- a partire dall'anno accademico 2016–17 è cambiata la definizione 8.23 di p-grado (la nuova definizione è equivalente, ma si spera più facilmente

p-grado (la nuova definizione è equivalente, ma si spera più facilmente comprensibile, di quella utilizzata in precedenza) e alcuni dettagli nella

- Il secondo capitolo è dedicato alla definizione della semantica della logica proposizionale, che conduce alle importanti nozioni di *conseguenza*

Definizione 1.1. Sia $\mathcal{P}$ un insieme non vuoto, i cui elementi verranno chiamati *lettere proposizionali* o *formule proposizionali atomiche*. $\mathcal{P}$ determina un *linguaggio* definizione.

Definizione 1.3. L'insieme delle *formule proposizionali* (o, limitatamente ai

Definizione 1.3. L'insieme delle *formule proposizionali* (o, limitatamente ai primi cinque capitoli, formule) è definito per ricorsione come segue:

Esempio 1.4. La definizione 1.3 ci permette di riconoscere se una certa stringa di simboli è una formula. E' facile verificare che $\wedge p \to$ non è una formula (non nell'ordine la prima, la seconda, la prima e la quarta condizione della definizione 1.3).

DEFINIZIONE 1.7. Una formula H è:

- una *negazione* se è della forma $(\neg F)$ per qualche formula F;

La definizione 1.3 è ricorsiva, e questo ci permette di dimostrare proprietà delle formule ragionando per induzione. Una dimostrazione di questo tipo è giustificata

DEFINIZIONE 1.12. Il *grado della formula F*, indicato con $g(F)$, è definito da:

- $g(F) = 0$ se F è una lettera proposizionale;

definizione di formula comporta l'uso di molte parentesi, più di quelle a cui siamo solitamente abituati. Si considerino ad esempio le stringhe $(\neg((\neg p) \to (q \wedge (\neg r))))$,

$(\neg((\neg p) \to (q \wedge (\neg r)))$ e $p \wedge q$: secondo la nostra definizione la prima è una formula,
la seconda no (perché una parentesi aperta non si "chiude") e la terza neppure, a

Definizione 1.19. Se F è una formula, diciamo che G è una *sottoformula* di F se G è una formula che è una sottostringa di F. G è una *sottoformula propria* di F se è diversa da F.

La definizione precedente va applicata tenendo a mente la definizione 1.3 di formula, anche quando si utilizza la convenzione 1.15.

La definizione precedente va applicata tenendo a mente la definizione 1.3 di formula, anche quando si utilizza la convenzione 1.15.

La definizione di sottoformula può anche venir data tramite una ricorsione sulla complessità delle formule.

Definizione 1.22. Definiamo per ricorsione sulla complessità della formula F quali sono le *sottoformule* di F:

Definizione 2.1. I *valori di verità* sono $\mathbb{V}$ e $\mathbb{F}$, letti rispettivamente "vero" e "falso".

Definizione 2.2. Una *valutazione* per il linguaggio proposizionale $\mathcal{P}$ è una funzione $v : \mathcal{P} \to \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$ che associa ad ogni lettera proposizionale un valore di

Definizione 2.3. Sia $v : \mathcal{P} \to \{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$ una valutazione. L'*interpretazione* $\bar{v}$ associa ad ogni formula F un valore di verità ed è definita per ricorsione sulla

La definizione 2.3 va vista come un'usuale definizione matematica in cui viene dato per acquisito il senso di "se", "e" e "oppure".

La definizione 2.3 va vista come un'usuale definizione matematica in cui viene dato per acquisito il senso di “se”, “e” e “oppure”.

Nota 2.4. La seguente tabella riassume alcune parti della definizione precedente. In ogni riga sono indicati i valori di verità di $G \wedge H$, $G \vee H$ e $G \to H$ in le varie parti della definizione di interpretazione troveremo: $\bar{v}(\neg r) = \mathbb{F}$, $\bar{v}(q \wedge \neg r) = \mathbb{F}$, $\bar{v}(\neg p) = \mathbb{V}$, $\bar{v}(\neg p \to q \wedge \neg r) = \mathbb{F}$, ed infine $\bar{v}(F) = \mathbb{V}$. La formula F risulta

Definizione 2.10. Se v è un'interpretazione e F una formula, diciamo che v *soddisfa* F o F *è soddisfatta da* v se $v(F) = \mathbb{V}$. Se T è un insieme di formule, diciamo che v *soddisfa* T se v soddisfa ogni formula di T.

introdotto nella definizione 2.12.

Definizione 2.12. Diciamo che le formule F e G sono *logicamente equivalenti* (in simboli $F \equiv G$) se per ogni interpretazione v si ha $v(F) = v(G)$.

Definizione 2.15. Siano F e G due formule. Diciamo che G è *conseguenza logica* di F (in simboli $F \models G$) se ogni interpretazione che soddisfa F soddisfa anche G.

Perciò $F \equiv G$ e $F \vDash G$ **non** sono formule nel senso della definizione 1.3. Le espressioni $F \equiv G$ e $F \vDash G$ sono abbreviazioni per certe affermazioni che noi

Definizione 2.27. Siano T e G un insieme di formule ed una formula. Diciamo che G è *conseguenza logica* di T (in simboli $T \vDash G$) se ogni interpretazione che soddisfa ogni formula di T soddisfa G.

Definizione 2.33. Se F è una formula diciamo che:

- F è *valida* se F è soddisfatta da ogni interpretazione;

Definizione 2.42. Se T è un insieme di formule diciamo che:

- T è *valido* se ogni interpretazione soddisfa T, cioè soddisfa ogni $F \in T$;

Definizione 2.48. Sia $\mathcal{F}$ un insieme di formule proposizionali. Una *procedura di decisione per* $\mathcal{F}$ è un algoritmo che riceve in input una formula F, termina sempre

1. Definizione di forma normale congiuntiva e disgiuntiva

Iniziamo con il definire una classe di formule piuttosto semplici.

Definizione 3.1. Un *letterale* è una lettera proposizionale oppure la negazione di una lettera proposizionale.

Definizione 3.2. Se p è una lettera proposizionale $\{p, \neg p\}$ è una *coppia complementare di letterali*. Più in generale se F è una formula $\{F, \neg F\}$ è una *coppia* immediato dalla definizione di v che $v(p) = \mathbb{V}$. Se invece $\neg p \in T$ non può essere $p \in T$ (perché T non contiene coppie complementari) e quindi $v(p) = \mathbb{F}$, cioè $v(\neg p) = \mathbb{V}$. $\square$

Definizione 3.6. Una formula proposizionale è in *forma normale congiuntiva* se è della forma $F_1 \wedge \cdots \wedge F_m$, dove per $1 \leq i \leq m$, F_i è della forma $G_{i,1} \vee \cdots \vee G_{i,h_i}$, Definizione 3.12. Una formula F è una *doppia negazione* se è del tipo $\neg\neg G$ per qualche formula G. In questo caso diciamo che G è il *ridotto* di F.

definizione.

Definizione 3.13. Una formula è *una α-formula* se esistono F e G tali che

DEFINIZIONE 3.13. Una formula è *una α-formula* se esistono F e G tali che la formula è di uno dei tipi che compaiono nella colonna sinistra della prima delle sempre. Notiamo che questo non è immediatamente evidente dalla definizione degli algoritmi. Infatti, esaminando il caso dell'algoritmo 3.22, osserviamo che quando si calcolandone il grado secondo la Definizione 1.12 osserviamo che siamo passati da una formula di grado 2 ad una di grado 4.

Definizione 3.31. Associamo ad ogni formula proposizionale un numero naturale positivo che chiameremo rango, secondo la seguente definizione per ricorsione rale positivo che chiameremo rango, secondo la seguente definizione per ricorsione sul numero dei simboli che compaiono nella formula:

Per il lemma 3.15 le clausole della definizione comprendono tutte le possibilità.

ogni numero naturale n. Quindi i due addendi nella definizione di $R(s+1)$ hanno somma minore dell'addendo di $R(s)$ che hanno rimpiazzato. Perciò, anche in questo caso $R(s+1) < R(s)$.

ad esaminare formule via via più semplici fino a raggiungere i letterali (definizione 3.1). Riconosceremo la non esistenza di un'interpretazione con le caratteristiche

DEFINIZIONE 4.6. Sia n un nodo del tableau che non è una foglia: la *formula su cui si agisce in n* è la G della descrizione dell'algoritmo. Notiamo che G non

Per definire W useremo il rango rg (definizione 3.31): se n è un nodo di $\mathcal{T}$, $W(n)$ è la somma dei ranghi delle formule in $E(n)$:

DEFINIZIONE 4.15. Un tableau è *chiuso* se tutte le sue foglie sono etichettate con insiemi di letterali che contengono una coppia complementare. Un tableau è aperto se non è chiuso, cioè se qualche sua foglia è etichettata con un insieme di tikka[4] (definizione 4.23);

(b) dimostreremo che ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile (lemma 4.27);

Definizione 4.23. Un insieme di formule $\mathcal{H}$ è un *insieme di Hintikka* se soddisfa le seguenti quattro condizioni:

La definizione 4.23 è basata sull'idea che un insieme di Hintikka $\mathcal{H}$ consiste di formule che supponiamo essere vere in una qualche interpretazione v. La verità di

soddisfacibile. La dimostrazione è per induzione sul rango di G (definizione 3.31).
Se $\mathrm{rg}(G) = 1$ allora G è un letterale:

- se $G \in \mathcal{H}$ è una lettera proposizionale allora $v(G) = \mathbb{V}$ per definizione di v.
- se $G \in \mathcal{H}$ è la negazione di una lettera proposizionale p allora $p \notin \mathcal{H}$ per (1) nella definizione di insieme di Hintikka. Quindi $v(p) = \mathbb{F}$ e perciò $v(G) = \mathbb{V}$.

nella definizione di insieme di Hintikka. Quindi $v(p) = \mathbb{F}$ e perciò $v(G) = \mathbb{V}$.

Se $\mathrm{rg}(G) > 1$ allora G è una doppia negazione, una α-formula o una β-formula:

definizione di insieme di Hintikka. Poiché $\mathrm{rg}(G_1) = \mathrm{rg}(G) - 1$ l'ipotesi induttiva ci dice che $v(G_1) = \mathbb{V}$. Dato che per il lemma 3.14 $G \equiv G_1$ abbiamo $v(G) = \mathbb{V}$.

definizione di insieme di Hintikka. Per ipotesi induttiva, dato che $\mathrm{rg}(G_1) < \mathrm{rg}(G)$ e $\mathrm{rg}(G_2) < \mathrm{rg}(G)$, possiamo assumere $v(G_1) = \mathbb{V}$ e $v(G_2) = \mathbb{V}$. Poiché per (4) nella definizione di insieme di Hintikka. Se $G_1 \in \mathcal{H}$ per ipotesi induttiva, dato che $\mathrm{rg}(G_1) < \mathrm{rg}(G)$, $v(G_1) = \mathbb{V}$ e, dato che per il lemma 3.14 $G \equiv G_1 \vee G_2$, abbiamo $v(G) = \mathbb{V}$. Il caso in cui $G_2 \in \mathcal{H}$ è del tutto analogo. $\square$

quattro proprietà della definizione di insieme di Hintikka.

(1) Per verificare che $\mathcal{H}$ non contiene una coppia complementare di letterali

insieme finito di formule (definizione 2.27) ed usando il lemma 2.30 si ottiene il seguente algoritmo.

Definizione 5.2. La formula $\perp$ è una *costante logica* che appartiene all'insieme $\mathcal{P}$ delle *lettere proposizionali* e viene letta "falso" o "contraddizione".

Nota 5.3. La definizione precedente implica che $\perp$ è insoddisfacibile e (quindi) che $\neg\perp$ è valida. Possiamo anzi considerare $\perp$ e $\neg\perp$ come i "prototipi" rispettivamente delle formule insoddisfacibili e delle formule valide. L'esercizio 2.25

irrazionali, mentre $a^b = 2$ per definizione di logaritmo.

le comprensione. La definizione della sintassi resta comunque indipendente dalla semantica.

(definizione 6.38).

Definizione 6.1. Un linguaggio predicativo contiene i seguenti elementi comuni:

Definizione 6.2. Un *linguaggio predicativo* consiste dei seguenti insiemi (che è sempre conveniente siano disgiunti, per evitare di incorrere in confusioni):

Definizione 6.9. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio fissato. L'insieme dei *termini di* $\mathcal{L}$ è definito per ricorsione come segue:

chiusi si può ripetere la definizione precedente omettendo la prima condizione).

Se un linguaggio non contiene né simboli di costante né simboli di funzione

La definizione di termine è ricorsiva e questo fa sì che spesso ragioneremo induttivamente sui termini. Una dimostrazione di questo tipo è giustificata dal seguente

Definizione 6.18. Se x è una variabile e s e t sono termini definiamo la *sostituzione di x con t in s*, $s\{x/t\}$, per ricorsione sulla complessità di s:

Definizione 6.20. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio predicativo. Le *formule atomiche di* $\mathcal{L}$ sono le stringhe di simboli del tipo $p(t_1, \ldots, t_n)$ dove p è un simbolo di relazione ragione per cui nella definizione 6.2 abbiamo richiesto che l'insieme dei simboli di relazione sia non vuoto.

Definizione 6.27. Se T è un insieme di formule il *linguaggio di T* è indicato con $\mathcal{L}(T)$ e consiste dei simboli di costante, funzione e relazione che compaiono in

La definizione di formula, come quella di termine, è ricorsiva e questo ci permette di ragionare *per induzione sulla complessità delle formule* (si ricordi il teorema deriamo la seguente definizione, che estende quella analoga nel caso proposizionale (definizione 1.12):

(definizione 1.12):

DEFINIZIONE 6.35. Il *grado della formula F*, indicato con $g(F)$, è definito da:

Definizione 6.35. Il *grado della formula F*, indicato con $g(F)$, è definito da:

- $g(F) = 0$ se F è atomica;

interpretiamo p. Per catturare questa differenza diamo la seguente definizione per ricorsione sulla complessità di una formula.

Definizione 6.38. Sia F una formula e x una variabile. Definiamo le *occorrenze libere di x in F* come segue:

L'idea della definizione 6.38 è che le variabili libere di una formula vanno interpretate in un modo che è ancora da stabilire: la loro presenza impedisce quindi costruire un enunciato applicando la definizione ricorsiva della definizione 6.20 è quasi sempre necessario (salvo quando l'enunciato non contiene variabili) passare costruire un enunciato applicando la definizione ricorsiva della definizione 6.20 è quasi sempre necessario (salvo quando l'enunciato non contiene variabili) passare attraverso formule che non sono enunciati. Anticipando la terminologia della definizione 6.46, il motivo è che le sottoformule di enunciati non sono necessariamente nizione 6.46, il motivo è che le sottoformule di enunciati non sono necessariamente enunciati. L'unica eccezione a questa situazione si avrà nel capitolo 11, dove il

Queste condizioni permettono di dare una definizione alternativa delle variabili libere di una formula, senza specificare quale occorrenze siano libere.

Definizione 6.43.

- Una *formula priva di quantificatori* è una formula in cui non compaiono letterali predicativi coincidono con i letterali della definizione 3.1.

DEFINIZIONE 6.44. Sia F una formula con variabili libere $x_1, \ldots, x_n$. L'enun-

Definizione 6.44. Sia F una formula con variabili libere $x_1, \ldots, x_n$. L'enunciato $\forall x_1 \ldots \forall x_n F$ è una *chiusura universale* di F, mentre l'enunciato $\exists x_1 \ldots \exists x_n F$

Questa sezione è quasi una ripetizione della sezione 1.3: le idee della definizione di sottoformula sono esattamente le stesse nel caso proposizionale e in quello zione di sottoformula sono esattamente le stesse nel caso proposizionale e in quello predicativo.

Definizione 6.46. Se F è una formula, diciamo che G è una *sottoformula* di F se G è una formula che è una sottostringa di F. G è una *sottoformula propria* di F se è diversa da F.

La definizione precedente va applicata tenendo a mente la definizione 6.20 di formula, anche quando si utilizza la convenzione 6.25.

La definizione precedente va applicata tenendo a mente la definizione 6.20 di formula, anche quando si utilizza la convenzione 6.25.

Per dare una definizione precisa di sottoformula possiamo procedere per induzione sulla complessità delle formule.

Definizione 6.49. Definiamo per ricorsione sulla complessità della formula F quali sono le *sottoformule* di F:

Abbiamo visto come effettuare sostituzioni nei termini (definizione 6.18), e ora ci proponiamo di effettuare sostituzioni nelle formule. Nel caso delle formule

Definizione 6.50. Se F è una formula atomica $p(s_1, \ldots, s_k)$, x è una variabile e t è un termine la *sostituzione di x con t in F* è $p(s_1\{x/t\}, \ldots, s_k\{x/t\})$ ed è denotata da $F\{x/t\}$.

Definizione 6.52. Un termine t è *libero per la sostituzione* al posto di un'occorrenza libera della variabile x nella formula F, se t non contiene alcuna variabile

Definizione 6.55. La sostituzione della variabile x con il termine t è *ammissibile* in F se t è libero per la sostituzione al posto di ogni occorrenza libera di x

Definizione 6.59. Sia F una formula, x una variabile qualunque e y una variabile che non occorre in F. La *variante* di F in cui x è rimpiazzata da y è

Definizione 6.63. Un linguaggio $\mathcal{L}$ si dice un *linguaggio con uguaglianza* se tra i suoi simboli di relazione binari ne esiste uno denotato con $=$. In questo caso

Definizione 6.64. Dato un linguaggio $\mathcal{L}$, con $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ denotiamo l'insieme dei seguenti enunciati di $\mathcal{L} \cup \{=\}$, spesso chiamati *assiomi dell'uguaglianza*:

Definizione 7.1. Dato un linguaggio $\mathcal{L}$ una *interpretazione* I per $\mathcal{L}$ è data da:

- un insieme non vuoto D^I, detto *dominio* dell'interpretazione;

Definizione 7.2. Un'interpretazione I per il linguaggio $\mathcal{L}$ associa ad ogni termine chiuso t di $\mathcal{L}$ la sua *interpretazione in I*, che è un elemento $t^I \in D^I$ definito

DEFINIZIONE 7.3. Uno *stato* dell'interpretazione I è una funzione $\sigma : \mathrm{Var} \to D^I$ che ad ogni variabile associa un elemento del dominio di I.

Estendiamo uno stato all'insieme di tutti i termini attraverso una definizione ricorsiva che ha delle analogie con quanto fatto nella definizione 2.3 per estendere ricorsiva che ha delle analogie con quanto fatto nella definizione 2.3 per estendere una valutazione ad un'interpretazione. Uno stato σ di I associa ad ogni termine t

Definizione 7.8. Siano F una formula di un linguaggio $\mathcal{L}$, I un'interpretazione per $\mathcal{L}$ e σ uno stato di I. Definiamo la relazione $I, \sigma \vDash F$ (da leggersi *I allo stato σ soddisfa F*) per induzione sulla complessità di F ($I, \sigma \nvDash F$ indica che $I, \sigma \vDash F$

Definizione 7.9. Diciamo che I *soddisfa* F, e scriviamo $I \models F$ se $I, \sigma \models F$ per ogni stato σ di I. In questo caso si dice anche che F *è vera in* I oppure che I *è un modello di* F.

Definizione 7.10. Se T è un insieme di formule, diciamo che I *allo stato* σ *soddisfa* T, e scriviamo $I, \sigma \models T$, se I allo stato σ soddisfa ogni $F \in T$. Anche in

Questa definizione va vista come una generalizzazione al caso predicativo della definizione 2.3. Pur tenendo conto della differenza tra le interpretazioni prola definizione 2.3. Pur tenendo conto della differenza tra le interpretazioni proposizionali e quelle predicative, la seconda, terza, quarta e quinta clausola della definizione 7.8 ricalcano le clausole analoghe della definizione 2.3. La prima clausola usa le interpretazioni dei termini e l'interpretazione dei simboli predicativi per definizione 7.8 ricalcano le clausole analoghe della definizione 2.3. La prima clausola usa le interpretazioni dei termini e l'interpretazione dei simboli predicativi per

Se F è una formula atomica basta applicare la definizione 7.8 e il lemma 7.6.

Se F è del tipo $\neg G$, $G \wedge H$, $G \vee H$ oppure $G \to H$ basta applicare la definizione 7.8 e l'ipotesi induttiva

Se F è del tipo $\neg G$, $G \wedge H$, $G \vee H$ oppure $G \rightarrow H$ basta applicare la definizione 7.8 e l'ipotesi induttiva.

clausola della definizione 7.8 che riguarda le quantificazioni esistenziali). Ripetendo questo passaggio si ottiene che esiste uno stato σ tale che $I, \sigma \vDash F$ se e solo se esiste

Definizione 7.27. Siano F e G due formule. Diciamo che F e G sono *logicamente equivalenti* (in simboli $F \equiv G$) se per ogni interpretazione I per $\mathcal{L}(F, G)$ e

Definizione 7.28. Siano F e G due formule. Diciamo che G è *conseguenza logica* di F (in simboli $F \models G$) se per ogni interpretazione I per $\mathcal{L}(F, G)$ e ogni stato σ di I tali che $I, \sigma \models F$ si ha $I, \sigma \models G$.

Definizione 7.29. Siano T e G un insieme di formule ed una formula. Diciamo che G è *conseguenza logica* di T (e scriviamo $T \models G$) se per ogni interpretazione I

Dimostrazione. Immediata dalla definizione 7.8 e dal lemma 7.12. □

Nota 7.42. Per F arbitraria non è vero né che $F \models \forall x\, F$ (si veda l'esercizio

Definizione 7.43. Se F è una formula diciamo che

- F è *valida* se per ogni interpretazione I per $\mathcal{L}(F)$ e ogni stato σ di I si ha

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sulla complessità di s, ricordando la definizione 6.18 di sostituzione in un termine.

ne 6.18 di sostituzione in un termine.

Se s è un simbolo di costante c, si ha $\sigma(s\{x/t\}) = \sigma(s) = c^I = \sigma[x/\sigma(t)](s)$.

definizione 6.18. □

Il lemma 7.61 ci permette di giustificare quanto affermato dopo la definizione 6.59 a proposito delle varianti.

Dimostrazione. Immediata dai lemmi 7.61 e 7.39, nonché dalla definizione 6.59. □

Definizione 7.65. Un'interpretazione I per un linguaggio $\mathcal{L}$ che comprende il simbolo di relazione binario $=$ è detta *interpretazione normale*, se $=$ è interpretata di assiomi dell'uguaglianza $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ introdotto nella definizione 6.64. Esso afferma che $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ esprime alcune delle proprietà fondamentali dei linguaggi con uguaglianza.

DIMOSTRAZIONE. Immediata, ispezionando la definizione 6.64. □

ESEMPIO 7.68. L'inverso del lemma 7.67 non è vero, cioè non è vero che se

Definizione 7.69. Siano T e G un insieme di formule ed una formula dello stesso linguaggio $\mathcal{L}$. Diciamo che G è *conseguenza logica nella logica con uguaglianza*

Definizione 7.72. Sia F una formula.

- F è *valida nella logica con uguaglianza* se per ogni interpretazione normale

Definizione 8.1. Una formula F si dice *in forma prenessa* se è priva di quantificatori oppure è della forma $Q_1x_1 \dots Q_kx_k\, G$, dove G è una formula priva di

Definizione 8.23. Data una formula F sia $\mathfrak{q}(F)$ il numero di quantificatori che compaiono in F. Definiamo per ricorsione sulla complessità di F il *p-grado* $\mathfrak{p}(F)$ di F

Applicando la quarta condizione della definizione di p-grado si ha $\mathfrak{p}(H) = \mathfrak{p}(H_1)$ dove H_1 è $p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg\forall z \neg r(y, z))$. Se H_2 e H_3 sono l'antecedente e il dove abbiamo utilizzato la terza e la prima condizione della definizione di p-grado e il calcolo della funzione $\mathfrak{q}$. Ora abbiamo $\mathfrak{p}(H_3) = \mathfrak{p}(r(x, y) \wedge \neg\forall z \neg r(y, z)) =$

G, utilizzando le prime tre condizioni nella definizione di p-grado e il fatto che $\mathfrak{q}(G') = 0$ per ogni sottoformula G' di G.

$Q_1, \ldots, Q_k$ quantificatori. La quarta condizione nella definizione di p-grado implica che $\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(G)$ e quindi $\mathfrak{p}(F) = 0$ segue da quanto osservato sopra.

di $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ allora, per la seconda e terza condizione della definizione 8.23, deve essere $\mathfrak{q}(F) = 0$. Questo significa che F è priva di quantificatori e quindi in forma

Se G è atomica allora $\mathfrak{p}(G) = 0$ per definizione di p-grado.

Se G è del tipo $\neg G'$ allora per ipotesi induttiva $\mathfrak{p}(G') = 0$ e per l'ipotesi del

Un'interpretazione I del linguaggio dell'esempio 9.7 contiene la definizione di $p^I(d)$ (che significa "il padrone di d") per ogni $d \in D^I$. Dato che in D^I sono compresi predicativo che rispetta la definizione 6.2. Anche in questo caso ci limitiamo a spiegare il procedimento attraverso un esempio.

Definizione 10.1. Diciamo che due interpretazioni I e J per un linguaggio $\mathcal{L}$ sono *elementarmente equivalenti rispetto a* $\mathcal{L}$ se per ogni enunciato F di $\mathcal{L}$ si ha che simboli del linguaggio. Questa idea è catturata dalla seguente definizione.

Definizione 10.3. Date due interpretazioni I e J per un linguaggio $\mathcal{L}$, un

Definizione 10.3. Date due interpretazioni I e J per un linguaggio $\mathcal{L}$, un *omomorfismo* di I in J è una funzione $\varphi : D^I \to D^J$ tale che:

condizione nella definizione di omomorfismo forte, applicata al simbolo di relazione $=$, fa sì che per ogni $d_1, d_2 \in D^I$ tali che $d_1 = d_2$ si abbia $\varphi(d_1) = \varphi(d_2)$. Perciò

Definizione 10.8. Siano I e J due interpretazioni per lo stesso linguaggio $\mathcal{L}$ e sia $\varphi : D^I \to D^J$ una funzione. Allo stato σ di I corrisponde uno stato $\varphi \circ \sigma$ di J, Se t è una variabile allora $\varphi(\sigma(t)) = (\varphi \circ \sigma)(t)$ per definizione.

Se t è un simbolo di costante c allora $\varphi(\sigma(t)) = \varphi(c^I) = c^J = (\varphi \circ \sigma)(t)$ per la prima condizione nella definizione di omomorfismo.

zione nella definizione di omomorfismo e nel passaggio dalla seconda alla terza riga l'ipotesi induttiva. □

nella definizione di omomorfismo forte e nel passaggio dalla seconda alla terza riga quanto appena dimostrato sui termini.

o un'implicazione. Questi passi sono tutti immediati, utilizzando la definizione 7.8 e l'ipotesi induttiva. □

$(\varphi \circ \sigma)[x/\varphi(d)](v)$. L'unico caso in cui ciò non segue immediatamente dalla definizione 10.8 è quando v è x. In questo caso, applicando le definizioni, si ottiene che

$\square$

zione 10.8 è quando v è x. In questo caso, applicando le definizioni, si ottiene che entrambi i membri sono uguali a $\varphi(d)$. $\square$

Definizione 10.20. Sia I un'interpretazione per $\mathcal{L}$. Una relazione binaria $\sim$ sul dominio D^I di I si dice *relazione di congruenza* su I se

Definizione 10.23. Se I è un'interpretazione per $\mathcal{L}$ e $\sim$ una relazione di congruenza su I, allora possiamo definire *l'interpretazione quoziente* $I/{\sim}$ di I rispetto lenza. Le altre condizioni nella definizione di congruenza assicurano che le definizioni di $f^{I/\sim}$ e $p^{I/\sim}$ siano “ben date”, cioè non dipendano dai rappresentan-

Definizione 10.29. Se I è un interpretazione per $\mathcal{L}$ e $\sim$ è una relazione di congruenza su I, definiamo la funzione $\pi : D^I \to D^{I/\sim}$ ponendo $\pi(d) = [d]$ per ogni

La terminologia della definizione precedente è giustificata dal seguente teorema.

TEOREMA 10.30. *Se I è un interpretazione per $\mathcal{L}$ e $\sim$ è una relazione di con-*

zioni della definizione 10.3:

- per ogni simbolo di costante c di $\mathcal{L}$ si ha $\pi(c^I) = [c^I] = c^{I/\sim}$;

Dimostrazione. Il fatto che I soddisfa gli enunciati di $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ (definizione 6.64) assicura che le condizioni della definizione di relazione di congruenza sono soddisfatassicura che le condizioni della definizione di relazione di congruenza sono soddisfatte da $=^I$. Ad esempio, $I \models$ (e2) significa che $=^I$ è simmetrica (una delle condizioni la terza condizione della definizione 10.20.

Per verificare che l'interpretazione di $=$ in $I/{=^I}$ è l'identità osservate che

La seguente definizione è la ovvia generalizzazione al caso predicativo della definizione 3.2. Ricordiamo che nella definizione 6.43 abbiamo definito i letterali definizione 3.2. Ricordiamo che nella definizione 6.43 abbiamo definito i letterali nella logica predicativa.

definizione 3.2. Ricordiamo che nella definizione 6.43 abbiamo definito i letterali nella logica predicativa.

Definizione 11.2. Se A è una formula atomica $\{A, \neg A\}$ è una *coppia complementare di letterali*. Più in generale se F è una formula $\{F, \neg F\}$ è una *coppia* definizione di questi tipi di formule è la stessa che nel caso proposizionale (definizioni 3.12 e 3.13), ma per poter classificare tutte le formule predicative è necessario

Definizione 11.4. Una formula è *una γ-formula* se esiste F tale che la formula è di uno dei tipi che compaiono nella colonna sinistra della prima delle seguenti tabelle. Una formula è *una δ-formula* se esiste F tale che la formula è di uno dei

Definizione 11.17. Sia n un nodo del tableau che ha successori nel tableau: l'*enunciato su cui si agisce in* n è la G della descrizione dell'algoritmo.

$I', \sigma[x/a^{I'}] \models F$ per la nostra definizione di $a^{I'}$ e perché a non compare in G e quindi neppure nella sua sottoformula F. Per il Lemma di Sostituzione 7.59 (ricordando

Definizione 11.28. Un tableau è *chiuso* se non ha rami infiniti e tutte le sue foglie sono etichettate con insiemi di enunciati che contengono una coppia complecostante in $C_n(G)$ (notiamo che la definizione di γ-nodo implica che S_n non è vuoto). Aggiungiamo un nodo n' sotto n e poniamo $E(n') = E(n) \cup S_n$; per ogni

(a) definizione di insieme di Hintikka (definizione 11.38);

(b) dimostrazione che ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile (lemma 11.43);

(a) definizione di insieme di Hintikka (definizione 11.38);

(b) dimostrazione che ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile (lemma 11.43);

Nel seguito diamo la definizione di insieme di Hintikka, ed enunciamo precisamente i lemmi che corrispondono al secondo e al terzo passo, limitandoci a dare

La definizione di insieme di Hintikka riprende quella del caso proposizionale (definizione 4.23): aggiungiamo le condizioni riguardanti γ- e δ-formule ed inoltre (definizione 4.23): aggiungiamo le condizioni riguardanti γ- e δ-formule ed inoltre ci assicuriamo che vi siano simboli di costante.

Definizione 11.38. Un insieme di enunciati $\mathcal{H}$ è un *insieme di Hintikka* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

La definizione 11.38 è dettata dalla stessa idea descritta dopo la definizione 4.23: la verità di ogni $F \in \mathcal{H}$ che non è un letterale deve essere "giustificata"

La definizione 11.38 è dettata dalla stessa idea descritta dopo la definizione 4.23: la verità di ogni $F \in \mathcal{H}$ che non è un letterale deve essere "giustificata" simboli di costante che compaiono in $\mathcal{H}$. Per definizione di insieme di Hintikka si ha $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Si dimostra poi, estendendo prima la definizione di rango di una formula e poi i ragionamenti svolti per dimostrare il lemma 4.27 (che è la versione proposizionale prietà della definizione di insieme di Hintikka. La dimostrazione è anche in questo caso una generalizzazione di quella del caso proposizionale (lemma 4.28). Ci sono definizione di tableau sistematico (perché le istanze di H relative ad a e b non vengono introdotte simultaneamente), ma è stato costruito senza dimenticare nessun tipo (e5) di $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ (si ricordi la definizione 6.64): $\forall x\, \forall y (x = y \wedge p(x) \rightarrow p(y))$, che indichiamo con E_5. Indichiamo con E_5' l'enunciato $\forall y (a = y \wedge p(a) \rightarrow p(y))$, che è possiamo aggiungere un'istanza relativa ad un termine chiuso (ricordare la definizione 6.9) che contenga anche simboli di funzione. Per prima cosa è quindi necessario ne 6.9) che contenga anche simboli di funzione. Per prima cosa è quindi necessario estendere la nozione di istanza di una γ-formula a termini chiusi arbitrari.

Definizione 11.57. Se G è una γ-formula e t è un termine chiuso, l'istanza di G relativa ad t è $F\{x/t\}$ se G è $\forall x\, F$, e $\neg F\{x/t\}$ se G è $\neg \exists x\, F$.

La sostituzione effettuata nella definizione precedente è sempre ammissibile, perché t non contiene variabili (si veda la nota 6.53). Osserviamo inoltre che il

In questa sede omettiamo gli ulteriori dettagli necessari alla definizione rigorosa dei tableaux sistematici per linguaggi con simboli di funzione.

assiomi dell'uguaglianza (si ricordi la definizione 6.64).

LEMMA 12.56. *Se G è un enunciato che appartiene a $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$, allora $\rhd_{=} G$.*

introdotta nella definizione 7.69.

TEOREMA 12.58 (Teorema di correttezza con uguaglianza). *Siano T un insieme*