Métodos Numéricos I

Tema 4. Ajuste de Curvas.
Interpolação Polinomial.

Prof. Dany S. Dominguez
dsdominguez@uesc.br
Sala 1 – NBCGIB
(73) 3680 5212 – ramal 30

ROTEIRO

- Introdução
- Polinômio de Taylor
- Polinômios de Lagrange
- Splines
- Comentários finais

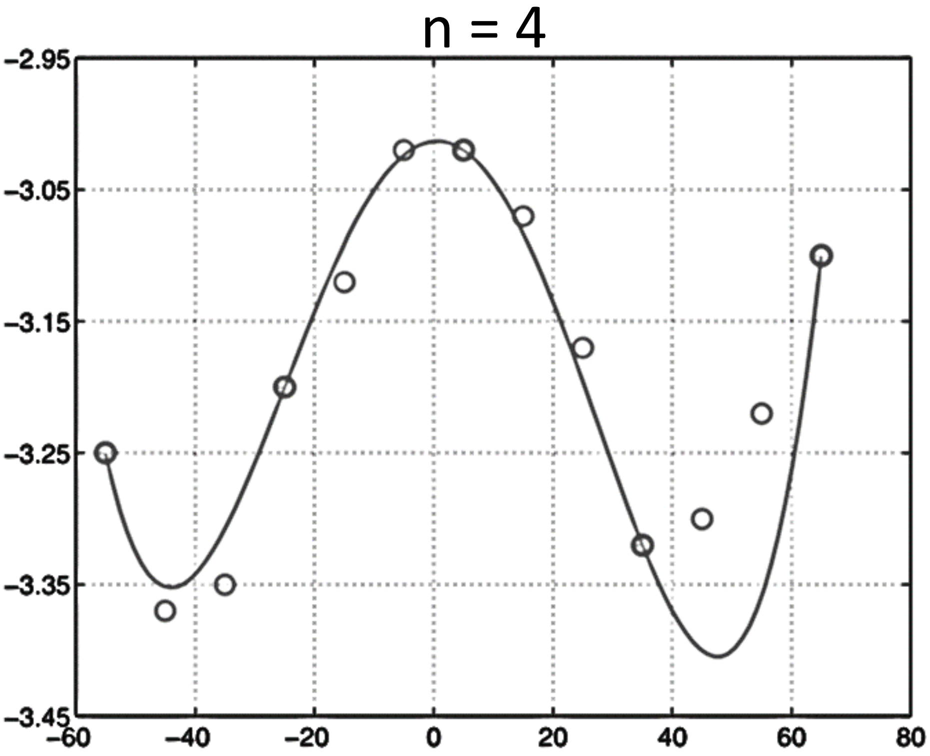
Interpolação por Spline Cúbico

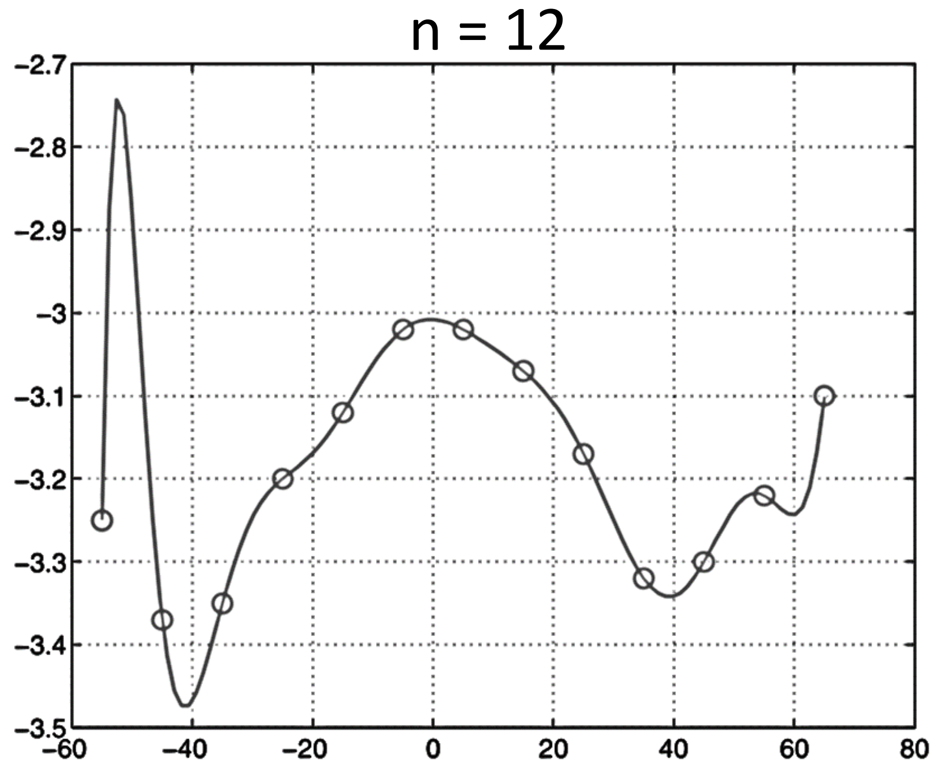
- A interpolação polinomial:
  - Aproxima funções (ou dados) arbitrários em intervalos fechados
  - O polinômio satisfaz todos os pontos do intervalo
  - Para satisfazer $(n+1)$ pontos o polinômio tem grau n
  - Aparecem polinômios de alta ordem com natureza oscilatória
  - Eventualmente, o polinômio não reproduz o comportamento dos dados

Interpolação por Spline Cúbico

- A interpolação polinomial problemas

```
x=[ -55   -45   -35   -25   -15    -5     5    15    25    35    45     55   65];
y=[-3.3 -3.4 -3.3 -3.2 -3.1 -3.0 -3.0 -3.1 -3.2 -3.3 -3.3 -3.2 -3.1];
```



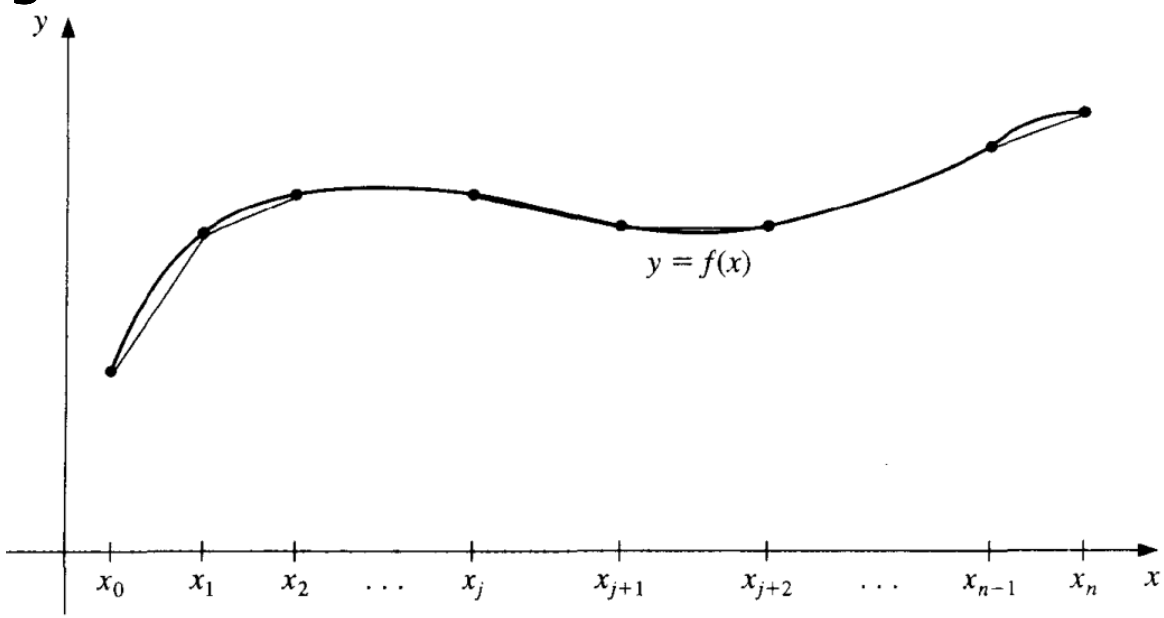


Interpolação por Spline Cúbico

- Como construir um polinômio interpolador para muitos pontos sem fortes oscilações?
  - Dividir o intervalo em subintervalos
  - Construir um polinômio interpolador para cada subintervalo
  - Exigir condições de continuidade e diferenciabilidade nos extremos dos subintervalos
  - **Interpolação polinomial por partes**

Interpolação por Spline Cúbico

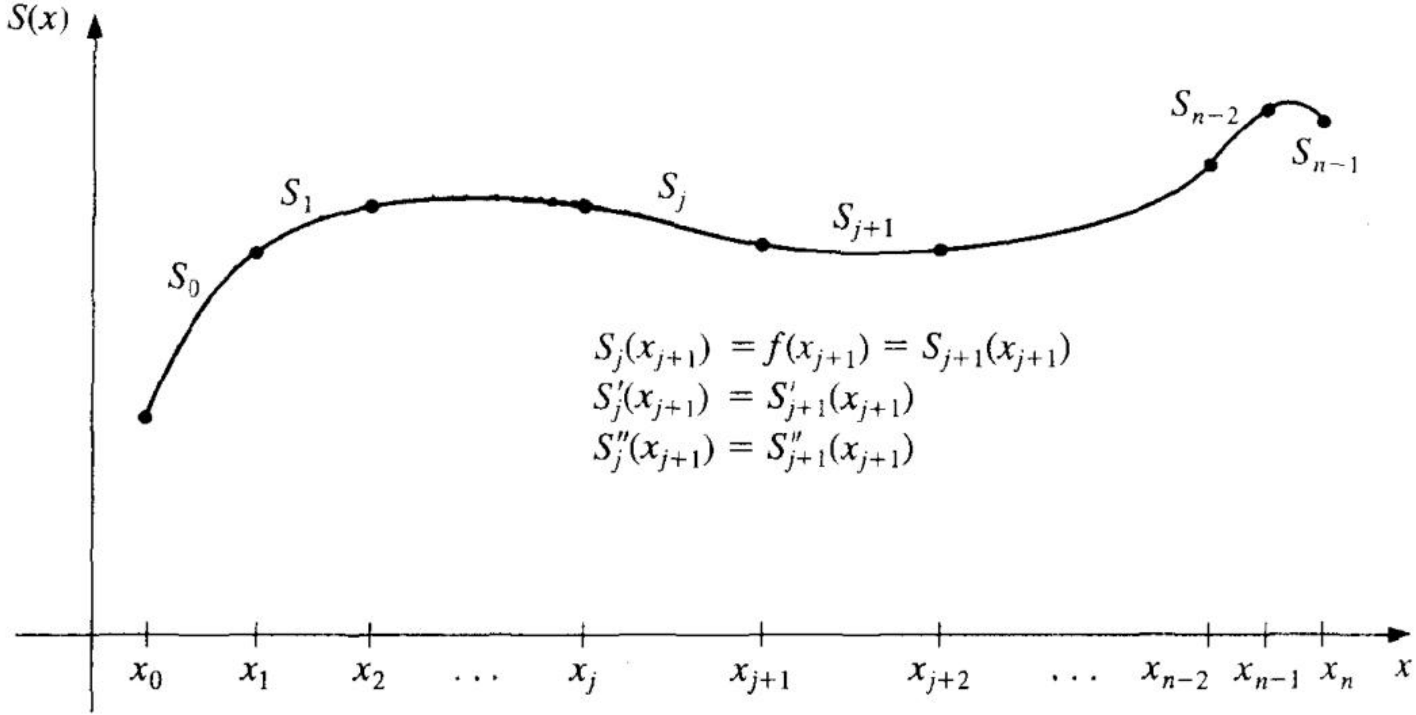
- A interpolação por partes mais simples = interpolação linear por partes
  - Os pontos (x_0, f_0), (x_1, f_1), ... (x_n, f_n), são unidos por segmentos de reta



  - A função interpoladora não é diferençável em todo o intervalo, não reproduz curvaturas

Interpolação por Spline Cúbico

- A interpolação por splines cúbicos é a interpolação por partes mais utilizada
  - Utiliza um polinômio cúbico entre cada par de pontos sucessivos
  - Função interpoladora contínua e diferençável em $[x_0 , x_n]$
  - A segunda derivada da função é contínua



Interpolação por Spline Cúbico

- **Definição**: Dada a função f definida em $[a, b]$ e um conjunto de pontos $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ um spline cúbico interpolador S é uma função que satisfaz as seguintes condições

  a) $S(x)$ é um polinômio cúbico, $S_j(x)$ no subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0:n$

  $$S_j\left(x\right) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

  b) $S_j(x_j) = f(x_j)$ e $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para $j = 0:n\text{-}1$

  c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j = 0:n\text{-}2$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Definição** …

  d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j = 0{:}n\text{-}2$

  e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j = 0{:}n\text{-}2$

  f) Condições de contorno

     1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (contorno livre ou natural)
     2. $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (contorno fixado)

- Qual condição de contorno oferece uma melhor aproximação?

Interpolação por Spline Cúbico

- Condições de contorno – Spline natural
  - Aproximação menos precisa
  - Não são necessárias informações sobre a derivada da função nos extremos do intervalo
- Condições de contorno – Spline fixado
  - Aproximação mais precisa
  - Inclui maiores informações sobre o problema
  - Precisa da derivada da função nos extremos do intervalo

Interpolação por Spline Cúbico

- Para calcularmos as constantes a_j, b_j, c_j, e d_j de cada Spline $S_j(x)$ devemos aplicar as condições (b-f) da definição em

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

- Aplicando a condição (b) $S_j(x_j) = f(x_j)$

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$$

- Aplicando a condição (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$

$$a_{j+1} = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

Interpolação por Spline Cúbico

- Para simplificar a notação, definimos $h_j = x_{j+1} - x_j$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad \text{para } j = 0 : n\text{-}1 \quad (1)$$

- Calculamos a derivada do splibe cúbico $S_j(x)$

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

- Avaliando a derivada em x_j

$$S_j'(x_j) = b_j$$

- Aplicando a condição (d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad \text{para } j = 0 : n - 1 \quad (2)$$

Interpolação por Spline Cúbico

- Calculamos a segunda derivada do spline $S_j(x)$

$$S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$$

- Avaliando a segunda derivada em x_j

$$S_j''(x_j) = 2c_j$$

- Aplicando a condição (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad \text{para} \quad j = 0 : n\text{-}1$$

- Isolando d_j na equação anterior

$$d_j = \frac{1}{3h_j}\left(c_{j+1} - c_j\right) \qquad (3)$$

Interpolação por Spline Cúbico

- Substituindo eq. (3) na eq. (1)

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right) \qquad (4)$$

- Substituindo eq. (3) na eq. (2)

$$b_{j+1} = b_j + h_j\left(c_j + c_{j+1}\right) \qquad (5)$$

- Isolamos b_j na eq. (4)

$$b_j = \frac{1}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \frac{h_j}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right) \qquad (6)$$

- Reduzindo índice $j \longrightarrow j\text{-}1$ na equação anterior

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}\left(a_j - a_{j-1}\right) - \frac{h_{j-1}}{3}\left(2c_{j-1} + c_j\right) \qquad (7)$$

Interpolação por Spline Cúbico

- Reduzindo índice $j \longrightarrow j\text{-}1$ na eq. (5)

$$b_j = b_{j-1} + h_{j-1}\left(c_{j-1} + c_j\right) \qquad (8)$$

- Substituindo as eqs. (6 e 7) na eq. (8)

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2\left(h_j + h_{j-1}\right)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \frac{3}{h_{j-1}}\left(a_j - a_{j-1}\right) \quad (9)$$

- A eq. (9) pode ser escrita para cada um dos pontos internos x_1, x_2, ..., x_{n-1}

- Precisamos incluir os extremos usando as condições de contorno

Interpolação por Spline Cúbico

- Condição de contorno, natural $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$
- Considerando que $S_j''(x_j) = 2c_j$ e a condição (e) da definição obtemos

$$c_0 = S_0''(x_0) = 0, \qquad c_n = S_{n-1}''(x_n) = 0, \qquad (10)$$

- As condições de contorno eqs. (10) em conjunto com as eqs. (9) formam um sistema de ordem $(n+1)$ que pode ser utilizado para calcular c_j, $j=0:n$ na forma

$$Ax = b$$

Interpolação por Spline Cúbico

- SELA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5**: Utilize splines cúbicos naturais $S_j(x)$ para aproximar a função $f(x) = e^x$ considerando os pontos $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$ e $x_3=3$. Utilize a função interpolante para calcular a integral de $f(x)$ no intervalo $[0, 3]$, calcule o erro da estimativa.

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .

$$n = 3, \quad i = 0:3$$

i	0	1	2	3
x_i	0,0	1,0	2,0	3,0
f_i	1	e	e^2	e^3

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_j(x - x_0)^3, \quad x_0 \le x \le x_1$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, \quad x_1 \le x \le x_2$$

$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3, \quad x_2 \le x \le x_3$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .

$$a_i = f_i, \quad i = 0:2$$

- Construímos o sistema $Ax = b$
- Usando a eq. (9) para x_1

$$h_0 c_0 + 2\left(h_1 + h_0\right)c_1 + h_2 c_2 = \frac{3}{h_1}\left(a_2 - a_1\right) - \frac{3}{h_0}\left(a_1 - a_0\right)$$

- Usando a eq. (9) para x_2

$$h_1 c_1 + 2\left(h_2 + h_1\right)c_2 + h_3 c_3 = \frac{3}{h_2}\left(a_3 - a_2\right) - \frac{3}{h_1}\left(a_2 - a_1\right)$$

- Considerando as condições de contorno para x_0 e x_3

$$c_0 = 0, \quad c_3 = 0$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .

$$a_i = f_i, \quad i = 0:2$$

- Construímos o sistema $Ax = b$
- Usando a eq. (9) para x_1

$$h_0 c_0 + 2(h_1 + h_0)c_1 + h_2 c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

- Usando a eq. (9) para x_2

$$h_1 c_1 + 2(h_2 + h_1)c_2 + h_3 c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1)$$

- Considerando as condições de contorno para x_0 e x_3

$$c_0 = 0, \quad c_3 = 0$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .
  - Considerando $h_0 = h_1 = h_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(e^2 - e\right) - 3\left(e - 1\right) \\ 3\left(e^3 - e^2\right) - 3\left(e^2 - e\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.857477 \\ 24.07712 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.857477 \\ 24.07712 \end{bmatrix}$$

- Resolvendo

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,757 \\ 5,830 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .
  - Usando a eq. (6)

$$b_j = \frac{1}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \frac{h_j}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right), \qquad j = 0:2 \qquad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,466 \\ 2,223 \\ 8,810 \end{bmatrix}$$

  - Usando a eq. (3)

$$d_j = \frac{1}{3h_j}\left(c_{j+1} - c_j\right), \qquad j = 0:2 \qquad \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,252 \\ 1,691 \\ -1,943 \end{bmatrix}$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .
  - Resultados

i	0	1	2
a_i	1	e	e^2
b_i	1,466	2,223	8,810
c_i	0,000	0,757	5,830
d_i	0,252	1,691	-1,943

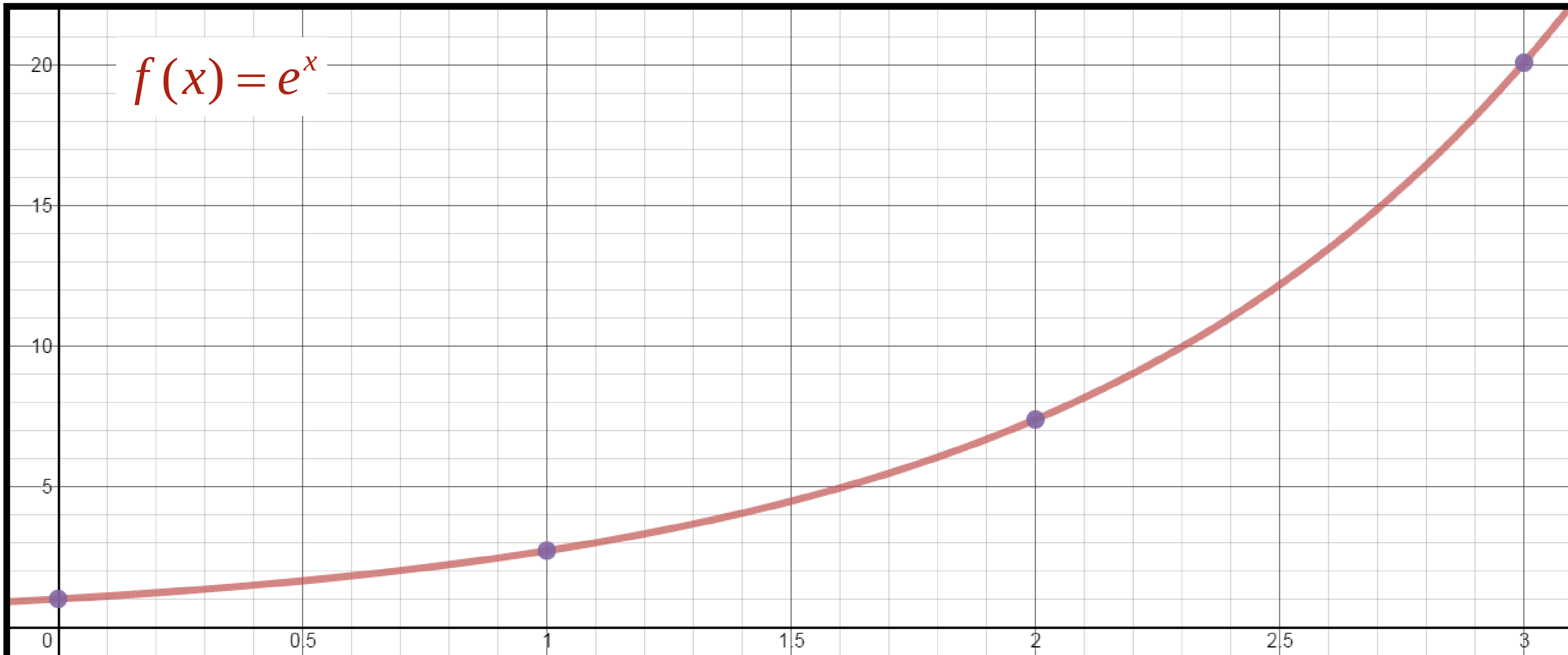
$$S_0\left(x\right)=1+1,466x+0,252x^3$$

$$S_1\left(x\right)=2,718+2,223(x-1)+0,757(x-1)^2+1,691(x-1)^3$$

$$S_2\left(x\right)=7,389+8,810(x-2)+5,830(x-2)^2-1,943(x-2)^3$$

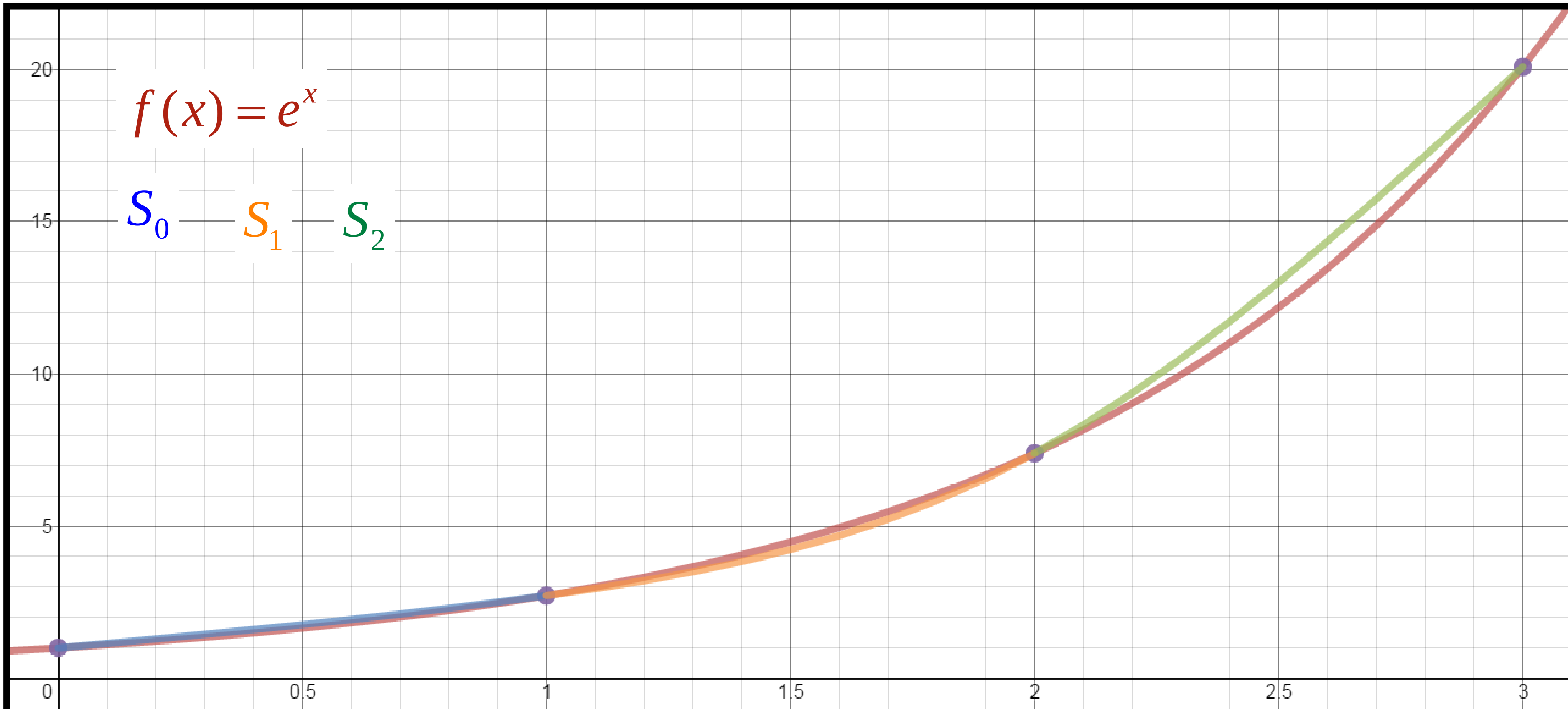
Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5 . . .**



Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5 . . .**



Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .
  - Calculo da integral $$I_e = \int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = 19,086$$

$$I_a = \int_0^1 S_0(x)dx + \int_1^2 S_1(x)dx + \int_2^3 S_2(x)dx = I_0 + I_1 + I_2$$

$$I_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} S_j(x)dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \right] dx$$

$$= a_j(x - x_j) + \frac{b_j}{2}(x - x_j)^2 + \frac{c_j}{3}(x - x_j)^3 + \frac{d_j}{4}(x - x_j)^4 \Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}}$$

$$= a_j + \frac{b_j}{2} + \frac{c_j}{3} + \frac{d_j}{4}$$

Interpolação por Spline Cúbico

- **Exemplo 5** . . .
  - Calculo da integral . . .

$$I_a = 19,552$$

$$e_r = \frac{|I_e - I_a|}{|I_a|} 100\% = 2,4\%$$

- Como pode ser aprimorada a interpolação anterior?
  - Incluindo maiores informações sobre a função
  - Splines fixados
  - Aumentar o número de pontos

Interpolação por Spline Cúbico

- Quais mudanças devemos realizar na estratégia descrita no caso de considerarmos splines fixados?
  - As equações *0* e n do sistema das constantes c, devem ser construídas usando condição de contorno de Spline fixado
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$
  - $S'(x_0) = f'(x_0) \rightarrow \quad 2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$
  - $S'(x_n) = f'(x_n) \rightarrow \quad h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$

Interpolação por Spline Cúbico

- SELA – Splines fixados

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Interpolação por Spline Cúbico

- Entrada: n, (x_0, f_0), (x_1, f_1), . . . , (x_n, f_n)
- Saída: a_j, b_j, c_j, e d_j para $j=0:n-1$

$$S_j\left(x\right) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

1. $a_j = f(x_j) = f_j$
2. Calcular c_j construindo e resolvendo o sistema de equações
3. Calcular b_j $\qquad b_j = \dfrac{1}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \dfrac{h_j}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right) \qquad (6)$
4. Calcular d_j $\qquad d_j = \dfrac{1}{3h_j}\left(c_{j+1} - c_j\right) \qquad (3)$

Considerações Finais

- Interpolação polinomial
  - Função que satisfaz os pontos (x_i, f_i)
- Aproximação por polinômio de Taylor
  - Válido na vizinhança de um ponto
  - Insatisfatório para intervalos largos
- Interpolação de Lagrange
  - Válido em intervalos largos
  - Alto custo computacional para diversos valores de x
  - Oscilatório com polinômios de alta ordem (muitos pontos)

Considerações Finais

- Alternativas
  - Fórmula iterativa de Neville
  - Polinômios de Newton
  - Interpolação polinomial por partes

- Splines cúbicos
  - Cada subintervalo é aproximado por uma função cúbica
  - Funções pertencem a $C^2[x_0, x_n]$
  - Naturais ou fixados