2ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I - Profª. Mirela

1. Calcule os seguintes limites por definição:

   (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$;

   (b) $\lim_{x\to 4} 9 - x = 5$;

   (c) $\lim_{x\to 3} 3x - 7 = 2$;

   (d) $\lim_{x\to 1} 2x + 3 = 5$;

   (e) $\lim_{x\to -3} 1 - 4x = 13$;

   (f) $\lim_{x\to 5} 3 = 3$;

   (g) $\lim_{x\to 1} x^2 - 2x = -1$;

   (h) $\lim_{x\to 2} x^2 - 4x = -4$;

   (i) $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$;

   (j) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 7$;

2. Calcule, se possível, o $\lim_{x\to 0} f(x)$, onde $f(x) = \frac{x^2}{x}$, utilizando a ideia intuitiva através do gráfico de $f(x)$. Em seguida, mostre o limite utilizando a definição.

3. Utilizando a definição de continuidade, mostre que $f(x) = 3x + 2$ é contínua em $p = 2$.

4. Mostre, pela definição, que se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, então $\lim_{x\to p}[-f(x)] = -L$.

5. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto 0. Justifique.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

6. Dê o valor que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 4, & \text{se } x = 3 \end{cases} \qquad \text{em } p = 3.$$

7. A função $f(x) = \frac{\cos x}{3x^2 + 1}$ é contínua? Justifique.

8. Calcule os limites das seguintes funções:

   (a) $\lim_{x\to 1}(x + 2)$;

   (b) $\lim_{x\to 1}(2x + 1)$;

   (c) $\lim_{x\to 2}(x^3 + 3x + 1)$;

   (d) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)$;

   (e) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x}$;

   (f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x}{x + 3}$;

   (g) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x}$;

   (h) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x} + x)$;

   (i) $\lim_{x\to 1} \frac{3x - 1}{x}$;

   (j) $\lim_{x\to 0} -x^4 + 5x^3 - 3x - 1$.

9. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -1/3} \dfrac{9x^2-1}{3x+1}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+9}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$.

10. Seja h uma função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4-x^2, \text{ se } x \le 1, \\ 2+x^2, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

Encontre cada um dos seguintes limites se eles existirem: $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

11. Seja $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0, \\ x^2+1, \text{ se } x \ge 0 \end{cases}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Com base nisso, diga se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

12. Considere a função maior inteiro $f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \le x\}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Desenhe o gráfico dessa função e diga em quais pontos $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

13. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 0, \\ x^2, & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 2, & \text{se } x = 1, \\ 2-x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Calcule os limites abaixo, se existirem:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;

(h) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

14. Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0, \\ 1, \text{ se } x \ge 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0, \\ x, \text{ se } x \ge 0. \end{cases}$$

Mostre que f e g são ambas descontínuas em 0, mas que o produto $f.g$ é contínua em 0.

15. A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em 1? E em $\frac{1}{2}$? Justifique.

16. Calcule, caso exista, os limites abaixo. Justifique sua resposta.

(a) $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)\text{sen}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x \to -3}(x^2-9)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x \to 0}\text{sen}(x)\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 g(x)$, onde $g(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x \leq 0, \\ -3, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

17. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{2(x-1)}$;

(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{2(x-1)}$;

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{2(x-1)}$;

(d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

(e) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$;

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$;

(g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$;

(h) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|+x^2}$;

(i) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 2, \\ 3x-2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

(j) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2+5, & \text{se } x \leq 1, \\ -x+1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

18. A afirmação "$\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow f(x)$ é contínua em p" é falsa ou verdadeira? Justifique.

19. Dada a função $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$, verifique que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Essa função é contínua em 1? Por que?

20. Mostre por definição que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$