

Вероятностные алгоритмы проверки чисел на простоту

Игорь Солодовников

31 октября, 2023, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

Цели и задачи

Цель лабораторной работы

Изучение алгоритмов Ферма, Соловья-Штрассена, Миллера-Рабина.

Выполнение лабораторной работы

Для построения многих систем защиты информации требуются простые числа большой разрядности. В связи с этим актуальной является задача тестирования на простоту натуральных чисел.

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.
 - Выход. «Число n , вероятно, простое» или «Число n составное».
1. Выбрать случайное целое число a , $2 \leq a \leq n - 2$.
 2. Вычислить $r = a^{n-1} \pmod{n}$
 3. При $r = 1$ результат: «Число n , вероятно, простое». В противном случае результат: «Число n составное»..

Тест Соловья-Штрассена

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.
 - Выход. «Число n , вероятно, простое» или «Число n составное».
1. Выбрать случайное целое число a , $2 \leq a \leq n - 2$.
 2. Вычислить $r = a^{(\frac{n-1}{2})} \pmod{n}$
 3. При $r \neq 1$ и $r \neq n - 1$ результат: «Число n составное».
 4. Вычислить символ Якоби $s = \left(\frac{a}{n}\right)$
 5. При $r = s \pmod{n}$ результат: «Число n , вероятно, простое». В противном случае результат: «Число n составное».

Тест Миллера-Рабина.

1. Представить $n - 1$ в виде $n - 1 = 2^s r$, где r - нечетное число
2. Выбрать случайное целое число a , $2 \leq a \leq n - 2$.
3. Вычислить $y = a^r \pmod n$
4. При $y \neq 1$ и $y \neq n - 1$ выполнить действия
 - Положить $j = 1$
 - Если $j \leq s - 1$ и $y \neq n - 1$ то
 - Положить $y = y^2 \pmod n$
 - При $y = 1$ результат: «Число n составное».
 - Положить $j = j + 1$
 - При $y \neq n - 1$ результат: «Число n составное».
5. Результат: «Число n , вероятно, простое».

Пример работы алгоритма

```
In [6]: 1 n = 10177
```

```
In [7]: 1 Ferma(n, 300)
```

Simple

```
Out[7]: True
```

```
In [8]: 1 SoloveiStrassen(n, 300)
```

Simple

```
Out[8]: True
```

```
In [9]: 1 MillerRabbin(n)
```

Complex

Complex

Complex

Complex

Complex

Complex

Complex

Complex

Simple

```
Out[9]: True
```

```
In [10]: 1 n = 10178
```

```
In [11]: 1 Ferma(n, 300)
```

Complex

```
Out[11]: False
```

```
In [12]: 1 SoloveiStrassen(n, 300)
```

Complex

```
Out[12]: False
```

```
In [13]: 1 MillerRabbin(n)
```

Simple

Complex

```
Out[13]: False
```

Выводы

Изучили алгоритмы Ферма, Соловья-Штрассена,
Миллера-Рабина.