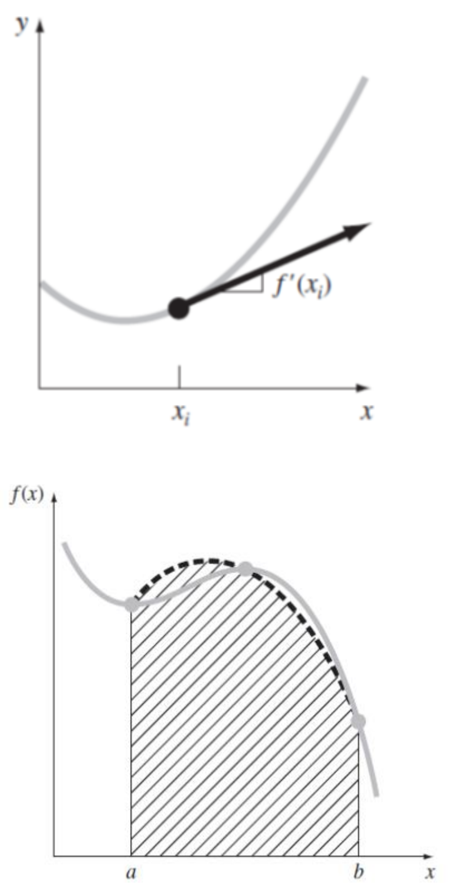
# Derivação e Integração Numérica

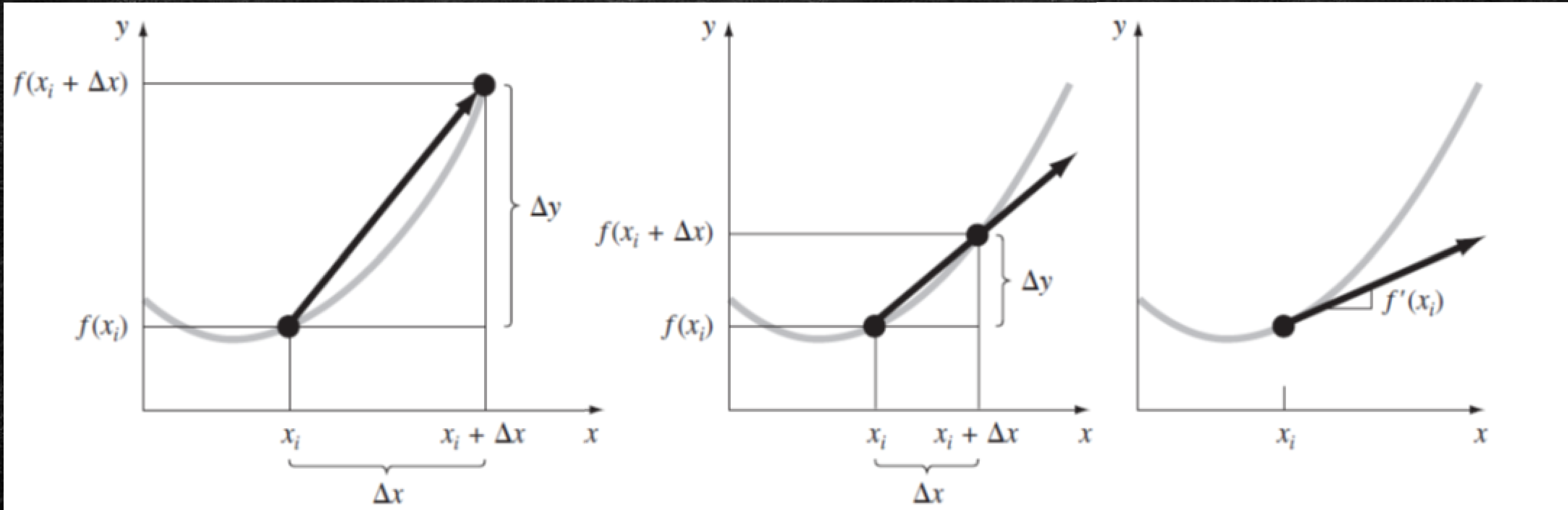



Análise Numérica & Cálculo Numérico
Gesil S. Amarante II

Departamento de Ciências Exatas (DCEx) - UESC

# Derivação Numérica (1ª ordem)

Revisando a derivada (definição)

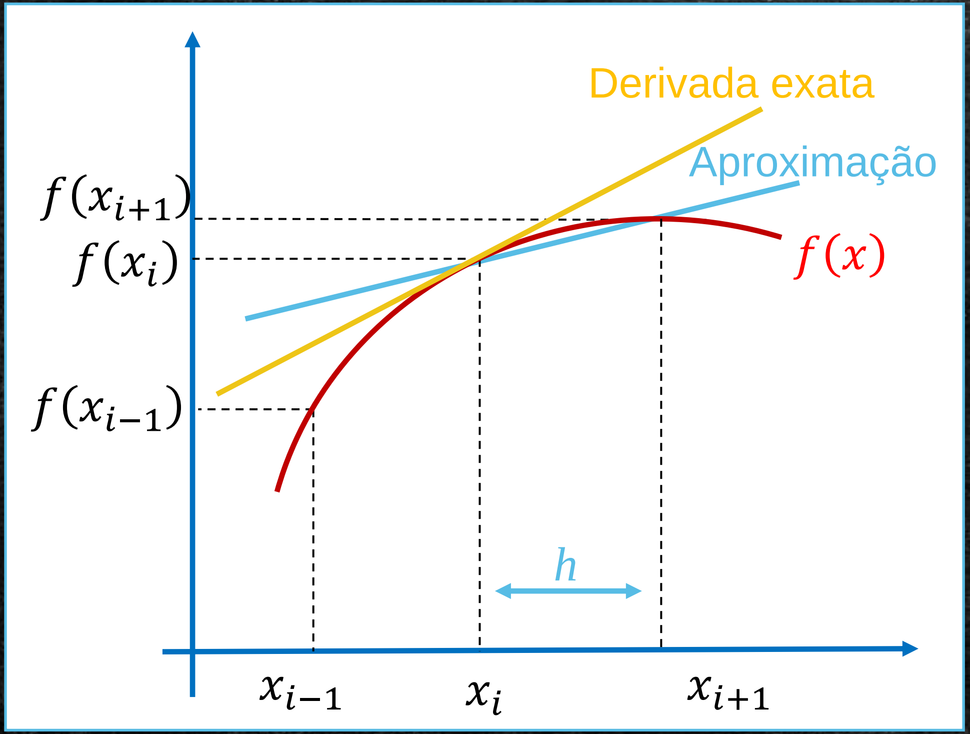



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Relembrando o processo do limite $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

# Derivação Numérica (1ª ordem)




Derivada progressiva

Conjunto discreto de pontos...

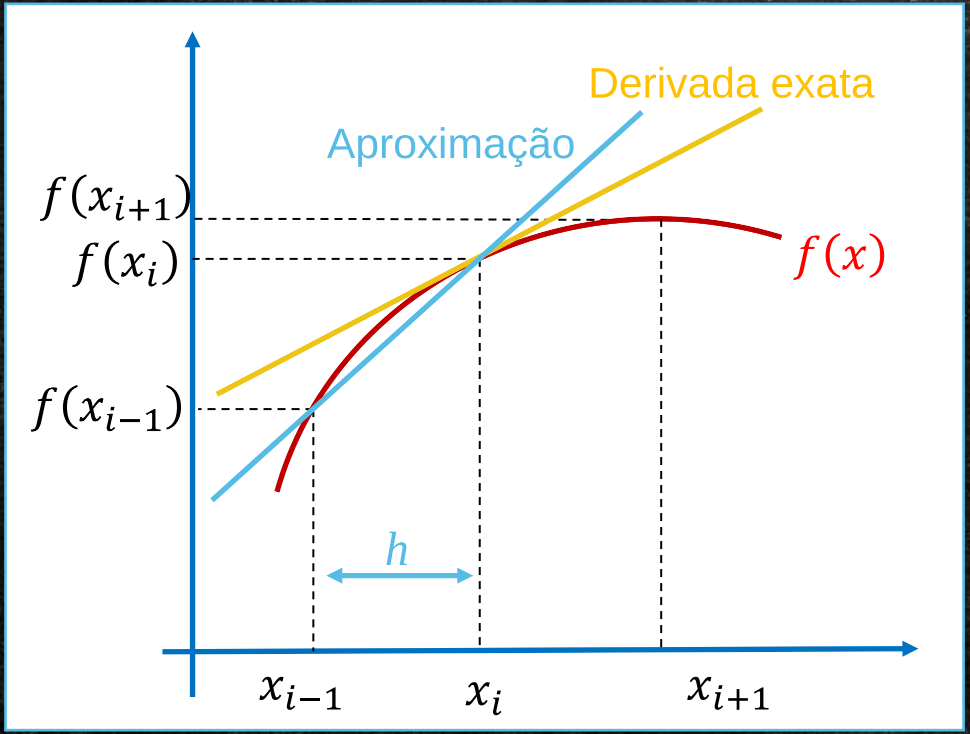
$$\frac{df(x)}{dx} = \cancel{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\boxed{= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}$$

# Derivação Numérica (1ª ordem)




Derivada retardada

Conjunto discreto de pontos...

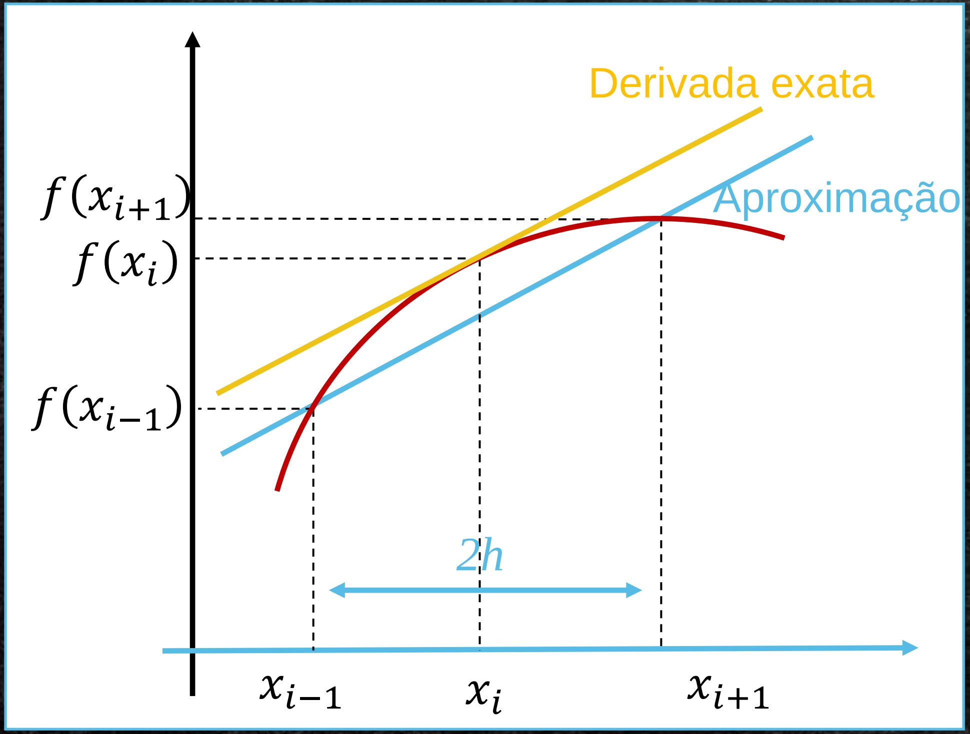
$$\frac{df(x)}{dx} = \cancel{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

$$\boxed{= \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}}$$

# Derivação Numérica (1ª ordem)




Conjunto discreto de pontos...

$$\frac{df(x)}{dx} = \cancel{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Ou ainda Derivada centrada

$$\boxed{= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}}$$

# Derivação Numérica (1ª ordem)

Por Séries de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

Truncando por exclusão dos termos da segunda derivada (e superior),

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Derivada avançada

# Derivação Numérica (1ª ordem)

Subtraindo

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \cdots$$

de

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

obtemos

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{2f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

que pode ser reescrita como

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^2 + \cdots$$

ou

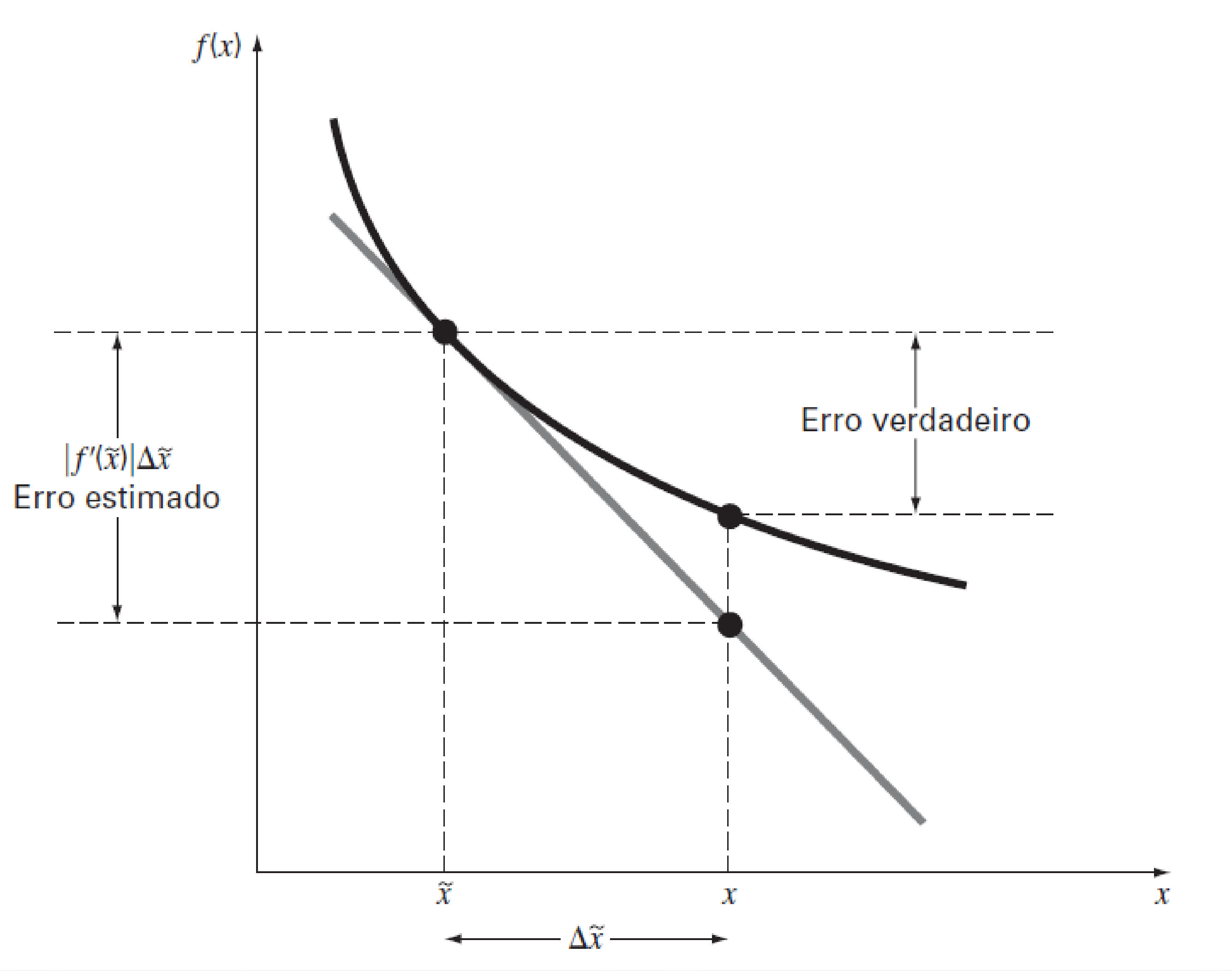
$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)}$$

Derivada centrada

# Derivação Numérica

Importante ressaltar que as formas baseadas nas séries de Taylor trazem informações úteis acerca da propagação de erros, tanto no cálculo das derivadas quanto nas integrações, que veremos a seguir.

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - \tilde{x})^2 + \cdots$$



# Derivação Numérica (2ª ordem)

Da série progressiva com salto $2h$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots$$

menos $2\times$ a série com salto $h$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

obtemos

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

que pode ser reescrita como

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \ldots$$

Essa é a derivada *segunda diferença dividida finita progressiva.*

Fazendo o mesmo tipo de manipulação, podemos obter a versão regressiva e à versão centrada, mais utilizada:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \ldots$$

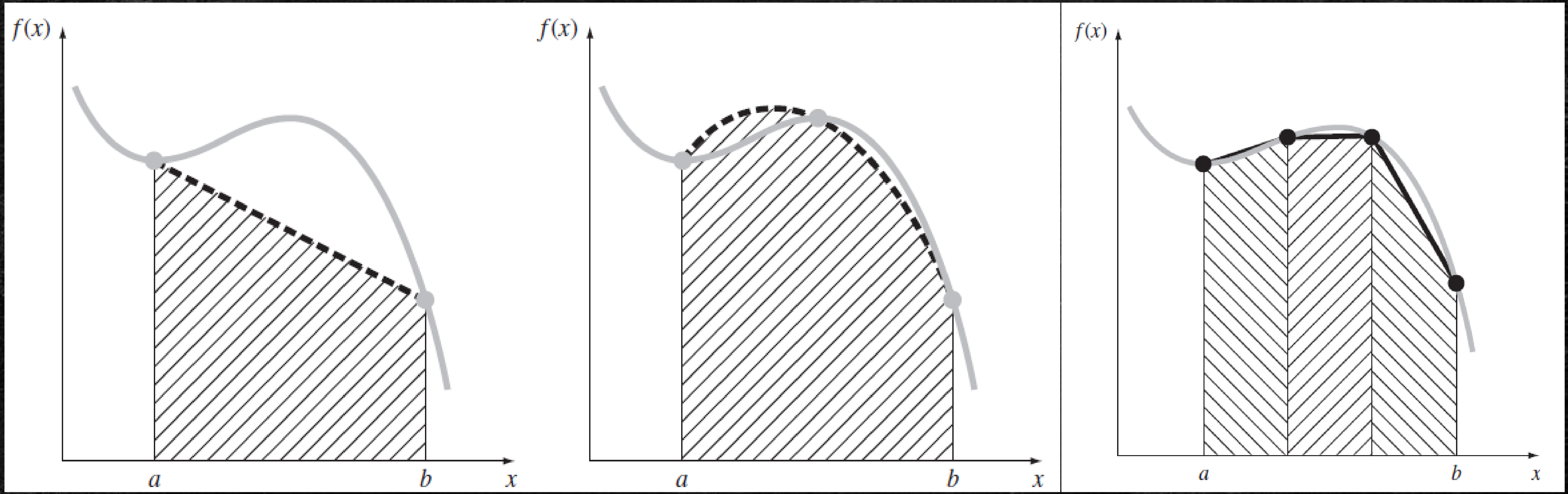
Que também pode ser obtida como a "derivada da derivada":

$$f''(x_i) = \frac{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}}{h}$$

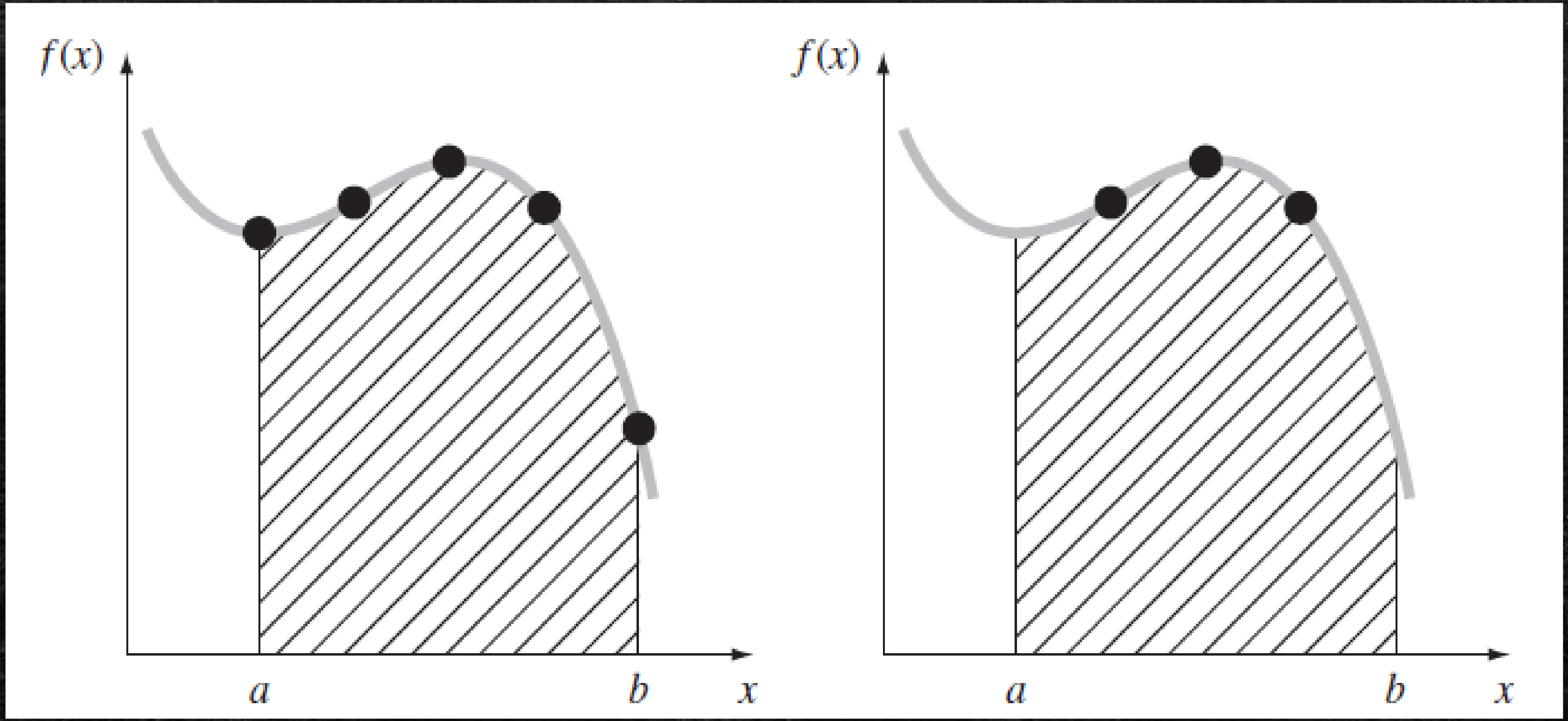
# Integração Numérica: Fórmulas de Newton-Cotes

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

onde $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$



# Fórmulas fechadas ou abertas



# Regra do Trapézio

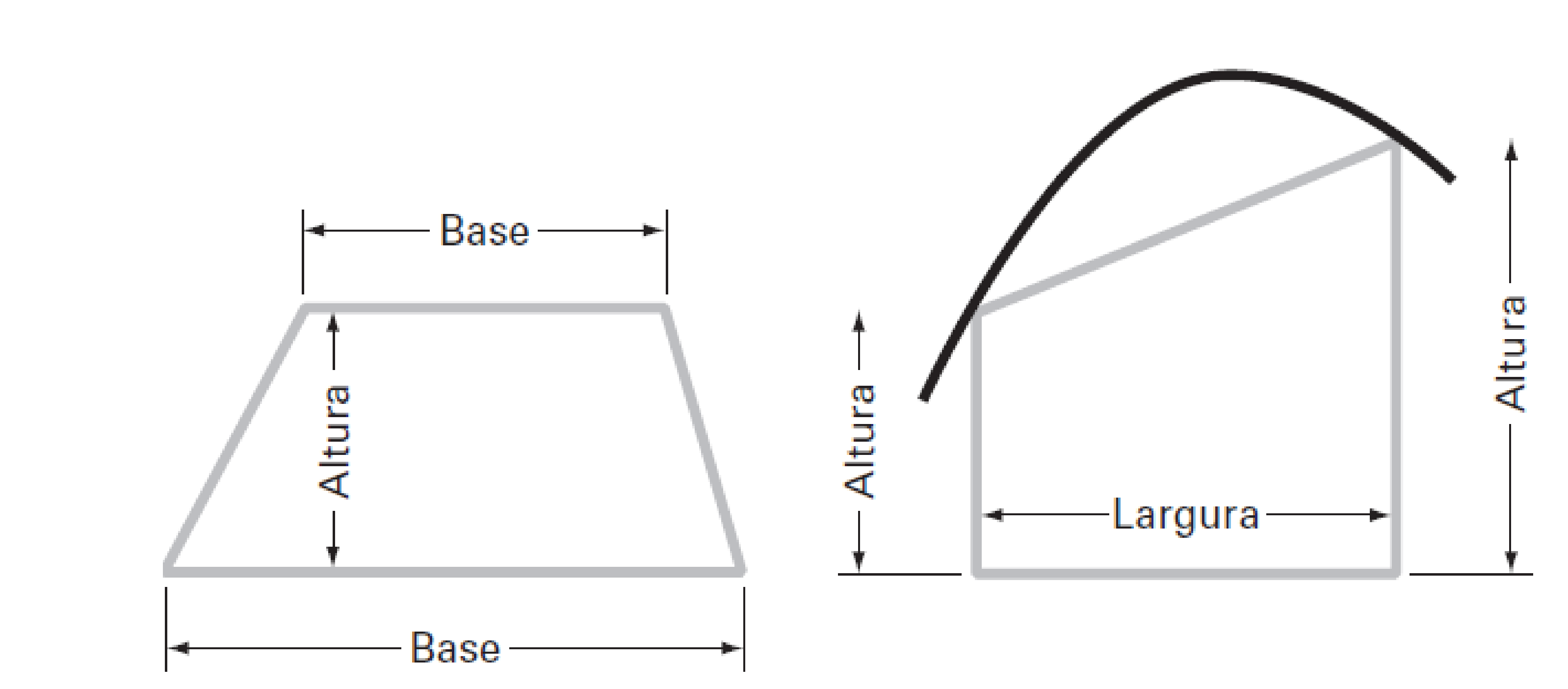
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$I = \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$I = \underbrace{h\frac{f(a) + f(b)}{2}}_{\text{Regra do trapézio}} \underbrace{- \frac{1}{12} f''(\xi) h^3}_{\text{Erro de truncamento}}$$




$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3$$

Demonstração do erro teórico na página 335 do  livro de Neide Franco

# Exemplo

$f(x) = 0{,}2 + 25\,x - 200\,x^2 + 675\,x^3 - 900\,x^4 + 400\,x^5$

Valor correto da integral é 1,640533.

$f(0) = 0{,}2$

$f(0{,}8) = 0{,}232$

$$I = 0{,}8\,\frac{0{,}2 + 0{,}232}{42} = 0{,}1728$$

$$E_t = 1{,}640533 - 0{,}1728 = 1{,}467733$$

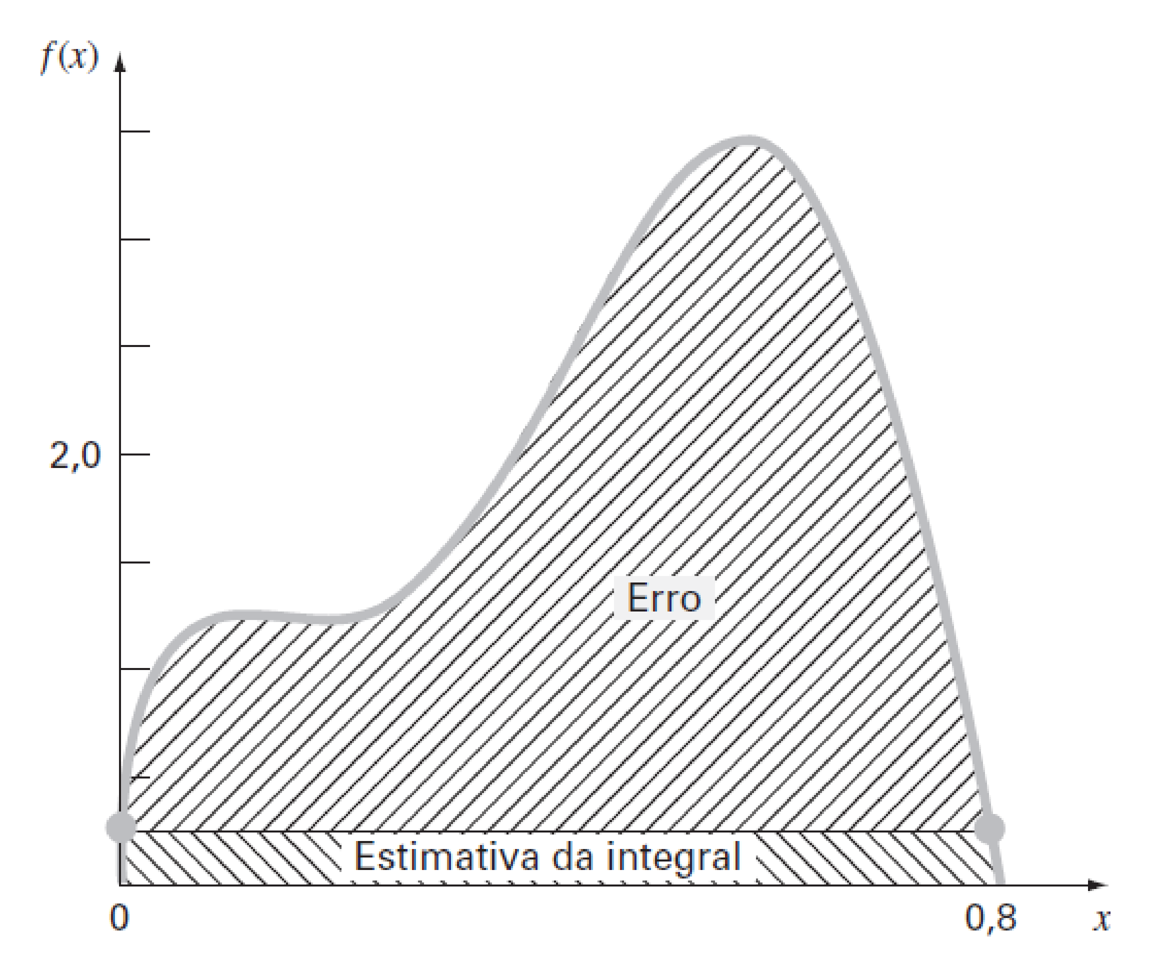
$$f''(x) = -400 + 4.050x - 10.800x^2 + 8.000x^3$$

*Média de uma função num intervalo:* $\bar{f} = \int_a^b \frac{f(x)dx}{b-a}$

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b (-400 + 4.050x - 10.800x^2 + 8.000x^3)dx}{0{,}8 - 0}$$

$$= -60$$

$$E_a = \frac{-1}{12}(-60)(0{,}8)^3 = 2{,}56$$



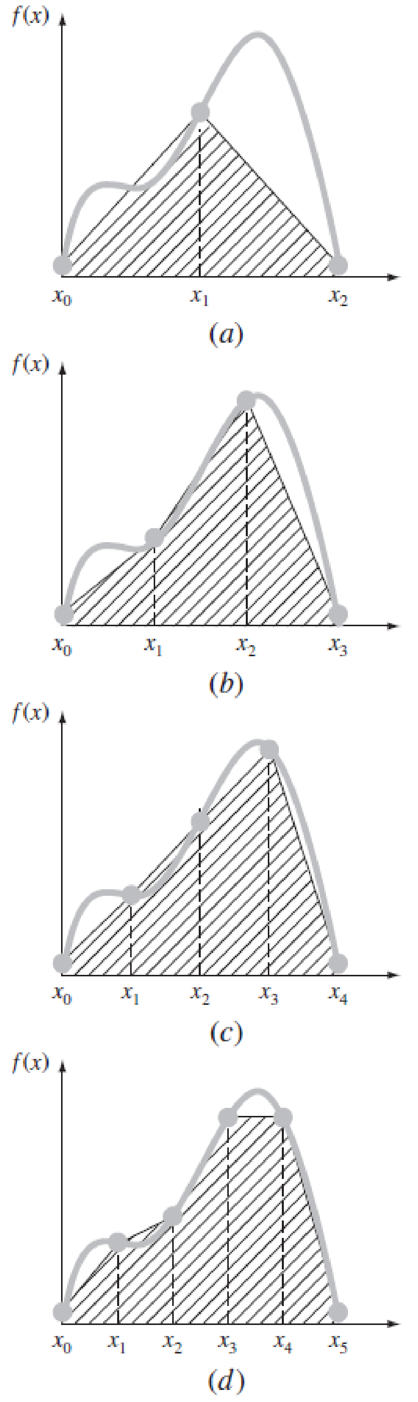
# Integração por múltiplos trapézios

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$



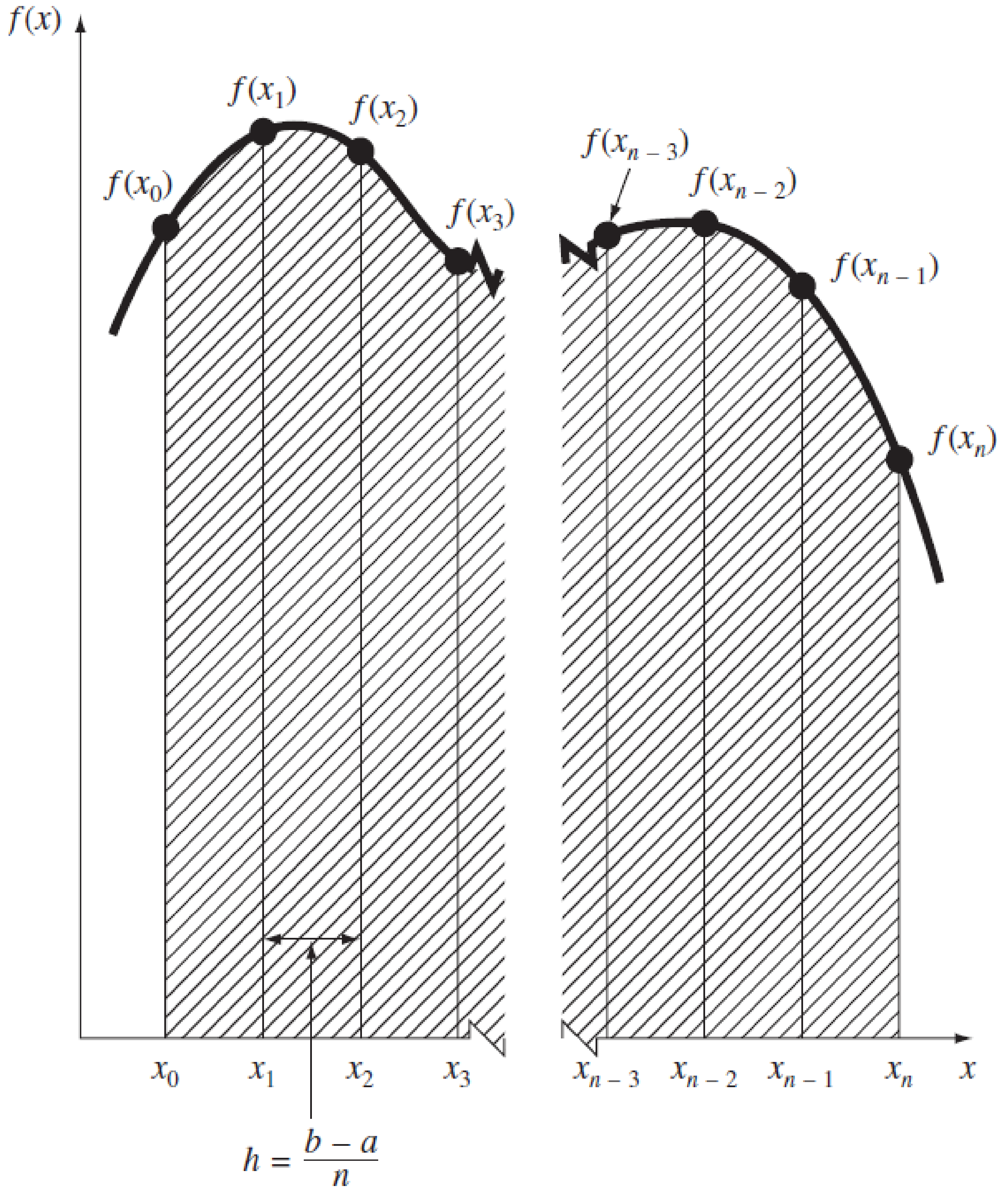
# Integração por múltiplos trapézios

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Largura}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura média}}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$\bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''$$



# Exemplo

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \quad \begin{cases} f(0) = 0{,}2 \\ f(0{,}4) = 2{,}456 \\ f(0{,}8) = 0{,}232 \end{cases}$$

$$I = 0{,}8\,\frac{0{,}2 + 2(2{,}456) + 0{,}232}{4} = 1{,}0688$$

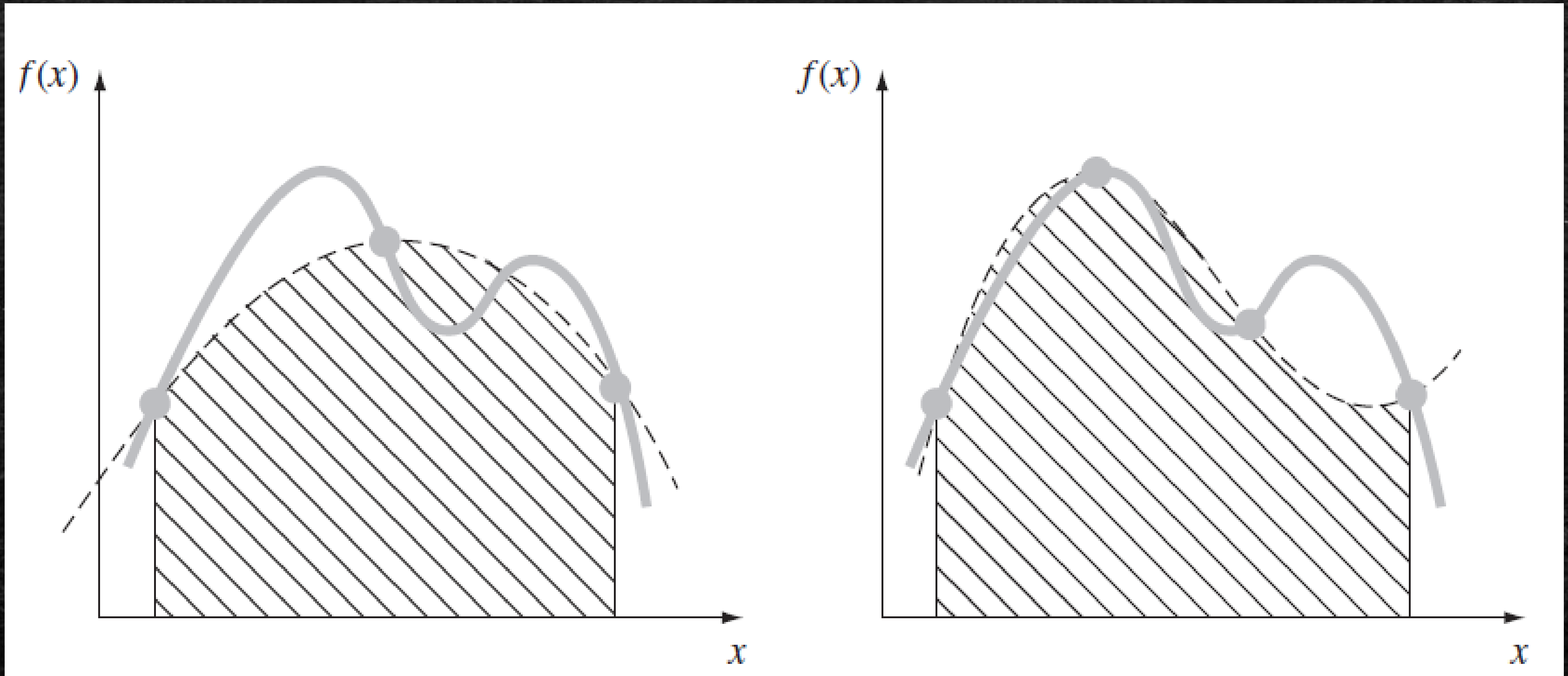
$$E_a = \frac{(0{,}8)^5}{12(2)^2}(-60) = 0{,}64$$

$$E_t = 1{,}640533 - 1{,}0688 = 0{,}57173$$

$$\varepsilon_t = 34{,}9\%$$

| n | h | I | $\varepsilon_t$ (%) |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,4 | 1,0688 | 34,9 |
| 3 | 0,2667 | 1,3695 | 16,5 |
| 4 | 0,2 | 1,4848 | 9,5 |
| 5 | 0,16 | 1,5399 | 6,1 |
| 6 | 0,1333 | 1,5703 | 4,3 |
| 7 | 0,1143 | 1,5887 | 3,2 |
| 8 | 0,1 | 1,6008 | 2,4 |
| 9 | 0,0889 | 1,6091 | 1,9 |
| 10 | 0,08 | 1,6150 | 1,6 |

# Regras de Simpson




Lisa Simpson
1981 - ...

Thomas Simpson
1710-1761

# Regra de Simpson de 1/3

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

# Regra de Simpson de 1/3

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Largura}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}}_{\text{Altura média}}$$

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]}_{\text{Regra 1/3 de Simpson}} - \underbrace{\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5}_{\text{Erro de truncamento}}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2.880}f^{(4)}(\xi)$$

# Exemplo

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \quad \begin{cases} f(0) = 0{,}2 \\ f(0{,}4) = 2{,}456 \\ f(0{,}8) = 0{,}232 \end{cases}$$

$$I = 0{,}8\,\frac{0{,}2 + 4(2{,}456) + 0{,}232}{6} = 1{,}367467$$

$$E_t = 1{,}640533 - 1{,}367467 = 0{,}2730667 \qquad \varepsilon_t = 16{,}6\%$$

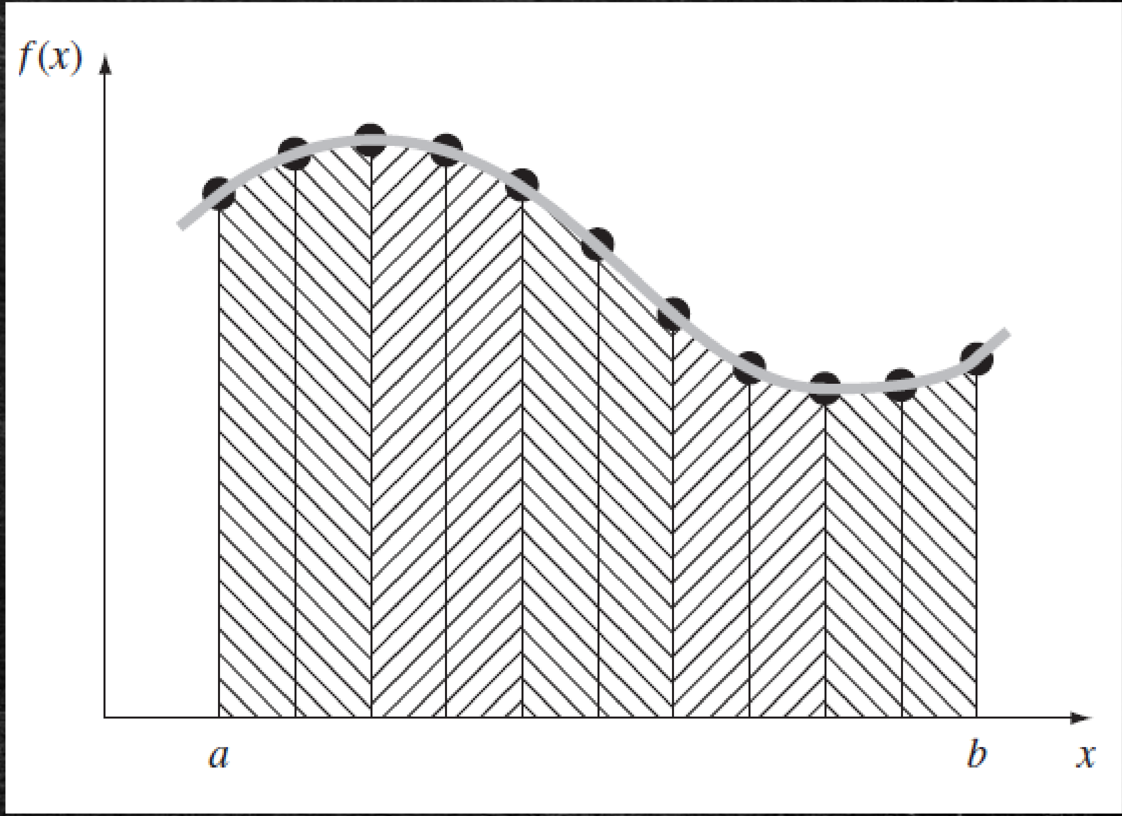
$$E_a = \frac{(0{,}8)^5}{2{,}880}(-2400) = 0{,}2730667$$

# Aplicação múltipla da regra de 1/3

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I \cong 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \cdots + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$




$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Largura}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Altura média}}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

# Exemplo

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \quad \begin{cases} f(0) = 0{,}2 \\ f(0{,}2) = 1{,}288 \\ f(0{,}4) = 2{,}456 \\ f(0{,}6) = 3{,}464 \\ f(0{,}8) = 0{,}232 \end{cases}$$

$$I = 0{,}8\,\frac{0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}464) + 2(2{,}456) + 0{,}232}{12} = 1{,}623467$$

$$E_t = 1{,}640533 - 1{,}623467 = 0{,}017067 \qquad \varepsilon_t = 1{,}04\%$$

$$E_a = -\frac{(0{,}8)^5}{180(4)^4}(-2.400) = 0{,}017067$$

# Regra de Simpson de 3/8

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Largura}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura média}}$$

$$E_t = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6.480} f^{(4)}(\xi)$$

$$h = (b-a)/3$$

# Exemplo

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \quad \begin{cases} f(0) = 0{,}2 \\ f(0{,}266667) = 1.432724 \\ f(0,\ 533333) = 3.487177 \\ f(0{,}8) = 0{,}232 \end{cases}$$

Com $n = 3$

$$I \cong 0{,}8\,\frac{0{,}2 + 3(1{,}432724 + 3{,}487177) + 0{,}232}{8} = 1{,}519170$$

$$E_t = 1{,}640533 - 1{,}519170 = 0{,}1213630 \qquad \varepsilon_t = 7{,}4\%$$

$$E_a = -\frac{(0{,}8)^5}{6.480}(-2.400) = 0{,}1213630$$

# Exemplo

$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ $\quad n = 5$

$$\begin{cases} f(0) = 0{,}2 \\ f(0{,}16) = 1{,}29692 \\ f(0{,}32) = 1{,}74339 \\ f(0{,}48) = 3{,}18601 \\ f(0{,}64) = 3{,}18193 \\ f(0{,}8) = 0{,}232 \end{cases}$$

Regra de Simpson de 1/3

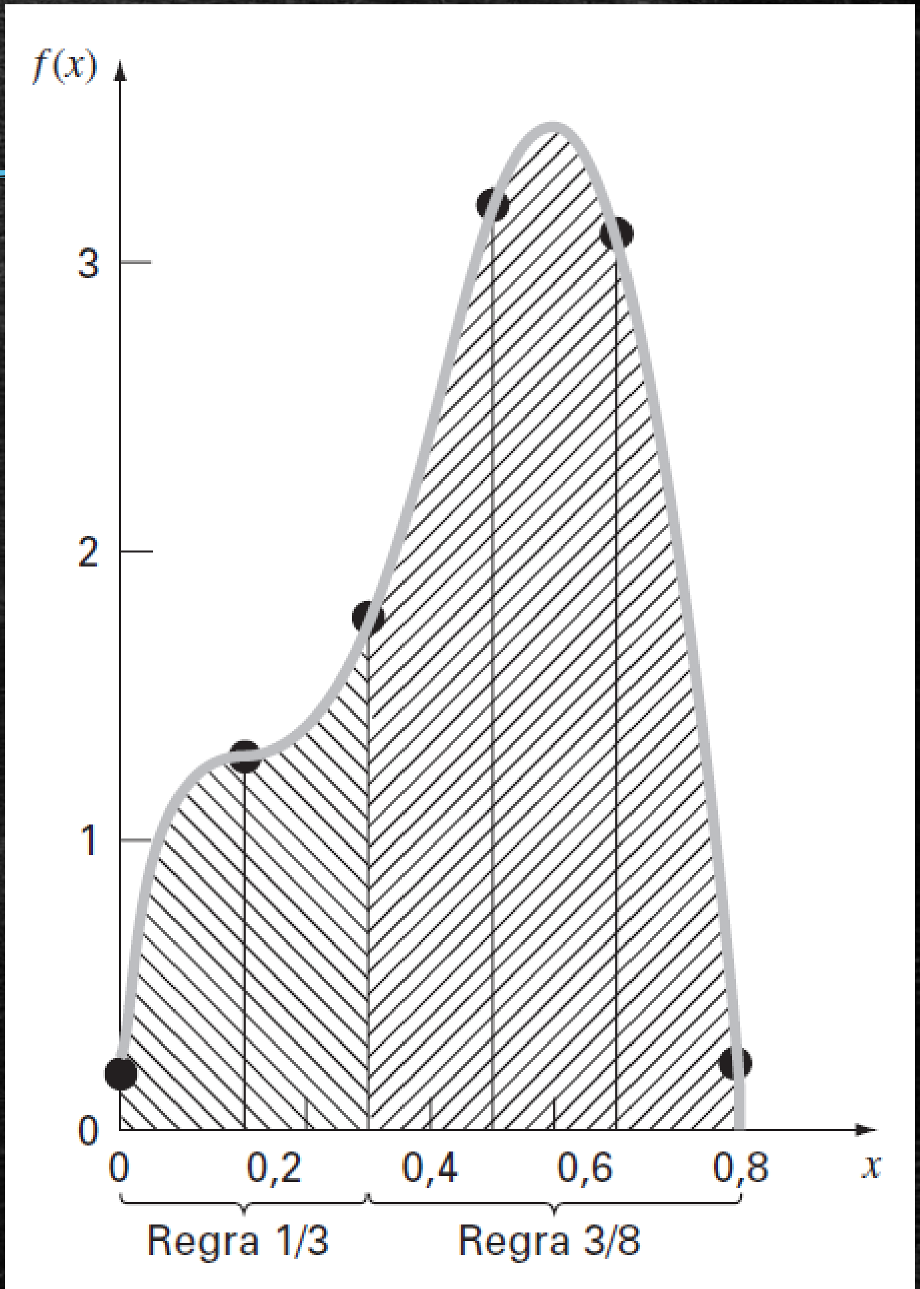
$$I_1 \cong 0{,}32\,\frac{0{,}2 + 4(1{,}29692) + 1{,}74339}{6} = 0{,}3803237$$

$$I_2 \cong 0{,}48\,\frac{1{,}74339 + 3(3{,}18601 + 3{,}18193) + 0{,}232}{8} = 1{,}264754$$

Regra de Simpson de 3/8

$$I \cong I_1 + I_2 = 0{,}3803237 + 1{,}264754 = 1{,}645077$$

$$E_t = 1{,}640533 - 1{,}645077 = -000454383 \qquad \varepsilon_t = -0{,}28\%$$



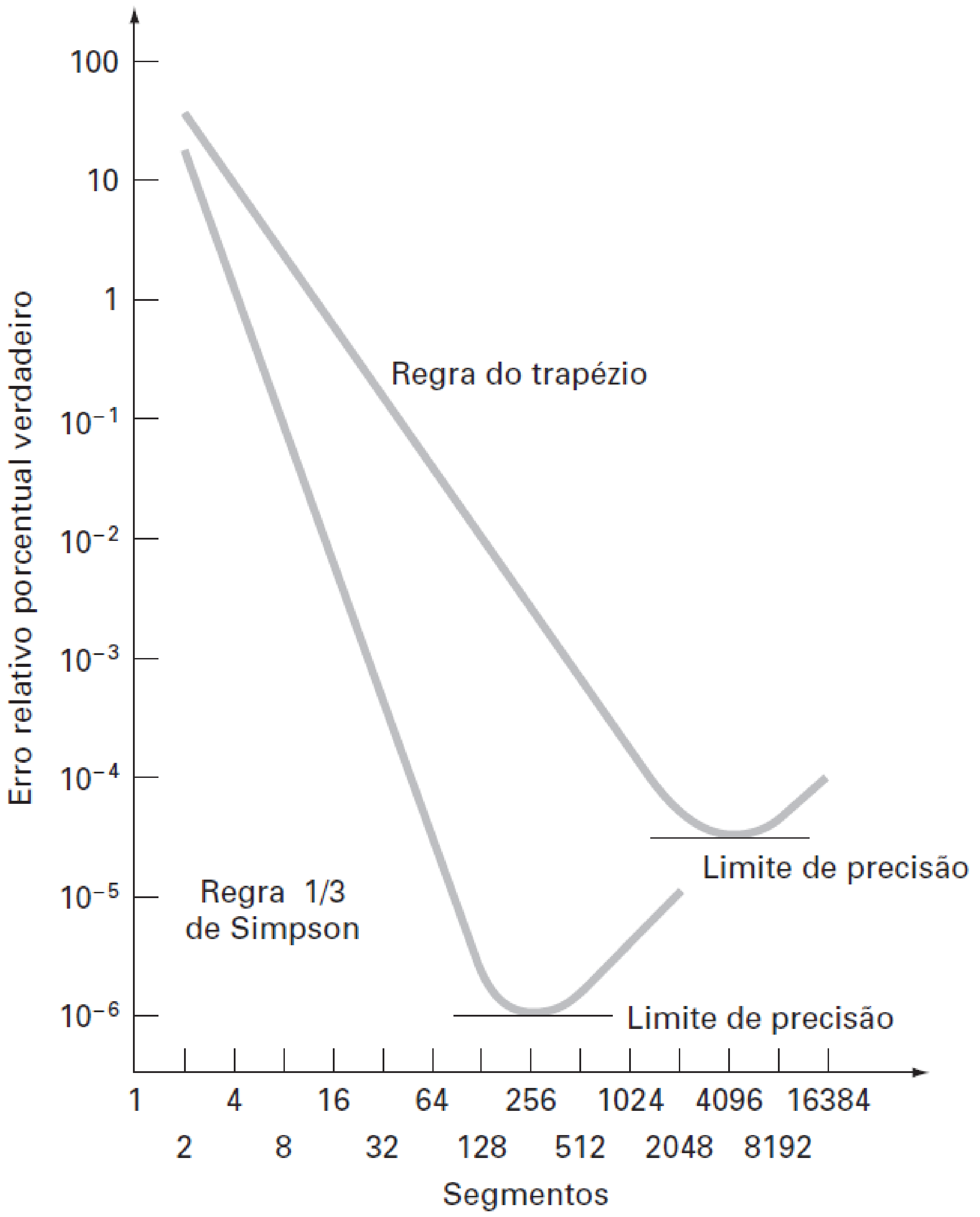
# Fórmulas fechadas de Newton-Cotes de mais alta ordem

| Segmentos ($n$) | Pontos | Nome | Fórmula | Erro de Truncamento |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | Regra do trapézio | $(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$ | $-(1/12)h^3f''(\xi)$ |
| 2 | 3 | Regra 1/3 de Simpson | $(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$ | $-(1/90)h^5f^{(4)}(\xi)$ |
| 3 | 4 | Regra 3/8 de Simpson | $(b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$ | $-(3/80)h^5f^{(4)}(\xi)$ |
| 4 | 5 | Regra de Boole | $(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$ | $-(8/945)h^7f^{(6)}(\xi)$ |
| 5 | 6 | | $(b-a)\dfrac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$ | $-(275/12.096)h^7f^{(6)}(\xi)$ |

# Integração de funções

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

A integração da função acima usando dois métodos diferentes tem o erro relativo diminuído conforme aumentamos o número de pontos no mesmo intervalo (de forma dependente do método empregado) até chegarmos a um limite em que os erros gerados pela proximidade dos pontos (o que depende do dispositivo mas eventualmente vai acontecer) se tornam dominantes e o aumento no número de pontos deixa de ser uma medida eficaz.



# Extrapolação de Richards

$$I = I(h) + E(h)$$

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''$$

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cong I(h_2) + E(h_2)$$

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

# Extrapolação de Richards

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)]$$

Para $h_1 = 2h_2$:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)] \quad = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

Para $h_1 = 4h_2$:

$$I = I(h_2) + \frac{1}{15}[I(h_2) - I(h_1)] \quad = \frac{16}{15}I(h_2) - \frac{1}{15}I(h_1)$$

# Extrapolação de Richards

Usando como base as integrações por trapézios, com 1,2 e 4 segmentos:

| Segmentos | $h$ | Integral | $\varepsilon_t$, % |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,8 | 0,1728 | 89,5 |
| 2 | 0,4 | 1,0688 | 34,9 |
| 4 | 0,2 | 1,4848 | 9,5 |

$$I \cong \frac{4}{3}(1{,}0688) - \frac{1}{3}(0{,}1728) = 1{,}367467$$

$$I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

$$I \cong \frac{4}{3}(1{,}4848) - \frac{1}{3}(1{,}0688) = 1{,}623467$$

$$E_t = \boxed{1{,}640533} - 1{,}623467 = 0{,}017067 \ (\varepsilon_t = 1{,}0\%).$$

$$I = \frac{16}{15}I(h_2) - \frac{1}{15}I(h_1)$$

$$I = \frac{16}{15}(1{,}623467) - \frac{1}{15}(1{,}367467) = \boxed{1{,}640533}$$

# Regra de Integração de Romberg

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$$I_{1,2} \cong \frac{4 I_{2,1} - I_{1,1}}{3}$$

| $O(h^2)$ | $O(h^4)$ | $O(h^6)$ | $O(h^8)$ |
|---|---|---|---|
| 0,172800 | 1,367467 | | |
| 1,068800 | | | |
| | | | |
| 0,172800 | 1,367467 | 1,640533 | |
| 1,068800 | 1,623467 | | |
| 1,484800 | | | |
| | | | |
| 0,172800 | 1,367467 | 1,640533 | 1,640533 |
| 1,068800 | 1,623467 | 1,640533 | |
| 1,484800 | 1,639467 | | |
| 1,600800 | | | |

# Quadratura de Gauss

$$I \cong (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$I \cong c_0 f(a) + c_1 f(b)$$

$$c_0 + c_1 = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} 1\,dx$$

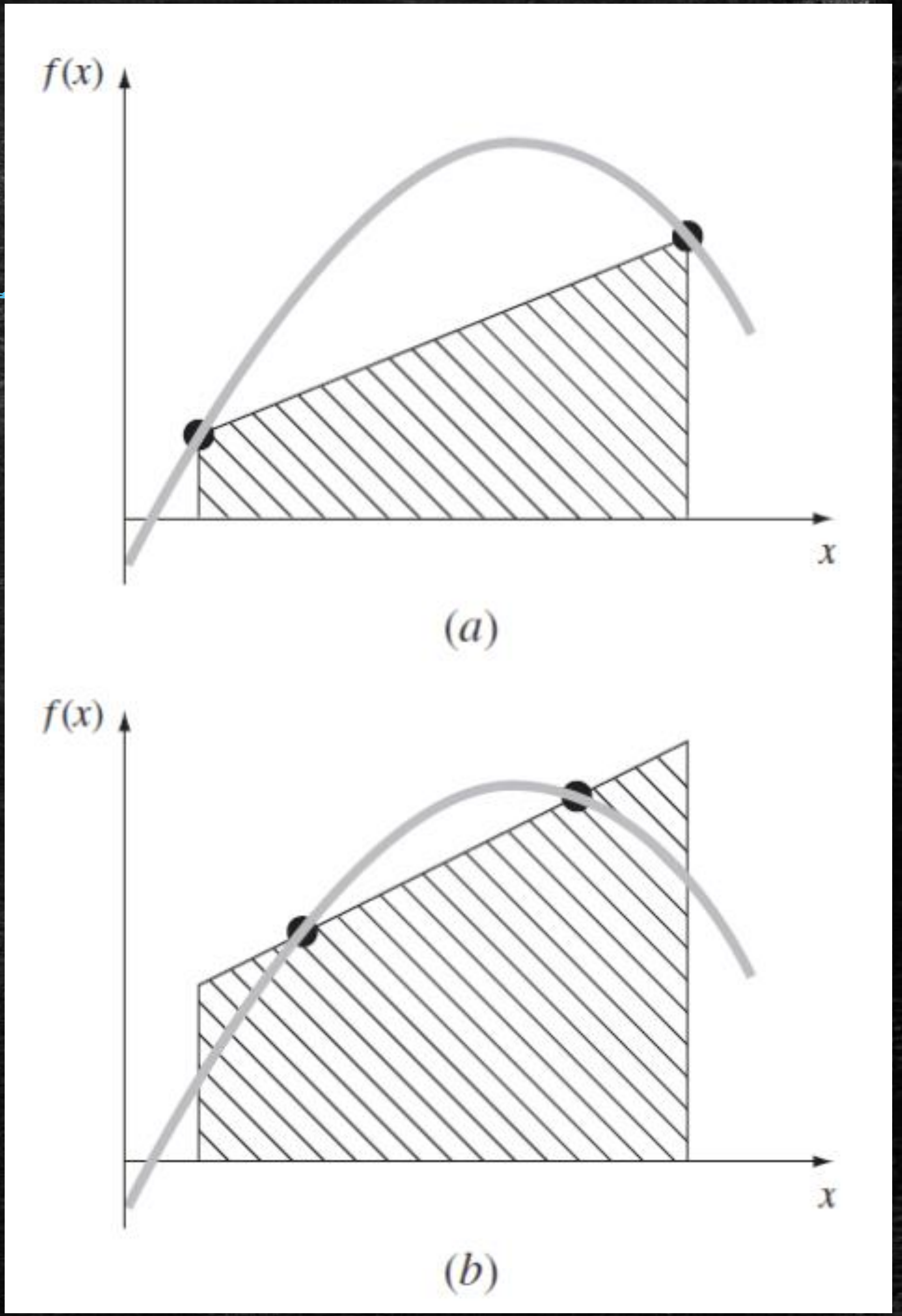
$$-c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} x\,dx$$

$$c_0 + c_1 = b - a$$

$$-c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} = 0$$

$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$I = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$



# Quadratura de Gauss

**Dedução da Fórmula de Gauss-Legendre de Dois Pontos**

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$$

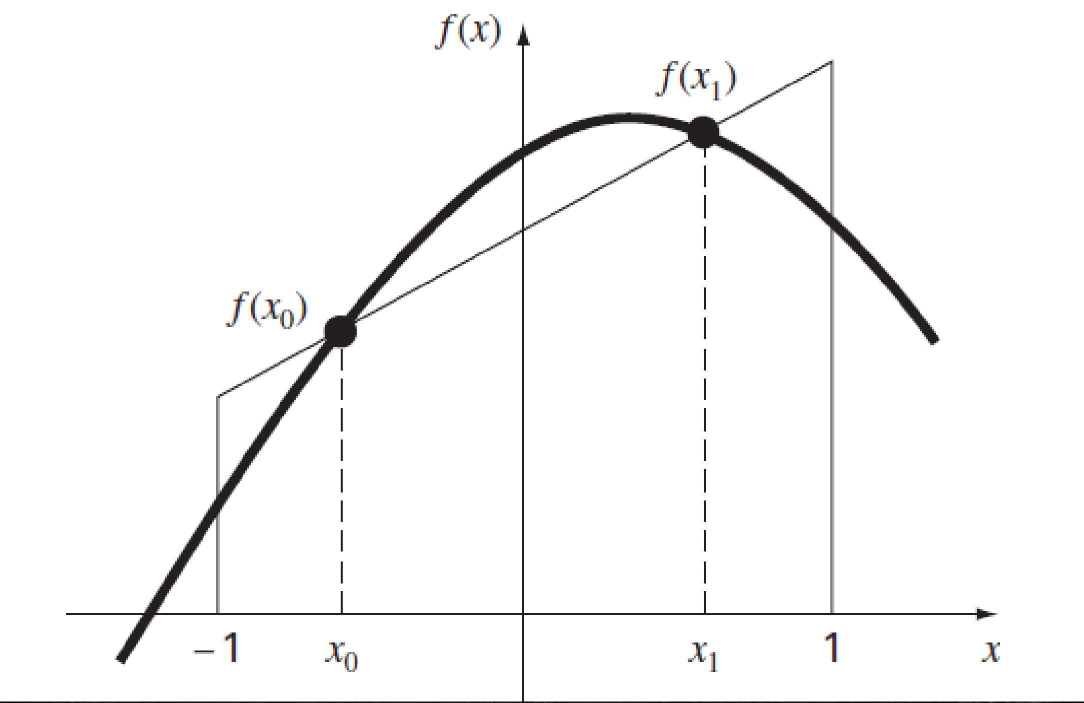
$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}5773503\ldots$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773503\ldots$$

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$




$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

# Quadratura de Gauss (mudança de variáveis)

$$x = a_0 + a_1 x_d$$

$$a = a_0 + a_1(-1) \qquad b = a_0 + a_1(1)$$

$$a_0 = \frac{b+a}{2}$$

e

$$a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2} \qquad dx = \frac{b-a}{2} dx_d$$

# Exemplo

$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ $\quad \begin{cases} x = 0{,}4 + 0{,}4x_d \\ dx = 0{,}4\,dx_d \end{cases}$

$$\int_0^{0{,}8} (0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [0{,}2 + 25(0{,}4 + 0{,}4x_d) - 200(0{,}4 + 0{,}4x_d)^2 + 675(0{,}4 + 0{,}4x_d)^3 - 900(0{,}4 + 0{,}4x_d)^4 + 400(0{,}4 + 0{,}4x_d)^5]0{,}4\,dx_d$$

$$f(x_d) = [0{,}2 + 25\,(0{,}4+0{,}4x_d) - 200\,(0{,}4+0{,}4x_d)^2 + 675\,(0{,}4+0{,}4x_d)^3 - 900\,(0{,}4+0{,}4x_d)^4 + 400\,(0{,}4+0{,}4x_d)^5]0{,}4$$

$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I \cong 0{,}516741 + 1{,}305837 = 1{,}822578$$

Erro de −11,1%

# Ordens mais altas (mais pontos)

Mesmo caso para terceira ordem, ver tabela a lado:

$$I = 0{,}5555556\, f(-0{,}7745967)$$

$$+\ 0{,}8888889\, f(0)$$

$$+\ 0{,}5555556\, f(0{,}7745967)$$

= 0.281301290+ 0.872444444+ 0.485987599
=**1.64053334**
exato.

| Pontos | Fatores de Peso | Argumentos da Função | Erro de Truncamento |
|---|---|---|---|
| 2 | $c_0 = 1{,}0000000$ | $x_0 = -0{,}577350269$ | $\cong f^{(4)}(\xi)$ |
| | $c_1 = 1{,}0000000$ | $x_1 = 0{,}577350269$ | |
| 3 | $c_0 = 0{,}5555556$ | $x_0 = -0{,}774596669$ | $\cong f^{(6)}(\xi)$ |
| | $c_1 = 0{,}8888889$ | $x_1 = 0{,}0$ | |
| | $c_2 = 0{,}5555556$ | $x_2 = 0{,}774596669$ | |
| 4 | $c_0 = 0{,}3478548$ | $x_0 = -0{,}861136312$ | $\cong f^{(8)}(\xi)$ |
| | $c_1 = 0{,}6521452$ | $x_1 = -0{,}339981044$ | |
| | $c_2 = 0{,}6521452$ | $x_2 = 0{,}339981044$ | |
| | $c_3 = 0{,}3478548$ | $x_3 = 0{,}861136312$ | |
| 5 | $c_0 = 0{,}2369269$ | $x_0 = -0{,}906179846$ | $\cong f^{(10)}(\xi)$ |
| | $c_1 = 0{,}4786287$ | $x_1 = -0{,}538469310$ | |
| | $c_2 = 0{,}5688889$ | $x_2 = 0{,}0$ | |
| | $c_3 = 0{,}4786287$ | $x_3 = 0{,}538469310$ | |
| | $c_4 = 0{,}2369269$ | $x_4 = 0{,}906179846$ | |
| 6 | $c_0 = 0{,}1713245$ | $x_0 = -0{,}932469514$ | $\cong f^{(12)}(\xi)$ |
| | $c_1 = 0{,}3607616$ | $x_1 = -0{,}661209386$ | |
| | $c_2 = 0{,}4679139$ | $x_2 = -0{,}238619186$ | |
| | $c_3 = 0{,}4679139$ | $x_3 = 0{,}238619186$ | |
| | $c_4 = 0{,}3607616$ | $x_4 = 0{,}661209386$ | |
| | $c_5 = 0{,}1713245$ | $x_5 = 0{,}932469514$ | |

# Polinômios Ortogonais

Propriedade que define os polinômios ortogonais:

**Seja $\phi_i(x)$ polinômios ortogonais quaisquer de ordem $i$:**

$$\left\{ \begin{array}{ll} & (\phi_i(x), \phi_j(x)) \; = \; 0 \;\;, \quad \text{para} \;\; i \neq j \;, \\ \text{e} & \\ & (\phi_i(x), \phi_i(x)) \; \neq \; 0 \;\;, \quad \text{para} \;\; \phi_i \neq 0 \;, \end{array} \right.$$

Considerando o produto escalar como

$$(f, g) \; = \; \int_a^b \omega(x) \; f(x) \; g(x) \; dx$$

com $\omega(x) \geq 0$ e contínua em [a, b], onde $\omega(x)$ é a função peso.

# Principais Polinômios Ortogonais

Polinômios de Legendre

$$\omega(x) = 1$$

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, d(x) \,,$$

Estes foram os usados na quadratura de Gauss nos slides anteriores

Polinômios de Tchebyshev

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x)\, g(x)\, dx \,,$$

Polinômios de Laguerre

$$\omega(x) = e^{-x}$$

$$(f, g) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx,$$

Polinômios de Hermite

$$\omega(x) = e^{-x^2}$$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, g(x)\, dx$$

## Polinômios de Tchebyshev

TABELA 2 $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^a f(x)dx$

| $x_i$ | | $A_i$ |
|---|---|---|
| | $a=-1/2$ | |
| | N = 2 | |
| 0.7071067811 | | (1)0.1570796326 |
| | N = 3 | |
| 0.8660254037 | | (1)0.1047197551 |
| 0.0000000000 | | (1)0.1047197551 |
| | N = 4 | |
| 0.9238795325 | | 0.7853981633 |
| 0.3826834323 | | 0.7853981633 |
| | N = 5 | |
| 0.9510565162 | | 0.6283185307 |
| 0.5877852522 | | 0.6283185307 |
| 0.0000000000 | | 0.6283185307 |
| | N = 6 | |
| 0.9659258262 | | 0.5235987755 |
| 0.7071067811 | | 0.5235987755 |
| 0.2588190451 | | 0.5235987755 |
| | N = 7 | |
| 0.9749279121 | | 0.4487989505 |
| 0.7818314824 | | 0.4487989505 |
| 0.4338837391 | | 0.4487989505 |
| 0.0000000000 | | 0.4487989505 |
| | N = 8 | |
| 0.9807852804 | | 0.3926990816 |
| 0.8314696123 | | 0.3926990816 |
| 0.5555702330 | | 0.3926990816 |
| 0.1950903220 | | 0.3926990812 |

## Polinômios de Laguerre

TABELA 3 $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)dx$

| $x_i$ | | $A_i$ |
|---|---|---|
| | N = 2 | |
| 0.5857864376 | | 0.8535533905 |
| (1)0.3414213562 | | 0.1464466094 |
| | N = 3 | |
| 0.4157745567 | | 0.7110930099 |
| (1)0.2294280360 | | 0.2785177335 |
| (1)0.6289945082 | | (-1)0.1038925650 |
| | N = 4 | |
| 0.3225476896 | | 0.6031541043 |
| (1)0.1745761101 | | 0.3574186924 |
| (1)0.4536620296 | | (-1)0.3888790851 |
| (1)0.9395070912 | | (-3)0.5392947055 |
| | N = 5 | |
| 0.2635603197 | | 0.5217556105 |
| (1)0.1413403059 | | 0.3986668110 |
| (1)0.3596425771 | | (-1)0.7594244968 |
| (1)0.7085810005 | | (-2)0.3611758679 |
| (2)0.1264080084 | | (-4)0.2336997238 |
| | N = 6 | |
| 0.2228466041 | | 0.4589646739 |
| (1)0.1188932101 | | 0.4170008307 |
| (1)0.2992736326 | | 0.1133733820 |
| (1)0.5775143569 | | (-1)0.1039919745 |
| (1)0.9837467418 | | (-3)0.2610172028 |
| (2)0.1598297398 | | (-6)0.8985479064 |

## Polinômios de Hermite

TABELA 4 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx$

| $x_i$ | | $A_i$ |
|---|---|---|
| | N = 2 | |
| 0.7071067811 | | 0.8862269254 |
| | N = 3 | |
| (1)0.1224744871 | | 0.2954089751 |
| 0.0000000000 | | (1)0.1181635900 |
| | N = 4 | |
| (1)0.1650680123 | | (-1)0.8131283544 |
| 0.5246476323 | | 0.8049140900 |
| | N = 5 | |
| (1)0.2020182870 | | (-1)0.1995324205 |
| 0.9585724646 | | 0.3936193231 |
| 0.0000000000 | | 0.6453087204 |
| | N = 6 | |
| (1)0.2350604973 | | (-2)0.4530009905 |
| (1)0.1335849074 | | 0.1570673203 |
| 0.4360774119 | | 0.7246295952 |
| | N = 7 | |
| (1)0.2651961356 | | (-3)0.9717812450 |
| (1)0.1673551628 | | (-1)0.5451558281 |
| 0.8162878828 | | 0.4256072526 |
| 0.0000000000 | | 0.8102646175 |
| | N = 8 | |
| (1)0.2930637420 | | (-3)0.1996040722 |
| (1)0.1981656756 | | (-1)0.1707798300 |
| (1)0.1157193712 | | 0.2078023258 |
| 0.3811869902 | | 0.6611470125 |

# Exemplo:

Polinômios de Tchebyshev:

$$\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{t^3+2t^2}{4\sqrt{4-t^2}}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fazendo a mudança de variáveis para limites -1 e 1:

$t$=2$x$ e $dt$=2$dx$

$$\int_{-2}^{2} \frac{t^3+2t^2}{4\sqrt{4-t^2}}\,dt = 2\int_{-1}^{1} \frac{x^3+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Fazendo $2n + 1 = 3$ obtemos que $n = 1$, ou seja, devemos tomar 2 pontos. Da tabela 2, com $N = 2$, obtemos:

$x_0$ = -0.7071, $x_1$ = 0.7071, $A_0$= $A_1$ =1.5708

$f(x_0) = (-0.7071)^3 + (-0.7071)^2 = 0.1464$ , $f(x_1) = (0.7071)^3 + (0.7071)^2 = 0.8535$

$$\int_{-2}^{2} \frac{t^3+2t^2}{4\sqrt{4-t^2}}\,dt$$ = 2 × 1.5708 (0.1464 + 0.8535) = 3.1413.