Métodos Numéricos I

Tema 3. Sistemas de Equações Lineares e Algébricas

Prof. Dany S. Dominguez
dsdominguez@uesc.br
Sala 1 – NBCGIB
(73) 3680 5212 – ramal 30

ROTEIRO

- Introdução
- Representação de SELAs
- Métodos diretos
  - Eliminação de Gauss
  - Estratégias de pivoteamento
    - Pivotamento parcial

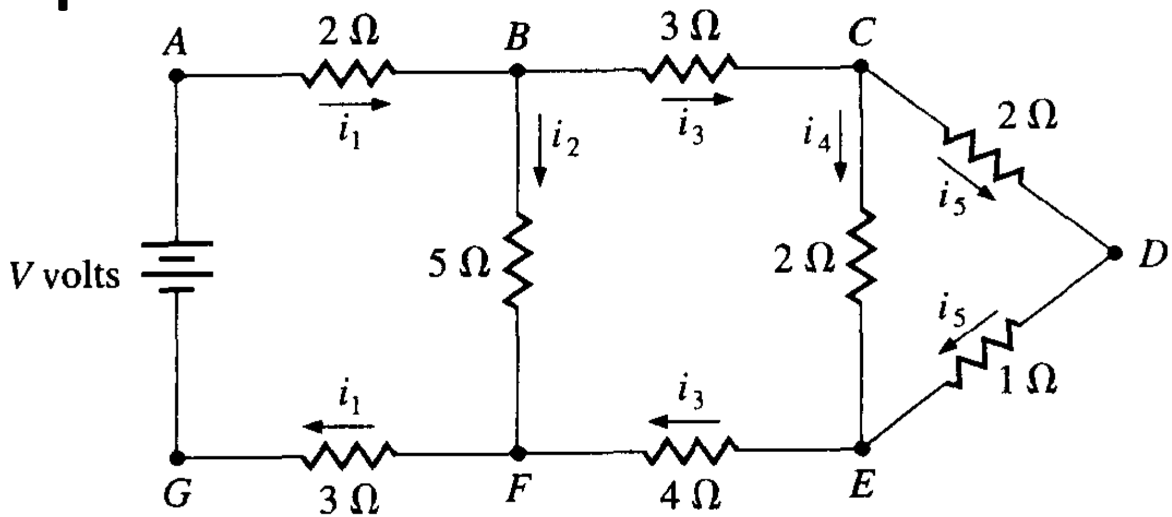
Introdução

- No tema anterior apresentamos métodos para determinar o valor de x na equação $f(x) = 0$
- Esse tipo de problemas aparece principalmente na modelagem de sistemas monocomponentes
- Em sistemas multicomponentes, com componentes que interagem entre eles, devem-se calcular os valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
\vdots \\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0
\end{gathered}
$$

Introdução

- Quando as funções f_i são lineares temos um SELA (Sistema de Equações Lineares e Algébricas)
- **Exemplo 1**: Considere o circuito elétrico

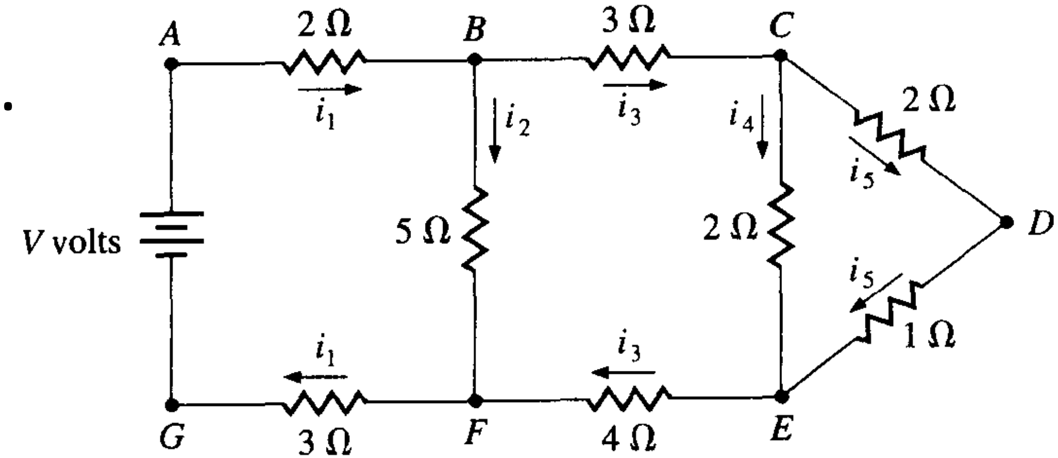


um potencial elétrico V é aplicado nos pontos A e G, as leis de Kirchoff determinam:

- A queda total de tensão em um laço fechado é nula
- O fluxo total de corrente em cada junção é nulo

Introdução

- **Exemplo 1** ...



  - i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 fluxos de corrente
  - Laço 1: $f_1:\ 5i_1 + 5i_2 = V$
  - Laço 2: $f_2:\ 5i_2 - 7i_3 - 2i_4 = 0$
  - Laço 3: $f_3:\ 2i_4 - 3i_5 = 0$
  - Junção B: $f_4:\ i_1 - i_2 - i_3 = 0$
  - Junção C: $f_5:\ i_3 - i_4 - i_5 = 0$
- O SELA pode ser utilizado no cálculo das correntes

Introdução

- SELAs estão associados a muitos problemas de ciências exatas, engenharias, humanidades, economia, ...
- Muitos métodos numéricos reduzem a solução de problemas complexos a SELAs:
  - Discretização de EDPs, diferenças finitas, elementos finitos
  - Ajustes de curvas por mínimos quadrados

Introdução

- Como resolver SELAs?
  - Métodos analíticos
    - Transformações elementares, substituição, Regra de Kramer
    - Apropriados para sistemas pequenos, número de equações $n \leq 4$
    - Inviável para n “grande”
  - Métodos numéricos
    - Técnicas numéricas
    - Funcionam para quaisquer valor de n

Introdução

- Famílias de métodos numéricos para SELAs:
  - Métodos diretos
    - Oferecem a solução do sistema com um valor fixo de operações (depende do tamanho do sistema)
    - Não utilizam aproximações
    - Apenas erros de arredondamento
  - Métodos iterativos
    - A solução é construída em um processo iterativo
    - O numero de operações não é conhecido “a priori”
    - Apresentam erros de truncamento e arredondamento

Representação de SELAs

- Notação algébrica

$$
\begin{array}{l}
f_1 :\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\
f_2 :\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
f_n :\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n
\end{array}
$$

  - a_{ij}, coeficientes do sistema
  - x_j, incógnitas
  - b_i, elementos do vetor independente
  - n, numero de equações, $i = 1:n$
  - m, numero de incógnitas, $j = 1:m$

Representação de SELAs

- Notação matricial

$$Ax = b \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_m \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_n$$

  – A, matriz do sistema, n linhas e m colunas
  – x, vector de incógnitas
  – b, vector de independente

Representação de SELAs

- Notação de matriz aumentada

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \vline & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \vline & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vline & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \vline & b_n \end{bmatrix}_{n\times(m+1)} \qquad A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \vline & a_{1,m+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \vline & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vline & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \vline & a_{n,m+1} \end{bmatrix}_{n\times(m+1)}$$

  - A^*, matriz aumentada (ou ampliada) do sistema

- Qual a vantagem da notação de matriz ampliada?
  - Permite manipular todos os elementos de entrada com uma única estrutura de dados (simplificação computacional)

Tipos de SELAs

- **Sistema Solúvel e Determinado** (SSD): o sistema têm uma única solução, o número de equações linearmente independentes é igual ao número de incógnitas $(n=m)$
- **Sistema Solúvel e Indeterminado** (SSI): o sistema tem infinitas soluções, o número de equações linearmente independentes é menor que o número de incógnitas $(n<m)$
- **Sistema Insolúvel** (SI): o sistema não tem solução, o numero de equações LI é maior que o número de incógnitas $(n>m)$

Tipos de SELAs

- Nosso foco são os sistemas solúveis e determinados
- Como $n = m$, a matriz do sistema é quadrada
- Para alguns tipos de matrizes quadradas a solução do sistema pode ser encontrada com facilidade

– Diagonal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

– Triangular superior

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

– Triangular inferior

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- Operações elementares
  - $\lambda f_i \rightarrow f_i$, $\lambda \neq 0$, multiplicar uma equação (linha) por uma constante
  - $(\lambda f_j + f_i) \rightarrow f_i$ multiplicar uma equação por uma constante e somar com outra equação
  - $f_i \leftrightarrow f_j$ trocar a ordem das equações, intercambiar linhas
- As operações elementares não modificam a solução do sistema (álgebra linear)
- As operações elementares podem ser utilizadas para transformar um sistema em outro mais simples de ser resolvido

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 2**: Dado o sistema de equações

$$f_1:\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$$

$$f_2:\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$f_3:\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

$$f_4:\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

(a) Escreva em notação matricial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 2** . . .

  (b) Faça as seguintes operações elementares

  i. $(f_2\text{-}2f_1) \rightarrow f_2$

  ii. $(f_3\text{-}3f_1) \rightarrow f_3$

  iii. $(f_4+f_1) \rightarrow f_4$

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 2** . . .

  (c) Faça as seguintes operações elementares

  i. $(f_3 - 4f_2) \rightarrow f_3$

  ii. $(f_4 + 3f_2) \rightarrow f_4$

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

- O sistema anterior aparece agora na forma triangular superior e pode ser resolvido facilmente usando o processo de substituição regressiva

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 2** . . .

  (d) Aplique o processo de substituição regressiva e resolva o sistema

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  (e) Verifique a solução obtida.

- Temos utilizado o **método de eliminação de Gauss com substituição regressiva** para resolver o sistema.

Método de Eliminação de Gauss

- O método de eliminação de Gauss:
  - Eliminação de Gauss
  - Substituição regressiva
- Eliminação de Gauss
  - **Visa converter a matriz do sistema em uma matriz triangular superior**
  - Utiliza transformações elementares
  - As transformações estão encaminhadas a anular em cada coluna os elementos embaixo da diagonal
  - O elemento da diagonal é utilizado como pivô

$$m = \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \, , \qquad \left(f_j - m f_i \right) \rightarrow f_j \, , \quad j > i, \;\; i = 1:n$$

Método de Eliminação de Gauss

- Eliminação de Gauss . . .
  - Matriz original

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

  - Passo 1: *i = 1, j = 2:n*
    - $m=a_{21}/a_{11}, \;\; f_2\text{-}mf_1$
    - $m=a_{31}/a_{11}, \;\; f_3\text{-}mf_1$
    - ...
    - $m=a_{n1}/a_{11}, \;\; f_n\text{-}mf_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a'_{22} & \vdots & a'_{2n} & a'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & a'_{n,n+1} \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- Eliminação de Gauss . . .
  - Passo 2: $i = 2, j = 3{:}n$
    - $m=a_{32}/a_{22}, \quad f_3\text{-}mf_2$
    - $m=a_{42}/a_{22}, \quad f_4\text{-}mf_2$
    - ...
    - $m=a_{n2}/a_{22}, \quad f_n\text{-}mf_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a'_{22} & \vdots & a'_{2n} & a'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a''_{nn} & a''_{n,n+1} \end{array}\right]$$

  - Passos (3, 4, ..., n-1): $i = 3, 4, \ldots, n\text{-}1, \; j = i+1{:}n$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2,n} & a'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \grave{a}_{n-1,n-1} & \grave{a}_{n-1,n} & \grave{a}_{n-1,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \grave{a}_{nn} & \grave{a}_{n,n+1} \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- Substituição regressiva
  - São calculadas as incógnitas do sistema
  - Seguimos um processo de substituição em ordem reversa de n até 1
  - Matriz triangular superior

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{1,n+1} \\
0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2,n} & a'_{2,n+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \grave{a}_{n-1,n-1} & \grave{a}_{n-1,n} & \grave{a}_{n-1,n+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \grave{a}_{nn} & \grave{a}_{n,n+1}
\end{array}\right]
$$

  - Passo 1: $i=n$ $\quad x_n = \dfrac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$ (i)

Método de Eliminação de Gauss

- Substituição regressiva . . .
  - Passo 2: *i=n-1*

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

  - Passo 3: *i=n-2*

$$x_{n-2} = \frac{a_{n-2,n+1} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

  - Passos (4, 5, ..., n): *i=n-3, n-4, ..., 1*

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{in}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] \qquad \text{(ii)}$$

Método de Eliminação de Gauss

- Substituição regressiva . . .
  - Utilizamos a eq. (i) para x_n, e a eq. (ii) para x_i com $i = n\text{-}1\text{:}1$

- Que ocorre se durante a eliminação de Gauss, um dos elementos da diagonal for igual a zero $a_{ii} = 0$?
  - Teremos uma indeterminação $m = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$
  - Neste tipo de sistemas o método não pode ser aplicado
  - Isto não significa que o sistema não seja solúvel

Método de Eliminação de Gauss

- Que ocorre se ao finalizarmos a eliminação de Gauss, o último elemento da diagonal for igual a zero, $a_{nn} = 0$?

  – A substituição regressiva não poderá ser iniciada

  – Teremos uma indeterminação $x_n = \dfrac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$

  – Neste caso o sistema não tem solução única

  – As equações não são linearmente independentes

Eliminação de Gauss - Algoritmo

PASSO 1: Para i=1:n-1 faça passos 2 até 3

PASSO 2: Se $a_{ii}=0$ Saída (O método falhou) FIM

PASSO 3: Para j=i+1 até n faça passos 4 e 5

PASSO 4: $m=a_{ji}/a_{ii}$

PASSO 5: $(f_j - mf_i) \rightarrow f_j$

PASSO 6: Se $a_{nn}=0$ Saída (Não tem solução) FIM

PASSO 7: Faça $x_n=a_{n,n+1}/a_{nn}$

PASSO 8: Para i=(n-1):1, faça $x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]$

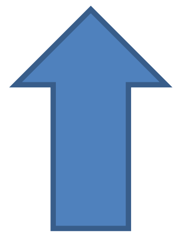
PASSO 9: Saída $(x_1, \ldots, x_n)$, FIM

eliminação de Gauss — **substituição recuada**

```
Entrada: n, A=a[i,j], i=1:n, j=1:n+1
Saída:x[i], i=1:n, ou “Mensagem de falha”
Para i=1:n-1 faça
   Se (A[i,i]=0) Então SAIDA(Método falhou!) Fim
  Para j=i+1:n faça
    m = A[j,i]/A[i,i]
    Para k=i:n+1
      A[j,k] = A[i,k] – m * A[j,k]
  Fim-para //j=i+1:n
Fim-para //i=1:n-1
Se (A[n,n]=0) Então SAIDA(Não existe soluçao unica!) Fim
X[n] = A[n,n+1]/A[n,n]
Para i=n-1:1 faça
  soma = 0
  Para j=i+1:n
    soma = soma + A[n,j] * X[j]
  X[i] = (A[i,n+1]-soma)/A[i,i]
Fim-para //i=n-1:i
SAIDA(X[1], X[2], . . ., X[N])
```

Método de Eliminação de Gauss

- Avaliação de custo computacional
- Contagem das operações (NOP)
- Operações
  - Comparações
  - Multiplicações e divisões
  - Subtração e adição



AUMENTA CUSTO COMPUTACIONAL

- Consideramos que todas as operações tem o mesmo custo
- Duas etapas
  - Eliminação de Gauss
  - Substituição regressiva

Método de Eliminação de Gauss

- NOP – Eliminação de Gauss
  - n-1 passagens (P1)
  - Para cada passagem (P2:5)
    - Comparações: 1 (P2)
    - Multiplicações e divisões
      - P4: n-i [para cada linha em uma passsagem]
      - P5: $(n$-$i)(n$-$i+1)$ [para cada linha vezes todos os elementos no nulos da linha]
      - Total: $(n$-$i)(n$-$i+2)$
    - Adições e subtrações
      - P5: $(n$-$i)(n$-$i+1)$
    - Total de operações de uma passagem
      - $[1 + (n\text{-}i)(n\text{-}i+2) + (n\text{-}i)(n\text{-}i+1)] = (1 + 2n^2 – 4in + 2i^2 + 3n – 3i)$

Método de Eliminação de Gauss

- NOP – Eliminação de Gauss
  - Somamos todas as passagens

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[1+2n^2-4in+2i^2+3n-3i\right]$$

  - Aplicamos a propriedade distributiva

$$\sum_{i=1}^{n-1}1+2n^2\sum_{i=1}^{n-1}1-4n\sum_{i=1}^{n-1}i+2\sum_{i=1}^{n-1}i^2+3n\sum_{i=1}^{n-1}1-3\sum_{i=1}^{n-1}i \qquad \text{(iii)}$$

  - Propriedades dos somatórios

$$\sum_{j=1}^{k}c=ck\ , \quad \sum_{j=1}^{k}j=\frac{k(k+1)}{2}\ , \quad \sum_{j=1}^{k}j^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Método de Eliminação de Gauss

- NOP – Eliminação de Gauss
  - Utilizamos as propriedades para calcular os somatórios da eq. (iii)

$$\sum_{i=1}^{n-1} 1 = n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)(n)\left[2(n-1)+1\right]}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

  - Substituindo na eq. (iii) e agrupando

$$NOP_{ELIM} = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} - 1 \qquad \text{(iv)}$$

Método de Eliminação de Gauss

- NOP – Substituição regressiva
  - P7: 1 divisão
  - n-1 passagens (P8)
  - Para cada passagem (P8)
    - Multiplicações e divisões
      - P8: $2 + (n\text{-}i\text{-}1) = 1 + (n\text{-}i)$
    - Adições e subtrações
      - P8: $1 + (n\text{-}i\text{-}1) = (n\text{-}i)$
    - Total de operações de uma passagem
      - $(1 + (n\text{-}i) + (n\text{-}i) = (2n - 2i + 1)$
    - Somamos todas as passagens

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[2n-2i+1\right] = 2n\sum_{i=1}^{n-1}1 - 2\sum_{i=1}^{n-1}i + \sum_{i=1}^{n-1}1$$

Método de Eliminação de Gauss

- NOP – Substituição regressiva
  - Resolvendo os somatórios e substituindo

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[2n-2i+1\right]=n^2-1$$

  - Finalmente somamos a eq. anterior com o passo 7

$$NOP_{SUB}=n^2-1+1=n^2 \quad \text{(v)}$$

  - NOP do método de eliminação de Gauss [(iv)+(v)]

$$NOP_G=NOP_{ELIM}+NOP_{SUB}=\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{n}{6}-1 \qquad \text{(vi)}$$

- O método de Gauss é $O(n^3)$
- O algoritmo é cúbico em n
- O algoritmo é ótimo?

Método de Eliminação de Gauss

- Pelo custo computacional cúbico, NÃO se recomenda o uso para sistemas grandes

- Problemas do método de Gauss
- **Exemplo 3**: Resolva o sistema abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss

$$
\begin{aligned}
f_1 &: \ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\
f_2 &: \ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\
f_3 &: \ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\
f_4 &: \ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4
\end{aligned}
$$

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 3** . . .
  - Matriz ampliada do sistema

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

  - Realizamos as operações

$$\left(f_2 - 2f_1\right) \to f_2$$
$$\left(f_3 - f_1\right) \to f_3$$
$$\left(f_4 - f_1\right) \to f_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 3** . . .
  - O elemento $a_{22}=0$ a eliminação não pode continuar
  - Que podemos fazer?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

  - Como $a_{23} \neq 0$ podemos trocar $f2 \leftrightarrow f3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

- **Exemplo 3** . . .
  - Podemos continuar o procedimento com

$$\left(f_4 + 2 f_3 \right) \rightarrow f_4$$

  - Obtemos uma matriz triangular superior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

  - Podemos implementar a substituição regressiva e obtermos a solução

Método de Eliminação de Gauss

- Chamamos elemento pivô ao elemento da diagonal, utilizado como divisor no calculo do multiplicador m

- O elemento pivô é utilizado para gerar os zeros nos outros elementos dessa coluna

- Uma estratégia de pivotamento é um procedimento onde escolhemos o pivô em função das características da matriz

Estratégias de pivotamento

- As técnicas de pivotamento também são utilizadas para reduzir os erros de arredondamento
- Se $|a_{ii}| << |a_{ij}|$ ao calcularmos o multiplicador $m_{ij} = (a_{ij}/a_{ii})$ teremos $m >> 1$,
- O erro de arredondamento ao calcularmos os a_{il} $(l > i)$ será "amplificado" por este valor
- Ademais no processo de substituição regressiva

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right]$$

quando $|a_{ii}|$ for pequeno os erros podem ser aumentados

- Para alguns sistemas a "amplificação" dos erros de arredondamento afeta significativamente a solução

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 4**: O sistema linear

$$\begin{aligned} f_1: \ 0,003000x_1 + 59,14x_2 &= 59,17 \\ f_2: \ \quad 5,291x_1 - 6,130x_2 &= 46,78 \end{aligned}$$

tem solução exata $x_1 = 10,00$ e $x_2 = 1,000$. Resolva utilizando o método de eliminação de Gauss com aritmética de quatro algarismos.

$$a_{11} = 0,003 \ll a_{21} = 5,291$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 4** ...

Quatro algarismos

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{5,291}{0,003} \qquad m_{21} = 1764$$

$$\left(f_2 - m_{21} f_1\right) \to f_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003 & 59,14 & 59,17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

$$x_2 = \frac{a_{23}}{a_{22}} \qquad x_2 \approx 1,001$$

$$x_1 = \frac{a_{13} - a_{12} x_2}{a_{11}} \qquad x_1 \approx -10,00$$

Valores precisos

$$m_{21} = 1763,666667$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003 & 59,14 & 59,17 \\ 0 & -104309,38 & -104309,38 \end{array}\right]$$

$$x_2 = 1,000$$

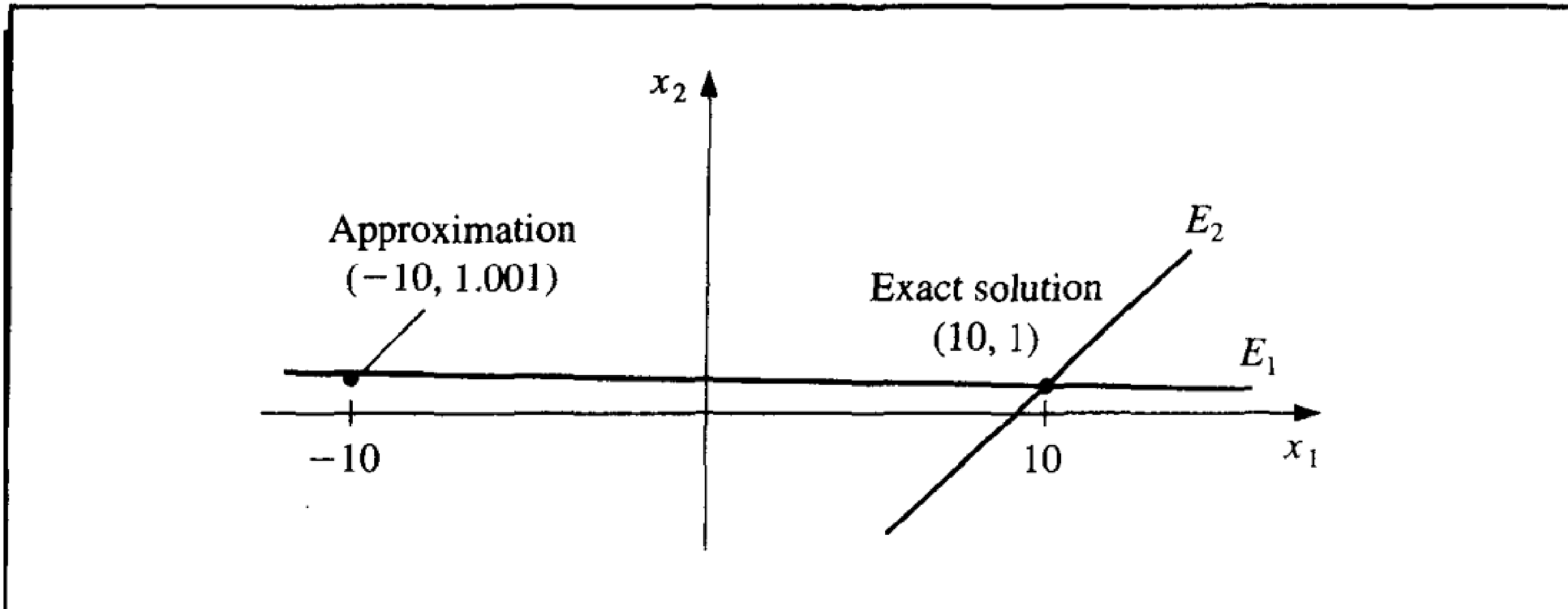
$$x_1 = 10,00$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 4** ...

Quatro algarismos

Valores precisos



Estratégias de pivotamento

- Em sistemas maiores é praticamente impossível determinar quando os erros de arredondamento terão efeitos significativos
- Os erros são provocados ao utilizarmos elementos de pequeno valor absoluto como pivô
- Estes problemas podem ser amenizados se escolhermos como pivô *(p)* o elemento da coluna de maior valor absoluto

$$a_{pk} = \max_{i \leq j \leq n} \left| a_{ij} \right|$$

- Em seguida, realizamos a operação ($f_i \leftrightarrow f_p$) e executamos a etapa de eliminação correspondente

Estratégias de pivotamento

- A técnica de escolher como pivô o maior elemento da coluna é chamada pivotamento parcial ou pivotamento pelo máximo da coluna

- **Exemplo 5**: Resolva o sistema do exemplo 4 utilizando o método de Gauss com pivotamento parcial e aritmética de quatro algarismos

$$\begin{array}{lrcl} f_1: & 0,003000x_1 + 59,14x_2 & = & 59,17 \\ f_2: & 5,291x_1 - 6,130x_2 & = & 46,78 \end{array}$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 5** . . .
  - Matriz do sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003 & 59,14 & 59,17 \\ 5,291 & -6,130 & 46,78 \end{array}\right]$$

  - Pivotamento

$$\max\left\{|a_{11}|,|a_{21}|\right\} = \max\left\{|0,003|,|5,291|\right\} = |a_{21}|$$

    - Pivô na segunda linha trocamos $f_2 \leftrightarrow f_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0,003 & 59,14 & 59,17 \end{array}\right]$$

  - Eliminação

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0,003}{5,291} = 0,0005670$$

Estratégias de pivotamento

- **Exemplo 5** . . .
  - Eliminação . . .

$$\left(f_2 - m_{21} f_1 \right) \rightarrow f_1$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0 & 59,14 & 59,14 \end{array}\right]$$

  - Substituição regressiva

$$x_2 = \frac{a_{23}}{a_{22}} = 1,000 \qquad x_1 = \frac{a_{13} - a_{12} x_2}{a_{11}} = 10,00$$

- Ao utilizarmos pivotamento parcial obtivemos as soluções do sistema.

Algoritmo – Gauss com Pivotamento Parcial

Entrada: n, A=a[i,j], i=1:n, j=1:n+1

Saída:x[i], i=1:n, ou "Mensagem de falha"

```
Para i=1:n faça
  nlin[i] = i
Para i=1:n-1 faça
  p = i
  Para k=i+1:n faça
    Se (|A[nlin[p],i]|<|A[nlin[k],i]|) Então p = k
  Se (A[nlin[p],i]=0) Então
    SAIDA(Não existe soluçao unica!)
    PARE
  Fim-se //(A[nlin[p],i]=0)
  Se (nlin[i]<>nlin[p]) Então
    ncop = nlin[i]
    nlin[i] = nlin[p]
    nlin[p] = ncop
  Fim-se //(nlin[i]<>nlin[p])
```

Algoritmo – Gauss com Pivotamento Parcial . . .

```
  Para j=i+1:n faça
    m = A[nlin[j],i]/A[nlin[i],i]
    Para k=i:n+1
      A[nlin[j],k] = A[nlin[i],k] – m * A[nlin[j],k]
  Fim-para //j=i+1:n
Fim-para //i=1:n-1
Se (A[nlin[n],n]=0) Então
    SAIDA(Não existe soluçao unica!)
    PARE
Fim-se //(A[nlin[n],n]=0)
X[n] = A[nlin[n],n+1]/A[nlin[n],n]
Para i=n-1:i faça
  soma = 0
  Para j=i+1:n
    soma = soma + A[nlin[i],j] * X[j]
  X[i] = (A[nlin[i],n+1]-soma)/A[nlin[i],i]
Fim-para //i=n-1:i
SAIDA(X[1], X[2], . . ., X[N])
```

Estratégias de pivotamento

- Etapas do algoritmo
  - Inicialização (L1:2)
  - Eliminação de Gauss (L3:21)
    - Seleção do pivô em cada coluna (L4:6)
    - Troca simulada de linhas (L11:15)
    - Triangulação da matriz (L16:20)
  - Substituição regressiva (L26:32)
    - Cálculo de x_n (L26)
    - Cálculo de x_{n-1} a x_1 (L27 a 31)
- Utilizamos um vetor auxiliar (**`nlin`**) para simular a troca de linhas
- Aumenta a eficiência nas trocas de linha, principalmente para sistemas grandes

Estratégias de pivotamento

- O custo adicional do método de Gauss quando adicionamos pivotamento parcial esta na busca do pivô

- Temos um aumento do número de comparações na forma

$$(n-2)+(n-3)+(n-4)+\cdots+2+1$$

- Colocamos num somatório

$$\sum_{i=2}^{n-1}(n-i)$$

- Resolvendo

$$\sum_{i=2}^{n-1}(n-i) = n\sum_{i=2}^{n-1}1 - \sum_{i=2}^{n-1}i = n(n-2) - \left[\frac{(n-1)n}{2} - 1\right] = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$$

Estratégias de pivotamento

- Calculamos o custo de método de Gauss com pivotamento parcial como

$$NOP_{GPP} = NOP_G + \left[\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1\right] = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 - \frac{5}{3}n$$

- Gauss com pivotamento parcial $O(n^3)$
- O algoritmo para implementar o método de Gauss sim pivotamento é cúbico
- O incremento (quadrático) pela introdução do pivotamento parcial NÃO influi significativamente no custo do algoritmo