1 Общая топология

Топология на множестве — необходимая структура для определения непрерывных отображений. Всюду в этой главе под отображениями мы понимаем непрерывные отображения между непрерывными пространствами.

1.1 Топологическое пространство и непрерывные отображения

Определение 1.1.1. *Пусть X — множество. Топологией на X назовём семейство τ подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим требованиям:*

1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;
2. *для всякого конечного набора подмножеств* $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ *верно* $\cap_{i=1}^n X_i \in \tau$;
3. *для всякого набора множеств* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \tau$ *верно* $\cup_{\alpha\in A} X_\alpha \in \tau$.

Определение 1.1.2. *Пусть τ – топология на X. Если $U \in \tau$, то U называют открытым подмножеством X (в этой топологи).*

Поясним то, что написано. С первым пунктом определения **??** всё должно быть более-менее ясно: пустое множество и всё множество будем считать открытыми. Согласно второму пункту, *пересечение* всякого *конечного* семейства открытых множеств снова открыто. Третий же пункт утверждает, что *объединение любого* семейства открытых множеств открыто.

Вспомним школьное определение непрерывности в точке.

Определение 1.1.3. *Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Посмотрим, как это определение обобщить. Для начала, его можно развернуть, используя $\varepsilon - \delta$-формализм:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon \forall x\colon |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Первый возможный шаг — это замена модулей разности на *расстояния* между точками. Напомним, что *метрикой* или расстоянием на множестве X называют функцию $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам:

1. $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) \leqslant 0$;
2. $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X\ \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Множество X с введёной на ней метрикой ρ называют *метрическим пространством* и пишут (X, ρ). Модуль разности $d(x, y) = |x - y|$ удовлетворяет всем четырём аксиомам. В сущности, при доказательстве свойств предела ничем, кроме этих свойств модуля, мы не пользуемся. Значит, о конкретном виде метрики можно не думать, нужны лишь её свойства. Теперь мы можем перенести определение непрерывности в точке с числовых функций на отображения между множествами, на которых введена метрика.

Определение 1.1.4. *Пусть (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства. Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon \forall x\colon \rho(x, x_0) < \delta\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Можно пойти дальше. В метрическом пространстве (X, ρ) определим *δ-окрестность точки x* как множество $U_\delta(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \delta\}$. Определение непрерывности тогда можно записать как

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon \forall x \in U_\delta(x_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)), \tag{3}$$

или, ещё короче,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\colon f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)). \tag{4}$$

Повторим фокус снова: забудем про внутреннее устройство окрестности. Будем теперь считать, что каждой точке множества приписано семейство множеств, называемых окрестностями этой точки, свойства которых мы потом отдельно выделим. Максимально общо, определение непрерывности в точке теперь выглядит так, если мы предполагаем, что на множествах X и Y введены эти системы окрестностей.

Определение 1.1.5. *Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall U(f(x_0))\ \exists V(x_0)\colon f(V(x_0)) \subset U(f(x_0)). \tag{5}$$

1.2 Топологические конструкции

инишал и файнал топологии

индуцированная топология, фактортопология, действие группы на топологическом пространстве, универсальные свойства

тихоновская топология на произведении топологических пространств, теорема тихонова для конечного произведения (для бесконечного тоже ебани)

топологические операции, пространства с отмеченной точкой, букеты

1.3 Гомотопия и гомотопическая эквивалентность

Определение 1.3.1. *Гомотопией между отображениями $f, g\colon X \to Y$ называется отображение $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что $H|_{t=0} = f$ и $H|_{t=1} = g$, про сами отображения будем говорить что они гомотопны.*

Если попытаться придать точный смысл *деформации*, то получится гомотопия. Объяснить это

1.4 Клеточные пространства и теорема о клеточной аппроксимации

1.5 Фундаментальная группа

теорема Брауэра о неподвижной точке, теорема Борсука-Улама

1.6 Теорема Зейферта-ван Кампена

свободное произведение

категорный смысл — сохранение пушаутов

1.7 Фундаментальная группа клеточного пространства. Классификация двумерных поверхностей

1.8 Накрытия

свойство поднятия пути и гомотопии, универсальное накрытие, классификация накрытий, теорема Нильсена-Шраера

2 Мера и интеграл

Чтобы научиться интегрировать функции, значения которых можно складывать друг с другом и умножать на числа, нужно уметь измерять подмножества их области определения. Это ясно из интуитивного представления об интеграле как о сумме

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{x\in X} f(x)\mu(f^{-1}(x)).$$

Чтобы, однако, придать этой сумме конкретный смысл,

2.1 Алгебры, кольца и полукольца

Пусть X — множество.

Определение 2.1.1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ будем называть алгеброй подмножеств множества X или алгеброй на X, если*

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Как алгебраическая структура алгебра множеств — это ассоциативная алгебра с единицей, где роль единицы играет всё X, умножения — пересечение множеств, а сложения — симметрическая разность $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Вследствие замкнутости относительно операций дополнения и объединения алгебра также замкнута относительно операции пересечения множеств, что элементарно следует из правил де Моргана: $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Из индукционнных соображений тривиально следует замкнутость относительно конечных объединений. Из этого, однако, не следует замкнутость относительно счётных объединений.

Определение 2.1.2. *Если в предыдущем определении требование (3) заменить на*

1. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$,

то $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X.

Понятие алгебры достаточно для определения измеримого пространства.

Определение 2.1.3. *Пару $(X, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств X, будем называть измеримым пространством. Множества $A \in \mathcal{A}$ назовём $\mathcal{A}$-измеримыми или просто измеримыми, если ясно, какая на X определена алгебра.*

Определение 2.1.4. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, $Y \subset X$. Тогда на Y индуцируется структура измеримого пространства с алгеброй множеств $\mathcal{B} = \{Y \cap A | A \in \mathcal{A}\}$.*

Обычно для определения меры на конкретном измеримом пространстве её не задают на всей алгебре подмножеств X, а на более бедном, но обозримом семействе подмножеств множества X, например, кольце или полукольце множеств.

Определение 2.1.5. *Семейство подмножеств $\mathcal{R} \subset 2^X$ — кольцо подмножеств множества X или кольцо на X, если*

1. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
2. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{R}$.

Отметим, что $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, откуда следует, что всякая алгебра является кольцом. Обратное верно тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{A}$.

Приведём примеры колец и алгебр множеств.

1. Семейства $\{\varnothing, X\}$ и 2^X являются σ-алгебрами на X.

2. Пусть $X = \mathbb{N}$. Семейство конечных подмножеств множества X образует кольцо на X, но не алгебру.

3. Пусть $X = \mathbb{R}$. Конечные объединения промежутков вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ и $[a, b]$ образует алгебру.

Утверждение 2.1. *Пусть $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — набор колец подмножеств множества X. Тогда семейство подмножеств $\mathcal{R} = \cap_{\alpha \in I} R_\alpha$ само является кольцом подмножеств множества X.*

Это утверждение обеспечивает существование наименьшего кольца подмножеств множества X, содержащее данное семейство подмножеств $\mathcal{M} \subset 2^X$.

Определение 2.1.6. *Кольцо множеств $\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \cap_{\mathcal{M} \subset \mathcal{F} \subset 2^X} \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — кольцо подмножеств множества X, будем называть кольцом подмножеств множества X, порождённым семейством Y.*

Из определения ясно, что данное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X порождает единственное кольцо, которое его содержит.

Определение 2.1.7. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Борелевской σ-алгеброй на X называется алгебра $\mathcal{A}(\tau)$, порождённая открытыми подмножествами пространства X.*

Полукольцо удовлетворяет более слабому условию, чем (2) в определении кольца.

Определение 2.1.8. *Семейство подмножеств $\mathcal{H} \subset 2^X$ — полукольцо подмножеств множества X, если*

1. $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$;

2. $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \colon \forall\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ A \setminus B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$;

Всякое кольцо, очевидно, является полукольцом.

2.2 Мера

Определение 2.2.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое семейство подмножеств X. Функцию $f \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ такую, что $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ для всяких непрескающихся $A, B \in \mathcal{S}$ таких, что $A \cup B \in \mathcal{S}$, назовём конечно-аддитивной, или просто аддитивной.*

Очевидно, что для конечно-аддитивного отображения $f \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ и конечного набора непересекающихся множеств $\{A_i\}_1^n$ выполнено $f(\cup A_i) = \sum f(A_i)$, что, конечно, в общем случае неверно для счётного набора. Если это равенство имеет место для счётного набора непересекающихся множеств, функция f называется *счётно-аддитивной*.

Определение 2.2.2. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо на X. Мера на множестве X — это аддитивная функция $\mu \colon \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$.*

Определение 2.2.3. *Тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где μ — мера на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, — пространство с мерой.*

Примеры мер

Определение 2.2.4. *Пусть $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства. Будем говорить, что $f \colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ — $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-измеримое отображение, если для всякого $\mathcal{B}$-измеримого множества $B \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(B) \subset X$ $\mathcal{A}$-измерим.*

Смысл определения заключается в том, что если $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то измеримое отображение $f \colon (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ индуцирует меру $\tilde{\mu}$ на Y, определяемую на измеримых множествах $B \subset Y$ как $\tilde{\mu}(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, "\tilde{\mu}"] &
\end{tikzcd}$$

Измеримые пространства в качестве объектов вместе с измеримыми отображениями в качестве морфизмов образуют *категорию измеримых пространств $\mathcal{M}\rceil\int$.*

2.3 Продолжение меры

Теорема Каратеодори

2.4 Вариация

2.5 Произведение мер

категорный смысл Пусть $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства. Прямое произведение $X \times Y$ тогда естественно наделяется структурой измеримого пространства, если определить прямое произведение алгебр $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

2.6 Мера Лебега

2.7 Интеграл

Следующая конструкция интеграла числовой функции, видимо, является наиболее общей.

Определение 2.7.1. *Функция $f\colon X \to Y$ простая, если множество множество $f(X)$ конечно.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Рассмотрим неотрицательную простую функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, принимающую на измеримых множествах $\{A_i\}_1^n$, образующих разбиение X, значения $c_i = f(A_i)$.

Определение 2.7.2. *Интегралом неотрицательной простой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ назовём сумму*

$$\sum_X f d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i). \tag{6}$$

Корректность определения, а именно независимость от разбиения пространства X, необходимо проверить

Утверждение 2.2.

2.8 Изотропические меры