Programa para casa #4

Determinação de raízes de equações
Aplicação do Método de Bairstow

April 24, 2025

1 Contextualização

Um dos esquemas numéricos mais robustos para a determinação de raízes de polinômios é o método de Bairstow. Esse método foi proposto pelo Engenheiro Aeronáutico Leonard Bairstow em um livro de Aerodinâmica Aplicada publicado em 1920. Um fato interessante é que o método é apresentado apenas no apêndice do livro. Esse esquema numérico utiliza apenas álgebra real e ainda assim consegue fornecer tanto raízes reais quanto raízes complexas de polinômios de ordem n geral.

A ideia central do método consiste em dividir o polinômio $f(x)$ cujas raízes desejamos obter por um fator quadrático $D(x) = x^2 - rx - s$, em que r e s são coeficientes reais a serem determinados, para em seguida avaliar o resto dessa divisão. Caso o resto não seja nulo, aplica-se o método de Newton-Raphson para ajustar-se os valores de r e s até que o divisor se anule. Quando isso ocorre, aplica-se a fórmula quadrática sobre o divisor $D(x)$ para obtenção de um par de raízes do problema. Esse processo é então repetido para o polinômio resultante até que todas as raízes sejam determinadas.

Para que possamos compreender como esses passos são executados a fim de que entender a construção do método, precisamos falar um pouco sobre *deflação polinomial*, termo dado ao processo de divisão de um polinômio por outro. Para isso, vamos começar com um exemplo simples. Considere o seguinte polinômio $f(x)$:

$$f(x) = (x + 1)(x - 4)(x - 5)(x + 3)(x - 2), \tag{1}$$

sabemos que este é um polinômio de quinta ordem, com 5 raízes reais, dadas por $x_r = [-3, -1, 2, 4, 5]$. Caso façamos a divisão desse polinômio por um monômio do tipo $(x - t)$, em que $t = x_r$, o resto dessa divisão deve ser nulo. Entretanto, caso façamos a divisão por um monômio no qual $t \neq x_r$, obteremos um resto dessa divisão. De um modo geral, para o caso da divisão de um polinômio $f(x)$ de grau n por um monômio $D(x)$ temos como resultado um polinômio $Q(x)$ de grau $n - 1$ com um resto $R(x)$ que é na verdade um polinômio de grau zero. Em outras palavras, temos que:

$$\frac{f(x)}{D(x)} = Q(x) + R(x). \tag{2}$$

O processo de divisão de um polinômio por outro é conhecido na literatura como *deflação polinomial* e o algoritmo utilizado para realizar essa deflação é nomeado de *divisão sintética*. Um algoritmo famoso de divisão sintética aplicado à divisão de polinômios por monômios é o algoritmo de Briot-Ruffini. Para ilustrarmos o princípio de funcionamento do algoritmo de Briot-Ruffini considere a divisão do polinômio $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ pelo monômio $D(x) = x + 1$. Esse algoritmo pode ser enunciado por meio dos seguintes passos:

Algoritmo de Briot-Ruffini

1. Reescreve-se $D(x)$ na forma $D(x) = x - (-1)$ e chamamos o fator -1 de a;

2. Transcrevemos os coeficientes de $f(x)$ e a na seguinte forma:

		2	3	0	−4
$a \leftarrow$	−1				

3. Em seguida, passa-se o primeiro coeficiente para a última linha:

	2	3	0	−4
−1				
	2			

4. Multiplica-se então esse primeiro coeficiente por a e passa-se o resultado para cima e para a próxima casa à direita:

	2	3	0	−4
−1		−2		
	2			

5. Soma-se os valores da nova coluna e repete-se os passos 3 e 4 para as demais casas até completar-se toda a tabela:

	2	3	0	−4
−1		−2	−1	1
	2	1	−1	−3

coeficientes do novo polinômio

resto

Dessa forma, para esse exemplo específico, temos que a divisão do polinômio $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ pelo monômio divisor $D(x) = (x+1)$ resulta num novo polinômio $Q(x) = 2x^2 + x - 1$ com um resto $R(x) = -3$, ou seja:

$$2x^3 + 3x^2 - 4 = (x+1)(2x^2 + x - 1) - 3 \rightarrow \frac{f(x)}{D(x)} = Q(x) + R(x). \tag{3}$$

Note que no caso da divisão por um monômio o resto é um polinômio de grau zero. Podemos generalizar essa relação para processos de deflação polinomial envolvendo divisores de ordem mais alta. Para a divisão de um polinômio por um fator quadrático, o resto é um polinômio de grau 1. De um modo geral, a divisão de um polinômio de grau n por um polinômio de grau $m < n$ gera um polinômio resultante de grau $n - m$ e um resto de grau $m - 1$.

Uma forma mais conveniente de expressarmos esse processo de divisão sintética consiste em escrever o polinômio $f(x)$ de grau n como um polinômio $f_n(x)$ dado por

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \tag{4}$$

em que $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são coeficientes reais. Nesse caso, a divisão deste polinômio por um monômio geral $(x - t)$ leva como resultado um polinômio $f_{n-1}(x)$ com novos coeficientes mais um resto. Escrevendo $f_{n-1}(x)$ como:

$$f_n(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + ... + b_n x^{n-1} \tag{5}$$

e utilizando a relação final expressa em (3), temos:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \left(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + ... + b_n x^{n-1}\right)(x - t) + b_0. \tag{6}$$

Note que aqui chamamos o resto $R(x) = b_0$. Comparando os coeficientes das potências de x na equação (6) é possível obter as seguintes relações de recorrência para calcular os coeficientes $b_i's$:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_i &= a_i + b_{i+1}, \quad \text{para: } i = (n-1) \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{7}$$

As relações de recorrência expressas em (7) são equivalentes à aplicação do algoritmo de Briot-Ruffini para a divisão de um polinômio geral por um monômio. Agora que todos os fundamentos foram colocados, podemos então apresentar o processo de construção do método de Bairstow. A ideia geral é realizar o processo de divisão sintética do polinômio $f_n(x)$ pelo fator quadrático $x^2 - rx - s$, de tal sorte que:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \left(b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + ... + b_n x^{n-2}\right)(x^2 - rx - s) + [b_0 + b_1(x - r)]. \tag{8}$$

Note que agora, pelo fato do divisor ser quadrático, o resto é um polinômio de ordem 1, que aqui foi representado como $R(x) = b_0 + b_1(x - r)$. Utilizando uma comparação entre os coeficientes das potências de x para a equação (8), Bairstow obtém a seguinte relação de recorrência para estimativa dos coeficientes $b_i's$:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + r b_n \\ b_i &= a_i + r b_{i+1} + s b_{i+2}, \quad \text{para: } i = (n-2) \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{9}$$

A ideia do método consiste em supor um valor inicial do par (r_0, s_0), realizar o processo de divisão sintética pelo divisor quadrático por meio das relações de recorrência apresentadas em (9) e em seguida ajustar os valores do par (r, s) para fazer com que b_0 e b_1 sejam nulos. Para isso, utiliza-se a ideia de série de Taylor na qual escrevemos:

$$\begin{aligned} b_1(r+\Delta r, s+\Delta s) &= b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s}\Delta s \\ b_0(r+\Delta r, s+\Delta s) &= b_0 + \frac{\partial b_0}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s}\Delta s. \end{aligned} \tag{10}$$

O que procuramos aqui são valores de Δr e Δs que anulem $b_1(r+\Delta r, s+\Delta s)$ e $b_0(r+\Delta r, s+\Delta s)$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s}\Delta s &= -b_1 \\ \frac{\partial b_0}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s}\Delta s &= -b_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Se conhecermos os valores das derivadas parciais de b_0 e b_1 com relação à r e s, o sistema de equações (11) se torna um sistema linear de 2 equações e 2 icógnitas, que pode ser resolvido pela regra de Cramer por exemplo para determinar os próximos passos Δr e Δs que deverão ser dados para irmos ajustando os valores de r e s a fim de zerar o resto dessa divisão. Bairstow mostrou que essas derivadas parciais podem ser obtidas por meio de um processo de divisão sintética análogo ao utilizado para a determinação dos próprios $b_i's$, de tal sorte que:

$$\begin{aligned} c_n &= b_n \\ c_{n-1} &= b_{n-1} + rc_n \\ c_i = b_i + rc_{i+1} + sc_{i+2}, \quad \text{para: } i &= (n-2) \to 1, \end{aligned} \tag{12}$$

em que

$$c_1 = \frac{\partial b_0}{\partial r}, \;\; c_2 = \frac{\partial b_0}{\partial s} = \frac{\partial b_1}{\partial r}, \;\; c_3 = \frac{\partial b_1}{\partial s}. \tag{13}$$

Uma vez que o sistema linear expresso em (11) tenha sido resolvido, basta atualizarmos r e s de acordo com

$$r_i = r_{i-1} + \Delta r \quad \text{e} \quad s_i = s_{i-1} + \Delta s \tag{14}$$

até que o resto da divisão seja nulo. Quando isso acontece, temos os valores de r e s que deverão ser utilizados na fórmula quadrática $x^2 - rx - s$ para obtenção das raízes, dadas por:

$$x_r = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2}. \tag{15}$$

Caso o resultado $f_{n-2}(x)$ da divisão de $f_n(x)$ pelo fator quadrático seja um polinômio de grau maior ou igual a 3, o método é aplicado novamente ao polinômio resultante $f_{n-2}(x)$ até irmos reduzindo a ordem do polinômio ao seu último grau. Caso o resultado seja um polinômio de ordem 2, basta aplicar a fórmula quadrática e obtêm-se as últimas raízes. Finalmente, caso seja um polinômio de ordem 1, então a última raiz é dada por $x_r = -s/r$. Um resumo do método é apresentado na figura (1).

Uma das vantagens desse método é que pelo fato de utilizar-se um divisor quadrático ele sempre encontra raízes aos pares. Sua convergência também costuma ser rápida pelo fato de utilizar o método de Newton-Raphson para a busca dos pares r, s que anulem o resto da divisão. No entanto, dependendo da escolha inicial de valores de r e s, o método pode apresentar problemas de divergência. Um recurso bem interessante no campo da análise numérica desse método consiste na elaboração de um mapa denominado fractais de Bairstow. Esse mapa consiste em atribuir uma cor associada por exemplo ao número de iterações necessárias para garantir a convergência do método para diversos pares (r_0, s_0) testados. Valores que levem à divergência do método podem ser pintados por exemplo de preto. A figura (2) ilustra alguns exemplos de estruturas de fractais de Bairstow. Esse é um ponto interessante de intersecção entre análise numérica e análise dinâmica não-linear que pode também ser explorado para outros métodos. O mapeamento de zonas de estabilidade/instabilidade no comportamento tanto de métodos numéricos quanto sistemas dinâmicos fornece pistas com relação ao comportamento número/físico de sistemas.

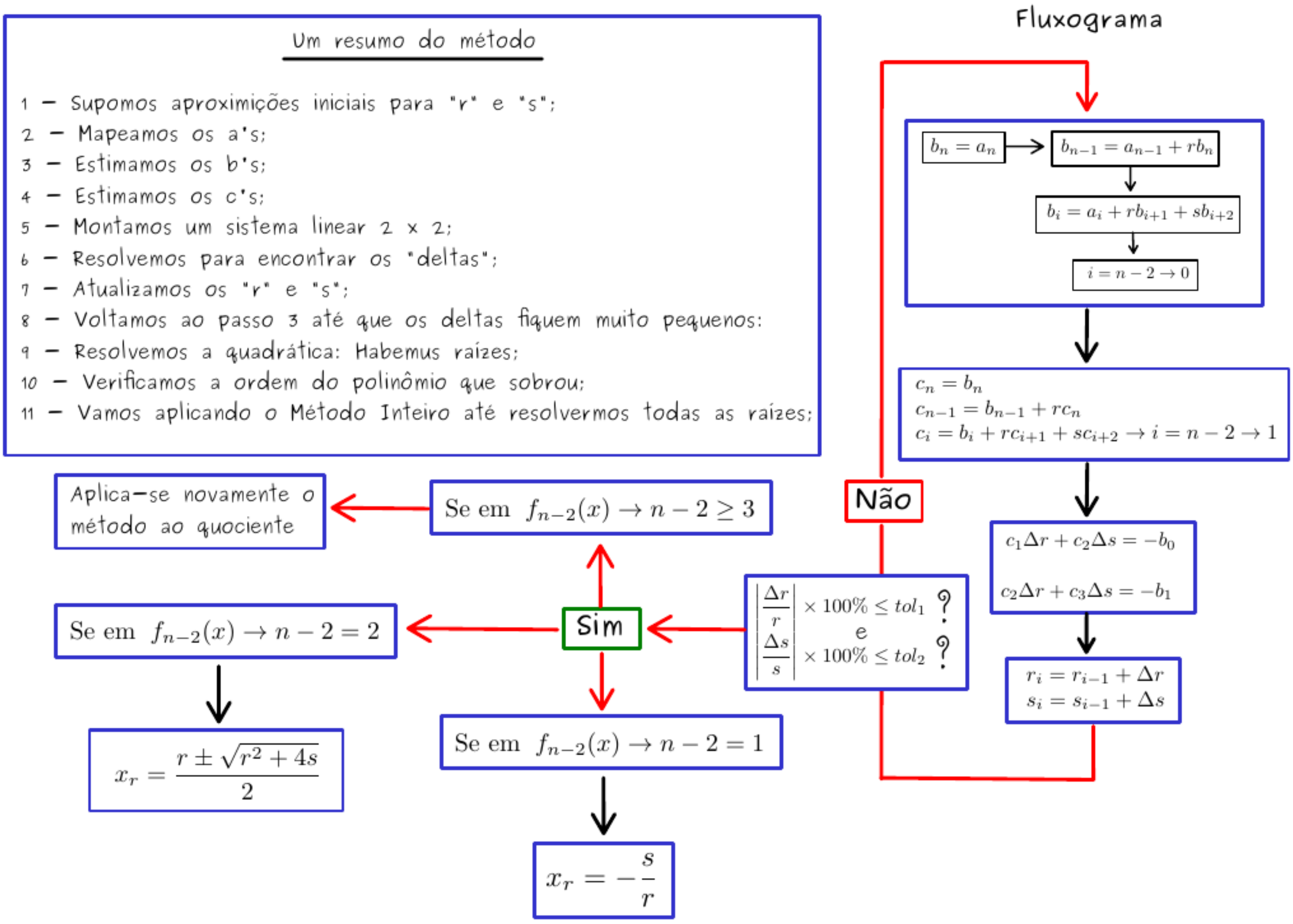

Figure 1: Fluxograma do método de Bairstow

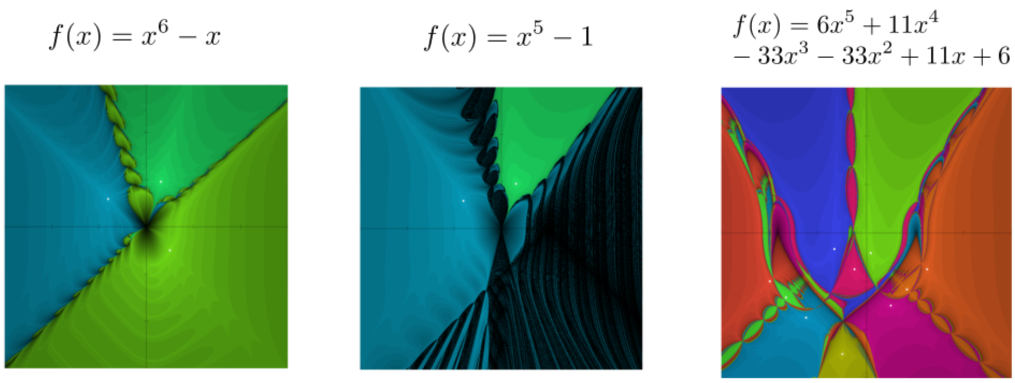

Figure 2: Exemplos de fractais de Bairstow: o eixo x contém valores de $r_0[= -3, 3]$ e o eixo y contém valores de $s_0 = [-3, 3]$.

2 Enunciado da tarefa

Sua tarefa consiste em escrever um programa de computador que encontre as raízes de um polinômio de ordem n pelo método de Bairstow e em seguida plotar fractais de Bairstow para diferentes polinômios testados.

A fim de ir ganhando confiança na tarefa, primeiro implemente o código considerando um único valor inicial de (r_0, s_0) e teste o método para um polinômio cujas raízes você conhece de antemão. Você pode montar um polinômio pelo processo de multiplicação de monômios com raízes conhecidas para testar a convergência do método.

Uma vez que o seu método funcione, você pode então automatizar o processo de varredura para diferentes valores de (r_0, s_0). A sugestão é que seu programa escreva como saída um arquivo de texto contendo 3 colunas, nas quais você irá alocar as informações referentes aos valores de r_0, s_0, it, em que it representa o número de iterações até a convergência do método. Caso o método não convirja após um elevado número de iterações (digamos por exemplo $it = 999$) você pode considar que o método divergiu e mandar o programa escrever o valor 999 na coluna responsável pela iteração.

Um script simples em gnuplot voltado para ler esse arquivo de texto e construir o fractal de Bairstow correspondente é dado a seguir:

Gnuplot Copiar código

```
# Configurações gerais
set terminal pngcairo size 1000,800 enhanced font 'Arial,10'
set output 'mapa_bairstow.png'

set title "Fractal de Bairstow - Número de Iterações até Convergência"
set xlabel "r₀ (chute inicial)"
set ylabel "s₀ (chute inicial)"
set cblabel "Número de Iterações"

set palette defined ( \
    0 "#440154", \
    1 "#482777", \
    2 "#3E4989", \
    3 "#31688E", \
    4 "#26828E", \
    5 "#1F9E89", \
    6 "#35B779", \
    7 "#6CCE59", \
    8 "#B4DE2C", \
    9 "#FDE725")

set view map

# Trata pontos divergentes (ex: 999) como "NaN"
set datafile missing "999"

# Plotagem
splot 'dados_bairstow_simulado.txt' using 1:2:3 with image
```

Figure 3: Script em Gnuplot para plotar um fractal de Bairstow com base num arquivo de texto 'dados_bairstow_simulado.txt'.

Para executar esse script, basta ter o programa Gnuplot instalado no seu sistema Linux, abrí-lo num terminal e carregar o script com o comando 'load fractal_bairstow.gnu', em que fractal_bairstow.gnu é o nome do arquivo no qual você deverá salvar seu script.

3 Referências bibliográficas

1. S. C. Chapra, R. P. Canale. “Métodos Numéricos para Engenharia.” McGrawHill, 5a edição (2008): 1-825.