Métodos Numéricos I

Tema 3. Sistemas de Equações Lineares e Algébricas

Prof. Dany S. Dominguez
dsdominguez@uesc.br
Sala 1 – NBCGIB
(73) 3680 5212 – ramal 30

ROTEIRO

- Introdução
- Representação de SELAs
- Métodos diretos
  - Eliminação de Gauss
  - Estratégias de pivoteamento
    - Pivotamento parcial
    - Pivotamento parcial com escala
    - Pivotamento completo
  - Inversão de matrizes
  - Fatoração LU

Estratégias de pivotamento

- Na estratégia de pivotamento parcial cada multiplicador $m_{ij} \leq 1$
- Esta estratégia é suficiente para a grande maioria dos sistemas
- Entretanto, pode apresentar problemas de arredondamento em alguns sistemas
- **Exemplo 6**: Considere o sistema linear

$$\begin{array}{rrcl} f_1: & 30,00x_1 + 591400x_2 & = & 591700 \\ f_2: & 5,291x_1 - 6,130x_2 & = & 46,78 \end{array}$$

resolva-lo utilizando o método de Gauss com pivotamento parcial e aritmética de quatro dígitos.

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 6**: ...

$$\begin{aligned} f_1: \; 30,00x_1 + 591400x_2 &= 591700 \\ f_2: \; 5,291x_1 - 6,130x_2 &= 46,78 \end{aligned}$$

  – Pivotamento

$$\max\{|a_{11}|,|a_{21}|\} = \max\{|30,00|,|5,291|\} = |a_{11}|$$

  - Não precisamos troca de linhas

Quatro algarismos	Valores precisos
$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{5,291}{30,00}$ $\quad m_{21} = 0,1764$	$m_{21} = 0,1763667$
$(f_2 - m_{21} f_1) \rightarrow f_2$ $\left[\begin{array}{cc|c} 30,00 & 591400 & 591700 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc|c} 30,00 & 591400 & 591700 \\ 0 & -104309,39 & -104309,39 \end{array}\right]$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 6**: ...

	Quatro algarismos	Valores precisos
$x_2 = \dfrac{a_{23}}{a_{22}}$	$x_2 \approx 1,001$	$x_2 = 1,000$
$x_1 = \dfrac{a_{13} - a_{12}x_2}{a_{11}}$	$x_1 \approx -10,00$	$x_1 = 10,00$

- Os erros de arredondamento conduzem a um resultado incorreto mesmo com pivotamento parcial

Estratégias de pivotamento

- Uma alternativa para resolver o problema anterior é o pivotamento parcial com escala ou pivotamento por coluna com escala
- Nele, utilizamos como pivô o elemento que é maior em relação aos outros elementos da linha (maior relativo)
- Primeiro passo, calcular o fator de escala s_i para cada linha como o elemento de maior valor absoluto da linha

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} \left| a_{ij} \right|$$

Estratégias de pivotamento

- Como pivô *(p)* escolhemos o elemento de maior tamanho relativo em sua coluna, isto é

$$\frac{|a_{pi}|}{s_i} = \max_{1 \le k \le n} \frac{|a_{ki}|}{s_k}$$

- Se a posição do pivô for diferente de i, fazemos a troca de linhas $f_i \leftrightarrow f_p$
- Os fatores de escala são calculados uma vez
- Os fatores de escala devem ser trocados quando ocorram trocas de linha.

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 7**: Resolver o sistema do exemplo 6 considerando a estratégia de pivotamento parcial com escala e aritmética de quatro algarismos

$$\begin{aligned} f_1: \ 30,00x_1 + 591400x_2 &= 591700 \\ f_2: \ 5,291x_1 - 6,130x_2 &= 46,78 \end{aligned}$$

  - Cálculo dos fatores de escala

$$s_1 = \max\{|a_{11}|, |a_{12}|\} = \max\{|30,00|, |591400|\} = |a_{12}| = 591400$$

$$s_2 = \max\{|a_{21}|, |a_{22}|\} = \max\{|5,291|, |-6.130|\} = |a_{22}| = 6,130$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 7** . . .

$$\begin{array}{lrcr} f_1: & 30,00x_1 + 591400x_2 & = & 591700 \\ f_2: & 5,291x_1 - 6,130x_2 & = & 46,78 \end{array}$$

  - Pivotamento

$$\max\left\{\frac{|a_{11}|}{s_1}, \frac{|a_{12}|}{s_2}\right\} = \max\left\{|0,5073E-04|, |0,8631|\right\} \Rightarrow p = 2$$

    - Precisamos trocar $f_2 \leftrightarrow f_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 30,00 & 591400 & 591700 \end{array}\right]$$

  - Eliminação

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{30,00}{5,291} = 5,670$$

$$(f_2 - m_{21} f_1) \rightarrow f_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0 & ? & ? \end{array}\right]$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 7** . . .

$$\begin{array}{lrcl} f_1: & 30,00x_1 + 591400x_2 & = & 591700 \\ f_2: & 5,291x_1 - 6,130x_2 & = & 46,78 \end{array}$$

  – Pivotamento

$$\max\left\{\frac{|a_{11}|}{s_1}, \frac{|a_{12}|}{s_2}\right\} = \max\left\{|0,5073E-04|, |0,8631|\right\} \Rightarrow p = 2$$

    - Precisamos trocar $f_2 \leftrightarrow f_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 30,00 & 591400 & 591700 \end{array}\right]$$

  – Eliminação

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{30,00}{5,291} = 5,670$$

$$\left(f_2 - m_{21} f_1\right) \rightarrow f_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0 & 591400 & 591400 \end{array}\right]$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 7** . . .
  - Substituição regressiva

$$\left[\begin{array}{rr|r} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0 & 591400 & 591400 \end{array}\right]$$

$$x_2 = \frac{a_{23}}{a_{22}} = 1,000 \qquad x_1 = \frac{a_{13} - a_{12}x_2}{a_{11}} = 10,00$$

- A estratégia de pivotamento parcial com escala computa satisfatoriamente as soluções do sistema

Pivotamento parcial com escala - Algoritmo

- O algoritmo de GPPE é muito semelhante ao de GPP (slides 46 e 47)
- As mudanças são:
  - Calculo dos fatores de escala na inicialização
    - Linhas 1:2 no GPP

```
Para i=1:n faça
  nlin[i] = i
  s[i] = A[1,j]
  Para j=2:n faça
    Se (s[i]<|A[i,j]|) Então s[i]=|A[i,j]|
```

Pivotamento parcial com escala - Algoritmo

- Mudanças . . .
  - Escolha do pivô
    - Linhas 4:6 no GPP

p = i

Para k=1+1:n faça

Se $\left(\dfrac{\left| A_{nlin_p i} \right|}{s_{nlin_p}} < \dfrac{\left| A_{nlin_k i} \right|}{s_{nlin_k}} \right)$ **Então p = k**

- Os outras etapas do algoritmo permanecem inalteradas

Estratégias de pivotamento

- Custo computacional do PPE
- O pivotamento parcial com escala incorpora algumas operações com relação ao pivotamento parcial
  - Cálculo dos fatores de escala
  - Operações de divisão na escolha do pivô
- Cálculo dos fatores de escala
  - Comparações: $n(n-1)$
- Escolha do pivô
  - Divisões: $2\left(\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}+1\right)$
- Total de operações: $2n^2-4n+2$

Estratégias de pivotamento

- Custo computacional do PPE ...

$$\begin{aligned} NOP_{GPPE} &= NOP_{GPP} + \left(2n^2 - 4n + 2\right) \\ &= \left(\frac{2n^3}{3} + 2n^2 - \frac{5}{3}n\right) + \left(2n^2 - 4n + 2\right) \\ &= \frac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \frac{17}{3}n + 2 \end{aligned}$$

- O PPE tem um custo computacional $O(n^3)$ com coeficiente $2/3$
- O custo não difere significativamente do método de Gauss sem pivotamento

Estratégias de pivotamento

- Para alguns sistemas as estratégias de pivotamento parcial (com e sem escala) não são suficientes
- Nestes sistemas deve-se utilizar o pivotamento completo ou maximal
- No pivotamento completo a seleção do pivô e feita na forma

$$a_{pi} = \max_{\substack{i \le k \le n \\ i \le j \le n}} \left| a_{kj} \right|$$

- Escolhe-se como pivô o elemento de maior módulo entre os elementos não processados

Estratégias de pivotamento

- Pivotamento completo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] \longrightarrow \max\left|a_{ij}\right|$$

- Se a posição do pivô for diferente da posição a_{ii} são feitas trocas de linhas e colunas
- Qual o significado da troca de colunas?
- **Desafio**: Proponha um algoritmo para implementar o método de Gauss com pivotamento completo (enviar no classroom)

Estratégias de pivotamento

- O pivotamento completo adiciona algumas comparações ao algoritmo de eliminação de Gauss
- Comparações na escolha do pivô

Passagem - i	***Comparações adicionais***
1	n^2-1
2	$(n-1)^2-1$
3	$(n-2)^2-1$
. . .	. . .
$n-1$	$[n-(n-2)]^2-1$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(k^2-1\right)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$$

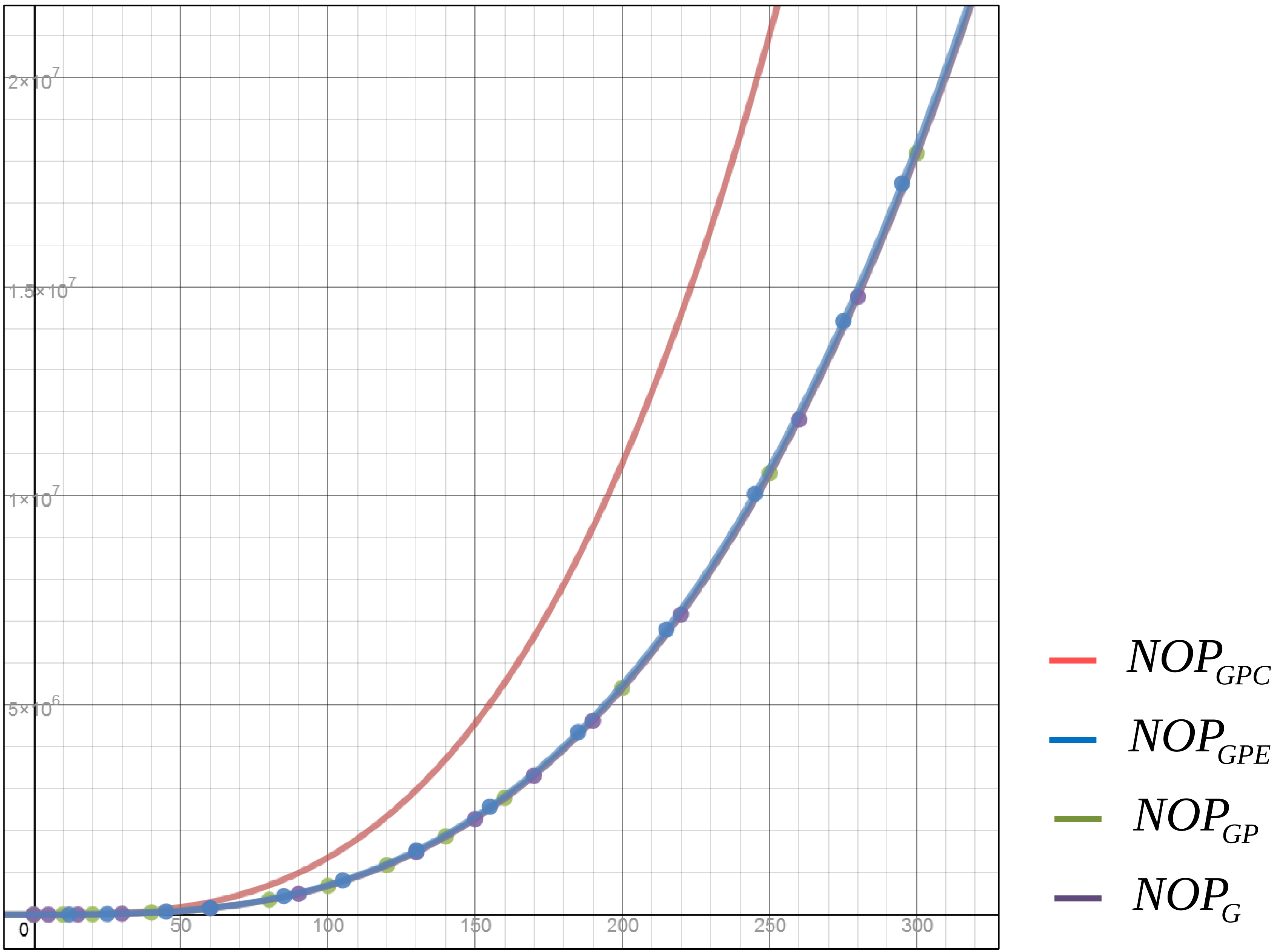
Estratégias de pivotamento

- Custo do método de Gauss com pivotamento completo

$$NOP_{GPC} = NOP_G + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \right)$$
$$= \left(\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6} - 1 \right) + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \right)$$
$$= n^3 + 2n^2 - n - 1$$

- O método com pivotamento completo é $O(n^3)$
- Entanto, com coeficiente 1, o que representa um aumento significativo no custo computacional
- A utilização do pivotamento completo deve ser justificada pelo tipo de sistema

Custo - Método de Gauss



Comentários – Método de Gauss

- Oferece resultados após um numero conhecido de operações
- Custo $O(n^3)$, inapropriado para sistemas grandes
- Problemas com erros de arredondamento
- Estratégias de pivotamento
  - Parcial
  - Parcial com escala
  - Completo (alto custo computacional)

Inversão de matrizes

- **Definição**: Uma matriz A de $n \times n$, é não singular (ou invertível) se existir uma matriz A^{-1}, $n \times n$, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A matriz A^{-1} é chamada inversa de A.
- Uma matriz que não tem inversa, é chamada singular ou não invertível
- Propriedades da inversa
  - A^{-1} é única
  - A^{-1} é não singular
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $A^{-1}A = AA^{-1}$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Inversão de matrizes

- Dado um sistema $Ax = b$
- Se conhecermos A^{-1} o sistema pode ser resolvido facilmente

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

- **Exemplo 8**: Considere o sistema $\begin{array}{lcl} f_1 : x_1 + x_2 & = & 0 \\ f_2 : x_1 - 2x_2 & = & 3 \end{array}$

  conhecendo A^{-1} obtenha a solução do mesmo.

Inversão de matrizes

- **Exemplo 8** ...
  - Notação matricial

$$Ax = b \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

if $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad$ then $\quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

  - Matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

  - Solução

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Inversão de matrizes

- Embora seja fácil resolver um sistema quando A^{-1} for conhecida

- Não é recomendável calcular A^{-1} a fim de resolver o sistema

- É mais custoso computacionalmente calcular A^{-1} que resolver o sistema

- No entanto, em muitas aplicações é desejável termos um método para calcular A^{-1}

Inversão de matrizes

- Suponha que A é uma matriz não singular
- Então existe $B = A^{-1}$ de forma que

$$AA^{-1} = AB = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Inversão de matrizes

- Considere a multiplicação de A pela *j*-esima coluna de B teremos

$$AB_j = I_j$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,j-1} & a_{j-1,j} & a_{j-1,j+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,j-1} & a_{jj} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,j-1} & a_{j+1,j} & a_{j+1,j} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{j-1,j} \\ b_{jj} \\ b_{j+1,j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- O valor *1* aparece na *j*-esima linha do vetor independente

Inversão de matrizes

- Podemos calcular a coluna j da matriz inversa resolvendo o sistema anterior

$$AB_j = I_j$$

- Para calcularmos a matriz inversa devemos resolver n sistemas
- Para cada sistema
  - o vetor solução corresponde a uma coluna da inversa
  - o vetor independente a uma coluna da matriz identidade

Inversão de matrizes

- **Exemplo 9**: Utilize o método de eliminação de Gauss com substituição regressiva para calcular a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

  – Considere a matriz ampliada*

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

  – Eliminação de Gauss

    - $(f_2 - f_1) \rightarrow f_2$

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Inversão de matrizes

- **Exemplo 9**: . ..
  - Substituição regressiva 1, coluna B_1

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \qquad b_{21} = \frac{1}{3} \qquad b_{11} = \frac{2}{3}$$

  - Substituição regressiva 2, coluna B_2

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \qquad b_{22} = -\frac{1}{3} \qquad b_{12} = \frac{1}{3}$$

  - Inversa

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

  - Comprobação do resultado (quadro)

Inversão de matrizes

- Para calcular a matriz inversa
  - Realizamos a eliminação de Gauss (triangulação) na matriz ampliada de $2n$ colunas $A|I$
  - Executamos a substituição regressiva n vezes

- Custo do cálculo da matriz inversa

$$NOP_{ELIM} + nNOP_{sub}$$

$$O\left(n^3\right) + nO\left(n^2\right)$$

$$O\left(n^3\right) + O\left(n^3\right)$$

$$O\left(n^3\right)$$

  - A inversão tem custo cúbico

Fatoração de matrizes

- Dado um sistema na forma $Ax = b$
- Podemos fatorar a matriz A na forma $A = LU$
- onde L é uma matriz triangular inferior (*lower*)

$$L = \left\{ l_{ij} \right\} = \begin{cases} 1, & i = j \\ l_{ij}, & i > j \\ 0, & i < j \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- e U é uma matriz triangular superior (*upper*)

$$U = \left\{ u_{ij} \right\} = \begin{cases} u_{ij}, & i \le j \\ 0, & i > j \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \vdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Rescrevemos o sistema $Ax = b$ na forma

$$LUx = b$$

- Considerando $y = Ux$ obtemos

$$Ly = b$$

- Podemos calcular os valores de x em duas etapas
  - Substituição progressiva, $Ly = b \rightarrow y$
  - Substituição regressiva, $Ux = y \rightarrow x$

Fatoração de matrizes

- Qual é a vantagem da fatoração LU?
  - Resolver um sistema utilizando eliminação de Gauss tem custo $O(n^3)$
  - O processo de substituição regressiva (progressiva) tem custo $O(n^2)$
  - Se a matriz estiver fatorada podemos resolver o sistema em $O(n^2)$ operações
  - Entretanto, fatorar a matriz tem custo $O(n^3)$
  - Uma vez fatorada a matriz podemos resolver o sistema para diversos vetores independentes

Fatoração de matrizes

- Como calcular as matrizes L e U?

- **Teorema**: Se a eliminação de Gauss pode ser realizada no sistema $Ax = b$ sem trocas de linha (pivotamento), então a matriz A pode ser fatorada na forma $A = LU$ onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \vdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- A matriz U é a matriz triangular superior da eliminação de Gauss
- Na matriz L os elemento m_{ij} são os multiplicadores da eliminação de Gauss
- A construção das matrizes L e U é justificada na seguinte sequência de passos,
  - O primeiro passo da eliminação de Gauss consiste em

$$\left(f_j - m_{j1} f_1\right) \to f_j, \qquad m_{j1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}}, \qquad j = 2:n$$

  - isto, equivale a

$$M^{(1)} A^{(1)} x = A^{(2)} x$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...

$$M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \vdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \vdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

  - O segundo passo da eliminação de Gauss

$$\left(f_j - m_{j2} f_2\right) \to f_j, \qquad m_{j2} = \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}}, \qquad j = 3:n$$

  - isto, equivale a transformação

$$M^{(2)}A^{(2)}x = A^{(3)}x$$

- Construção das matrizes L e U ...
  - Segunda transformação de Gauss

$$M^{(2)}A^{(2)} = A^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{32}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - Generalizando, a k-esima transformação de Gauss corresponde a

$$\left(f_j - m_{jk} f_k \right) \rightarrow f_j, \qquad m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}}, \qquad j = k+1 : n$$

  - isto, equivale a transformação

$$M^{(k)} A^{(k)} x = A^{(k+1)} x$$

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{n,k} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - A k-esima transformação de Gauss

$$M^{(k)}A^{(k)} = A^{(k+1)}$$

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \ddots & & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k}^{(k)} & \ddots & \ddots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - A k-esima transformação de Gauss

$$M^{(k)}A^{(k)} = A^{(k+1)}$$

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \ddots & & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - O processo termina na transformação *(n-1)*, onde obtemos $A^{(n)}x$, sendo $A(n) = U$ uma matriz triangular superior
  - Desta forma U é definida como

$$U = A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A$$

  - A construção da matriz L visa preservar a matriz A em cada etapa de eliminação
  - Na primeira transformação

$$M^{(1)} A^{(1)} = A^{(2)}$$

  - Se multiplicarmos pela inversa de $M^{(1)}$

$$\left[M^{(1)} \right]^{-1} M^{(1)} A^{(1)} = IA^{(1)} = A^{(1)} = A$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - Definimos então $L^{(1)}$

$$L^{(1)} = \left[M^{(1)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  - Na segunda transformação

$$M^{(2)} A^{(2)} = A^{(3)}$$

$$\left[M^{(2)} \right]^{-1} M^{(2)} A^{(2)} = I A^{(2)} = A^{(2)}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - Definimos então $L^{(2)}$

$$L^{(2)} = \left[M^{(2)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - Na transformação k-ésima

$$L^{(k)} = \left[M^{(k)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n,k} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- Construção das matrizes L e U ...
  - Finalmente, calcula-se a matriz L como

$$L = L^{(1)} L^{(2)} \cdots L^{(n-2)} L^{(n-1)}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- A fatoração LU pode ser escrita como

$$\begin{aligned} LU &= L^{(1)} L^{(2)} \cdots L^{(n-2)} L^{(n-1)} M^{(n-1)} M^{(n-2)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A \\ &= \left[M^{(1)}\right]^{-1} \left[M^{(2)}\right]^{-1} \cdots \left[M^{(n-2)}\right]^{-1} \left[M^{(n-1)}\right]^{-1} M^{(n-1)} M^{(n-2)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A \\ &= A \end{aligned}$$

Fatoração de matrizes

- **Exemplo 10:** Dado o sistema

$$\begin{aligned}
f_1 &: \ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\
f_2 &: \ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\
f_3 &: \ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\
f_4 &: \ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4
\end{aligned}$$

Utilize a técnica de fatoração LU para resolver o sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- **Exemplo 10** ...
  - Fatoração, etapa 1

$$\left(f_2 - 2f_1\right) \to f_2 \qquad m_{21} = 2$$

$$\left(f_3 - 3f_1\right) \to f_3 \qquad m_{31} = 3$$

$$\left(f_4 + f_1\right) \to f_4 \qquad m_{41} = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ -1 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- **Exemplo 10** ...
  - Fatoração, etapa 2

$$(f_3 - 4f_2) \rightarrow f_3 \qquad m_{32} = 4$$

$$(f_4 + 3f_2) \rightarrow f_4 \qquad m_{42} = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Fatoração de matrizes

- **Exemplo 10** ...
  - Fatoração, etapa 3

$$\left(f_4 - 0\, f_3 \right) \to f_4 \qquad\qquad m_{43} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

  - Comprovar $LU = A$

Fatoração de matrizes

- **Exemplo 10** ...
  - Substituição progressiva, $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= -7 \\ y_3 &= 13 \\ y_4 &= -13 \end{aligned}$$

  - Substituição regressiva, $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_4 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_2 &= 2 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

Fatoração de matrizes

- Para resolver SELAs usando fatoração LU
  - Construir as matrizes LU
  - Resolver usando substituição progressiva $Ly = b$
  - Resolver utilizando substituição regressiva $Ux = y$
- Algoritmo de fatoração LU
  - Primeira linha de U, primeira coluna de L (L1:6)
  - Linhas i=2:n-1 de U, colunas j=2:n-1 de L (L7:23)
    - Elementos da diagonal (L7:12)
    - Elementos abaixo/direita da diagonal (L13:23)
  - Elementos u_{nn} e l_{nn} (L24:28)

Algoritmo – Fatoração LU

```
Entrada: n, A=a[i,j], i=1:n, j=1:n
Saída: L[i,j], i=1:n, j=i:n; U[i,j], i=1:n, j=1:i
L[1,1]=1
U[1,1] = A[1,1]
Para j=2:n faça
  U[1,j] = A[1,j]
  L[j,1] = A[j,1]/U[1,1]
Fim-para
Para i = 2:n-1 faça
  L[i,i] = 1
  sum = 0
  Para k = 1:i-1 faça
    sum = sum + L[i,k]*U[k,i]
  U[i,i] = A[i,i] - sum
```

Algoritmo – Fatoração LU

```
  Para j=i+1:n faça
    sum1 = 0
    sum2 = 0
    Para k=i:n+1 faça
      sum1 = sum1 + L[i,k]*U[k,j]
      sum2 = sum2 + L[j,k]*U[k,i]
    Fim-para
    U[i,j] = (A[i,j]-sum1)/L[i,j]
    L[j,i] = (A[i,j]-sum2)/U[i,j]
  Fim-para //j=i+1:n
Fim-para //i=2:n-1
L[n,n] = 1
sum3 = 0
Para k=1:n-1 faça
  sum3 = sum3 + L[n,k]*U[k,n]
U[n,n] = A[n,n] – sum3
SAIDA(L, U)
```

Comentários finais

- O método de Gauss pode ser utilizado (com alguns ajustes) para calcular a inversa de uma matriz
- A fatoração LU é recomendável quando devemos resolver vários sistemas que
  - Compartilham a matriz do sistema
  - Apresentam diferentes vetores independentes
- Esta situação aparece em
  - Diversos métodos iterativos
  - Na inversão de matrizes (útil para n grande)

Comentários finais

- A fatoração apresentada não inclui técnicas de pivotamento
- O pivotamento pode ser incluso usando matrizes de permutação
- Para matrizes *especiais* (diagonal dominante, definida positiva) as técnicas de fatoração podem ser aprimoradas
  - Fatoração de Cholesky
  - Fatoração de Crout