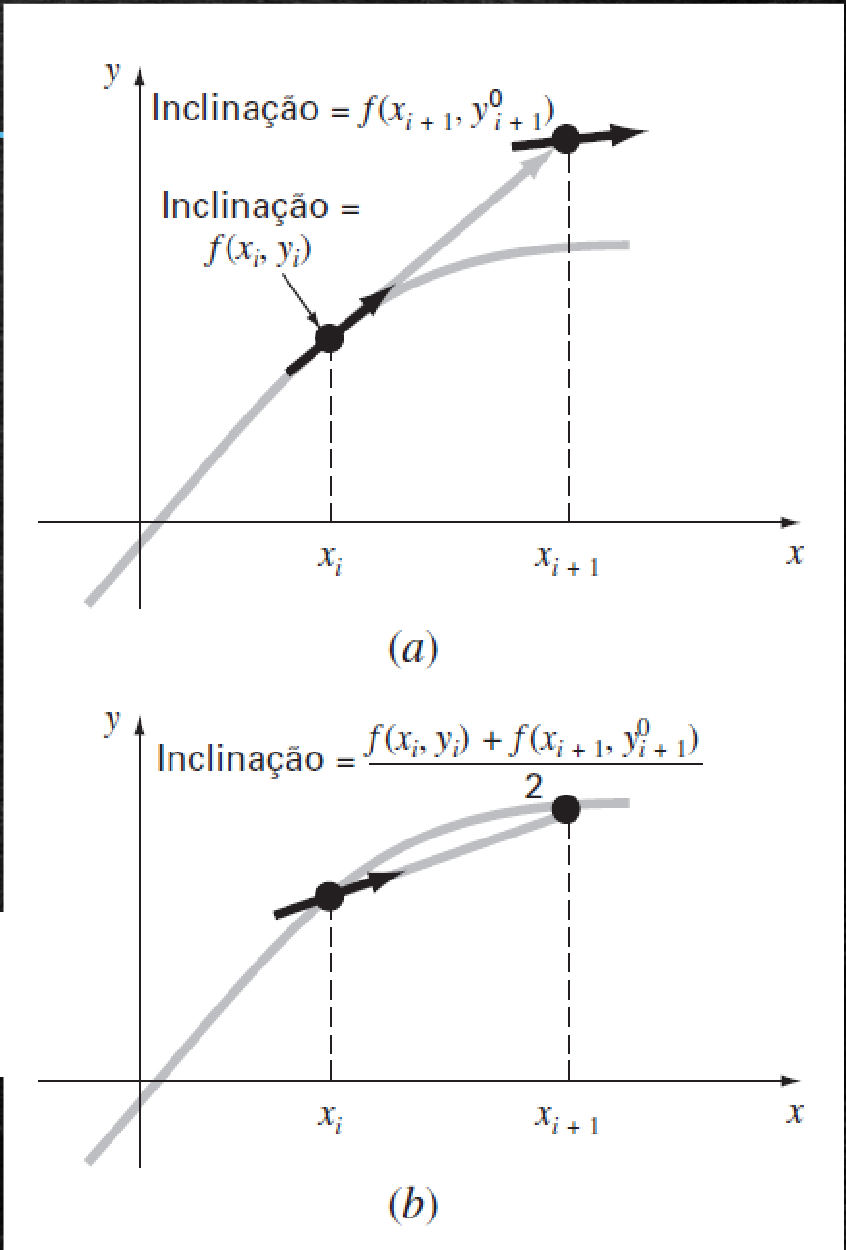
$$\boxed{y^{(1)}_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i,y_i) + f\left(x_{i+1}, y^{(0)}_{i+1}\right)}{2}h}$$

$$\text{Preditor} \quad y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$\text{Corretor} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}h$$

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y^j_{i+1} - y^{j-1}_{i+1}}{y^j_{i+1}} \right| 100\%$$

$$E_t = -\frac{f''(\xi)}{12}h^3$$



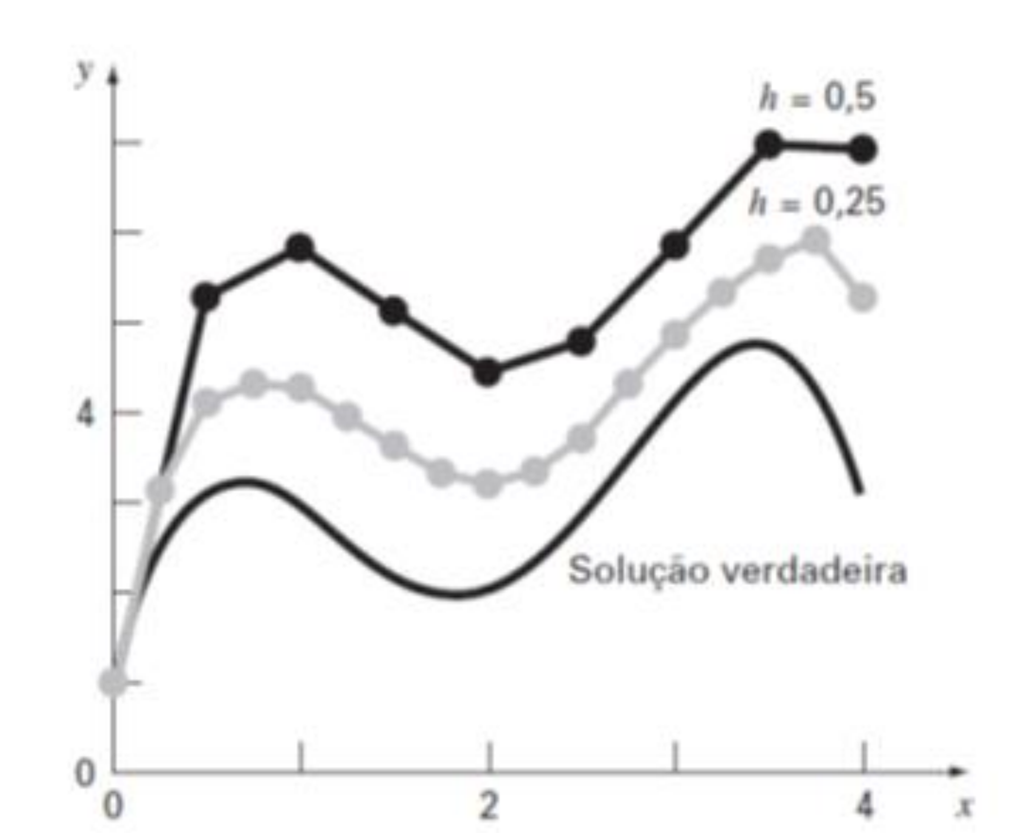
Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

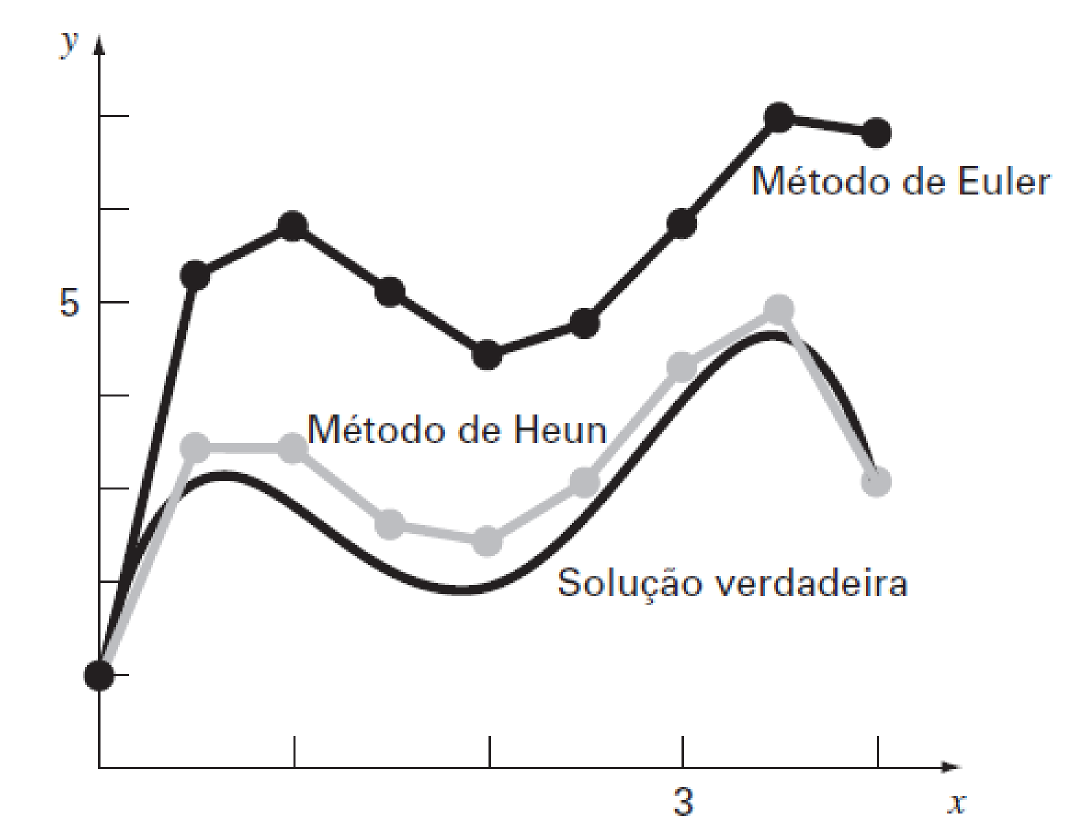
Método de Heun

Comparando Euler com h=0,25 e Heun com h=0,5, para o problema

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

$$y(0{,}5) = y(0) + f(0,1)0{,}5$$





Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

Método de Heun

Exemplo: $\frac{dy}{dx} = 4e^{0,8x} - 0,5y$

Condição inicial em
$x = 0,\ y = 2$

solução analítica:
$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8x} - e^{0,5x}\right) + 2e^{0,5x}$$

$$y_{i+1}^{0} = y_i + \left(4e^{0,8x_i} - 0,5y_i\right)h$$

$$y_{i+1}^{1} = y_i + \frac{\left(4e^{0,8x_i} - 0,5y_i\right) + \left(4e^{0,8x_{i+1}} - 0,5y_{i+1}^{0}\right)}{2}h$$

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i + \frac{\left(4e^{0,8x_i} - 0,5y_i\right) + \left(4e^{0,8x_{i+1}} - 0,5y_{i+1}^{k}\right)}{2}h$$

Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

Método de Heun

Exemplo: $\dfrac{dy}{dx} = 4e^{0,8x} - 0,5y$

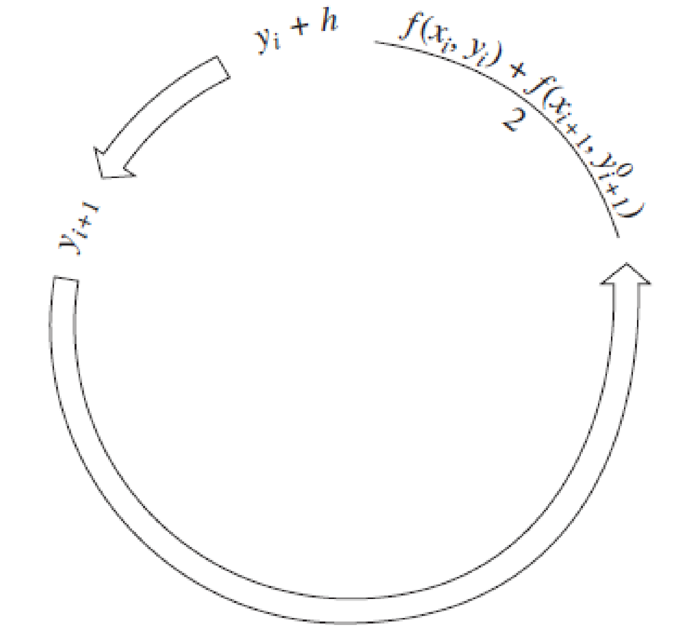
Condição inicial em $x = 0,\ y = 2$

solução analítica:

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8x} - e^{0,5x}\right) + 2e^{0,5x}$$

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i + \frac{\left(4e^{0,8x_i} - 0,5y_i\right) + \left(4e^{0,8x_{i+1}} - 0,5y_{i+1}^{k}\right)}{2}h$$

		Iterações do Método de Heun			
		1		15	
x	$y_{verdadeiro}$	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2,0000000	2,0000000	0,00	2,0000000	0,00
1	6,1946314	6,7010819	8,18	6,3608655	2,68
2	14,8439219	16,3197819	9,94	15,3022367	3,09
3	33,6771718	37,1992489	10,46	34,7432761	3,17
4	75,3389626	83,3377674	10,62	77,7350962	3,18



Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

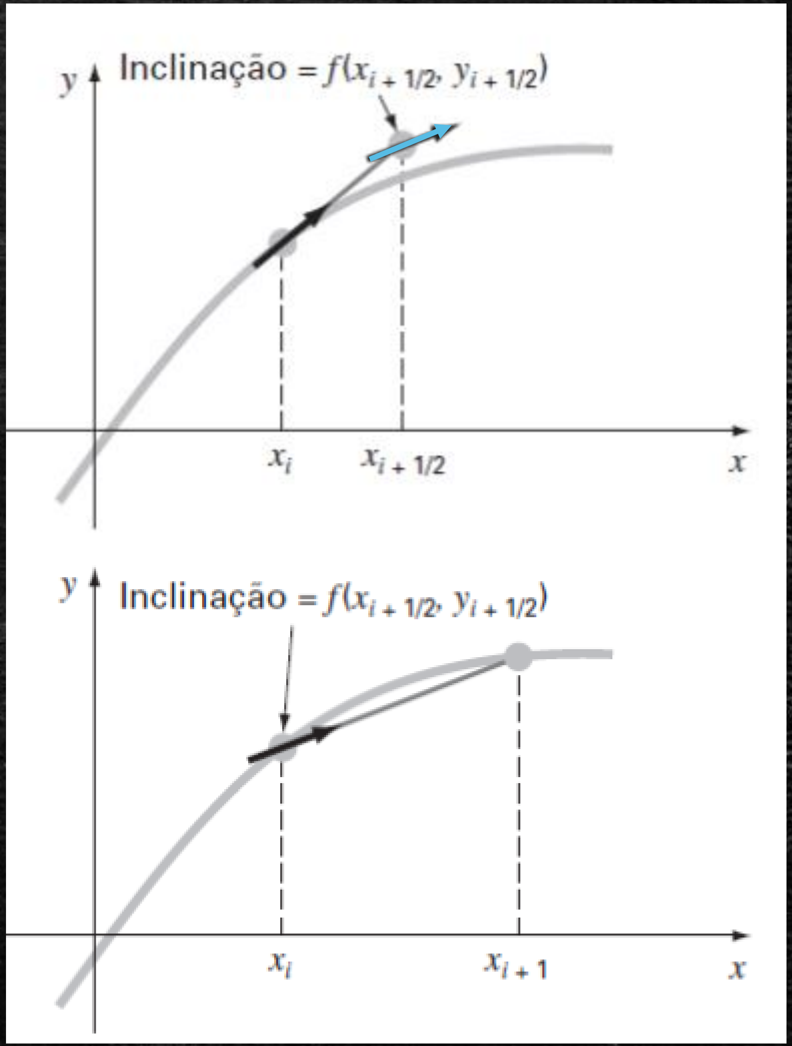
Método de Euler Modificado

(ou Método do Ponto Médio ou Polígono Melhorado)

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$



Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

Método de Euler Modificado

solução analítica:

Exemplo: $\frac{dy}{dx} = 4e^{0,8x} - 0,5y$

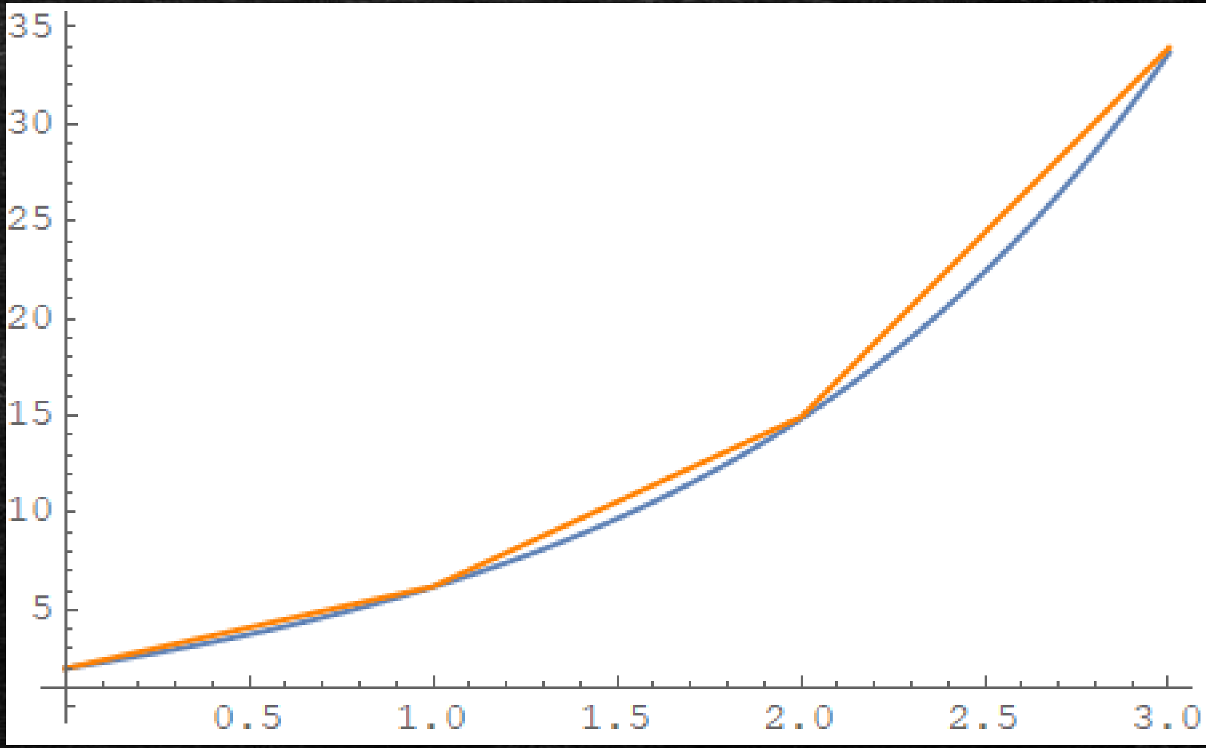
Condição inicial em $x = 0,\ y = 2$

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8x} - e^{0,5x}\right) + 2e^{0,5x}$$

$$y_{i+1/2} = y_i + \left(4e^{0,8x_i} - 0,5y_i\right)\frac{h}{2}$$

$$f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) = \left(4e^{0,8x_{i+\frac{1}{2}}} - 0,5y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)h$$



solução numérica: $\{\{0,2\},\{1,6.22\},\{2,14.942\},\{3,33.94\}\}$

solução analítica: $\{\{0,2\},\{1,6.19\},\{2,14.844\},\{3,33.68\}\}$

Métodos por Séries de Taylor de Ordem Superior

Método da série de Taylor

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \qquad E_a = \frac{f''(x_i, y_i)}{3!}h^3$$

$$f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y f$$

$$y''' = f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] f + f_y\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

$$= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

Método da série de Taylor $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Exemplo:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$0 \le x \le 0{,}3$$
$$h = 0{,}1$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i,y_i)}{2!}h^2 + \frac{f''(x_i,y_i)}{3!}h^3$$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f_n + \frac{h^2}{2}\, f_n' + \frac{h^3}{3!}\, f_n''$$

$y'' = f_x + f_y f$

$$f' = 1 + (-1)(-y + x + 2) = y - x - 1$$

$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x\, f_y + f_y^2 f$

$$f'' = -1 + (1)(-y + x + 2) = -y + x + 1$$

Método da série de Taylor

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h + \frac{f'(x_0,y_0)}{2!}h^2 + \frac{f''(x_0,y_0)}{3!}h^3$$

$$f = -y + x + 2$$
$$f' = y - x - 1$$
$$f'' = -y + x + 1$$

$$y_1 = y_0 + h\ f_0 + \frac{h^2}{2}\ f_0' + \frac{h^3}{3!}\ f_0''$$

$$f_0 = f(x_0, y_0) = f(0,2) = -2 + 0 + 2 = 0\ ,$$

$$f_0' = f'(x_0, y_0) = f'(0,2) = 2 - 0 - 1 = 1\ ,$$

$$f_0'' = f''(x_0, y_0) = f''(0,2) = -2 + 0 + 1 = -1\ .$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\ +\ 0.1(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-1) \\ &= 2.0048\ \simeq y(x_1)\ =\ y(0.1)\ . \end{aligned}$$

Método da série de Taylor

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$f = -y + x + 2$$
$$f' = y - x - 1$$
$$f'' = -y + x + 1$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= f(x_1, y_1) = f(0.1, 2.0048) = -2.0048 + 0.1 + 2 = 0.0952\ , \\
f_1' &= f'(x_1, y_1) = f'(0.1, 2.0048) = 2.0048 - (0.1) - 1 = 0.9048\ , \\
f_1'' &= f''(x_1, y_1) = f''(0.1, 2.0048) = -2.0048 + 0.1 + 1 = -0.9048\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= 2.0048 + 0.1(0.0952) + \frac{(0.1)^2}{2}(0.9048) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-0.9048) \\
&= 2.0186 \ \simeq y(x_2) \ = \ y(0.2)\ .
\end{aligned}$$

Método da série de Taylor

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y_3 = y_2 + h\, f_2 + \frac{h^2}{2}\, f_2' + \frac{h^3}{3!}\, f_2''$$

$$f = -y + x + 2$$
$$f' = y - x - 1$$
$$f'' = -y + x + 1$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= f(x_2, y_2) = f(0.2, 1.9603) = -2.0186 + 0.2 + 2 = 0.1814\,, \\
f_2' &= f'(x_2, y_2) = f'(0.2, 1.9603) = 2.0186 - 0.2 - 1 = 0.8186\,, \\
f_2'' &= f''(x_2, y_2) = f''(0.2, 1.9603) = -2.0186 + 0.2 + 1 = -0.8186\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= 2.0186 + 0.1(0.1814) + \frac{(0.1)^2}{2}(0.8186) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-0.8186) \\
&= 2.0406 \simeq y(x_3) = y(0.3)\,.
\end{aligned}$$

Método da série de Taylor $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

Solução Analítica: $y(x) = x + 1 + e^{-x}$

x_n	y_n	$y(x_n)$
0	2	2
0.1	2.0048	2.00484
0.2	2.0186	2.01873
0.3	2.0406	2.04082

Método da série de Taylor

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Exemplo de limitação do método

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le 0{,}3 \\ h = 0{,}1 \end{array}$$

$$y' = f$$

$$y'' = f_x + f_y\, f$$

$$y'' = f' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

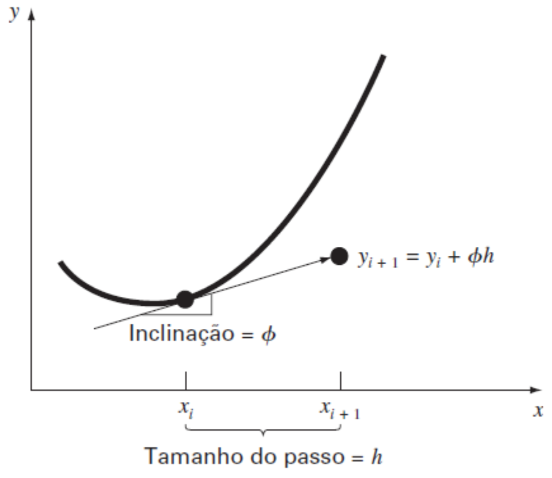
Como $y(0)=0$, a implementação resulta em divisão por 0!

Métodos de Runge-Kutta

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$



$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

Runge-Kutta de 2ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$y_{i+1} = y_i + \boxed{f(x_i, y_i)h} + \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!}}$$

$$g(x+r, y+s) = g(x,y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i, y_i) + a_2 h f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \boxed{[a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)]h} + \boxed{\left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}\right]h^2} + O(h^3)$$

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Runge-Kutta de 2ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$a_1 = 1 - a_2$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Heun com corretor único: $a_2 = 1/2$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Método do Ponto Médio (Euler Modificado): $a_2 = 1$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

Ralston: $a_2 = 2/3$

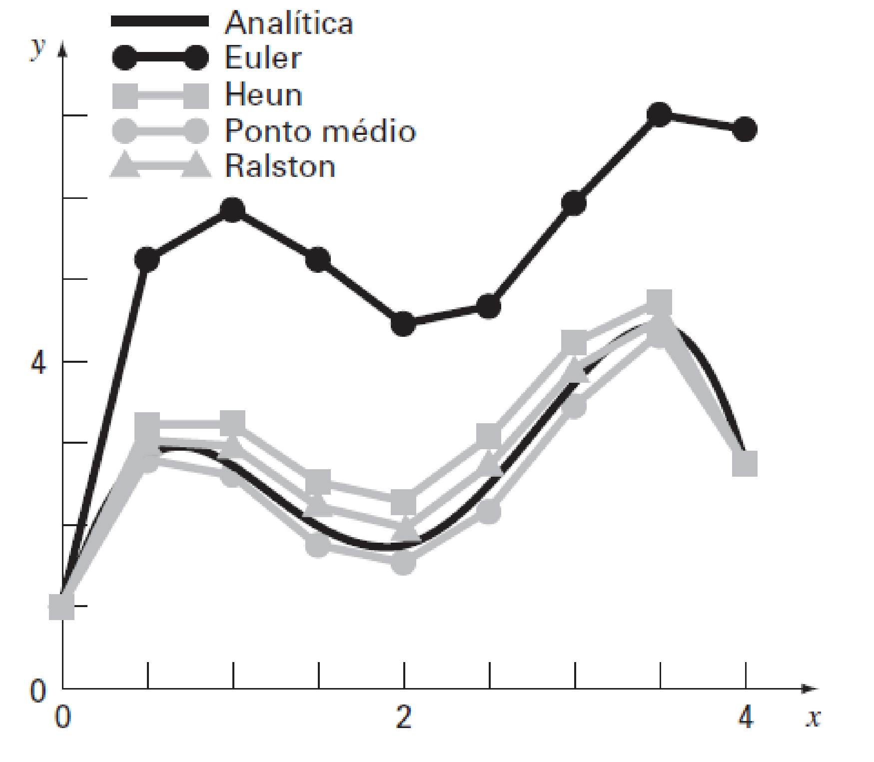
$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Runge-Kutta de 2ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Comparação de Diversos Esquemas RK de Segunda Ordem



		Heun		Ponto médio		RK de Segunda Ordem de Ralston	
x	**$y_{verdadeiro}$**	**y**	**$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)**	**y**	**$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)**	**y**	**$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)**
0,0	1,00000	1,00000	0	1,00000	0	1,00000	0
0,5	3,21875	3,43750	6,8	3,109375	3,4	3,277344	1,8
1,0	3,00000	3,37500	12,5	2,81250	6,3	3,101563	3,4
1,5	2,21875	2,68750	21,1	1,984375	10,6	2,347656	5,8
2,0	2,00000	2,50000	25,0	1,75	12,5	2,140625	7,0
2,5	2,71875	3,18750	17,2	2,484375	8,6	2,855469	5,0
3,0	4,00000	4,37500	9,4	3,81250	4,7	4,117188	2,9
3,5	4,71875	4,93750	4,6	4,609375	2,3	4,800781	1,7
4,0	3,00000	3,00000	0	3	0	3,031250	1,0

Runge-Kutta de 3ª ordem

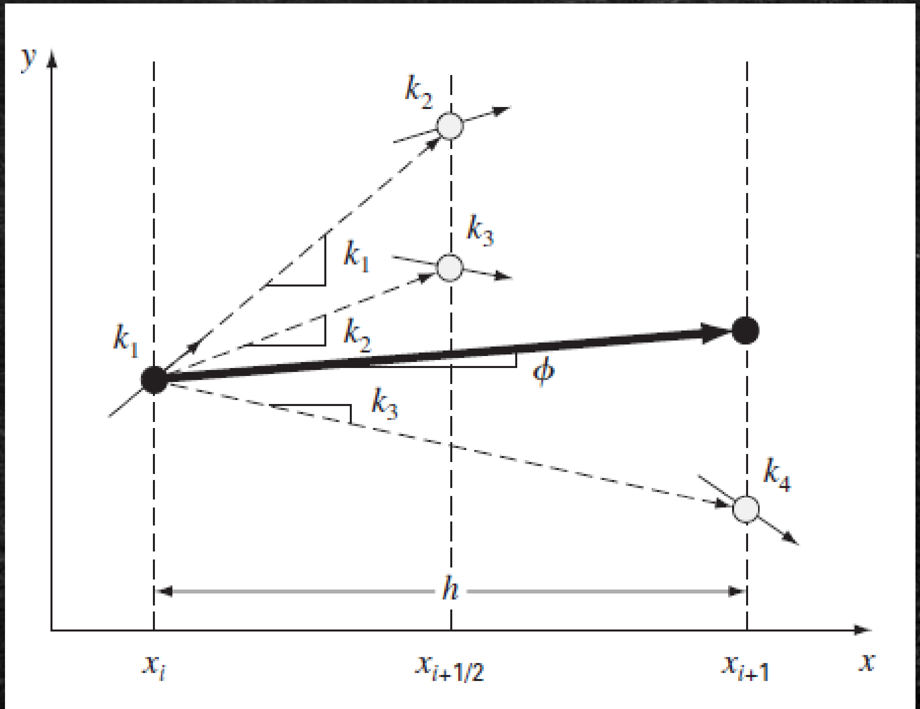
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h,\ y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$



Ralston e Rabinowitz (1978)

Runge-Kutta de 3ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

h=0,5
y(0)=1

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\; y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h,\; y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

$$k_1 = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$k_2 = -2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5 = 4.21875$$

$$k_3 = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5 = 1.25$$

$$y(0{,}5) = 1 + \frac{1}{6}\{8{,}5 + 4(4{,}21875) + 1{,}25\}\,0{,}5 = 3{,}21875$$

Exato para o polinômio de terceira ordem

Runge-Kutta de 3ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Exemplo: $\frac{dy}{dx} = 4e^{0,8x} - 0,5y$

h=1,0

Condição inicial em
$x = 0, y = 2$

solução analítica:

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8x} - e^{0,5x}\right) + 2e^{0,5x}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

$$k_1 = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3$$

$$k_2 = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5[2 + 0.5(1)3] = 4.21729879$$

$$k_3 = 4e^{0.8(1.0)} - 0.5[2 - 1(3) + 2(1)4.21729879] = 5.184864924$$

$$y(1.0) = 2 + \left\{\frac{1}{6}[3 + 4(4.21729879) + 5.184864924]\right\} 1$$

$$= 6.175676681$$

Exato = $\boxed{6.19463138}$ Erro=0.31%

Runge-Kutta de 4ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

(Clássica)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Exemplo: $f(x,y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$ condição inicial de $y = 1$ em $x = 0$.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

$h = 0{,}5$

$$k_1(0) = 8{,}5$$

$$k_2(0) = f(0{,}25) = 4{,}21875$$

$$k_3(0) = f(0{,}25) = 4{,}21875$$

$$k_4(0) = f(0{,}5) = 1{,}25$$

$$y(0{,}5) = 1 + \left\{\frac{1}{6}[8{,}5 + 2(4{,}21875) + 2(4{,}21875) + 1{,}25]\right\} 0{,}5$$

$= 3{,}21875$ ✓

Runge-Kutta de 4ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$k_1 = f(x_i,\, y_i)$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$

$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$

$k_4 = f(x_i + h,\, y_i + k_3 h)$

Exemplo: $f(x,y) = 4e^{0,8x} - 0,5y$ usando h = 0,5 com $y(0) = 2$ de $x = 0$ a 0,5.

$$y_{i+1} = y_{i+1} + \frac{1}{6}\{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\}\, h \quad = y_{i+1} + \phi\, h$$

$k1 = f(0{,}2) = 4e^{0,8(0)} - 0{,}5(2) = 3 \longrightarrow y^{(0)}(0{,}25) = 2 + 3(0{,}25) = 2{,}75$

$k2 = f(0{,}25,\ 2{,}75) = 4e^{0,8(0,25)} - 0{,}5(2{,}75) = 3{,}510611 \longrightarrow y^{(0)}(0{,}25) = 2 + 3{,}510611(0{,}25) = 2{,}877653$

$k3 = f(0{,}25,\ 2{,}877653) = 4e^{0,8(0,25)} - 0{,}5(2{,}877653) = 3{,}446785 \longrightarrow y^{(0)}(0{,}5) = 2 + 3{,}071785(0{,}5) = 3{,}723392$

$k4 = f(0{,}5,\ 3{,}723392) = 4e^{0,8(0,5)} - 0{,}5(3{,}723392) = 4{,}105603$

$$\phi = \frac{1}{6}[3 + 2(3{,}510611) + 2(3{,}446785) + 4{,}105603] = 3{,}503399$$

$$y(0{,}5) = 2 + 3{,}503399(0{,}5) = 3{,}751699$$

solução exata: 3,751521.

RK de 6ª ordem... Butcher (1964) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h,\, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h,\, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h,\, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right)$$

$$k_6 = f\left(x_i + h,\, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)$$

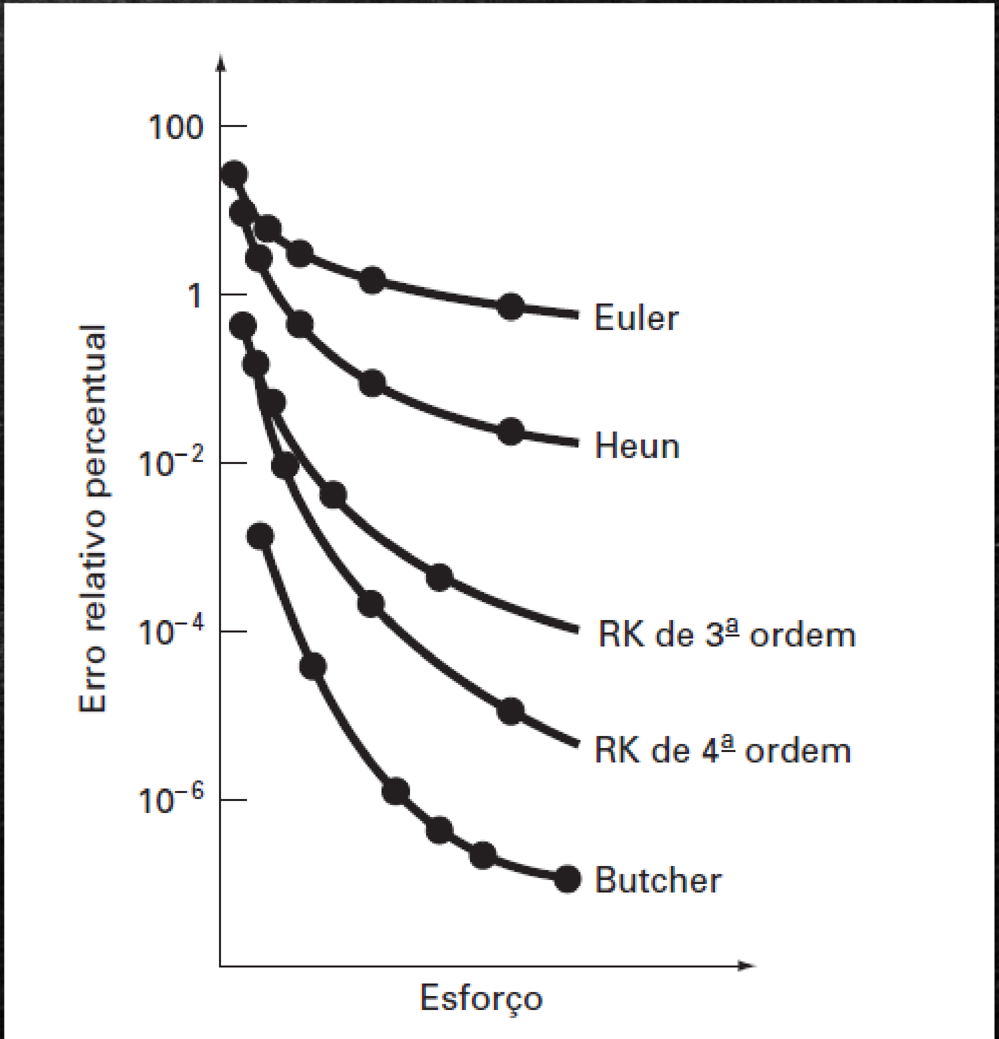
RK de 6ª ordem...

Butcher (1964)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Comparação do erro relativo porcentual *versus* o esforço computacional para os métodos RK de primeira a quinta ordem.

$$f(x, y) = 4e^{0,8x} - 0,5y$$



Sistemas de Equações Diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Atenção! A cada passo, cada uma das equações acopladas deve ser resolvida.

Exemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -0{,}5y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4 - 0{,}3y_2 - 0{,}1y_1 \end{cases}$$

$y_1(0) = 4;$
$y_2(0) = 6.$

Por Euler (exemplo 1º passo):

$$y_1(0{,}5) = 4 + [-0{,}5(4)]0{,}5 = 3$$

$$y_2(0{,}5) = 6 + [4 - 0{,}3(6) - 0{,}1(4)]0{,}5 = 6{,}9$$

x	**y₁**	**y₂**
0	4	6
0,5	3	6,9
1,0	2,25	7,715
1,5	1,6875	8,44525
2,0	1,265625	9,094087

Por Runge-Kutta de 4ª ordem (exemplo 1º passo):

$$y_1(0{,}5) = 4 + \frac{1}{6}[-2 + 2(-1{,}75 - 1{,}78125) - 1{,}554688]0{,}5 = 3{,}115234$$

$$y_2(0{,}5) = 6 + \frac{1}{6}[1{,}8 + 2(1{,}715 + 1{,}715125) + 1{,}631794]0{,}5 = 6{,}857670$$

x	**y₁**	**y₂**
0	4	6
0,5	3,115234	6,857670
1,0	2,426171	7,632106
1,5	1,889523	8,326886
2,0	1,471577	8,946865

Solução de Equações Diferenciais de ordem superior

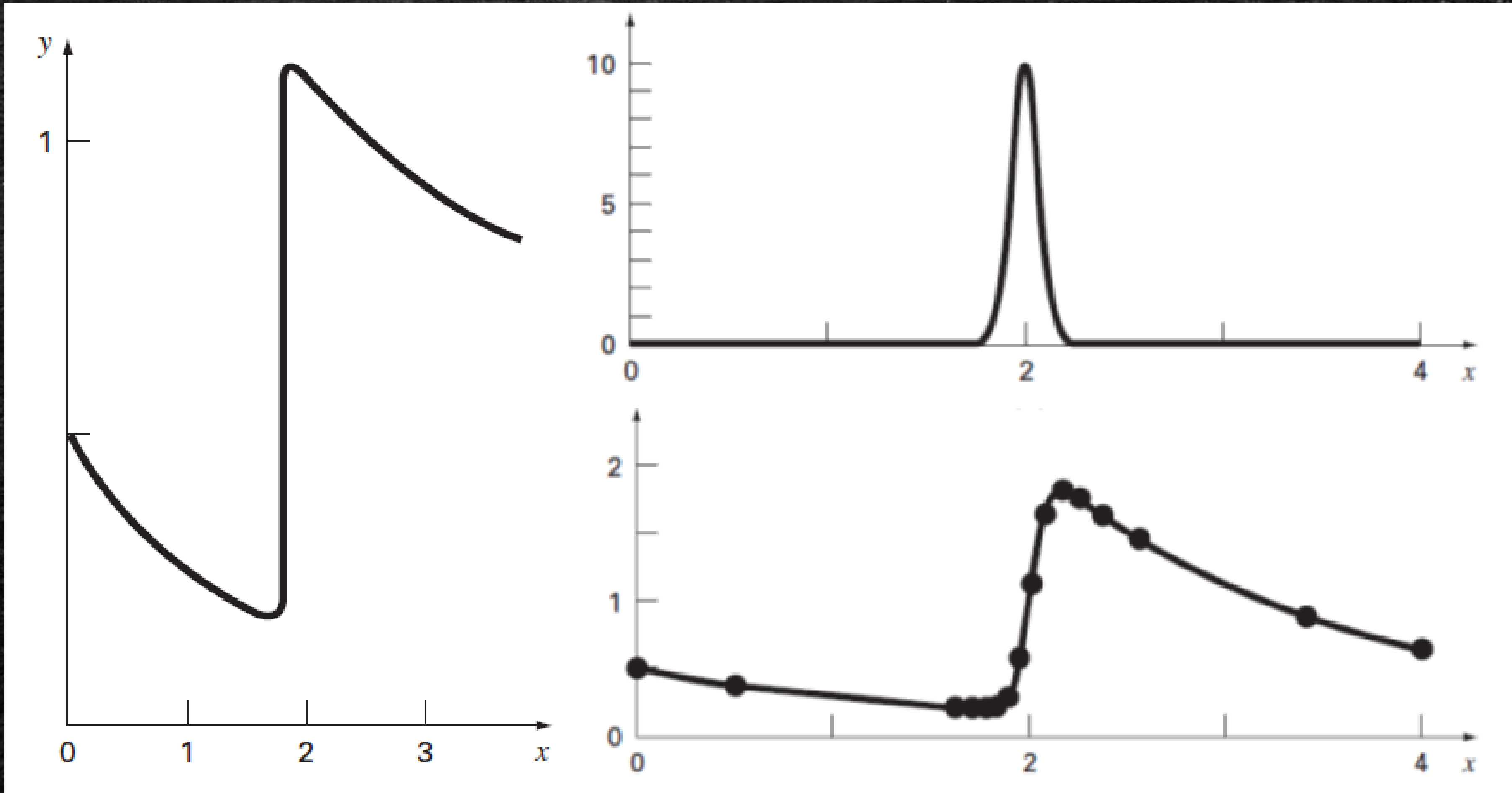
Exemplo $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} + y - 5x + 3 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = k \longrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = k \\ \frac{dk}{dx} = -k + y - 5x + 3 \end{cases}$

Pode-se transformar uma EDO de orden n em um sistema de n EDOs de primeira ordem

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \dots\right) \longrightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Grade Adaptativa

Regiões limitadas com variação diferenciada na solução requerem concentração localizada de pontos.



Compromisso entre precisão e economia de recursos.

Grade Adaptativa

Uma possibilidade: inferir, a cada intervalo h, o erro de truncamento, reduzindo o intervalo à metade provisoriamente (fazendo dois meios-passos). $\Delta = y_{h/2} - y_h$

Exemplo: $y = 4e^{0.8x} - 0{,}5y$ $\quad h = 2;\ y(0)=2$ solução verdadeira é $y(2) = 14{,}84392$

Com Runge-Kutta de ordem 4: $y(2) = 2 + \frac{1}{6}[3 + 2(6.40216 + 4.70108) + 14.11105]\times 2 = \underline{15.10584}$

Dobrando o número de passos:

$$\begin{cases} y(1) = 2 + \frac{1}{6}[3 + 2(4.21730 + 3.91297) + 5.945681]\times 1 = 6.20104 \\ y(2) = 6{,}20104 + \frac{1}{6}[5.80164 + 2(8.72954 + 7.99756) + 12.71283]\times 1 = \underline{14.86249} \end{cases}$$

Erro de Runge-Kutta de ordem 4 é proporcional a h^4, $\boxed{y_2 \leftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}}$ $\quad E_a = \frac{14.86249 - 15.10584}{15} = 0.01622$

$$y(2) = 14.86249 - 0.01622 = 14{,}84627$$

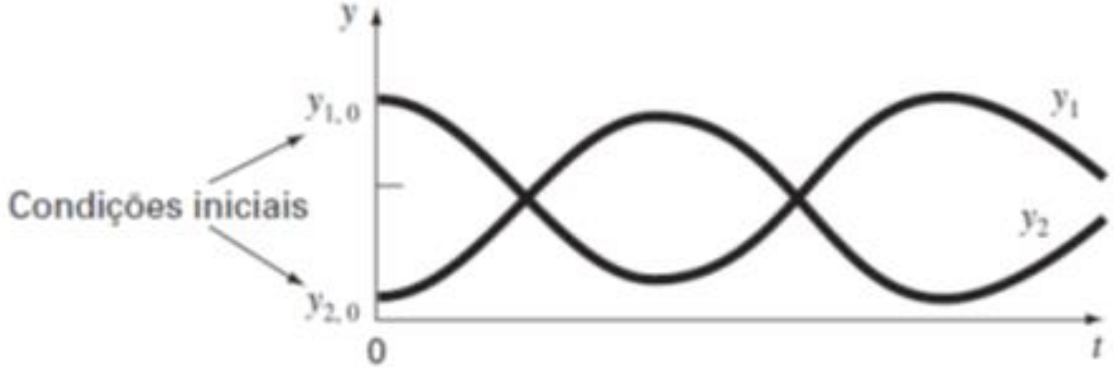
$(E_t = -0{,}00235)$.

Problema de Valores de contorno

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2)$$

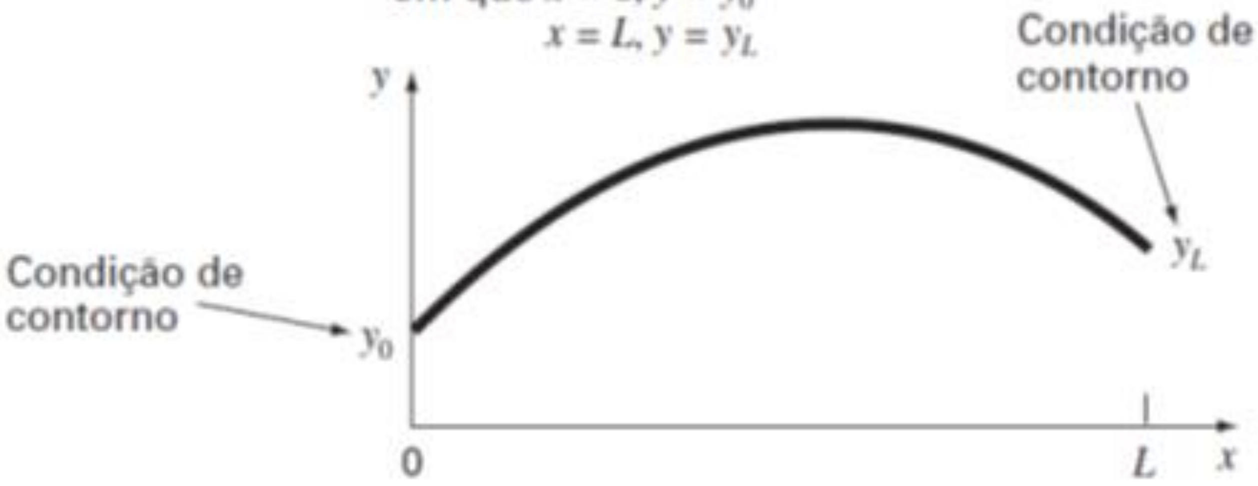
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2)$$

em que $t = 0$, $y_1 = y_{1,0}$ e $y_2 = y_{2,0}$



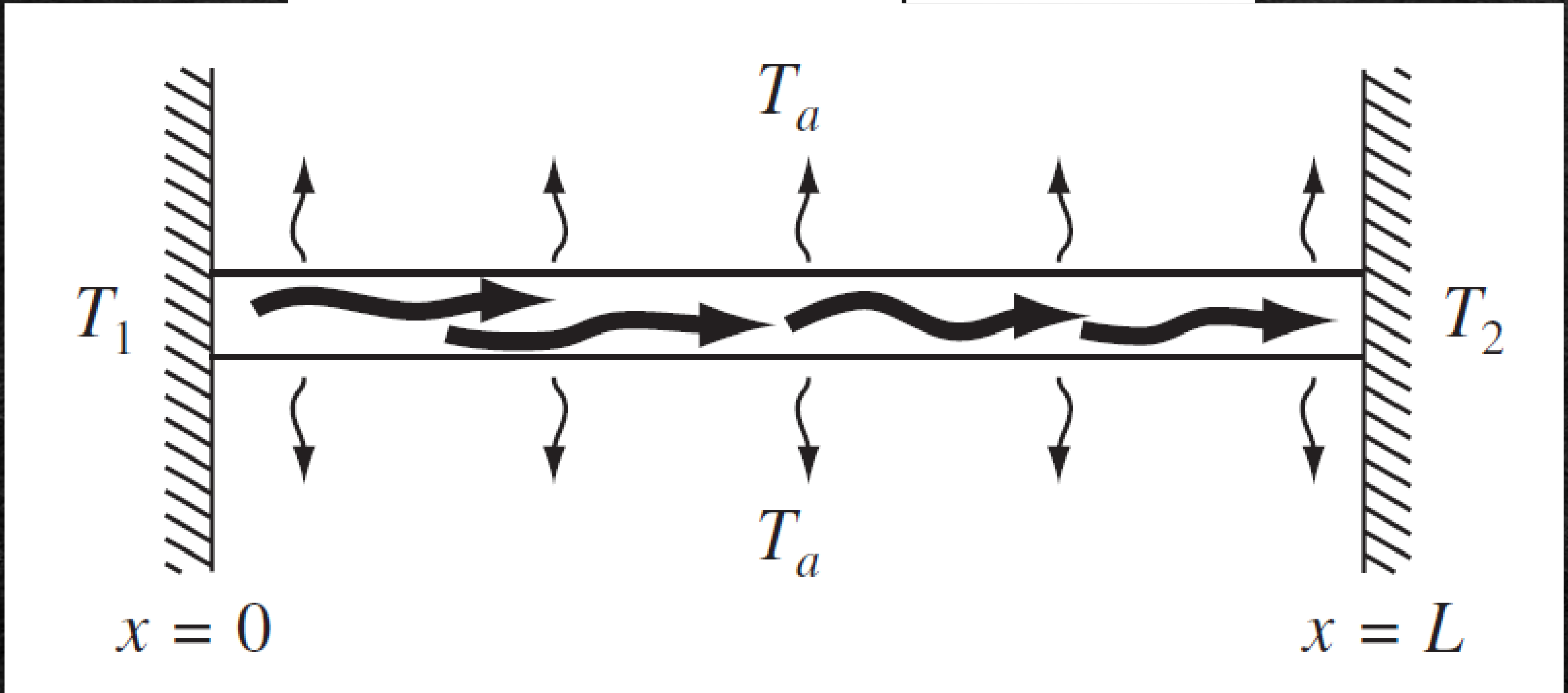
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

em que $x = 0$, $y = y_0$
$x = L$, $y = y_L$



Problema de Valores de contorno

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0 \qquad T(0) = T_1 \quad T(L) = T_2$$



$T_a = 20$, $T_1 = 40$, $T_2 = 200$ e $h = 0{,}01$ ➡ $T = 73{,}4523e^{0{,}1x} - 53{,}4523e^{-0{,}1x} + 20$

Método “shooting” (ou do artilheiro)

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

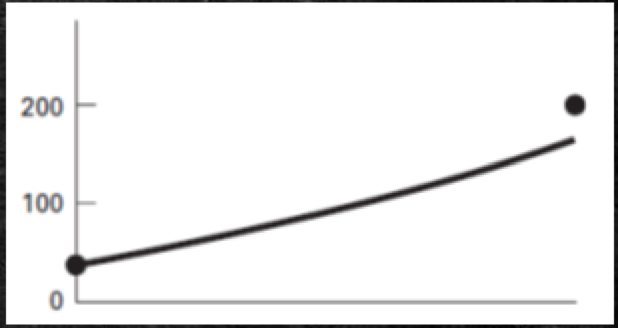
$$T(0) = T_1 \qquad T(L) = T_2$$

$T_a = 20$, $T_1 = 40$, $T_2 = 200$ e $h = 0{,}01$

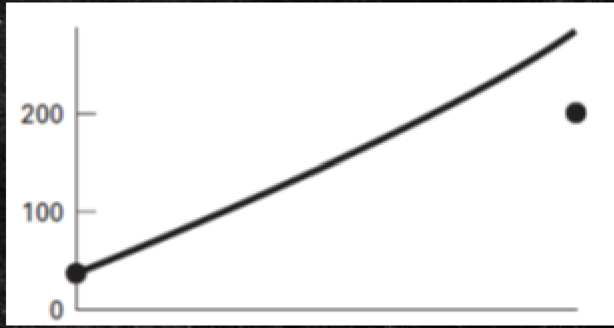
$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = z \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = h'(T - T_a) \end{cases}$$

Com Runge-Kutta de ordem 4

$z(0) = 10$; $T(10) = 168{,}3797$ →

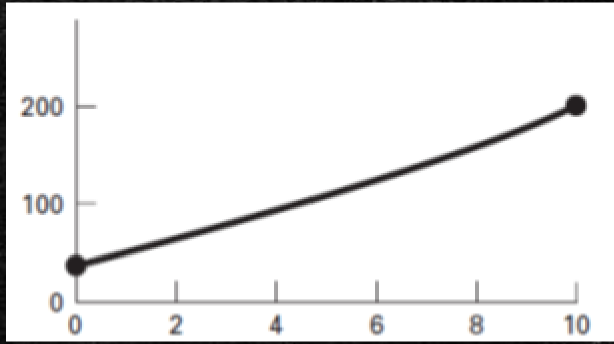


$z(0) = 20$ $T(10) = 285{,}8980$ →



$$\frac{z(0) - 10}{200 - 168{,}3797} = \frac{20 - 10}{285{,}8980 - 168{,}3797}$$

$$z(0) = 10 + \frac{20 - 10}{285{,}8980 - 168{,}3797}(200 - 168{,}3797) = 12{,}6907$$ →



Método das diferenças finitas

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - h'(T_i - T_a) = 0$$

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a$$

$$\begin{bmatrix} 2,04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 200,8 \end{Bmatrix}$$

$$\{T\}^T = \lfloor 65,9698 \quad 93,7785 \quad 124,5382 \quad 159,4795 \rfloor$$

Método das diferenças finitas

x	Verdadeiro	Método *Shooting*	Diferença Finita
0	40	40	40
2	65,9518	65,9520	65,9698
4	93,7478	93,7481	93,7785
6	124,5036	124,5039	124,5382
8	159,4534	159,4538	159,4795
10	200	200	200

Problema de Autovalores

$$[A]\{X\} = \{B\}$$ sistemas *não homogêneos*

$$[A]\{X\} = 0$$ sistema algébrico linear homogêneo

Autovalor

Autovetor

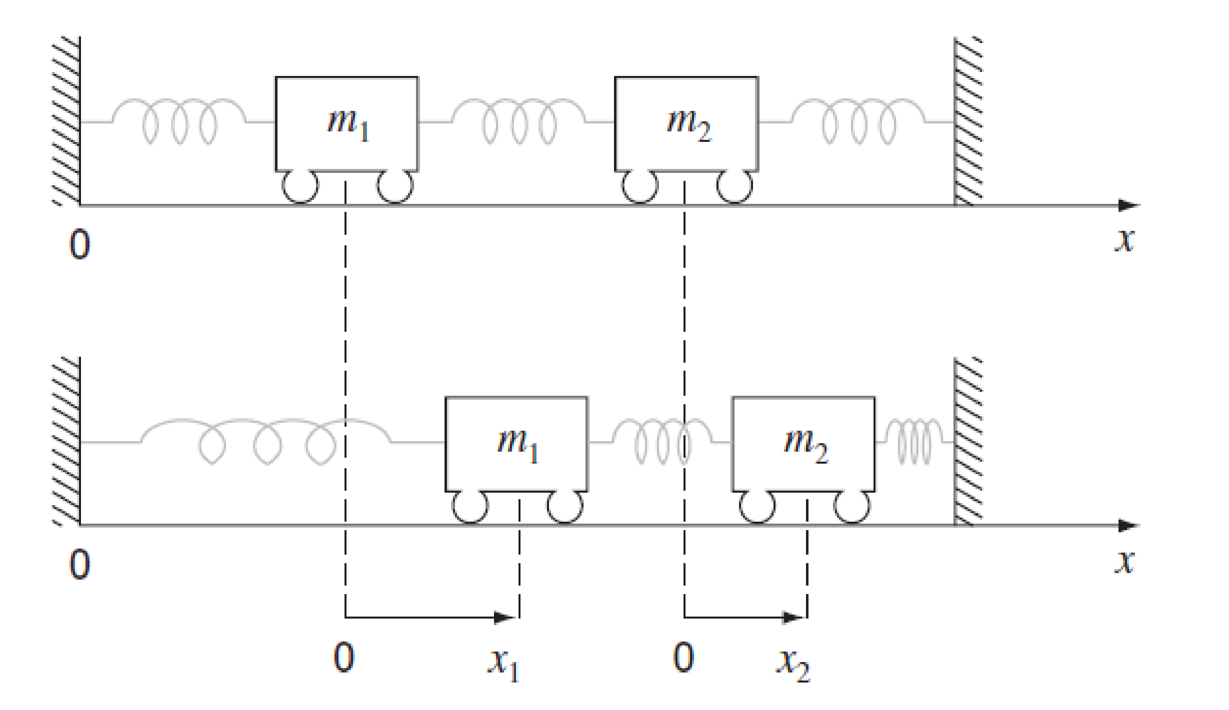
$$A\,X = \lambda\,X \longrightarrow [A - \lambda\, I]X = 0$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \longrightarrow (a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda)\dots\,(a_{nn} - \lambda) + \cdots = 0$$

O determinante da matriz $[A - \lambda\, I]$ deve ser igual a zero para permitir soluções não-triviais, o que limita λ *a* valores específicos que podem ser encontrados pelo polinômio característico da matriz. O problema passa aser, essencialmente, o de determinação de zeros do polinômio.

Problema de Autovalores

Exemplo:



$$x_i = A_i \operatorname{sen}(\omega t) \qquad x_i'' = -A_i\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

$$\left(\frac{2k}{m_1} - \omega^2\right)A_1 - \frac{k}{m_1}A_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m_2}A_1 + \left(\frac{2k}{m_2} - \omega^2\right)A_2 = 0$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} - k(-2x_1 + x_2) = 0$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - 2x_2) = 0$$

$m_1 = m_2 = 40$ kg e $k = 200$ N/m.

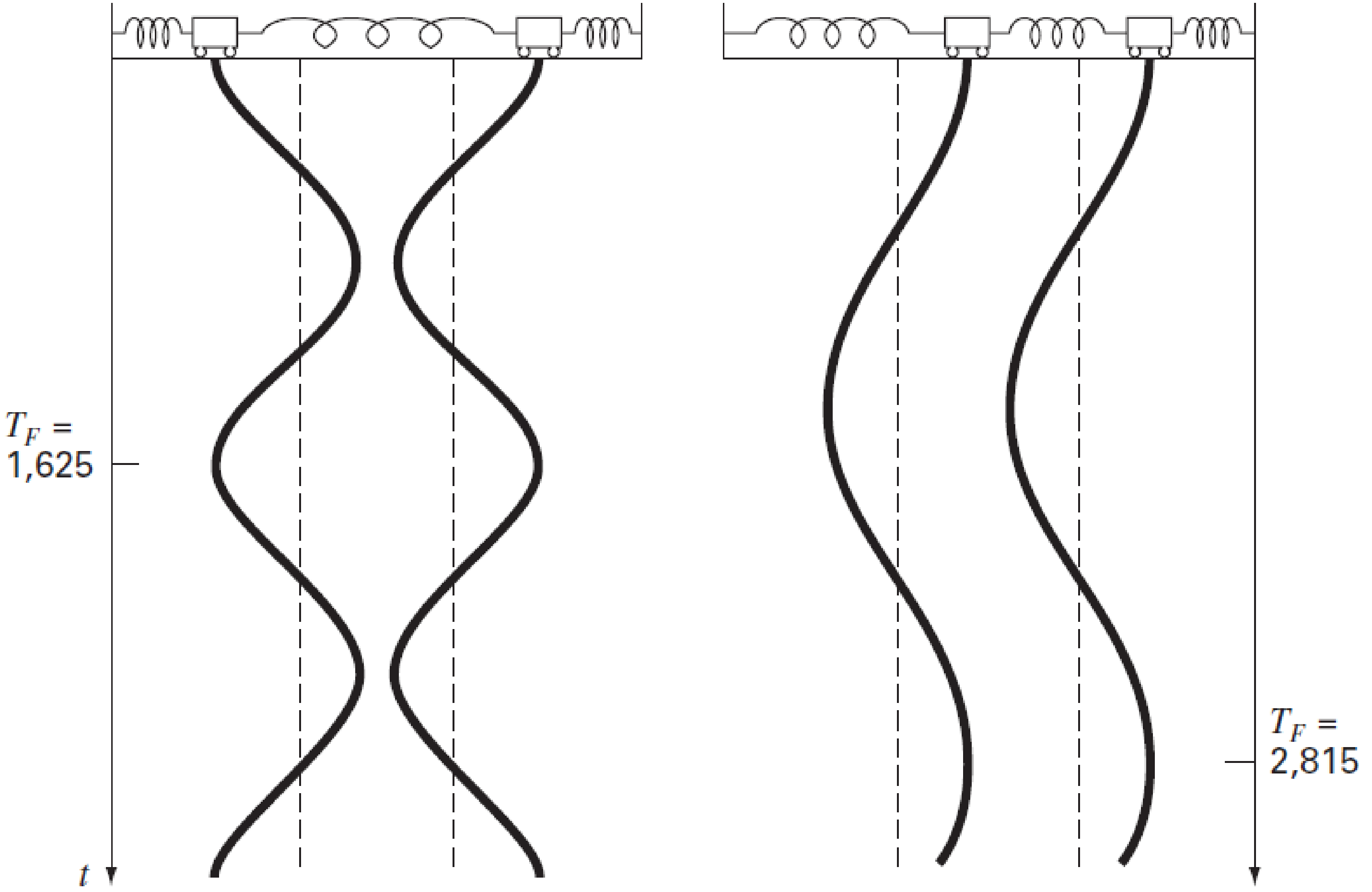
$$(10 - \omega^2)A_1 - 5A_2 = 0$$

$$-5A_1 + (10 - \omega^2)A_2 = 0$$

O determinante desse sistema é $(\omega^2)^2 - 20\omega^2 + 75 = 0$

As soluções são $\omega^2 = 15$ e $5\ s^{-2}$ $\omega = 3{,}873\ s^{-1}$ e $2{,}236\ s^{-1}$

Problema de Autovalores



(a) Primeiro modo

(b) Segundo modo

$\omega = 3{,}873\ s^{-1}$

$\omega = 2{,}236\ s^{-1}$

Problema de Autovalores

Um Problema de Contorno

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y(0) = 0$$

$$y(L) = 0$$

$$y = A\,\mathrm{sen}(px) + B\cos(px)$$

Como $0 = A$

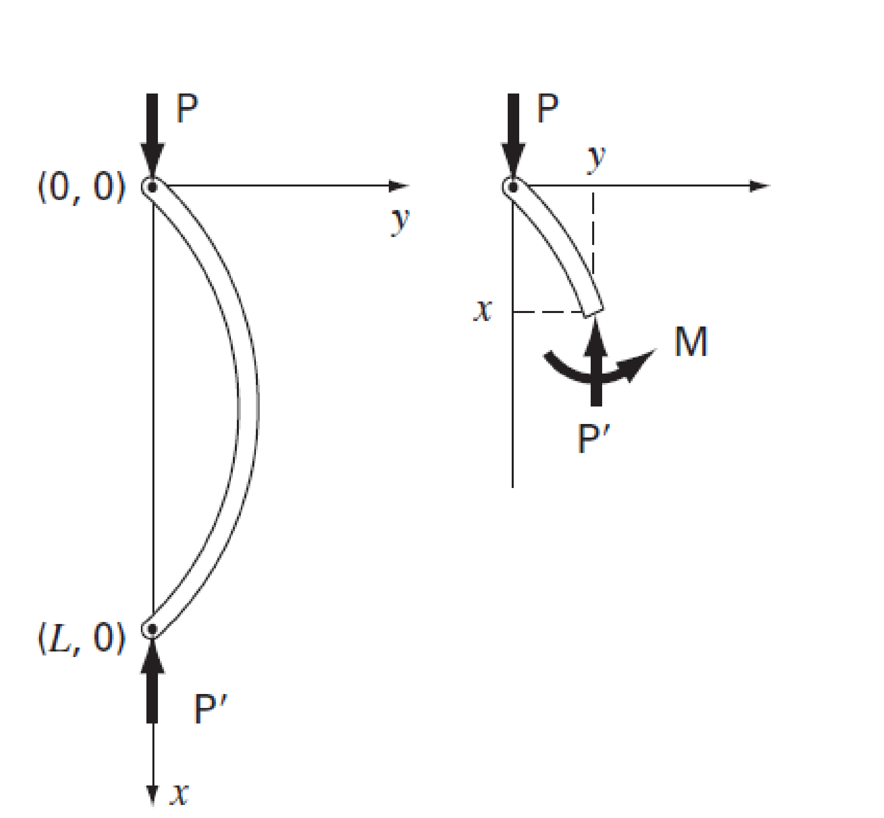
$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$0 = A$ sen $(p\,L) + B \cos(p\,L)$

$pL = n\pi$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$p = \frac{n\pi}{L} \longrightarrow P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \text{ para } n = 1,2,3\ldots$$

cargas de deformação



Problema de Autovalores

fórmula de Euler

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p^2 y_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} (2-h^2p^2) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-h^2p^2) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-h^2p^2) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-h^2p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Para
$E = 10 \times 10^9$ Pa,
$I = 1{,}25 \times 10^{-5}$ m^4, e
$L = 3$ m.

n	*p*, m^{-2}	*P*, kN
1	1,0472	137,078
2	2,0944	548,311
3	3,1416	1.233,701
4	4,1888	2.193,245
5	5,2360	3.426,946
6	6,2832	4.934,802
7	7,3304	6.716,814
8	8,3776	8.772,982