1. Общая топология

Топология на множестве — необходимая структура для определения непрерывных отображений. Всюду в этой главе под пространством мы понимаем топологическое пространство, а под отображениями — непрерывные отображения между ними.

1.1. **Топологическое пространство и непрерывные отображения.**

Определение 1.1.1. *Пусть X — множество. Топологией на X назовём семейство τ подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим требованиям:*

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

(2) для всякого конечного набора подмножеств $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ верно $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i \in \tau$;

(3) для всякого набора множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \tau$ верно $\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \in \tau$.

Определение 1.1.2. *Пусть τ – топология на X. Если $U \in \tau$, то U называют открытым подмножеством X (в этой топологи). Множество X замкнуто, если его дополнение открыто.*

Поясним то, что написано. С первым пунктом определения **??** всё должно быть более-менее ясно: пустое множество и всё множество будем считать открытыми. Согласно второму пункту, *пересечение* всякого *конечного* семейства открытых множеств снова открыто. Третий же пункт утверждает, что *объединение любого* семейства открытых множеств открыто.

Вспомним школьное определение непрерывности в точке.

Определение 1.1.3. *Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Посмотрим, как это определение обобщить. Для начала, его можно развернуть, используя $\varepsilon - \delta$-формализм:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon \forall x\colon |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Первый возможный шаг — это замена модулей разности на *расстояния* между точками. Напомним, что *метрикой* или расстоянием на множестве X называют функцию $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам:

(1) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) \leqslant 0$;
(2) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(3) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(4) $\forall x, y, z \in X\ \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Множество X с введёной на ней метрикой ρ называют *метрическим пространством* и пишут (X, ρ). Модуль разности $d(x, y) = |x - y|$ удовлетворяет всем четырём аксиомам. В сущности, при доказательстве свойств предела ничем, кроме этих свойств модуля, мы не пользуемся. Значит, о конкретном виде метрики можно не думать, нужны лишь её свойства. Теперь мы можем перенести определение непрерывности в точке с числовых функций на отображения между множествами, на которых введена метрика.

Определение 1.1.4. *Пусть (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства. Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon \forall x\colon \rho(x, x_0) < \delta\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Можно пойти дальше. В метрическом пространстве (X, ρ) определим *δ-окрестность точки x* как множество $U_\delta(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \delta\}$. Определение непрерывности тогда можно записать как

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon \forall x \in U_\delta(x_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)), \tag{3}$$

или, ещё короче,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)). \tag{4}$$

Повторим фокус снова: забудем про внутреннее устройство окрестности. Будем теперь считать, что каждой точке множества приписано семейство множеств, называемых окрестностями этой точки, свойства которых мы потом отдельно выделим. Максимально общо, определение непрерывности в точке теперь выглядит так, если мы предполагаем, что на множествах X и Y введены эти системы окрестностей.

Определение 1.1.5. *Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall U(f(x_0))\ \exists V(x_0)\colon f(V(x_0)) \subset U(f(x_0)). \tag{5}$$

Приведём первые примеры.

(1) На всяком множестве X можно рассматривать топологии $\{\varnothing, X\}$ и 2^X. Последнюю также называют *дискретной*: одноточечные множества открыты и замкнуты и каждую точку можно отделить от всех остальных окрестностью, состоящей из её одной.
(2) На множестве $\{0,1,2\}$ $\{\varnothing, \{1\}, \{0,1,2\}\}$ — топология.
(3) На прямой $X = \mathbb{R}$ открытыми объявляются все интервалы вида (a,b), где $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
(4) На отрезке $I = [0,1]$

Класс топологических пространств вместе с непрерывными отображениями в качестве морфизмов составляют *топологическую категорию $\mathcal{T}op$*. Конечным объектом в этой категории будет одноточечное пространство $\{*\}$, так как в него существует единственное отображение. О суммах и произведениях в этой категории речь пойдёт в следующем параграфе.

Топологии на множестве X можно сравнивать: если τ_1 и τ_2 — топологии на X, то говорят, что τ_1 *сильнее (тоньше)* τ_2 и что τ_2 *слабее (грубее)* τ_1, если $\tau_2 \subset \tau_1$. Если никакое включение не выполняется, то топологии не сравнивают. Так, топология $\{\varnothing, X\}$ — слабейшая топология на X, а 2^X — сильнейшая.

В задании топологий на множестве важны понятия базы и предбазы.

Определение 1.1.6. *Семейство подмножеств $\beta \subset \tau$ пространства X — база топологии τ на X, если всякое открытое множество представимо в виде (произвольного) объединения открытых множеств из β.*

Определение 1.1.7. *Семейство подмножеств $\sigma \subset \tau$ пространства X, конечные пересечения множеств которого образуют базу топологии τ на X, — это предбаза топологии τ.*

Предбаза — это набор множеств, "порождающий" топологию. Пусть имеется семейство σ подмножеств множества X. Мы хотим, чтобы эти множества были открыты в некоторой топологии, причём желательно, чтобы она не содержала "лишних" открытых множеств. Тогда из этого набора нужно получить всевозможные конечные пересечения входящих в него множеств, а то, что получилось, любым образом прообъединять. Эквивалентно, рассмотрим множество $\mathcal{T}(\sigma)$ всех топологий на X, которые содержат в себе семейство σ. Тогда σ — предбаза топологии $\tau_\sigma = \bigcap\limits_{\tau \in \mathcal{T}(\sigma)} \tau$.

Определение 1.1.8. *Точка $x \in X$ — точка прикосновения X, если каждая её окрестность U содержит ещё какую-то точку из X, то есть $(U \setminus X) \cap X \neq \varnothing$.*

Утверждение 1.1. *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои точки прикосновения.*

Доказательство. □

Введения топологии достаточно, чтобы определить *сходимость*.

Определение 1.1.9. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Тогда $x_i \to x$, если для всякой окрестности U точки x найдётся $n \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m \geqslant n$ $x_m \in U$.*

1.2. **Компактность.** Без компактности в топологии абсурд и коррупция.

Определение 1.2.1. *Говорят, что семейство $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$ покрывает (или является покрытием) множества $A \subset X$, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ покрывает A, то $\mathcal{U}'$ — подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$.*

Определение 1.2.2. *Пусть $K \subset X$ таков, что из любого покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$, состоящего из открытых подмножеств пространства X, можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Тогда пространство K называют компактом.*

Утверждение 1.2. *Пусть X компактно, а $f\colon X \to Y$ непрерывно. Тогда $f(X) \subset Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — открытое покрытие $f(X)$, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — открытое покрытие X. Выделим из него открытое подпокрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Значит, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ — открытое подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$. □

Важное для приложений свойство, вытекающее из компактности, — *секвенциальная компактность.* В матанализе мы любим изучать свойства последовательностей.

Определение 1.2.3. *Пространство X секвенциально компактно, если из всякой последовательности элементов из X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Утверждение 1.3. *Компактное пространство секвенциально компактно.*

1.3. **Топологические конструкции.**

Определение 1.3.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, а на Y определена топология. Начальная топология (initial topology) на X относительно отображения f — это слабейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.*

Несложно дать явное задание этой топологии, стоит только вспомнить определение непрерывности: необходимо и достаточно, чтобы были открыты все множества вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y, то есть $\sigma = \{f^{-1}(U) | U — \text{открыто в Y}\}$ — предбаза начальной топологии. Эта терминология не может считаться устоявшейся в русской литературе и не встречается за пределами этого конспекта.

Двойственным понятием будет *конечная топология.*

Определение 1.3.2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, а на X определена топология. Конечная топология (final topology) на Y относительно отображения f — это сильнейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.*

Зададим явно и эту топологию: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X.

Вопрос 1.1. *Что меняется, когда вместо одного отображения $f\colon X \to Y$ рассматривается семейства отображений $f_i\colon X \to Y_i$ и $f_i\colon X_i \to Y$ в определениях начальной и конечной топологии соответственно?*

Приведём классические примеры этих топологий.

Индуцированная топология. Пусть $A \subset X$. Рассмотрим *отображение включения* $i\colon A \hookrightarrow X$, $i(a) = a$. Если на X есть топология, то, чтобы задать её на A, можно потребовать, чтобы все открытые в A множества имели вид $U \cap A$, где U открыто в X. Элементарно проверяется, что такие множества действительно образуют топологию на A и что i оказывается непрерывным. Более того, это слабейшая топология, относительно которой включение i непрерывно.

Фактортопология. Пусть X — топологическое пространство, на котором определено *отношение эквивалентности* $\sim$. Рассмотрим множество $X/\sim$ и каноническую *проекцию* $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \to [x]$. Множество $X/\sim$ можно снабдить топологией, потребовав, чтобы $U \subset X/\sim$ было открыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыт в X.

Полезный пример фактортопологии — *стягивание.* Пусть $A \subset X$, а точки $x, y \in X$ связаны отношением эквивалентности $\sim$ тогда и только тогда, когда $x, y \in A$. Тогда говорят, что X/A получено стягиванием подпространства A в точку.

Топология произведения. Пусть X, Y — топологические пространства. Прямое произведение $X \times Y$ можно наделить естественной топологией, потребовав, чтобы канонические проекции $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ были непрерывны. Аналогично топология определяется для произведения произвольного семейства пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, тогда требуется, чтобы все $\pi_\beta\colon \prod X_\alpha \to X_\beta$ были непрерывны. Она называется *тихоновской.* В случае конечного произведения её задание тривиально: множества вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, образуют базу в $X \times Y$.

Если на $X \times Y$ ввести тихоновскую топологию, это пространство станет категорным произведением пространств X и Y.

Классический результат — теорема Тихонова.

Теорема 1.1. *Если все X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, компактны. Тогда $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ компактно.*

Доказательство. Докажем теорему для произведения двух пространств, тогда то же будет верно для любого конечного произведения.

Утверждение теоремы в случае бесконечного числа множителей эквивалентно аксиоме выбора. □

Несвязное объединение. Теоретико-множественное несвязное объединение определяется следующим образом. Пусть A и B множества, возможно, имеющие ненулевое пересечение. Мы хотим, чтобы в несвязное объединение элементы из пересечения вошли "дважды": как элементы A и как элементы B. Положим $A \sqcup B = \{(a,0),(b,1)|a \in A, b \in B\}$. Вместе с этим определяются вложения $i_A\colon A \hookrightarrow A \sqcup B$, $a \mapsto (a,0)$. Эта конструкция является категорной суммой в категории множеств.

Если X и Y — топологические пространства, то $A \sqcup B$ наделяется естественной топологией и оказывается суммой в топологической категории.

Надстройка Для пространства X определим

$$\Sigma X = X \times I$$

1.4. **Пространства с отмеченной точкой.** Так будем называть пары (X, x_0), где X — топологическое пространство, а $x_0 \in X$. Про непрерывное отображение $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ будем говорить, что оно *сохраняет отмеченную точку*, если $f(x_0) = y_0$. Пространства с отмеченной точкой вместе с отображениями, их сохраняющими, в качестве морфизмов, образуют *пунктированную категорию* $\mathcal{T}op^*$.

В терминах пространств с отмеченной точкой даётся определение фундаментальной группы, высших гомотопических групп и групп гомологий.

Для таких пространств определим *букет*, являющийся суммой в категории $\mathcal{T}op^*$.

Определение 1.4.1. *Пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство пространств с отмеченными точками. Их букетом назовём пространство*

$$\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha / \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}.$$

Иными словами, все пространства приклеили друг к другу по отмеченным точкам: так, букет двух окружностей — восьмёрка.

1.5. **Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.**

Определение 1.5.1. *Гомотопией между отображениями $f, g\colon X \to Y$ называется отображение $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что $H|_{t=0} = f$ и $H|_{t=1} = g$, про сами отображения будем говорить, что они гомотопны и писать $f \simeq g$.*

Утверждение 1.4. *Отношение "быть гомотопным" на пространстве $C(X,Y)$ — отношение эквивалентности.*

Если попытаться придать точный смысл *деформации*, то получится гомотопия. Нарисуем в воображении некоторый объект, будем считать, что он был получен как непрерывный образ $f(X)$ какого-то множества X в Y. "Раскадрируем", как объект меняется с течением времени, получим серию картинок $f_0(X) = f(X), f_1(X), \ldots, f_n(X) \subset Y$. Эту серию можно собрать в одно отображение $H\colon X \times \{0,1,\ldots,n\} \to Y$. Пожелав, чтобы кадры менялись непрерывно, мы определим непрерывное отображение $H\colon X \times I \to Y$.

Факторпространство $C(X,Y)/\simeq$ будем обозначать $[X,Y]$ — это пространство классов гомотопных отображений из X в Y. Топологические пространства вместе с пространствами классов гомотопных отображений образуют категорию $h\mathcal{T}op$.

Определение 1.5.2. *Пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ такие, что $f \circ g = \mathrm{d}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{d}_X$.*

Легко видеть, что это определение изоморфизма в $h\mathcal{T}op$.

Определение 1.5.3. *Пространство X стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке pt.*

1.6. **Клеточные пространства и теорема о клеточной аппроксимации.**

1.7. **Фундаментальная группа.** теорема Брауэра о неподвижной точке, теорема Борсука-Улама

1.8. **Теорема Зейферта-ван Кампена.** свободное произведение
категорный смысл — сохранение пушаутов

1.9. **Фундаментальная группа клеточного пространства. Классификация двумерных поверхностей.**

1.10. **Накрытия.** свойство поднятия пути и гомотопии, универсальное накрытие, классификация накрытий, теорема Нильсена-Шраера

2. Мера и интеграл

Чтобы научиться интегрировать функции, значения которых можно складывать друг с другом и умножать на числа, нужно уметь измерять подмножества их области определения. Это ясно из интуитивного представления об интеграле как о сумме

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{x\in X} f(x)\mu(f^{-1}(x)).$$

2.1. Алгебры, кольца и полукольца.

Пусть X — множество.

Определение 2.1.1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ будем называть алгеброй подмножеств множества X или алгеброй на X, если*

(1) $\varnothing \in \mathcal{A}$;
(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;
(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Как алгебраическая структура алгебра множеств — это ассоциативная алгебра с единицей, где роль единицы играет всё X, умножения — пересечение множеств, а сложения — симметрическая разность $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Вследствие замкнутости относительно операций дополнения и объединения алгебра также замкнута относительно операции пересечения множеств, что элементарно следует из правил де Моргана: $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Из индукционнных соображений тривиально следует замкнутость относительно конечных объединений. Из этого, однако, не следует замкнутость относительно счётных объединений.

Определение 2.1.2. *Если в предыдущем определении требование (3) заменить на*

(1) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$,

то $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X.

Понятие алгебры достаточно для определения измеримого пространства.

Определение 2.1.3. *Пару $(X, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств X, будем называть измеримым пространством. Множества $A \in \mathcal{A}$ назовём $\mathcal{A}$-измеримыми или просто измеримыми, если ясно, какая на X определена алгебра.*

Определение 2.1.4. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, $Y \subset X$. Тогда на Y индуцируется структура измеримого пространства с алгеброй множеств $\mathcal{B} = \{Y \cap A | A \in \mathcal{A}\}$.*

Обычно для определения меры на конкретном измеримом пространстве её не задают на всей алгебре подмножеств X, а на более бедном, но обозримом семействе подмножеств множества X, например, кольце или полукольце множеств.

Определение 2.1.5. *Семейство подмножеств $\mathcal{R} \subset 2^X$ — кольцо подмножеств множества X или кольцо на X, если*

(1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
(2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A\triangle B \in \mathcal{R}$.

Отметим, что $A \setminus B = A\triangle(A \cap B)$, откуда следует, что всякая алгебра является кольцом. Обратное верно тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{A}$.

Утверждение 2.1. *Пусть $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — набор колец подмножеств множества X. Тогда семейство подмножеств $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{\alpha\in I} R_\alpha$ само является кольцом подмножеств множества X.*

Это утверждение обеспечивает существование наименьшего кольца подмножеств множества X, содержащее данное семейство подмножеств $\mathcal{M} \subset 2^X$.

Определение 2.1.6. *Кольцо множеств $\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \bigcap\limits_{\mathcal{M}\subset\mathcal{F}\subset 2^X} \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — кольцо подмножеств множества X, будем называть кольцом подмножеств множества X, порождённым семейством Y.*

Из определения ясно, что данное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X порождает единственное кольцо, которое его содержит.

Определение 2.1.7. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Борелевской σ-алгеброй на X называется алгебра $\mathcal{A}(\tau)$, порождённая открытыми подмножествами пространства X.*

Полукольцо удовлетворяет более слабому условию, чем (2) в определении кольца.

Определение 2.1.8. *Семейство подмножеств $\mathcal{H} \subset 2^X$ — полукольцо подмножеств множества X, если*

(1) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$;
(2) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}\colon \forall\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ A \setminus B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$;

Всякое кольцо, очевидно, является полукольцом.

Приведём примеры семейств множеств.

(1) Семейства $\{\varnothing, X\}$ и 2^X являются σ-алгебрами на X.
(2) Пусть $X = \mathbb{N}$. Семейство конечных подмножеств множества X образует кольцо на X, но не алгебру.
(3) Пусть $X = \mathbb{R}$. Конечные объединения промежутков вида (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ и $[a,b]$ образуют алгебру.
(4) Множество $P_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *блоком*, если найдутся векторы $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $a_i \leqslant b_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, и
$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subset P_{a,b} \subset \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i],$$
и *блочным*, если оно представимо в виде конечного объединения непересекающихся блоков. Семейство блочных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ образует полукольцо.

2.2. **Мера.**

Определение 2.2.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Функцию $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ такую, что $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ для всяких непересекающихся $A, B \in \mathcal{S}$ таких, что $A \cup B \in \mathcal{S}$, назовём конечно-аддитивной, или просто аддитивной.*

Очевидно, что для конечно-аддитивного отображения $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ и конечного набора непересекающихся множеств $\{A_i\}_1^n$ выполнено $f\left(\bigcup A_i\right) = \sum f(A_i)$, что, конечно, в общем случае неверно для счётного набора. Если это равенство имеет место для счётного набора непересекающихся множеств, функция f называется *счётно-аддитивной*.

Определение 2.2.2. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо (σ-кольцо) на X. Конечно-аддитивная мера (счётно-аддитивная) на множестве X — это конечно-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{R} \to (-\infty, +\infty]$ такая, что $\mu(\varnothing) = 0$.*

Определение 2.2.3. *Тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, а μ — счётно-аддитивная мера, заданная на ней, называется пространством с мерой.*

Приведём некоторые примеры.

(1) Рассмотрим кольцо конечных подмножеств множества X. Определим на нём меру как
$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{если } A \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{если } A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$
Эта мера называется *считающей*. Она конечно-аддитивна, но не счётно-аддитивна.
(2) Выберем точку $x \in X$. Определим на X меру как
$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$
Эта мера называется *дираковской*. Она задана на σ-алгебре всех подмножеств множества X и счётно-аддитивна.

(3) Продолжая пример **??**, определим на блоке $P_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ меру как

$$\mu_0(P_{a,b}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Для блочного множества $B = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$, составленного из непересекающихся блоков $P_j \subset \mathbb{R}^m$, положим

$$\mu_0(B) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(P_j).$$

Это конечно-аддитивная функция, заданная на полукольце блочных множеств.
дописать

Определение 2.2.4. *Пусть $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства. Будем говорить, что отображение $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-измеримое, если для всякого $\mathcal{B}$-измеримого множества $B \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(B) \subset X$ $\mathcal{A}$-измерим.*

Смысл определения заключается в том, что если $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то измеримое отображение $f\colon (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ индуцирует меру $\tilde{\mu}$ на Y, определяемую на измеримых множествах $B \subset Y$ как $\tilde{\mu}(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, "\tilde{\mu}"] &
\end{tikzcd}$$

Измеримые пространства в качестве объектов вместе с измеримыми отображениями в качестве морфизмов образуют *категорию измеримых пространств* $\mathcal{M}eas$.

2.3. **Продолжение меры.** Теорема Каратеодори

2.4. **Мера и вероятность.**

2.5. **Вариация.**

2.6. **Произведение мер.**

категорный смысл Пусть $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства. Прямое произведение $X \times Y$ тогда естественно наделяется структурой измеримого пространства, если определить прямое произведение алгебр $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

2.7. **Мера Лебега.**

2.8. **Интеграл.**

Следующая конструкция интеграла числовой функции, видимо, является наиболее общей.

Определение 2.8.1. *Функция $f\colon X \to Y$ простая, если множество множество $f(X)$ конечно.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Рассмотрим неотрицательную простую функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, принимающую на измеримых множествах $\{A_i\}_1^n$, образующих разбиение X, значения $c_i = f(A_i)$.

Определение 2.8.2. *Интегралом неотрицательной простой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ назовём сумму*

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i). \tag{6}$$

Корректность определения, а именно независимость от разбиения пространства X, необходимо проверить

Утверждение 2.2.

Определение 2.8.3. *Пусть*

2.9. **Изотропические меры.**