Содержание

1 Введение

Кросс-политоп $\Diamond^n$, или гипероктаэдр, — это выпуклый центрально-симметричный многогранник, являющийся выпуклой оболочкой векторов стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ и противоположных к ним векторов. Эквивалентно, это единичный шар в ℓ_1-норме.

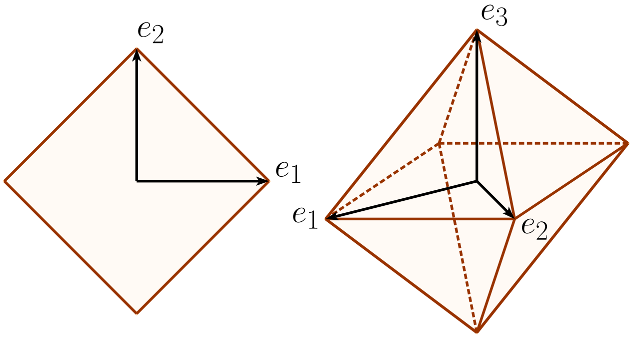

Рис. 1: 2- и 3-мерный кросс-политоп

Известно, что всякий выпуклый центрально-симметричный многогранник в $\mathbb{R}^n$ аффинно эквивалентен проекции кросс-политопа большей размерности на $\mathbb{R}^n$, поэтому проекции кросс-политопа удобно рассматривать как некоторое стандартное положение выпуклых центрально-симметричных многогранников. Вследствие этого вопросы оценки объёмов многогранников естественно связаны с объёмами проекций кросс-политопов.

Нас интересует поиск необходимых условий, при которых объём ортогональной проекции n-мерного кросс-политопа на k-мерное подпространство $H_k \subset \mathbb{R}^n$ достигает максимума. Иными словами, мы исследуем на максимум функцию

$$F(H_k) = \mathrm{vol}(\Diamond^n | H_k), \tag{1.1}$$

где $\Diamond^n | H_k$ обозначает ортогональную проекцию n-мерного кросс-политопа $\Diamond^n$ на H_k.

Поиск экстремумов функции (1.1) связан с аналогичной задачей для объёма центрального сечения подпространством n-мерного куба $\square^n = [-1, 1]^n$. Эта задача хорошо изучена. Чтобы указать на связь между ними, напомним, что *полярой* множества $K \subset \mathbb{R}^n$ называют множество $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n |\ \forall x \in K\ \langle x, y\rangle \leqslant 1\}$. Известно, что для всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ выполнено

$$(K \cap H_k)^\circ = K^\circ | H_k, \tag{1.2}$$

где $H_k \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное k-мерное подпространство, а $(K \cap H_k)^\circ$ понимается как поляра в H_k. Поскольку n-мерный кросс-политоп — поляра n-мерного куба, то задача поиска экстремумов объёма (1.1) в некотором смысле двойственна поиску экстремумов объёма

$$G(H_k) = \mathrm{vol}(\square^n \cap H_k), \tag{1.3}$$

а точные оценки объёма (1.1) в некотором смысле двойственны оценкам объёма (1.3). Более того, все известные точные оценки для обеих функций (1.1) и (1.3) достигаются на одних и тех же подпространствах, то есть на двойственных в смысле формулы (1.2) многогранниках.

Экстремумы функции (1.3) исследовались Ваалером [10] и Боллом [1]. В [10] Ваалер доказывает, что для объёма сечения куба произвольным k-мерным подпространством $H_k \subset \mathbb{R}^n$ выполняется оценка снизу

$$\mathrm{vol}(\square^k) \leqslant \mathrm{vol}(\square^n \cap H_k). \tag{1.4}$$

Неравенство точно для всех $n > k \geqslant 1$, при этом равенство достигается на координатных подпространствах. Болл в [1] получает неравенство сверху

$$\mathrm{vol}(\square^n \cap H_k) \leqslant \min\left\{\left(\frac{n}{k}\right)^{k/2}, 2^{(n-k)/2}\right\} \mathrm{vol}(\square^k), \tag{1.5}$$

выполняющееся при n делящемся на k или при $2k \geqslant n$, и в этом случае равенство достигается. При k, не делящем n, и $2k < n$ точная оценка неизвестна.

Задача (1.1) исследовалась Бартом (см. [3], [4]) и Ивановым (см. [7], [8]). В работе [3] Барт получает нижнюю оценку для объёма проекции n-мерного кросс-политопа на произвольное k-мерное подпространство:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{k/2} \mathrm{vol}(\diamond^k) \leqslant \mathrm{vol}(\diamond^n | H_k). \tag{1.6}$$

Заметим, что при k, делящем n, константа в неравенстве (1.6) и константа в неравенстве (1.5) взаимно обратны. Ивановым в [8] доказано, что в этом случае равенства в обоих неравенствах достигаются на одних и тех же пространствах.

Также в [4] Барт доказывает точные оценки для объёма проекции кросс-политопа на гиперплоскость, то есть для случая $k = n - 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{vol}(\diamond^{n-1}) \leqslant \mathrm{vol}(\diamond^n | H_{n-1}) \leqslant \mathrm{vol}(\diamond^{n-1}). \tag{1.7}$$

Иванов в [7] формулирует гипотезу, согласно которой максимум объёма проекции n-мерного кросс-политопа достигается на координатных подпространствах и равен $2^k/k!$ — объёму k-мерного кросс-политопа, то есть

$$\mathrm{vol}(\diamond^n | H_k) \leqslant \mathrm{vol}(\diamond^k). \tag{1.8}$$

В той же работе неравенство (1.8) доказывается для случаев $k = 2$ и $k = 3$.

Поиск верхней оценки для объёма проекции кросс-политопа на подпространство произвольной размерности остаётся, однако, нерешённой задачей. Недоказанное в общем случае неравенство (1.8) можно также рассматривать как двойственное к установленному неравенству (1.4).

В [7] также доказывается неравенство

$$V(n, k) \leqslant V(k^3, k),$$

где $V(n, k) = \max \operatorname{vol}(\Diamond^n | H_k)$, а максимум берётся по всем k-мерным подпространствам $H_k \subset \mathbb{R}^n$. Для произвольных n, k таких, что $k^3 \geqslant n > k$, неравенство устанавливает оценку на максимум объёма проекции кросс-политопа, которая при данном k может быть найдена с помощью численных методов.

Мы опираемся на работу [7] и развиваем её методы. Основной результат данной работы — доказательство следующей теоремы, дающей необходимое условие максимальности объёма проекции кросс-политопа на 4-мерное подпространство.

Теорема 1.1. *Максимум объёма проекции n-мерного кросс-политопа на 4-мерное подпространство $H_4 \subset \mathbb{R}^n$, $n > 4$, достигается только тогда, когда все ненулевые проекции базисных векторов лежат на границе эллипсоида минимального объёма, содержащего проекцию кросс-политопа. При этом их число не превосходит 10, и все они являются вершинами проекции кросс-политопа.*

2 Необходимые сведения из линейной алгебры

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ — евклидову норму вектора, а $B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n |\ |y - x| \leqslant r\}$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса r.

Через $v[i]$ обозначим i-ую компоненту вектора $v \in \mathbb{R}^n$ в стандартном базисе, через $\operatorname{span} S$ — линейную оболочку набора векторов S. В этой работе H_k обозначает k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ (вообще говоря, не фиксированное), через $K \cap H$ и $K|H$ обозначим сечение выпуклого тела K подпространством H и проекцию K на H соответственно.

Ортогональный проектор на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через P_L или просто P, если ясно, на какое подпространство он проектирует. Тождественный оператор на линейном пространстве V будем обозначать через I_V или I_n, если $V = \mathbb{R}^n$.

Напомним, что если линейное пространство V снабжено скалярным произведением, то тензорное произведение $v \otimes w$ векторов $v, w \in V$ естественным образом отождествляется с оператором на V, действующим как $x \mapsto \langle w, x\rangle v$. Этот оператор будем также обозначать через $v \otimes w$. Если $v, u \in \mathbb{R}^n$, то в матричной записи $v \otimes u = vu^T$. Геометрический смысл оператора $v \otimes v$ — композиция проекции на прямую, задаваемую направлением v, и растяжения в $|v|^2$ раз. Видно, что если $|v| = 1$, то $v \otimes v$ — оператор ортогонального проектирования на эту прямую.

Под *телами* будем понимать компакты в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью.

Мы будем считать, что все центрально-симметричные множества имеют центр симметрии в нуле, если это не оговорено отдельно.

Для набора векторов $S = \{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ определим:

- многогранник $\diamond^n|S = \operatorname{conv}(S \cup (-S))$, который будем называть *проекцией кросс-политопа, порождённой набором S*;
- линейный оператор $A_S = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

Лемма 2.1. *Для произвольного набора векторов $S = \{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ оператор A_S самосопряжённый и положительно полуопределённый. Если дополнительно* $\operatorname{span} S = \mathbb{R}^k$, *то A_S — положительный оператор.*

Доказательство. Для вектора $v \in \mathbb{R}^n$ оператор $v \otimes v$ самосопряжённый и положительно полуопределённый:

$$\langle y, (v \otimes v)x\rangle = \langle y, \langle v, x\rangle v\rangle = \langle v, y\rangle\langle v, x\rangle = \langle (v \otimes v)y, x\rangle,$$

$$\langle x, (v \otimes v)x\rangle = \langle v, x\rangle^2 \geqslant 0.$$

Оператор A_S тогда самосопряжённый и положительно полуопределённый как сумма самосопряжённых положительно полуопределённых операторов. Если $\operatorname{span} S = \mathbb{R}^k$, то найдётся вектор v_i такой, что $\langle v_i, x\rangle > 0$. Значит, $\langle x, A_S x\rangle > 0$ для $x \neq 0$, то есть A_S — положительный оператор. □

Лемма 2.2. *Пусть $v \in \mathbb{R}^k$, тогда* $\det(I_k \pm v \otimes v) = 1 \pm |v|^2$.

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис $\{e_i\}_1^k \subset \mathbb{R}^k$ в котором вектор e_1 сонаправлен с v. В этом базисе матрица оператора $I_k \pm v \otimes v$ запишется как $I_k \pm v \otimes v = \operatorname{diag}\{1 \pm |v|^2, 1, \ldots, 1\}$, откуда получаем требуемое. □

3 Разложение единицы

Определение. *Будем говорить, что набор векторов* $\{v_i\}_1^n$ *линейного пространства* V *даёт разложение единицы в* V *(или что сам является разложением единицы), если*

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i = I_V.$$

Ясно, что линейная оболочка набора векторов, дающих разложение единицы в V, совпадает с V. Действительно, пусть $x \in V$, а $\{v_i\}_1^n$ — разложение единицы в V, тогда

$$x = I_V x = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, x\rangle v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Множество разложений единиц $\{v_i\}_1^n$ в $\mathbb{R}^k$ будем обозначать как $\Omega(n, k)$.

3.1 Формулировка задачи в терминах разложения единицы

В задаче (1.1) ищется максимум по всем k-мерным подпространствам пространства $\mathbb{R}^n$. Иными словами, она может рассматриваться как задача максимизации функции, заданной на многообразии Грассмана $\mathrm{Gr}(n, k)$. Оказывается, проблема допускает эквивалентную формулировку в терминах разложений единиц. Для этого приведём лемму, взятую из [8].

Лемма 3.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *набор векторов* $\{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ *даёт разложение единицы в* $\mathbb{R}^k$*;*

(2) *существует ортонормированный базис* $\{f_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^n$ *такой, что* $v_i = Pf_i$, $i = \overline{1, n}$, *где* P *— оператор ортогональной проекции на* $\mathbb{R}^k$*, а* $\mathbb{R}^k$ *рассматривается как подпространство* $\mathbb{R}^n$*;*

(3) $\mathrm{span}\{v_i\}_1^n = \mathbb{R}^k$ *и матрица Грама набора* $\{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ *является матрицей оператора проекции* $\mathbb{R}^n$ *на линейную оболочку строк матрицы* $M = ||v_1 \ \ldots \ v_n||$*;*

(4) *матрица* $M = ||v_1 \ \ldots \ v_n||$ *размера* $k \times n$ *есть подматрица ортогональной матрицы порядка* n*.*

Покажем, как поставить задачу (1.1) на языке разложений единиц. Положим $v_i = P_{H_k} e_i$, где $\{e_i\}_1^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда по пункту (2) леммы 3.1

$S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — разложение единицы в H_k, а проекция кросс-политопа $\diamond^n = \operatorname{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ на H_k — это $\diamond^n | H_k = \operatorname{conv}\{\pm v_1, \ldots, \pm v_n\} = \diamond^n | S$, то есть проекция кросс-политопа, порождённая разложением единицы S в H_k.

Из линейной алгебры известно, что существует изометрический изоморфизм $\phi\colon H_k \to \mathbb{R}^k$. Таким образом, мы можем поставить в соответствие $H_k \in \mathrm{Gr}(n,k)$ разложение единицы $\phi S = (\phi \circ P_{H_k})\{e_1, \ldots, e_n\} \in \Omega(n,k)$, которое, однако, не является взаимно однозначным, так как выбор изометрии ϕ произволен. Выбирая вместо ϕ любую другую изометрию $\varphi\colon H_k \to \mathbb{R}^k$, мы получим другое разложение единицы $\varphi S \in \Omega(n,k)$, изометричное ϕS. От произвола можно избавиться, если перестать различать разложения единицы, получающиеся друг из друга под действием ортогонального преобразования на $\mathbb{R}^k$. Иными словами, рассмотрим действие группы $O(k)$ ортогональных преобразований $\mathbb{R}^k$ на множестве $\Omega(n,k)$:

$$U\{v_1, \ldots, v_n\} = \{Uv_1, \ldots, Uv_n\}$$

для всех $U \in O(k)$. Зафиксируем для каждого H_k изометрию $\phi\colon H_k \to \mathbb{R}^k$ и определим отображение

$$\Psi\colon \mathrm{Gr}(n,k) \to \Omega(n,k)/O(k), \quad H_k \mapsto [(\phi \circ P_{H_k})\{e_1, \ldots, e_n\}],$$

где $[S] \in \Omega(n,k)/O(k)$ — орбита элемента $S \in \Omega(n,k)$ под действием группы $O(k)$. Покажем, что Ψ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathrm{Gr}(n,k)$ и $\Omega(n,k)/O(k)$, предъявив обратное отображение.

Для разложения единицы $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^k$ определим k-мерное подпространство $H^S \subset \mathbb{R}^n$ как линейную оболочку строк матрицы $||v_1, \ldots, v_n||$ размера $k \times n$. По пункту (3) леммы 3.1, матрица Грама набора векторов S — ортогональный проектор P_{H^S}. Положим

$$\Phi\colon \Omega(n,k)/O(k) \to \mathrm{Gr}(n,k), \quad [S] \mapsto H^S.$$

Отображение Φ корректно определено на классах эквивалентности, поскольку ортогональные преобразования не изменяют матрицу Грама, и является обратным к Ψ в силу пункта (4) леммы 3.1, так как наборы $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\{P_{H^S}e_1, \ldots, P_{H^S}e_n\}$ переходят друг в друга под действием некоторого ортогонального преобразования.

Из приведённой диаграммы видно, что функции $\mathrm{Gr}(n,k) \to \mathbb{R}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями $\Omega(n,k) \to \mathbb{R}$, постоянными на орбитах действия группы $O(k)$, поскольку в этом случае правый треугольник на ней коммутативен:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}(n,k) \arrow[rr] \arrow[d, "\cong"] & & \mathbb{R} \\
\Omega(n,k)/O(k) \arrow[urr] & & \Omega(n,k). \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Из всего изложенного выше следует, что соответствующие таким образом друг другу функции $\mathrm{Gr}(n,k) \to \mathbb{R}$ и $\Omega(n,k) \to \mathbb{R}$ имеют одинаковые глобальные экстремумы.

Итак, глобальные экстремумы функции (1.1) и функции

$$F(S) = \mathrm{vol}(\Diamond^n|S),\ \ S \in \Omega(n,k), \tag{3.1}$$

равны. Однако, как обсуждается в [7], если снабдить $\Omega(n,k)$ и $\mathrm{Gr}(n,k)$ подходящими метриками, то и локальные экстремумы этих функций совпадают. В дальнейшем мы будем работать с задачей (3.1).

Эквивалентная формулировка задачи в терминах разложения единицы полезна тем, что даёт возможность исследовать её с помощью элементарных методов линейной алгебры и избавляет от необходимости максимизации функции на многообразии большой размерности и привлечения аппарата дифференциальной геометрии.

3.2 Метод возмущения разложения единицы

В этом параграфе мы опишем главную идею, использованную в [7] для получения необходимых условий максимума задачи (3.1).

В первую очередь заметим, что всякий набор $S = \{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ такой, что $\operatorname{span} S = \mathbb{R}^k$, можно преобразовать в разложение единицы в $\mathbb{R}^k$. Действительно, по лемме 2.1 оператор A_S положительный, тогда существует единственный положительный самосопряжённый оператор B_S такой, что $B_S^2 = A_S^{-1}$. Оператор $B_S = A_S^{-1/2}$, применённый к набору векторов S, превращает его в разложение единицы $B_S S = \{B_S v_i\}_1^n$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n B_S v_i \otimes B_S v_i\right) x &= \sum_{i=1}^n \langle B_S v_i, x\rangle B_S v_i = B_S \sum_{i=1}^n \langle v_i, B_S^T x\rangle v_i = \\
&= B_S \left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i\right) B_S^T x = B_S A_S B_S^T x = I_k x.
\end{aligned}$$

Напомним, нашей задачей теперь является получение необходимых условий, при которых достигается максимум объёма проекции кросс-политопа, порождённой разложением единицы. Пусть максимум задачи (3.1) достигается на разложении единицы $S \in \Omega(n,k)$. Произведём над S некоторое преобразование и получим новое разложение единицы $S' \in \Omega(n,k)$. Тогда необходимые условия на максимум можно получить в виде неравенств, связывающих $\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|S)$ и $\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|S')$.

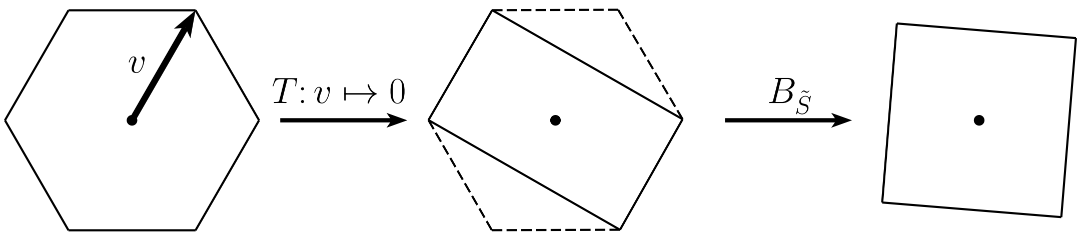

Рис. 2: Преобразование T заменяет вектор v на 0

Всякое такое «возмущающее» преобразование представим как композицию преобразований

$$S \xrightarrow{T} \tilde{S} \xrightarrow{B_{\tilde{S}}} S', \tag{3.2}$$

где T — некоторое преобразование, приводящее разложение единицы S к набору векторов $\tilde{S}$, а $B_{\tilde{S}}$ превращает $\tilde{S}$ в разложение единицы. Пользуясь этим методом, можно написать следующее необходимое и достаточное условие на максимум функции (3.1), доказанное в [7].

Лемма 3.2 (Критерий максимальности объёма проекции)**.** *Максимум задачи* (3.1) *достигается на разложении единицы* $S = \{v_i\}_1^n$ *в* $\mathbb{R}^k$ *тогда и только тогда, когда для произвольного набора* $\tilde{S}$ *такого, что* $\operatorname{span}\tilde{S} = \mathbb{R}^k$*, выполнено*

$$\frac{\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|\tilde{S})}{\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|S)} \leqslant \sqrt{\det A_{\tilde{S}}}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Преобразованием $B_{\tilde{S}}$ привёдем $\tilde{S}$ к набору $B_{\tilde{S}}\tilde{S}$, дающему разложение единицы, тогда $\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|B_{\tilde{S}}\tilde{S}) = \det B_{\tilde{S}} \operatorname{vol}(\diamondsuit^n|\tilde{S})$. Ясно, что S — максимум функции F тогда и только тогда, когда $\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|B_{\tilde{S}}\tilde{S}) \leqslant \operatorname{vol}(\diamondsuit^n|S)$. Далее получаем

$$\frac{\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|\tilde{S})}{\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|S)} = \frac{1}{\det B_{\tilde{S}}} \frac{\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|B_{\tilde{S}}\tilde{S})}{\operatorname{vol}(\diamondsuit^n|S)} \leqslant \frac{1}{\det B_{\tilde{S}}} = \sqrt{\det A_{\tilde{S}}}.$$

□

При проверке, достигается ли на данном разложении единицы максимум (3.1), возникают две задачи. Первая заключается в вычислении левой части неравенства (3.3), и её можно решить наглядными геометрическими методами, выбирая подходящее преобразование T. Можно рассматривать, например, следующие простые преобразования: умножение одного или нескольких векторов на число, замена вектора на 0 или на другой вектор. С другой стороны, возникает алгебраическая задача по вычислению правой части неравенства (3.3), которая для этих преобразований может быть подсчитана точно или с точностью до первого порядка, используя метод, изложенный в следующем параграфе. Таким образом, можно получать новые необходимые условия первого порядка на максимум задачи (3.1), имеющие простой геометрический смысл.

Из следующей леммы [7] немедленно следует, что если максимум задачи (3.1) достигается на разложении единицы $S = \{v_i\}_1^n$ в $\mathbb{R}^k$, то ненулевые векторы $\{\pm v_i\}_1^n$ — попарно различные вершины многогранника $\diamond^n|S$.

Лемма 3.3. *Пусть* $S = \{v_i\}_1^n$ *— разложение единицы в* $\mathbb{R}^k$ *такое, что для некоторого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ $v_i \in \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\} = \diamond^{n-1}|S \setminus \{v_i\}$*, а набор* $\tilde{S}$ *получен из* S *заменой* $v_i \mapsto 0$*. Обозначая* $S' = B_{\tilde{S}}\tilde{S}$*, имеем*

$$\operatorname{vol}(\diamond^n|S) \leqslant \operatorname{vol}(\diamond^n|S'),$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $v_i = 0$*.*

Доказательство. Имеем $\diamond^n|S = \diamond^n|\tilde{S}$, а также $B_{\tilde{S}} \geqslant B_S = I$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $v_i = 0$. Тогда

$$\operatorname{vol}(\diamond^n|S') = \det B_{\tilde{S}} \operatorname{vol}(\diamond^n|\tilde{S}) \geqslant \operatorname{vol}(\diamond^n|\tilde{S}) = \operatorname{vol}(\diamond^n|S).$$

□

3.3 Свойства разложения единицы

Лемма 3.4. *Для разложения единицы* $S = \{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ *верно* $|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2 = k$*.*

Доказательство. $k = \operatorname{tr} I_k = \operatorname{tr} A_S = |v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2$. □

Лемма 3.5. *Пусть* H *— подпространство пространства* $\mathbb{R}^k$*, а* $S = \{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$ *— разложение единицы в* $\mathbb{R}^k$*. Тогда* $\{P_H v_i\}_1^n$ *— разложение единицы в* H*.*

Доказательство. Отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, «забывающее» последние $n-k$ координат вектора — ортогональный проектор, его композиция с ортогональным проектором P_H — снова ортогональный проектор, тогда вследствие пункта (2) леммы 3.1 $\{P_H v_i\}_1^n \subset H$ — разложение единицы в H. □

Следующее техническое утверждение формулируется в [7] и используется для получения необходимого условия первого порядка для локального максимума функции $F(S) = \mathrm{vol}(\diamond^n|S)$ (см. теорему 5.3 в [7]). Его доказательство, использующее понятие внешней алгебры, можно изучить в [6]. Здесь мы приводим доказательство, опирающееся на элементарные методы линейной алгебры.

Лемма 3.6. *Для произвольного разложения единицы $S = \{v_i\}_1^n$ в $\mathbb{R}^k$*

$$\sqrt{\det A_{S'}} = 1 + \sum_{i=1}^{n} t_i \langle x_i, v_i \rangle + o(|t|), \tag{3.4}$$

где набор векторов $S' = \{v_i'\}_1^n$ получен из S заменой v_i на $v_i' = v_i + t_i x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Преобразуя, по определению имеем

$$\begin{aligned} A_{S'} &= \sum_{i=1}^{n} v_i' \otimes v_i' = \sum_{i=1}^{n} (v_i + t_i x_i) \otimes (v_i + t_i x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i + \sum_{i=1}^{n} t_i (v_i \otimes x_i + x_i \otimes v_i) + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 x_i \otimes x_i = \\ &= M_S + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 x_i \otimes x_i, \end{aligned}$$

где $M_{S'} = I_k + \sum_{i=1}^{n} t_i (v_i \otimes x_i + x_i \otimes v_i)$; здесь использовано то, что S — разложение единицы в $\mathbb{R}^k$. Ясно, что для $i = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \det A_{S'} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_i} \det M_{S'} \Big|_{t=0}.$$

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$. Выберем базис $\{e_j\}_1^k$ в $\mathbb{R}^k$ такой, что e_1 сонаправлен с v_i, тогда в этом базисе $v_i = (|v_i| \ 0 \ \ldots \ 0)^T$, $x_i = (x_i[1] \ \ldots \ x_i[k])^T$, а

$$x_i \otimes v_i = \begin{pmatrix} x_i[1] \\ \vdots \\ x_i[k] \end{pmatrix} (|v_i| \ 0 \ \ldots \ 0) = \begin{pmatrix} x_i[1]|v_i| & \\ \vdots & \Large 0 \\ x_i[k]|v_i| & \end{pmatrix},$$

$$v_i \otimes x_i = (x_i \otimes v_i)^T = \begin{pmatrix} |v_i| x_i[1] & \cdots & |v_i| x_i[n] \\ & & \\ & \Large 0 & \end{pmatrix},$$

$$M_{S'} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + t_i \begin{pmatrix} 2|v_i|x_i[1] & |v_i|x_i[2] & \dots & |v_i|x_i[k] \\ |v_i|x_i[2] & & & \\ \vdots & & \text{\Large 0} & \\ |v_i|x_i[k] & & & \end{pmatrix} + r(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2t_i|v_i|x_i[1]+r_{11} & t_i|v_i|x_i[1]+r_{12} & \dots & t_i|v_i|x_i[k]+r_{1k} \\ t_i|v_i|x_i[2]+r_{21} & 1+r_{22} & \dots & r_{2k} \\ t_i|v_i|x_i[3]+r_{31} & r_{32} & \dots & r_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_i|v_i|x_i[k]+r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1+r_{kk} \end{pmatrix},$$

где $r(t) = r(t_1, \dots, t_n) = \sum\limits_{j \neq i} t_j(x_j \otimes v_j + v_j \otimes x_j)$. Видно, что

$$r(0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_i} r(t) = 0.$$

Тогда, раскладывая детерминант, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \det M_{S'}\big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_i}(M_{11}M_{22}\dots M_{kk} \quad + \quad M_{11}M_{2i_2}\dots M_{ki_k}\operatorname{sgn}(1, i_2, \dots, i_k) + \\ + \quad M_{1i_1}M_{2i_2}\dots M_{ki_k}\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_k))\big|_{t=0},$$

здесь для упрощения записи применяется обозначение суммирования Эйнштейна; во второй сумме предполагается $i_j \neq j$ для $j = \overline{2,k}$, в третьей сумме $i_1 \neq 1$. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(M_{11}\dots M_{kk})\big|_{t=0} = 2|v_i|x_i[1] = 2\langle v_i, x_i\rangle.$$

Покажем, что частные производные двух оставшихся сумм по t_i в точке $t = 0$ нулевые. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(M_{11}M_{2i_2}\dots M_{ki_k})\big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_i}\sum_{l=1}^{n}(1+2t_i|v_i|x_i[1]+r_{11})(1+r_{ll})\prod_{j\neq l} r_{ii}\big|_{t=0} = 0,$$

так как $r_{kj}(0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t_i} r_{kj}(0) = 0$ при $k \neq i$, $j \neq i$; далее, при $i_1 \neq 1$ сумма $M_{1i_1}M_{2i_2}\dots M_{ki_k}$ состоит из слагаемых, в которые входят множители вида $(t_i|v_i|x_{i_1}[l]+r_{1l})(t_i|v_i|x_{i_1}[k]+r_{k1})$, $k, l > 1$, так что их частные производные по t_i точке $t = 0$ зануляются:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(M_{1i_1}M_{2i_2}\dots M_{ki_k})\big|_{t=0} = 0.$$

Тогда получаем $\frac{\partial}{\partial t_i}\det M_{S'}\big|_{t=0} = 2\langle v_i, x_i\rangle$, откуда

$$\det M_{S'} = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} t_i\langle v_i, x_i\rangle + o(t).$$

Применяя далее формулу Тейлора, получаем требуемое. $\square$

3.4 Разложения единицы в квантовой механике

Состояния квантовой системы описываются векторами сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. В обозначениях Дирака вектор состояния обозначается через $|\psi\rangle$ и называется *кет-вектор*. Каждому кет-вектору $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ соответствует *бра-вектор* $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ — ограниченный линейный функционал на $\mathcal{H}$, действующий по правилу $\langle\psi|\,(|\varphi\rangle) = \langle|\psi\rangle, |\varphi\rangle\rangle$.

Скалярное произведение кет-векторов $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$ в пространстве $\mathcal{H}$ обозначается через $\langle\psi|\varphi\rangle$. Также определяют *кет-бра-оператор* $|\psi\rangle\langle\varphi|$, действующий на $\mathcal{H}$ по правилу $(|\psi\rangle\langle\varphi|)|\xi\rangle = \langle\varphi|\xi\rangle \cdot |\psi\rangle$.

Говорят, что набор состояний $|n_i\rangle$ пространства $\mathcal{H}$ образует *полную систему*, если

$$\sum_i |n_i\rangle\langle n_i| = \hat{1},$$

где $\hat{1}$ — тождественный оператор на пространстве состояний $\mathcal{H}$. Заметим, что кет-бра-оператор $|\psi\rangle\langle\varphi|$ — это тензорное произведение $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$. Таким образом, наше определение разложения единицы совпадает с квантово-механическим определением полной системы.

4 Связанные геометрические конструкции

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый центрально-симметричный многогранник. Следуя [7], введём в рассмотрение следующие множества, ассоциированные с M.

Определение. *Пусть $\mathcal{F}(v)$ — множество граней M, инцидентных вершине v (исключая сам M). Звездой $N_M(v)$ вершины v многогранника M будем называть объединение*

$$N_M(v) = \bigcup_{F\in\mathcal{F}(v), F\in\mathcal{F}(-v)} \operatorname{conv}\{F, 0\}.$$

Определение. *Пусть $M = \operatorname{conv}\{\pm v_1, \dots, \pm v_m\}$, причём все $\{\pm v_i\}_1^m$ — попарно различные вершины M. Остатком $R_M(v)$ вершины v многогранника M назовём выпуклую оболочку оставшихся вершин $R_M(v) = \operatorname{conv}\{\pm v_i | v_i \neq \pm v\}$.*

Определение. *Поясом $Q_M(v)$ вершины v многогранника M назовём замыкание $\overline{M \setminus N_M(v)}$.*

Следующая теорема взята из [7].

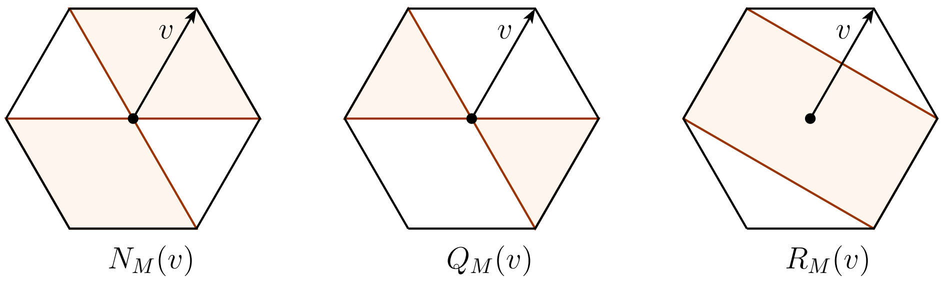

Рис. 3: Звезда, пояс и остаток вершины v правильного шестиугольника

Теорема 4.1. *Пусть локальный максимум функции* (3.1) *достигается на разложении единицы $S = \{v_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^k$, тогда для каждой вершины v многогранника $M = \Diamond^n|S$*

$$|v|^2 = \frac{\operatorname{vol} N_M(v)}{\operatorname{vol} M}.$$

5 Эллипсоиды Джона и Лёвнера

Важными конструкциями в выпуклой геометрии являются эллипсоиды Джона и Лёвнера. В этой части мы приведём необходимые о них сведения. Напомним, что эллипсоид — это образ единичного шара под действием невырожденного линейного преобразования.

Утверждение 5.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклое тело. Тогда существует единственный эллипсоид*

(1) *максимального объёма, содержащийся в K.*

(2) *минимального объёма, содержащий K;*

Эллипсоид, фигурирующий в пункте (1) утверждения 5.1, называется *эллипсоидом Джона*, в (2) — *Лёвнера*; обозначим их $\mathrm{John}(K)$ и $\mathrm{Löw}(K)$ соответственно.

Эти эллипсоиды являются аффинным инвариантом: для всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^k$ и невырожденного аффинного преобразования $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ верно $T\mathrm{John}(K) = \mathrm{John}(TK)$ и $T\mathrm{Löw}(K) = \mathrm{Löw}(TK)$.

Будем говорить, что выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^k$ *находится в положении Джона*, если $\mathrm{John}(K) = B_1^k(0)$, и *в положении Лёвнера*, если $\mathrm{Löw}(K) = B_1^k(0)$.

Теорема Джона даёт необходимые и достаточные условия для того, чтобы единичный шар был эллипсоидом Джона данного выпуклого тела.

Теорема 5.1. (1) *(Джон) Пусть $K \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклое тело и $B_1^k(0) \subset K$. Если K находится в положении Джона, то существуют единичные векторы $\{u_i\}_1^m$, $k \leqslant m$, лежащие на границе K, и положительные числа $\{\lambda_i\}_1^m$ такие, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \otimes u_i = I_k. \tag{5.1}$$

Если при этом тело K центрально-симметрично, то количество таких векторов можно ограничить сверху как $m \leqslant k(k+1)/2$.

(2) *(Болл) Пусть набор единичных векторов $\{u_i\}_1^m \subset \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условию Джона* (5.1)*. Тогда множество $K = \{x \in \mathbb{R}^k | \langle x, u_i \rangle \leqslant 1,\ i = \overline{1,m}\}$ находится в положении Джона.*

Доказательство теоремы можно изучить в [5]. Достаточное условие впервые появляется в оригинальной работе Джона [9], обратную часть доказывает Болл в [2].

Основной результат этой работы опирается на свойства эллипсоида Лёвнера. Их можно получить, зная свойства эллипсоида Джона и используя соображения двойственности, связывающие эти эллипсоиды. Для полноты изложения докажем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Для выпуклого центрально-симметричного тела $K \subset \mathbb{R}^k$ выполнено* $\mathrm{Löw}(K)^\circ = \mathrm{John}(K^\circ)$.

Доказательство. Поскольку $K \subset \mathrm{Löw}(K)$, то в силу свойств поляры эллипсоид $\mathrm{Löw}(K)^\circ$ содержится в K°. С другой стороны, известно, что для всякого эллипсоида $E \subset \mathbb{R}^k$ с центром симметрии в нуле верно $\mathrm{vol}(E)\,\mathrm{vol}(E^\circ) = \mathrm{vol}(B_1^k(0))^2$. Так как по определению эллипсоид Лёвнера — элипсоид максимального объёма, содержащий K, то $\mathrm{Löw}(K)^\circ$ — эллипсоид минимального объёма, содержащийся в K°, то есть эллипсоид Джона $\mathrm{John}(K^\circ)$. □

Следующее утверждение взято из [5] (следствие 11.2).

Утверждение 5.2. *Для выпуклого центрально-симметричного тела $K \subset \mathbb{R}^k$ выполняется включение* $\mathrm{John}(K) \subset K \subset \sqrt{k}\mathrm{John}(K)$.

Из соображений двойственности 5.1 и утверждения 5.2 получаем, что для всякого выпуклого центрально-симметричного тела $K \subset \mathbb{R}^k$ также выполняется включение

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{Löw}(K) \subset K \subset \mathrm{Löw}(K). \tag{5.2}$$

Для доказательства теоремы 1.1 потребуется вспомогательное определение существенной вершины многогранника и следующая лемма.

Определение. *Вершину v выпуклого центрально-симметричного многогранника $M \subset \mathbb{R}^k$ будем называть существенной, если* $\mathrm{Löw}(M) \neq \mathrm{Löw}(R_M(v))$.

Лемма 5.2. *Существенные вершины выпуклого центрально-симметричного многогранника в $\mathbb{R}^k$ лежат на границе его эллипсоида Лёвнера, а их число не превосходит $k(k+1)$.*

Доказательство. Для удобства будем проводить рассуждения для выпуклого центрально-симметричного многогранника $M \subset \mathbb{R}^k$, находящегося в положении Лёвнера.

По лемме 5.1 $\mathrm{John}(M^\circ) = B_1^k(0)$. Пусть $\{v_i\}_1^m$ — набор вершин многогранника M, доставляемый прямой частью (1) теоремы Джона 5.1, применённой к многограннику M°. Тогда векторы $\{v_i\}_1^m$ единичные, удовлетворяют условию Джона (5.1), а $m \leqslant k(k+1)/2$. Добавим к набору вершины $\{-v_i\}_1^n$: получившийся набор векторов S по-прежнему удовлетворяет условию (5.1) и содержит не больше чем $k(k+1)$ точек.

Пусть v — существенная вершина многогранника M. Покажем, что v и $(-v)$ принадлежат этому набору. Удалим вершины v и $(-v)$ и рассмотрим остаток $R_M(v)$, тогда $\mathrm{Löw}(R_M(v)) \neq B_1^k(0)$. Согласно обратной части (2) теоремы Джона 5.1, многогранник $M^\circ = \{x \in \mathbb{R}^k | |\langle x, v_i\rangle| \leqslant 1,\ i = \overline{1,m}\}$ находится в положении Джона. По лемме 5.1 $\mathrm{John}(R_M(v)^\circ) \neq B_1^k(0) = \mathrm{John}(M^\circ)$, откуда немедленно следует, что существенная вершина v необходимо принадлежит набору S, так как иначе выполнилось бы $\mathrm{John}(M^\circ) = \mathrm{John}(R_M(v)^\circ)$. Аналогично, $(-v) \in S$. Таким образом, все существенные вершины лежат на границе эллипсоида Лёвнера $\mathrm{Löw}(M)$, и их число не превосходит $k(k+1)$. □

6 Доказательство основного результата

Для доказательства основного результата этой работы потребуется техническое утверждение, доказательство которого взято из [7] (см. доказательство теоремы 1.5):

Лемма 6.1. *Пусть максимум задачи (3.1) достигается на разложении единицы $S = \{v_i\}_1^n$ в $\mathbb{R}^k$, и при этом $M = \Diamond^n | S$ не является k-мерным кросс-политопом. Выберем вершину $v \in M$ такую, что $|v| < 1$, а $t \in \mathbb{R}$ такой, что $tv \in \partial R_M(v)$. Тогда $0 < t < 1/2$.*

Доказательство. Так как на S достигается максимум объёма проекции кросс-политопа, то все ненулевые векторы v_i, $i = \overline{1, n}$, попарно различны в силу леммы 3.3.

Вершина v такая, что $|v| < 1$, действительно найдётся, так как если для всех $i = \overline{1, n}$ $|v_i| = 1$, то по лемме 3.1 $n = k$, а M — k-мерный кросс-политоп.

Ясно, что $t \in (0, 1)$, так как если $t = 0$, то $|v| = 1$.

Пусть набор $\tilde{S}$ получен из S заменой $v \mapsto 0$, тогда $A_{\tilde{S}} = I_k - v \otimes v$. Пользуясь леммами 3.2 и 2.2 получаем

$$\frac{\operatorname{vol}(\diamond^n|\tilde{S})}{\operatorname{vol} M} \leqslant \sqrt{\det A_{\tilde{S}}} = \sqrt{1 - |v|^2}.$$

Заметим, что $\diamond^n|\tilde{S} = R_M(v)$, и что остаток вершины v в M есть объединение двух множеств, не пересекающихся по внутренностям:

- пояса $Q_M(v)$ вершины v, объём которого по теореме 4.1 равен $\operatorname{vol} M - \operatorname{vol} N_M(v) = (1 - |v|^2) \operatorname{vol} M$;

- пересечения остатка v и звезды v, которое содержит tv; его объём по крайней мере $t \operatorname{vol} N_M(v) = t|v|^2 \operatorname{vol} M$.

Возвращаясь к предыдущему неравенству, получаем

$$(1 - |v|^2) + t|v|^2 \leqslant \sqrt{1 - |v|^2},$$

откуда, выражая t и полагая $x = \sqrt{1 - |v|^2}$,

$$t \leqslant \frac{\sqrt{1 - |v|^2} - (1 - |v|^2)}{|v|^2} = \frac{x - x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 + x}.$$

Замечая, что $x/(1 + x) < 1/2$, получаем требуемое. $\square$

Сформулируем теорему 1.1 в терминах разложения единицы.

Теорема 6.1. *Пусть максимум задачи* (3.1) *при* $k = 4$ *достигается на разложении единицы* $S \in \Omega(n, 4)$*. Тогда ненулевые векторы набора* S *лежат на границе эллипсоида Лёвнера* $\operatorname{Löw}(\diamond^n|S)$*, причём все они существенные, а их число не превосходит 10.*

Доказательство. Обозначим снова $M = \diamond^n|S$.

Если $M = \diamond^4$, то утверждение теоремы тривиально выполнено. Пусть далее проекция кросс-политопа M — не 4-мерный кросс-политоп.

По лемме 3.3 все ненулевые векторы в наборе S попарно различны.

Покажем, что все вершины проекции существенные. Опишем вокруг M эллипсоид Лёвнера $\text{Löw}(M)$, тогда вследствие утверждения 5.2

$$\frac{1}{2}\text{Löw}(M) \subset M \subset \text{Löw}(M).$$

Выберем вершину $v \in S$ и совершим над S преобразование $v \mapsto 0$. Пусть снова $t \in (0,1)$ такой, что $tv \in \partial R_M(v)$, тогда по лемме 6.1 $t < 1/2$, значит, $tv \in \operatorname{int}(1/2\ \text{Löw}(M))$. Следовательно, вектор v существенный. В самом деле, если $\text{Löw}(R_M(v)) = \text{Löw}(M)$, то выполнилось бы $1/2\ \text{Löw}(M) \subset R_M(v)$, что невозможно в силу предыдущего включения. Таким образом, все ненулевые векторы разложения единицы S — существенные вершины M.

По лемме 5.2 все ненулевые векторы из набора S лежат на границе эллипсоида Лёвнера $\text{Löw}(M)$, также получаем, что число вершин многогранника M не превосходит 20. Следовательно, в наборе S не более 10 ненулевых векторов. □

Автор выражает самую сердечную благодарность и бесконечную признательность Г. М. Иванову за проявленную в совместной работе выдержку, настойчивость и неподдельное неравнодушие, а также А. М. Балицкому и Р. Н. Карасёву за вдумчивое чтение черновиков на ранних и поздних этапах написания этой работы и ценные замечания.

Список литературы

[1] Ball, K. Volumes of sections of cubes and related problems. *Geometric aspects of functional analysis* (1989), 251–260.

[2] Ball, K. Ellipsoids of maximal volume in convex bodies. *Geometriae Dedicata 41*, 2 (1992), 241–250.

[3] Barthe, F. On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality. *Inventiones mathematicae 134*, 2 (1998), 335–361.

[4] Barthe, F., and Naor A. Hyperplane projections of the unit ball of ℓ_p^n. *Discrete and Computational Geometry* (May 2018).

[5] Gruber, P. M. *Convex and Discrete Geometry*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[6] Ivanov, G. Maximization of the volume of zonotopes. *ArXiv e-prints* (May 2018).

[7] Ivanov, G. Projections of the cross-polytope and related isotropic measures. *ArXiv e-prints* (Aug 2018).

[8] Ivanov, G. On the volume of the John–Löwner ellipsoid. *Discrete & Computational Geometry* (Feb 2019).

[9] John, F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday* (Jan 1948).

[10] Vaaler, J. A geometric inequality with applications to linear forms. *Pacific Journal of Mathematics 83*, 2 (1979), 543–553.