Métodos Numéricos I

Tema 3. Sistemas de Equações Lineares e Algébricas. Métodos Iterativos.

Prof. Dany S. Dominguez
dsdominguez@gmail.br
Sala 1 – NBCGIB
(73) 3680 5212 – ramal 30

ROTEIRO

- Métodos iterativos
- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Métodos de Relaxamento
- Comentários finais

Métodos iterativos

- Os métodos iterativos clássicos foram propostos no final do século XVIII
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel
- Características:
  - A solução é construída em um processo iterativo
  - O número de operações não é conhecido “a priori”
  - Apresentam erros de truncamento e arredondamento

Métodos iterativos

- Quando devemos usar métodos iterativos?
- Técnicas iterativas não são apropriadas para sistemas pequenos,
- Nesses casos métodos diretos são mais eficientes,
- Para sistemas grandes e/ou caracterizados por matrizes esparzas os métodos iterativos são eficientes

Métodos iterativos

- Uma técnica iterativa para resolver o sistema

$$Ax = b$$

começa com uma aproximação inicial $x^{(0)}$ para a solução x e gera uma sequência $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ que converge para x

- Técnicas iterativas transformam o problema

$$Ax = b \quad \text{em} \quad x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

- Após a escolha da aproximação inicial usamos a fórmula iterativa para gerar os $x^{(k)}$ para $k=1,2,3,\ldots$

Métodos iterativos

- Elementos de um método iterativo
  - Aproximação inicial $x^{(0)}$
  - Fórmula iterativa $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ (define o método)
  - Critério de parada
- Aproximação inicial
  - Imprescindível para começar o processo iterativo
  - Em princípio, para um método iterativo estável qualquer aproximação inicial pode ser utilizada
  - É recomendável escolher uma aproximação inicial que reduza o número de iterações

Métodos iterativos

- Aproximação inicial . . .
  - A maioria dos autores recomendam

$$x_i^{(0)} = b_i \quad \text{ou} \quad x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

- Critério de parada
  - Necessário para encerrar as iterações
  - Envolve um valor de tolerância ε
  - Deve garantir que a diferencia entre a solução aproximada e a solução exata seja menor que a tolerância
  - Semelhante ao cálculo de raízes, envolve iterações consecutivas do vetor solução $x_i^{(k+1)}$ e $x_i^{(k)}$

Métodos iterativos

- Critério de parada . . .
  - Como avaliar o diferença entre dois vetores?
  - O critério de parada envolve a norma do vetor desvio relativo entre duas iterações consecutivas

$$\left\| \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\vec{x}^{(k+1)}} \right\| < \varepsilon$$

  - O que é a norma do vetor?
  - Podem ser utilizadas
    - Norma máxima

$$\left\| \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\vec{x}^{(k+1)}} \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon$$

Métodos iterativos

- Critério de parada . . .
  - Podem ser utilizadas
    - Norma euclidiana

$$\left\| \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\vec{x}^{(k+1)}} \right\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right)^2} < \varepsilon$$

  - Das normas apresentadas qual é mais utilizada? Porque?
    - Norma máxima, menor esforço computacional, garante que erro relativo em cada elemento do vetor é menor que a tolerância

Métodos de Jacobi

- Obtemos a fórmula iterativa do método de Jacobi a partir da notação algébrica de sistemas de equações
- Dado o problema

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

- Fazer no quadro para $n = 3$
- Utilizamos a equação i para calcular o elemento x_i do vetor incógnita,
- Para isso isolamos x_i em cada equação

Métodos de Jacobi

- Os elementos do lado direito representam a iteração *(k)*, os do lado esquerdo a iteração *(k+1)*

- O resultado

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right]$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right]$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_{nn} - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right]$$

- Generalizando para qualquer elemento de *i*

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

Métodos de Jacobi

- **Exemplo 1**: Realize três iterações pelo método de Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

- Em cada iteração compute o erro aproximado da solução considerando a norma máxima

$$e_a^{(k+1)} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right|$$

Métodos de Jacobi

- **Exemplo 1**...
  - Equações iterativas

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{6}\left(13 + x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}\right)$$
$$x_2^{(k)} = \frac{1}{3}\left(10 - x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right)$$
$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(16 - 3x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)}\right)$$

  - Aproximação inicial

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_1} = 2,16667$$
$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_2} = 3,33333$$
$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_3} = 3,20000$$

Métodos de Jacobi

- **Exemplo 1**...

  - Iteração 1

$$x_1^{(1)} = 1{,}12222 \qquad e_{a,1}^{(1)} = 93{,}069 \qquad e_a^{(1)} = 115{,}83$$
$$x_2^{(1)} = 1{,}54444 \qquad e_{a,2}^{(1)} = 115{,}83$$
$$x_3^{(1)} = 2{,}56667 \qquad e_{a,3}^{(1)} = 24{,}675$$

  - Iteração 2

$$x_1^{(2)} = 1{,}14074 \qquad e_{a,1}^{(2)} = 1{,}6223 \qquad e_a^{(2)} = 26{,}585$$
$$x_2^{(2)} = 2{,}10370 \qquad e_{a,2}^{(2)} = 26{,}585$$
$$x_3^{(2)} = 2{,}83556 \qquad e_{a,3}^{(2)} = 9{,}4828$$

Métodos de Jacobi

- **Exemplo 1**...

  – Iteração 3

$$x_1^{(3)} = 1{,}09951 \qquad e_{a,1}^{(3)} = 3{,}7503 \qquad e_a^{(3)} = 4{,}7713$$
$$x_2^{(3)} = 2{,}00790 \qquad e_{a,2}^{(3)} = 4{,}7713$$
$$x_3^{(3)} = 2{,}93630 \qquad e_{a,3}^{(3)} = 3{,}4309$$

  – Solução exata

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  – O erro da solução aproximada diminui com o aumento de k

  – Soluções mais precisas podem ser obtidas exigindo uma menor tolerância com maior custo computacional

Métodos de Jacobi

- Podemos obter a fórmula iterativa de Jacobi partindo da notação matricial

$$Ax = b$$

- Decompomos a matriz A na forma

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$A = D - L - U$$

$$\left(D - L - U\right) x = b$$

Métodos de Jacobi

- Fórmula iterativa em notação matricial . . .

$$Dx - \left(L + U\right)x = b$$

$$x = D^{-1}\left(L + U\right)x + D^{-1}b$$

$$x^{(k)} = D^{-1}\left(L + U\right)x^{(k-1)} + D^{-1}b$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

Métodos de Jacobi

- Algoritmo

ENTRADA: número de incógnitas e equações n
matriz ampliada $A^*=(a_{ij})\ i=1:n\ \ j=1:n+1$
tolerância tol
número máximo de iterações N

SAÍDA: solução do sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ou mensagem de que o método falhou

Métodos de Jacobi

- Algoritmo

```
PASSO 1: Para i=1:n faça passo 2
   PASSO 2: x0_i=A_in/A_ii
PASSO 3: Faça k=1
PASSO 4: Enquanto (k&lt;N) faça passos 5-8
      PASSO 5: Para i=1:n faça x_i = Eq. Jacobi
      PASSO 6: Se ||x-x0||<tol Saída (x_1, ..., x_n), FIM
      PASSO 7: k=k+1
      PASSO 8: Para i=1:n faça x0_i = x_i
PASSO 9: Saída (Método Falhou), FIM
```

Métodos de Jacobi

- Qual o custo computacional do método de Jacobi?
- Avaliamos o número de operações
  - Aproximação inicial
    - n, divisões
  - Para cada iteração k
    - Para cada incógnita x_i
      - 1, divisão
      - $(n-2)+1$, somas e subtrações
      - $n-1$, multiplicações
      - Total de uma incógnita: $2n-1$
    - Total de uma iteração $n(2n-1)$

Métodos de Jacobi

- Avaliamos o numero de operações . . .
  - Para cada iteração k . . .
    - Calculo do erro
      - n, subtrações
      - n, divisões
      - n, comparações
      - Total: $3n$
  - Multiplicando pelo numero de iterações e somando todas as etapas

$$NOP_{JAC} = n + k[n(2n - 1) + (3n)]$$
$$NOP_{JAC} = n + 2k(n^2 + n)$$

Métodos de Jacobi

- Qual o custo computacional do método de Jacobi?
  - Algoritmo: $O(k)O(n^2)$
  - Quadrático no tamanho da matriz
  - Linear no número de iterações

- Quando devemos usar o Jacobi ou Eliminação de Gauss?
  - Quando o numero de iterações (k) for menor que o tamanho da matriz
  - Isto geralmente ocorre em sistemas grandes ($n>50$)

Método de Gauss-Seidel

- O método iterativo de Gauss-Seidel é um aprimoramento do método de Jacobi,
- Ao calcularmos o elemento $x_i^{(k)}$ usando a fórmula de Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

- usamos apenas informação da iteração anterior $x^{(k-1)}$ entretanto os valores $x_j^{(k)}$ para $i<j$ já estão disponíveis

Método de Gauss-Seidel

- Parece razoável calcular $x_i^{(k)}$ utilizando a informação mais recente
- Modificamos a formula iterativa de Jacobi para utilizar as melhores estimativas disponíveis no cálculo de $x_i^{(k)}$
- A formula iterativa de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

Método de Gauss-Seidel

- **Exemplo 2**: Realize três iterações pelo método de Gauss-Seidel para resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

  a) Em cada iteração calcule o erro relativo da solução considerando a norma máxima

  b) Compare os resultados com os obtidos para o método de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

- **Exemplo 2** . . .
  - Equações iterativas

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{6}\left(13 + x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}\right)$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{3}\left(10 - x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)}\right)$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(16 - 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right)$$

  - Aproximação inicial

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_1} = 2,16667$$

$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_2} = 3,33333$$

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_3} = 3,20000$$

Método de Gauss-Seidel

- **Exemplo 2**...
  - Iteração 1

$$x_1^{(1)} = 1,12222 \qquad e_{a,1}^{(1)} = 93,069 \qquad e_a^{(1)} = 93,069$$
$$x_2^{(1)} = 1,89259 \qquad e_{a,2}^{(1)} = 76,125$$
$$x_3^{(1)} = 2,90519 \qquad e_{a,3}^{(1)} = 10,148$$

  - Iteração 2

$$x_1^{(2)} = 1,02951 \qquad e_{a,1}^{(2)} = 9,0059 \qquad e_a^{(2)} = 9,0059$$
$$x_2^{(2)} = 2,02177 \qquad e_{a,2}^{(2)} = 6,3893$$
$$x_3^{(2)} = 2,98665 \qquad e_{a,3}^{(2)} = 2,7276$$

Método de Gauss-Seidel

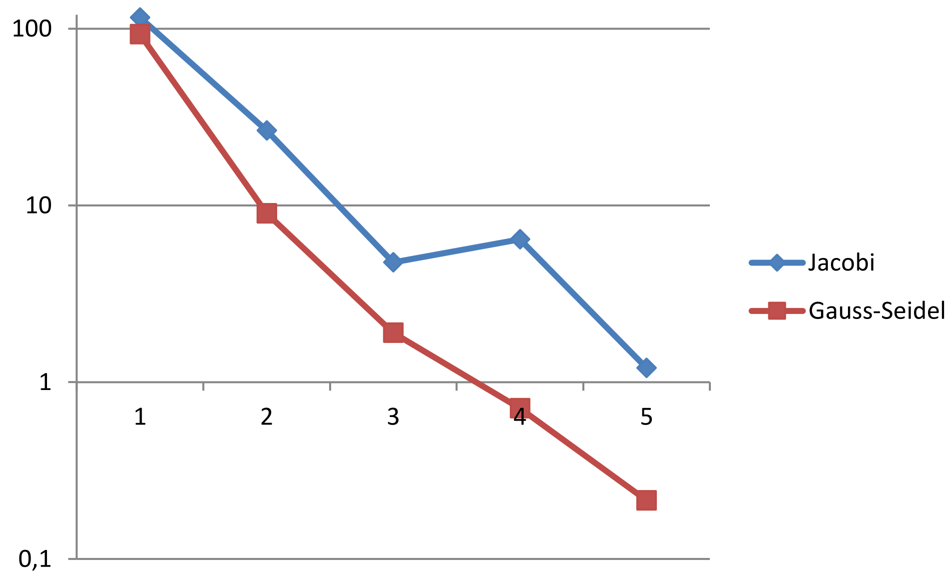
- **Exemplo 2...**
  - Iteração 3

$$x_1^{(3)} = 1{,}01030 \qquad e_{a,1}^{(3)} = 1{,}9007 \qquad e_a^{(3)} = 1{,}9007$$

$$x_2^{(3)} = 2{,}00102 \qquad e_{a,2}^{(3)} = 1{,}0372$$

$$x_3^{(3)} = 2{,}99402 \qquad e_{a,3}^{(3)} = 0{,}2462$$

  - Comparação do erro



Método de Gauss-Seidel

- **Exemplo 2**...
  - O método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente que o método de Jacobi
  - O número de iterações para a mesma tolerância é sempre menor no método de Gauss-Seidel
- Podemos obter a formula iterativa de GS a partir da notação matricial,
- Para isso usamos um procedimento semelhante ao mostrado no método de Jacobi
- O resultado aparece na forma

$$x^{(k)} = D^{-1}Lx^{(k)} + D^{-1}Ux^{(k-1)} + D^{-1}b$$

Método de Gauss-Seidel

- Que modificações devemos fazer no algoritmo de Jacobi para obtermos o algoritmo de Gauss-Seidel?

PASSO 1: Para i=1:n faça passo 2

    PASSO 2: $x0_i = A_{in}/A_{ii}$

PASSO 3: Faça k=1

PASSO 4: Enquanto (k<N) faça passos 5-8

        PASSO 5: Para i=1:n faça x_i = Eq. Gauss-Seidel

        PASSO 6: Se $||x-x0||<tol$ Saída (x_1, ..., x_n), FIM

        PASSO 7: k=k+1

        PASSO 8: Para i=1:n faça $x0_i = x_i$

PASSO 9: Saída (Método Falhou), FIM

Método de Gauss-Seidel

- Qual é o custo computacional do método de Gauss-Seidel?

$$NOP_{GS} = NOP_{JAC} = n + 2k(n^2 + n)$$

  - Algoritmo: $O(k)O(n^2)$
  - Quadrático no tamanho da matriz
  - Linear no número de iterações
  - O número de iterações sempre é menor em GS que em Jacobi
  - Por motivos de eficiência sempre deve-se utilizar GS em lugar de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

- Condição de convergência
  - **Teorema:** Se A é ***diagonalmente dominante de maneira estrita***, então com qualquer escolha de $x^{(0)}$, tanto o método de Jacobi como Gauss-Seidel geram seqüências $x^{(k)}$ que convergem para a solução única do sistema $Ax=b$
  - Diagonal dominante

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

O valor absoluto do elemento da diagonal é maior que a soma dos valores absolutos dos elementos da mesma linha.

  - Existe alguma relação entre o conceito de convergência e os erros de truncamento?

Método de Gauss-Seidel

- Condição de convergência . . .
  - A condição de convergência é apenas condição suficiente
  - Isto significa, se a condição for satisfeita o método converge
  - Se a condição não for satisfeita, não podemos afirmar que o método converge ou diverge
  - Como verificar o comportamento do método quando a condição de convergência não for satisfeita?
    - Deve-se monitorar o comportamento do erro
    - Se o erro decresce, o método converge
    - Se o erro aumenta, ou oscila, o método diverge

Método de Gauss-Seidel

- **Exemplo 3:** Verifique se a matriz do sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

é estritamente diagonal dominante.

$|6| > |-1| + |3|$

$|3| > |1| + |1|$ **OK**

$|5| > |3| + |-1|$

Métodos de Relaxamento

- Os métodos de relaxamento são uma alternativa ao método de Gauss-Seidel, que visa:
  - Acelerar a convergência
  - Encontrar a convergência em sistemas que divergem ou convergem muito lentamente
- Nos métodos de relaxamento os valores de $x_i^{(k)}$ obtidos pelo método de GS são corrigidos por uma média ponderada entre os resultados da iteração k e k-1, na forma

$$x_{i_{REL}}^{(k)} = \omega x_{i_{GS}}^{(k)} + (1 - w) x_{i_{REL}}^{(k-1)}$$

- onde w es um fator de peso entre 0 e 2.

Métodos de Relaxamento

- Se $w=1$, teremos o método de Gauss-Seidel

$$x_{i_{REL}}^{(k)} = x_{i_{GS}}^{(k)}$$

- Se $0<w<1$, teremos sub-relaxamento, neste caso diminuímos o peso dos resultados da nova iteração,
- O sub-relaxamento oferece bons resultados para
  - Obter a convergência em sistemas que não convergem
  - Acelerar a convergência em sistemas com comportamento oscilatório
- Se $1<w<2$, teremos sobre-relaxamento, neste caso aumentamos o peso da nova iteração,
- Se supõe que a nova iteração está mais próxima do solução exata

Métodos de Relaxamento

- O sobre-relaxamento acelera a convergência de um sistema já convergente
- A escolha do valor apropriado de w depende criticamente do sistema que está sendo resolvido
- O valor de w ótimo é determinado frequentemente de forma empírica
- Muitos autores sugerem que o valor ótimo de encontra-se entre 1 e 1,2 para a maioria dos sistemas
- Existem expressões para estimar o w_{otm} em função do raio espectral da matriz do sistema

Métodos de Relaxamento

- **Exemplo 4**: Realize três iterações pelos métodos de Sub-relaxamento ($w=0,92$) e Sobre-relaxamento ($w=1,08$) para resolver o sistema

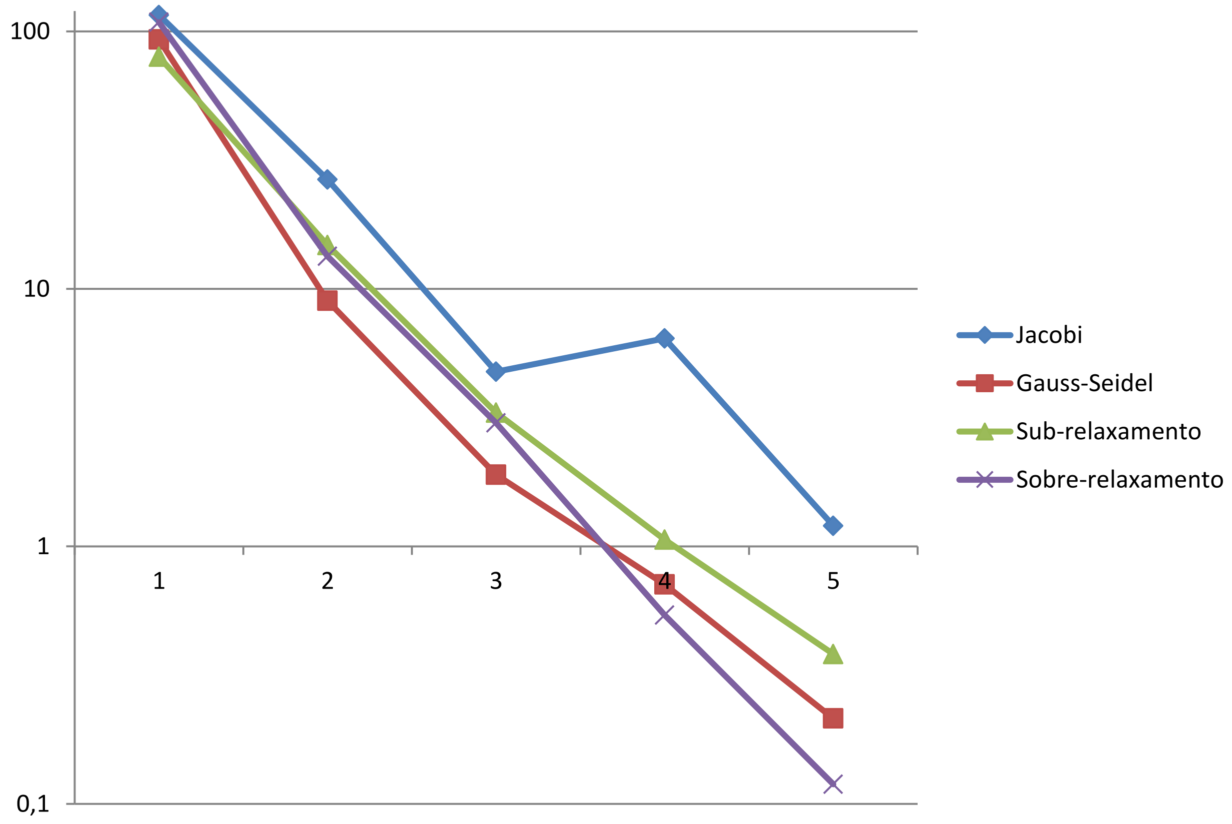
$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

a) Em cada iteração calcule o erro relativo da solução considerando a norma máxima

b) Compare os resultados com os obtidos para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Métodos de Relaxamento

- **Exemplo 3** . . .
  - Arquivo Excel
  - Gráfico dos erros



Métodos de Relaxamento

- Quais modificações devemos fazer no algoritmo de Gauss-Seidel para termos um método de relaxamento?

ENTRADA: número de incógnitas e equações n
matriz ampliada $A^*=(a_{ij})$ $i=1:n$ $j=1:n+1$
tolerância tol
número máximo de iterações N
parâmetro omega w

SAÍDA: solução do sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ou mensagem de que o método falhou

Relaxamento - Algoritmo

PASSO 1: Para i=1:n faça passo 2

  PASSO 2: $x0_i = A_{in}/A_{ii}$

PASSO 3: Faça k=1

PASSO 4: Enquanto (k<N) faça passos 5-8

    PASSO 5: Para i=1:n faça

      PASSO 5.1: x_{GSi} = Eq. Gauss-Seidel

      PASSO 5.2: x_i = Eq. Relaxamento

    PASSO 6: Se $||x-x0||<tol$ Saída $(x_1, \ldots, x_n)$, FIM

    PASSO 7: k=k+1

    PASSO 8: Para i=1:n faça $x0_i = x_i$

PASSO 9: Saída (Método Falhou), FIM

Métodos de Relaxamento

- Qual é o custo adicional por adicionar técnicas de relaxamento ao método de Gauss-Seidel?
  - Operações da fórmula de relaxamento
  - Para cada iteração k
    - Para cada incógnita x_i
      - 2, produtos
      - 2, somas e subtrações
      - Total: 4
  - Somando pelas n incógnitas e multiplicando pelas k iterações: $4kn$

Métodos de Relaxamento

- Custo computacional . . .

$$NOP_{REL} = NOP_{GS} + 4kn = n + 2k(n^2 + n) + 4kn$$
$$NOP_{REL} = n + 2k(n^2 + 3n)$$

  - Algoritmo: $O(k)O(n^2)$
  - Quadrático no tamanho da matriz
  - Linear no número de iterações
  - Temos um ligeiro aumento no número de operações ao introduzir o relaxamento
  - Geralmente, o aumento do custo é compensado pela diminuição no número de iterações

Comentários finais

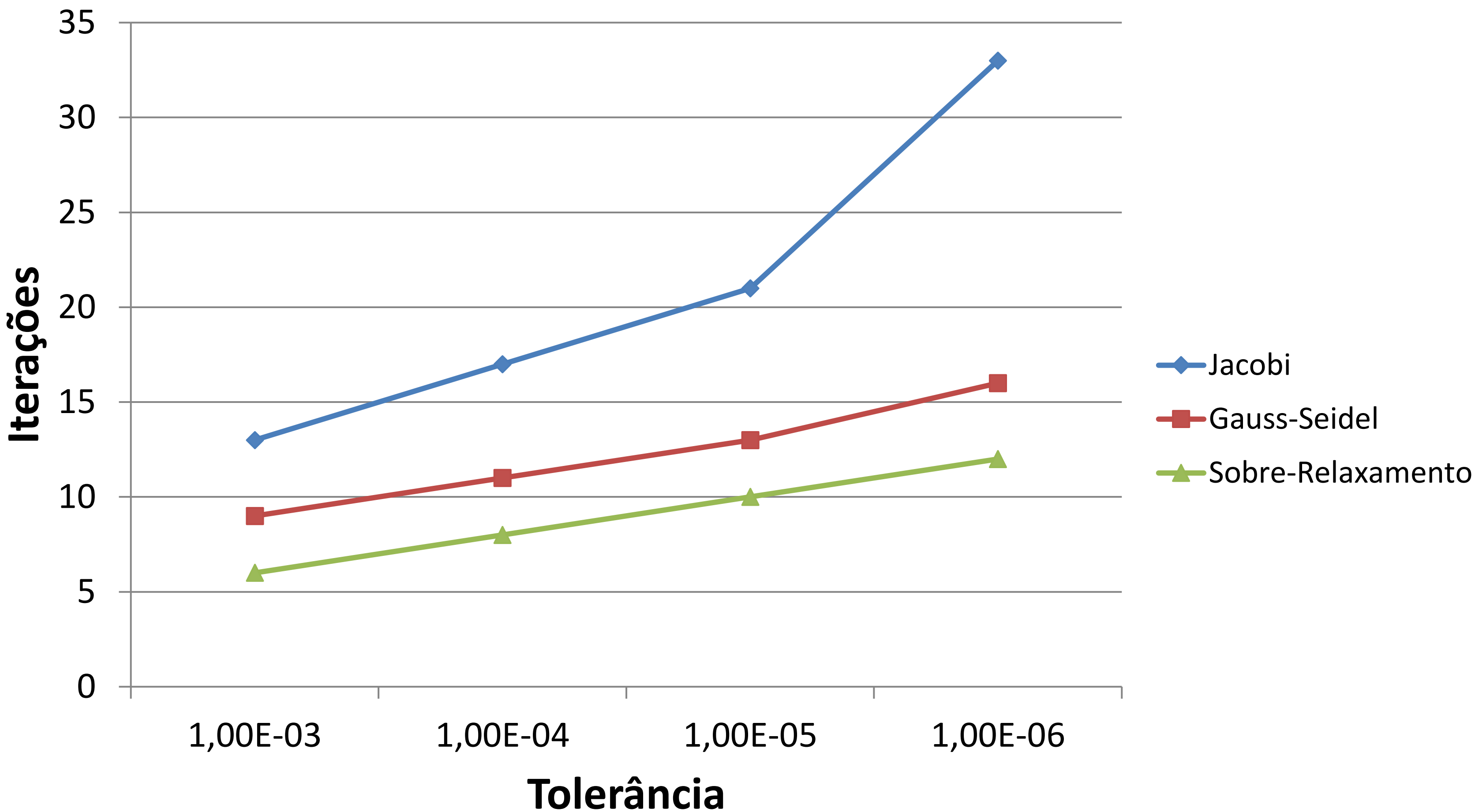
- Os elementos de um método iterativo são
  - Aproximação inicial
  - **Formula iterativa**
  - Critério de parada
- Os métodos iterativos são apropriados para matrizes grandes
- Os principais métodos iterativos são
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel
  - Método de relaxamento

Comentários finais

- O método de Jacobi converge lentamente e não tem valor pratico (apenas acadêmico)
- O método de Gauss-Seidel é apropriado para a maioria das aplicações
- Os métodos de GS e Jacobi podem apresentar problemas de convergência
- O método de GS pode ser acelerado/aprimorado usando técnicas de relaxamento
  - A principal dificuldade nas técnicas de relaxamento é encontrar o valor de w ótimo

Comentários finais

- Iterações para uma tolerância determinada



$$NOP_{GS} = NOP_{JAC} = n + 2k(n^2 + n) \qquad NOP_{REL} = n + 2k(n^2 + 3n)$$