Programa para casa #2

Determinação de raízes de equações
Aplicação dos Métodos da bisecção e da falsa posição

March 31, 2025

1 Contextualização

A primeira classe de problemas abordados neste curso consiste nos métodos utilizados para obtenção de raízes de equações algébricas e transcendentais. As primeiras buscas por raízes de equações na história da matemática datam de civilizações Babilônias e Egípcias, cujos registros históricos indicam que ambas as civilizações já utilizavam métodos matemáticos para solução de polinômios de primeiro e segundo grau. Esses registros datam de cerca de 1800 aC a 1650 aC. Ao longo da história da matemática a busca por expressões gerais fechadas para estimativa de raízes de polinômios de ordem mais alta ocupou mentes brilhantes ao longo de vários séculos.

Dentre as funções $f(x)$ de interesse nesse tópico, classificamo-as entre funções algébricas e funções transcendentais. As primeiras são aquelas que podem ser formadas por operações algébricas de potências de x que envolvem adição, subtração, multiplicação, divisão e radicalização. Estas podem ser expressas em termos gerais como:

$$f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + ... + f_n y^n = 0,$$

em que f_0, f_1, f_2, f_n são polinômios de ordem 0, 1, 2 e n respectivamente, dados por:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n.$$

Exemplos de equações algébricas são

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+3x^4}}, \;\; f(x) = 5x^5 - (3x+5)^{1/3}, \;\; f(x) = \frac{3x-4}{1+\sqrt{2-x^5}}$$

Já as equações transcendentais envolvem funções matemáticas especiais como exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas, entre outras. Exemplos de equações transcendentais são:

$$f(x) = \sin(x) - e^{-2x}, \;\; f(x) = \cosh^{-1}(x) + \frac{1}{x}, \;\; f(x) = \ln 2x^5.$$

Problemas físicos relacionados à determinação de um ou mais pontos da variável de entrada x que satisfaçam $f(x) = 0$ aparecem em diferentes campos de aplicação, da engenharia civil e ambiental à engenharia mecânica, elétrica e aeroespacial.

Existem diferentes métodos numéricos destinados à solução deste tipo de problema, cada qual com suas vantagens e desvantagens. O objetivo aqui é começarmos de um ponto de partida simples que nos permita compreender como estes métodos são concebidos e após a construção de métodos mais rudimentares tentar melhorá-los em função de uma análise crítica criteriosa com relação às deficiências de cada método.

A maneira mais grosseira de localizarmos uma raiz seria por uma busca visual num gráfico que nos mostre o comportamento de $f(x) \times x$. Esse método consistiria em ir ampliando a região do gráfico onde a curva cruza (ou toca) o eixo x para tentar localizar em quais valores de x isso ocorre. Esse método é evidentemente muito grosseiro e tem sua precisão dependente da qualidade da visão do observador. Portanto, precisamos conceber métodos melhores.

Nesse sentido, uma primeira abordagem consiste em definir um intervalo de busca em x. Podemos definir esse intervalo como $x \in [x_i, x_s]$, em que x_i e x_s representam os valores inferior e superior do intervalo. Em alguns contextos poderemos também nos referir a estas variáveis como x_l e x_u, em que os sub-índices l e u denotam *lower* e *upper*. Uma vez definido o intervalo de busca podemos verificar se a função muda de sinal nesse intervalo. Uma forma simples de verificar isso é calculando o produto $f(x_i)f(x_s)$. Caso $f(x_i)f(x_s) < 0$, sabemos que existe pelo menos uma raiz nesse intervalo de busca. Em seguida, podemos dividir esse intervalo pela metade e calcular o ponto médio em x como $x_m = (x_i + x_s)/2$ e checar se a raiz encontra-se no intervalo $[x_i, x_m]$ ou no intervalo $[x_m, x_s]$. Essa verificação pode ser feita da mesma maneira, observando os sinais de $f(x_i)f(x_m)$ e $f(x_m)f(x_s)$. Uma vez descoberto o novo intervalo de localização da raiz vamos refinando essa divisão pela metade sucessivamente até termos um intervalo tão pequeno quanto uma tolerância. Essa é a ideia do método da bisecção.

Uma das vantagens claras desse método é sua simplicidade em termos de implementação. Outra vantagem do método da bisecção é que o número de iterações necessárias para chegarmos à solução dentro de uma certa tolerância é conhecida à priori. Para compreender isto, note que na iterção 0, ou seja, no momento em que definimos o intervalo de busca inicial, o erro máximo da nossa solução $E^0_{a,max}$ é Δx, o que significa que na pior das hipóteses, caso nossa raiz esteja dentro do intervalo, a distância máxima entre ela e o ponto mais extremo do intervalo é o próprio tamanho do intervalo. Dessa forma, podemos dizer que:

$$E^0_{a,max} = \Delta x,$$

porém, já na primeira divisão (iteração 1) esse erro máximo cai para

$$E^1_{a,max} = \frac{\Delta x}{2}.$$

Na próxima divisão erro erro cai pela metade, para

$$E^2_{a,max} = \frac{\Delta x}{2^2}.$$

Na n-ésima iteração, o erro vai para

$$E^n_{a,max} = \frac{\Delta x}{2^n}. \tag{1}$$

Para sabermos o número de iterações necessárias para reduzir esse erro a um certo valor desejado $E_{a,d}$, basta igualarmos $E^n_{a,max} = E_{a,d}$ e isolar n da equação (1):

$$n = \log_2\left(\frac{\Delta x}{E_{a,d}}\right).$$

Uma desvantagem clara do método é que ele não leva em consideração por exemplo a proximidade da função $f(x)$ com relação ao eixo x nos extermos do intervalo. Caso $f(x_i)$ esteja mais próxima da origem do eixo y do que $f(x_s)$, a raiz deverá estar mais perto de x_i do que de x_s (ver figura 1) e isso não é levado em consideração pelo método da bisecção.

Uma primeira forma de incorporar essas informações na construção de um novo método consiste em ligar por uma reta $f(x_i)$ e $f(x_s)$ e usando o princípio da semelhança de triângulos aplicado

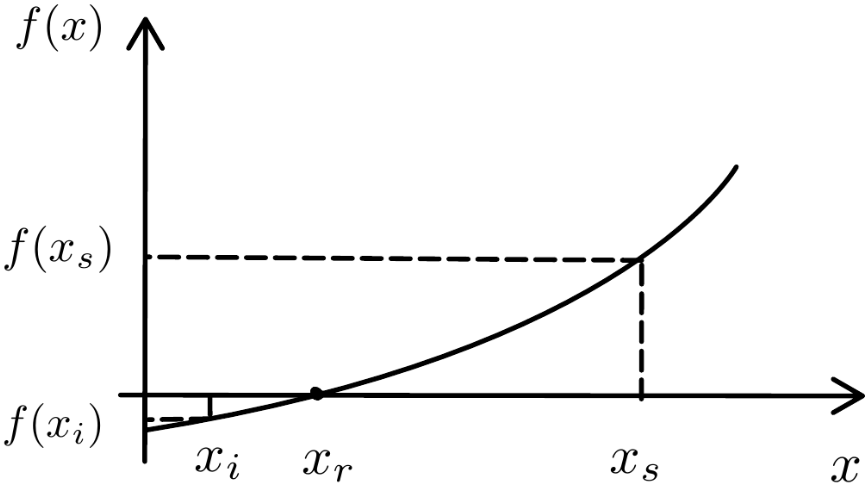

Figure 1: Ilustração do efeito da proximidade dos valores de $f(x_i)$ e $f(x_s)$ em relação ao eixo y na distância da raiz x_r em relação aos extermos do intervalo de busca.

aos triângulos formados pelo cruzamento dessa reta com o eixo x (ver figura 2), obter a seguinte expressão para o valor de x desta reta que cruza exatamente o eixo em questão:

$$x_r = x_s - \frac{f(x_s)(x_i - x_s)}{f(x_i) - f(x_s)}. \tag{2}$$

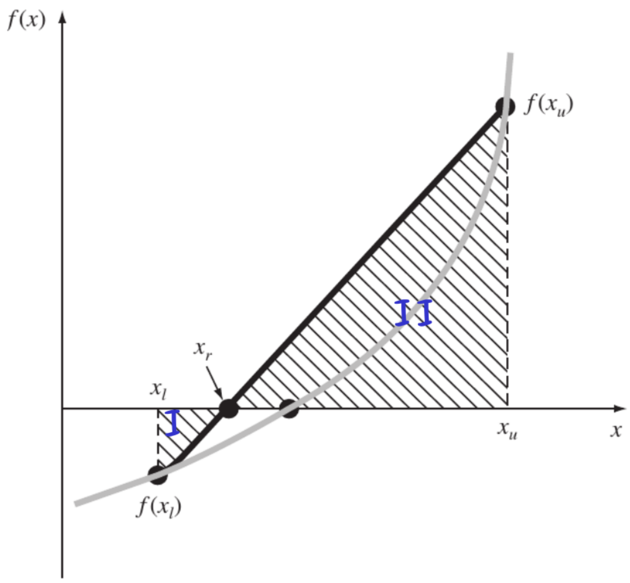

Figure 2: Representação visual dos triângulos formados pelo cruzamento da reta que conecta os valores da função $f(x)$ nos extermos do intervalo com o eixo x utilizada para dedução do método da falsa posição.

A substituição da equação (2) no local do cálculo de x_m pelo método da bisecção é a essência do método da falsa posição, que agora leva em conta a proximidade da função $f(x)$ com relação à origem do eixo y nos extremos do intervalo de busca. Esse método tende a precisar de um número menor de iterações para convergir.

2 Enunciado da tarefa

Baseado nessa contextualização, sua tarefa consiste em escrever um programa de computador (FORTRAN, C++ ou Python) que encontre a raíz real das seguintes equações utilizando o método da bisecção e da falsa posição:

$$f(x) = -0.5x^2 + 2.5x^2 + 4.5 \text{ com aproximações iniciais: } x_l^0 = 5, x_u^0 = 10 \tag{3}$$

$$f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2 \text{ com aproximações iniciais: } x_l^0 = 0, x_u^0 = 1 \tag{4}$$

$$f(x) = -25 + 82x - 90x^2 + 44x^3 - 8x^4 + 0.7x^5 \text{ com: } x_l^0 = 0.5, x_u^0 = 1 \tag{5}$$

Obtenha também a primeira raiz não-trivial para a seguinte equação transcendental:

$$\sin(x) = x^3 \text{com aproximações iniciais: } x_l^0 = 0.5, x_u^0 = 1 \tag{6}$$

e a raiz real positiva de

$$\ln(x^4) = 0.7 \text{com aproximações iniciais: } x_l^0 = 0.5, x_u^0 = 2 \tag{7}$$

Seu programa deverá:

1. Resolver a mesma equação pelos dois métodos até obter um erro relativo para ambos os métodos dentro da mesma faixa de tolerância;
2. Gerar uma saída de texto tabelando o erro relativo em função do número de iterações para cada um dos métodos;
3. Plotar um gráfico comparando esses erros para cada um dos métodos para cada equação resolvida;

3 Referências bibliográficas

1. S. C. Chapra, R. P. Canale. "Métodos Numéricos para Engenharia." McGrawHill, 5a edição (2008): 1-825.