Содержание

1. Теория категорий

1.1. **Определение и первые примеры.**

1.2. **Универсальные объекты.**

2. Общая топология

Если вы захотите изучить *непрерывность* в самом общем случае, вы придёте к понятиям *окрестности*, *топологии* и *непрерывного отображения*.

В параграфе 1 мы обсудим, каким образом можно мыслить, чтобы рассмотрение этих вещей выглядело сколько-то естественно. Далее будет рассматриваться топологическая машинерия и её пересечение с категорными явлениями.

Определению топологии в терминах открытых множеств предшествует введение окрестностной топологии. Эквивалентность этих определений доказывается несложно. Однако, классическое определение топологии, хотя и является очень удобным

Всюду в этой главе под пространством мы понимаем топологическое пространство, а под отображениями — непрерывные отображения между ними.

2.1. **Топологическое пространство и непрерывные отображения.** Вспомним школьное определение непрерывности функции в точке, которое приводится в любом учебнике по введению в матанализ.

Определение 2.1. *Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Школьнику оно может быть объяснено, например, так: представим груз, подвешенный на нитке. Если на груз положить сверху дополнительный грузик, незначительный по массе в сравнении с самим грузом, то нитка незаметно для нашего глаза растянется. Мы говорим, что длина нити *непрерывно зависит* от подвешенной массы. Если положить слишком большой грузик, то нитка растянется слишком сильно и порвётся...

Чуть более общо: если значение аргумента меняется *мало*, то и значение функции меняется *мало*. Мы будем танцевать от слова “мало”. В случае числовых функций вполне понятно, что это значит: модуль разности $|x-x_0|$ не слишком большой. На языке ε-δ непрерывность функции f в точке x_0 так и пишется:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\colon \forall x\colon |x-x_0|<\delta\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{1}$$

К модулю разности естественно относиться как к *расстоянию* между двумя точками на прямой. Первый возможный шаг — это попытаться перенести понятие расстояния на произвольное множество.

Определение 2.2. *Метрикой или расстоянием на множестве X называют функцию $\rho\colon X\times X\to[0,+\infty)$, удовлетворяющую аксиомам:*

(1) $\forall x,y\in X\ \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
(2) $\forall x,y\in X\ \rho(x,y)=\rho(y,x)$;
(3) $\forall x,y,z\in X\ \rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Множество X с введёной на ней метрикой ρ называют метрическим пространством и пишут (X,ρ).

Модуль разности $d(x,y)=|x-y|$ удовлетворяет всем четырём аксиомам. В сущности, при доказательстве свойств предела — арифметических и прочих — ничем, кроме этих свойств модуля, мы не пользуемся. Иными словами, о конкретном виде метрики можно не думать, нужны лишь её свойства. Теперь мы можем перенести определение непрерывности в точке с числовых функций на отображения между множествами, на которых введена метрика.

Определение 2.3. *Пусть (X,ρ), (Y,d) — метрические пространства. Функция $f\colon X\to Y$ непрерывна в точке $x_0\in X$, если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\colon \forall x\colon \rho(x,x_0)<\delta\ d(f(x),f(x_0))<\varepsilon. \tag{2}$$

Можно пойти дальше. В метрическом пространстве (X,ρ) определим *δ-окрестность точки x* как множество $U_\delta(x)=\{y\in X\mid \rho(x,y)<\delta\}$, это шар радиуса δ с центром в точке x. Определение непрерывности тогда можно записать как

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\colon \forall x\in U_\delta(x_0)\ f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0)), \tag{3}$$

или, ещё короче,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\colon f(U_\delta(x_0))\subset U_\varepsilon(f(x_0)). \tag{4}$$

Повторим фокус снова: забудем про внутреннее устройство окрестности. Будем теперь считать, что каждой точке x множества X приписано *непустое* семейство $\mathcal{O}(x)$ подмножеств множества X, называемых окрестностями этой точки, свойства которых мы потом отдельно выделим. Наиболее общо, определение непрерывности в точке теперь выглядит так, если мы предполагаем, что на множествах X и Y введены эти системы окрестностей.

Определение 2.4. *Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x \in X$, если*

$$\forall U \in \mathcal{O}(f(x))\ \exists V \in \mathcal{O}(x)\colon f(V) \subset U. \tag{5}$$

Обращу ещё раз внимание, что теперь X и Y — множества не обязательно числовые.

Следующее изложение я украл из книги *Topology and Groupoids*.

Итак, теперь мы понимаем, что для самого общего определения непрерывности и близости необходимо придать точный смысл понятию окрестности. Путь мы уже наметили: у нас есть отображение $x \mapsto \mathcal{O}(x)$, которое мы будем называть *окрестностной топологией*, если оно удовлетворяет некоторым аксиомам. Что мы ожидаем от окрестностей точки? Вот список:

(1) если $U \in \mathcal{O}(x)$, то $x \in U$;
(2) если $U, V \in \mathcal{O}(x)$, то $U \cup V \in \mathcal{O}(x)$;
(3) если $U \in \mathcal{O}(x)$, а $U \subset V$, то $V \in \mathcal{O}(x)$;
(4) если $U \in \mathcal{O}(x)$, то существует такое $V \subset U$, что $V \in \mathcal{O}(y)$ для каждого $y \in V$.

Аксиому (4) можно неформально прочитать так: если U — окрестность точки x, то она также является и окрестностью для точек, достаточно близких к x.

В качестве примера введём такую топологию на $\mathbb{R}$. Будем говорить, что U — окрестность точки x, если существует $\delta > 0$ такой, что $(x-\delta, x+\delta) \subset U$. Несложно убедиться, что такая система окрестностей удовлетворяет приведённым аксиомам.

Определение 2.5. *Будем говорить, что $N \subset X$ открыто, если оно является окрестностью каждой своей точки: $\forall x \in N\ N \in \mathcal{O}(x)$.*

Мы аксиоматически ввели окрестности и через них определили открытые множества. Этот подход, на мой взгляд, намного более мотивирован, чем противоположный, однако, он не очень удобен. Классический путь: мы аксиоматически определим открытые множества.

Определение 2.6. *Пусть X — множество. Топологией на X назовём семейство τ подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим требованиям:*

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;
(2) для всякого конечного набора подмножеств $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ верно $\bigcap\limits_{i=1}^n X_i \in \tau$;
(3) для всякого набора множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \tau$ верно $\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \in \tau$.

Если $U \in \tau$, то U называют открытым подмножеством X (в этой топологии). Множество $V \subset X$ замкнуто, если его дополнение открыто.

Окрестностью точки теперь будем называть любое множество, в которое она входит с некоторым открытым множеством.

Итак, топология на множестве — необходимая структура для определения непрерывных отображений.

Поясним то, что написано. С первым пунктом определения 2.6 всё должно быть более-менее ясно: пустое множество и всё множество будем считать открытыми. Согласно второму пункту, *пересечение* всякого *конечного* семейства открытых множеств снова открыто. Третий же пункт утверждает, что *объединение любого* семейства открытых множеств открыто.

Из определения ясно, что задание на множестве замкнутых подмножеств эквивалентно введению топологии. Для них, как это следует из правил де Моргана, любые *конечные* объединения замкнуты и *произвольные* пересечения замкнуты.

Определение 2.7. *Пусть $U \subset X$ открыто в X, а $x \in U$. Тогда U — окрестность точки x.*

Покажем, что система аксиом окрестностей точки эквивалентна заданию топологии на множестве. (где-то здесь должно быть доказательство)

Приведём первые примеры.

(1) На всяком множестве X можно рассматривать топологии $\{\varnothing, X\}$ и 2^X. Последнюю также называют *дискретной*: одноточечные множества открыты и замкнуты и каждую точку можно отделить от всех остальных окрестностью, состоящей из её одной.
(2) На непустом множестве X $\{\varnothing, \{x\}, X\}$ — топология.
(3) На прямой $X = \mathbb{R}$ открытыми объявляются все не более чем счёные объединения интервалов вида (a, b), где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. На эту топологию будем ссылаться как на обычную или стандартную.
(4) На $\mathbb{R}$ можно ввести и другую топологию: замкнутыми пусть будут все конечные множества и X.
(5) На отрезке $I = [0, 1]$ открытыми объявляются пересечения открытых в стандартной топологии на $\mathbb{R}$ множеств с I.

Определение 2.8. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого в Y множества U открыт в X.*

Эквивалентно, отображение непрерывно, если прообраз замкнутого множества замкнут.

Утверждение 2.1. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть f непрерывна, а $x \in X$. Рассмотрим произвольную окрестность $V \subset Y$ точки $f(x)$, тогда $U = f^{-1}(V)$ открыто и $x \in U$.

Достаточность. Пусть f непрерывна в каждой точке $x \in X$. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$. Для каждого $y \in V$ множество V — его окрестность, а для каждого $x \in X$ такого, что $f(x) \in V$, найдётся его окрестность $U(x)$ такая, что $f(U(x)) \subset V$, значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Имеем:

$$\bigcup_{x\in X, f(x)\in V} U(x) \subset f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x\in X, f(x)\in V} \{x\} \subset \bigcup_{x\in X, f(x)\in V} U(x).$$

Таким образом, прообраз $f^{-1}(V) = \bigcup_{x\in X, f(x)\in V} U(x)$ открыт как объединение открытых множеств. □

Класс топологических пространств вместе с непрерывными отображениями в качестве морфизмов составляют *топологическую категорию* $\mathcal{T}op$. Конечным объектом в этой категории будет одноточечное пространство $\{*\}$, так как в него существует единственное отображение. О суммах и произведениях в этой категории речь пойдёт в следующем параграфе.

Изоморфизмы в категории $\mathcal{T}op$ называют *гомеоморфизмами*. Так, непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, если оно биективно и обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно. Если для пространств X и Y найдётся гомеоморфизм $f\colon X \to Y$, то они называются *гомеоморфными*, пишут $X \equiv Y$. В топологии пространства изучаются с точностью до гомеоморфизма. Так, единичный евклидов шар $D^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ (он же n-мерный диск) гомеоморфен n-мерному кубу $[-1; 1]^n$. Вообще говоря, всякое односвязное тело в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно n-мерному диску.

Одной биективности недостаточно для гомеоморфности: так, например, если $S^1 = \{e^{2\pi it} | \varphi \in [0, 1)\}$, то $e^{2\pi it} \mapsto t$ не является гомеоморфизмом, что и естественно: нельзя превратить окружность в интервал, нигде её не разорвав.

Топологии на множестве X можно сравнивать: если τ_1 и τ_2 — топологии на X, то говорят, что τ_1 *сильнее (тоньше)* τ_2 и что τ_2 *слабее (грубее)* τ_1, если $\tau_2 \subset \tau_1$. Если никакое включение не выполняется, то топологии не сравнивают. Так, топология $\{\varnothing, X\}$ — слабейшая топология на X, а 2^X — сильнейшая.

В задании топологий на множестве важны понятия базы и предбазы.

Определение 2.9. *Семейство подмножеств $\beta \subset \tau$ пространства X — база топологии τ на X, если всякое открытое множество представимо в виде (произвольного) объединения открытых множеств из β.*

Определение 2.10. *Семейство подмножеств $\sigma \subset \tau$ пространства X, конечные пересечения множеств которого образуют базу топологии τ на X, — это предбаза топологии τ.*

Предбаза — это набор множеств, “порождающий” топологию. Пусть имеется семейство σ подмножеств множества X. Мы хотим, чтобы эти множества были открыты в некоторой топологии, причём желательно, чтобы она не содержала “лишних” открытых множеств. Тогда из этого набора нужно получить всевозможные конечные пересечения входящих в него множеств, а то, что получилось, любым образом прообъединять. Эквивалентно, рассмотрим множество $\mathcal{T}(\sigma)$ всех топологий на X, которые содержат в себе семейство σ. Тогда σ — предбаза топологии $\tau_\sigma = \bigcap\limits_{\tau \in \mathcal{T}(\sigma)} \tau$.

Определение 2.11. *Точка $x \in X$ — точка прикосновения X, если каждая её окрестность U содержит ещё какую-то точку из X, то есть $(U \setminus X) \cap X \neq \varnothing$.*

Утверждение 2.2. *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои точки прикосновения.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть A замкнуто, а $x \in X$ — точка прикосновения A. Предположим, $x \in X \setminus A$. По определению любая окрестность U точки x содержит точку, отличную от x и входящую в A. Поскольку $X \setminus A$ открыто и является окрестностью точки x, оно пересекает A. Противоречие.

Достаточность. Пусть A содержит все свои точки прикосновения. Возьмём $x \in X \setminus A$, тогда, раз x — не точка прикосновения A, найдётся её окрестность $U(x)$ такая, что $A \cap U(x) = \varnothing$. Имеем $\bigcap_{x \in X \setminus A} U(x) \subset X \setminus A \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} \{x\} \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} U(x)$. Значит, $X \setminus A = \bigcap_{x \in X \setminus A} U(x)$. □

2.2. **Отделимость.**

Определение 2.12. *Пространство X хаусдорфово, если для всякой пары точек $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся их окрестности U,V такие, что $U \cap V = \varnothing$.*

2.3. **Сходимость, последовательности и направленности.** Введения топологии достаточно, чтобы определить *сходимость*.

Определение 2.13. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда $x_i \to x$, если для всякой окрестности U точки x найдётся $n \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m \geqslant n$ $x_m \in U$.*

2.4. **Компактность.** Без компактности в топологии абсурд и коррупция.

Определение 2.14. *Говорят, что семейство $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$ покрывает (или является покрытием) множества $A \subset X$, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ покрывает A, то $\mathcal{U}'$ — подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$.*

Определение 2.15. *Пусть $K \subset X$ таков, что из любого покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$, состоящего из открытых подмножеств пространства X, можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Тогда пространство K называют компактом.*

Утверждение 2.3. *Пусть X компактно, а $f\colon X \to Y$ непрерывно. Тогда $f(X) \subset Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — открытое покрытие $f(X)$, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — открытое покрытие X. Выделим из него открытое подпокрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Значит, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ — открытое подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$. □

Утверждение 2.4. *Пусть X компактно, а $A \subset X$ замкнуто. Тогда A — компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — открытое покрытие пространства A, тогда $V_i = U_i \cap A$ для какого-то открытого в X множества U_i, $i = \overline{1, n}$. Для X $\mathcal{U} = \{X \setminus A\} \cup \{U_i\}$ — открытое покрытие. Выделим из него конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = (X \setminus A) \cup \{U_1, \ldots, U_n\}$, значит, $\mathcal{V}' = \{V_1, \ldots, V_n\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathcal{V}$. □

Следующее вспомогательное утверждение всплывает, например, в лемме Гейне-Бореля, классифицирующей все компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 2.5. *Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут.*

Важное для приложений свойство, вытекающее из компактности, — *секвенциальная компактность*. В матанализе мы любим изучать свойства последовательностей.

Определение 2.16. *Пространство X секвенциально компактно, если из всякой последовательности элементов из X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Утверждение 2.6. *Компактное пространство секвенциально компактно.*

3. Операции и конструкции

Определение 3.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, а на Y определена топология. Начальная топология (initial topology) на X относительно отображения f — это слабейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.*

Несложно дать явное задание этой топологии, стоит только вспомнить определение непрерывности: необходимо и достаточно, чтобы были открыты все множества вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y, то есть $\sigma = \{f^{-1}(U) | U \text{ — открыто в Y}\}$ — предбаза начальной топологии. Эта терминология не может считаться устоявшейся в русской литературе и не встречается за пределами этого конспекта.

Двойственным понятием будет *финальная топология.*

Определение 3.2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, а на X определена топология. Финальная топология (final topology) на Y относительно отображения f — это сильнейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.*

Зададим явно и эту топологию: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X.

Вопрос 3.1. *Что меняется, когда вместо одного отображения $f\colon X \to Y$ рассматривается семейства отображений $f_i\colon X \to Y_i$ и $f_i\colon X_i \to Y$ в определениях начальной и финальной топологии соответственно?*

Приведём классические примеры этих топологий.

Индуцированная топология. Пусть $A \subset X$. Рассмотрим *отображение включения* $i\colon A \hookrightarrow X$, $i(a) = a$. Если на X есть топология, то, чтобы задать её на A, можно потребовать, чтобы все открытые в A множества имели вид $U \cap A$, где U открыто в X. Элементарно проверяется, что такие множества действительно образуют топологию на A и что i оказывается непрерывным. Более того, это слабейшая топология, относительно которой включение i непрерывно.

Фактортопология. Пусть X — топологическое пространство, на котором определено *отношение эквивалентности* $\sim$. Рассмотрим множество $X/\sim$ и каноническую *проекцию* $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \to [x]$. Множество $X/\sim$ можно снабдить топологией, потребовав, чтобы $U \subset X/\sim$ было открыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыт в X.

Полезный пример фактортопологии — *стягивание.* Пусть $A \subset X$, а точки $x, y \in X$ связаны отношением эквивалентности $\sim$ тогда и только тогда, когда $x, y \in A$. Тогда говорят, что X/A получено стягиванием подпространства A в точку.

Топология произведения. Пусть X, Y — топологические пространства. Прямое произведение $X \times Y$ можно наделить естественной топологией, потребовав, чтобы канонические проекции $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ были непрерывны. Аналогично топология определяется для произведения произвольного семейства пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, тогда требуется, чтобы все $\pi_\beta\colon \prod X_\alpha \to X_\beta$ были непрерывны. Она называется *тихоновской.* В случае конечного произведения её задание тривиально: множества вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, образуют базу в $X \times Y$.

Если на $X \times Y$ ввести тихоновскую топологию, это пространство станет категорным произведением пространств X и Y.

Классический результат — теорема Тихонова.

Теорема 3.1. *Если все X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, компактны. Тогда $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ компактно.*

Доказательство. Докажем теорему для произведения двух пространств, тогда то же будет верно для любого конечного произведения.

Утверждение теоремы в случае бесконечного числа множителей эквивалентно аксиоме выбора. □

Несвязное объединение. Теоретико-множественное несвязное объединение определяется следующим образом. Пусть A и B множества, возможно, имеющие ненулевое пересечение. Мы хотим, чтобы в несвязное объединение элементы из пересечения вошли “дважды”: как элементы A и как элементы B. Положим $A \sqcup B = \{(a, 0), (b, 1) | a \in A, b \in B\}$. Вместе с этим определяются вложения $i_A\colon A \hookrightarrow A \sqcup B$, $a \mapsto (a, 0)$. Эта конструкция является категорной суммой в категории множеств.

Если X и Y — топологические пространства, то $A \sqcup B$ наделяется естественной топологией и оказывается суммой в топологической категории.

Цилиндр. Пусть X — пространство. *Цилиндром над* X называют произведение $X \times I$.

Конус. Если стянуть цилиндр над X по верхнему основанию, то получится *конус над* X:

$$CX = (X \times I)/(X \times \{1\}).$$

Надстройка. Если же у конуса над X нижнее основание, то получится *надстройка над* X:

$$\Sigma X = CX/(X \times \{0\}).$$

Эквивалентно, надстройка над X — это два конуса над X, склеенные по основаниям.

Утверждение 3.1. *(экспоненциальный закон) Имеет место естественная биекция* $\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ *(в других обозначениях* $\Phi\colon Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$*), ставящее в соответствие отображению* $f\colon X \times Y \to Z$ *отображение* $\Phi f\colon X \to C(Y, Z)$*, действующее по правилу* $(\Phi f)(x)(y) = f(x, y)$*. Если* X *хаусдорфово, а* Y *хаусдорфово и локально компактно, то* Φ *— гомеоморфизм.*

Утверждение 3.2. *Пусть* X *хаусдорфово. Тогда имеет место естественный по* X *и* Y *изоморфизм* $C(\sigma X, Y) \to C(X, \Omega Y)$*.*

Доказательство. Согласно экспоненциальному закону, имеет место изоморфизм

$$C(X \times I, Y) \to C(X, C(I, X)).$$

□

4. Гомотопическая топология

4.1. **Пространства с отмеченной точкой.** Так будем называть пары (X, x_0), где X — топологическое пространство, а $x_0 \in X$. Про непрерывное отображение $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ будем говорить, что оно *сохраняет отмеченную точку*, если $f(x_0) = y_0$. Пространства с отмеченной точкой вместе с отображениями, их сохраняющими, в качестве морфизмов, образуют *пунктированную категорию* $\mathcal{T}op^*$.

В терминах пространств с отмеченной точкой даётся определение фундаментальной группы, высших гомотопических групп и групп гомологий. Для их нужд предыдущие конструкции прокачаем до их аналогов с отмеченными точками.

Надстройка. Для пространства X определим

$$\Sigma X = X \times I$$

Определим *букет*, являющийся суммой в категории $\mathcal{T}op^*$.

Определение 4.1. *Пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство пространств с отмеченными точками. Их букетом назовём пространство*

$$\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha / \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}.$$

Иными словами, все пространства приклеили друг к другу по отмеченным точкам: так, букет двух окружностей — восьмёрка.

Произведение в $\mathcal{T}op^*$ менее хитрое: отмеченной точкой в п

4.2. **Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.** Если попытаться придать точный смысл *деформации*, то получится гомотопия. Нарисуем в воображении некоторый объект, будем считать, что он был получен как непрерывный образ $f(X)$ какого-то множества X в Y. "Раскадрируем" то, как объект деформируется с течением времени, получим серию картинок $f_0(X) = f(X), f_1(X), \ldots, f_n(X) \subset Y$. Эту серию можно собрать в одно отображение $H\colon X \times \{0, 1, \ldots, n\} \to Y$, непрерывное по первой переменной. Пожелав, чтобы кадры менялись непрерывно, мы определим отображение $H\colon X \times I \to Y$ такое, что на каждом шаге $t \in I$ имеем некоторую непрерывную функцию $f_t(x) = H(x, t)$, причём $f_0 = f$, $f_1 = g$.

Изучение пространств и отображений с точностью до гомотопии важно, потому что все используемые функторы из топологической категории не чувствительны к гомотопиям. Прежде чем давать определения, докажем полезное и несложное утверждение, на которое будет удобно сослаться в дальнейшем.

Лемма 4.1 (о склейке)**.** *Пусть пространство X представлено конечным объединенем замкнутых множеств X_i, и заданы непрерывные отображения $f_i\colon X_i \to Y$, причём если $X_{ij} = X_i \cap X_j$ непусто, то $f_i|_{X_{ij}} = f_j|_{X_{ij}}$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $f|_{X_i} = f_i$.*

Доказательство. Искомое отображение так и задаётся: $f(x) = f_i(x)$, если $x \in X_i$, и в силу условия леммы корректно определено. Покажем, что оно непрерывно. Пусть $M \subset Y$ замкнут, тогда

$$f^{-1}(M) = \bigcap_i X_i \cap f^{-1}(M) = \bigcap_i f_i^{-1}(M).$$

Прообраз замкнутого множества замкнут как конечное объединение замкнутых множеств. □

Определение 4.2. *Гомотопией между отображениями $f, g\colon X \to Y$ называется отображение $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что $H|_{t=0} = f$ и $H|_{t=1} = g$, про сами отображения будем говорить, что они гомотопны и писать $H\colon f \simeq g$ или просто $f \simeq g$.*

Утверждение 4.1. *Отношение "быть гомотопным" на пространстве $C(X, Y)$ — отношение эквивалентности.*

Доказательство. **Рефлексивность.** Отображение $f \in C(X, Y)$ гомотопно самому себе через гомотопию $H(x, t) = f(x)$.

Симметричность. Если $H\colon f \simeq g$ для $f, g \in C(X, Y)$, то $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1-t)$ — гомотопия между g и f.

Транзитивность. Пусть $F\colon f \simeq g$ и $G\colon g \simeq h$ для $f, g, h \in C(X, Y)$. Представим себе две копии цилиндра $X \times I$: с нижнего основания первого цилиндра бьёт f, с его верхнего основания и с нижнего основания второго цилиндра бьёт g, а h определена на верхнем основании второго цилиндра. Чтобы определить гомотопию $H\colon f \simeq h$, "склеим" эти цилиндры по тем основаниям, на которых определено g и сожмём полученный цилиндр в два раза. На нём можно задать отображение

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), 0 \leqslant t < 1/2, \\ G(x, 2t-1), 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

являющееся искомой гомотопией. Гомотопия H непрерывна в силу леммы о склейке. □

Факторпространство $C(X,Y)/\simeq$ будем обозначать $[X,Y]$ — это пространство классов гомотопных отображений из X в Y. Гомотопический класс отображения $f \in C(X,Y)$ обозначим $[f] \in [X,Y]$. Топологические пространства вместе с пространствами классов гомотопных отображений образуют категорию $h\mathcal{T}op$.

Утверждение 4.2. *Пусть $f, g\colon X \to Y$, причём $f \simeq g$, а $f', g'\colon Y \to Z$, причём $f' \simeq g'$. Тогда $f' \circ f \simeq g' \circ g$.*

Определение 4.3. *Пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ такие, что $f \circ g = id_Y$ и $g \circ f = id_X$. Отображения f и g называют гомотопическими эквивалентностями.*

Легко видеть, что это определение изоморфизма в $h\mathcal{T}op$.

Простейший пример — $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$. Построим гомотопию между вложением сферы $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $p\colon \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$, $x \to x/||x||$, положим

$$H(x,t) = tx + (1-t)x/||x||.$$

Определение 4.4. *Пространство X стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке pt.*

Примеры стягиваемых пространств: I, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty$, S^∞.

По определению для доказательства стягиваемости нужно привести отображения $f\colon X \to pt$ и $g\colon pt \to X$ такие, что $f \circ g\colon pt \to pt \simeq \mathrm{id}_{pt}$ и $g \circ f\colon X \to X \simeq \mathrm{id}_X$. Отображение $X \to pt$ единственно, а первая гомотопность тривиально выполнена, поэтому нужно убедиться в том, что постоянное отображение $X \to X$ гомотопно тождественному.

Покажем, что $\mathbb{R}^n$ стягиваемо. Пусть $f(x) = 0$. Тогда искомая гомотопия — это просто $H(x,t) = tx$.

4.2.1. *Свойство продолжения гомотопии.* Обсудим то, что в англоязычной литературе называется homotopy extension property (HEP).

Определение 4.5. *Отображение $r\colon X \to X$ — ретракция, если $r^2 = r$.*

Ретракция — это топологический аналог проектора. Эквивалентно, r — ретракция, если для $A = r(X)$ верно $r|_A = \mathrm{id}_A$. Множество A называется *ретрактом*. Если ретракция $r\colon X \to X$ гомотопна id_X, то она называется *деформационным ретрактом*.

Вместе с пространствами с отмеченными точками будем также рассматривать *пары* (X, A), где $A \subset X$. *Отображение пар* $f\colon (X,A) \to (Y,A)$ — это такое отображение, что $f(A) \subset B$. Ясно, что пары пространств вместе с отображениями пар образуют категорию, и что пространства с отмеченными точками — их частный случай.

Будем говорить, что пара (X,A) удовлетворяет *свойству продолжения гомотопии* (или *является парой Борсука*), если для любого отображения $f\colon X \to Y$ и гомотопии $F\colon A \times I \to Y$ таких, что $F|_{A\times\{0\}} = f|_A$, существует гомотопия $\hat{F}\colon X \times I \to Y$ такая, что $\hat{F}|_{X\times\{0\}} = f$ и $\hat{F}|_{A\times I} = F$. Иными словами, (X,A) обладает HEP, если отображение $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ можно продолжить до отображения $X \times I \to Y$. Вложение $A \hookrightarrow X$, если (X,A) — пара Борсука, называют *корасслоением*.

Пусть X — это основание стакана, а A — граница этого основания, тогда (X,A) — пара Борсука, если отображение из всего стакана можно продолжить на весь цилиндр.

4.3. **Клеточные пространства и теорема о клеточной аппроксимации.**

Утверждение 4.3. *Пусть* X *— клеточное пространство, а клеточное подпространство* $A \subset X$ *стягиваемо. Тогда* $X \simeq X/A$.

4.4. **Фундаментальная группа.**

Определение 4.6. *Путь в пространстве X — это непрерывное отображение $I \to X$.*

В пространстве с отмеченной точкой (X, x_0) все пути начинаются в точке x_0. Если путь $f\colon I \to X$ заканчивается в точке $x = f(1)$, а путь $g\colon I \to X$ в ней начинается, то есть $g(0) = x$, то можно определить *произведение путей* $fg\colon I \to X$ как $(fg)(t) = f(2t)$ при $0 \leqslant t < 1/2$ и $(fg)(t) = g(2t-1)$ при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Произведение корректно определено в силу леммы о склейке.

Можно убедиться, что такое умножение ассоциативно, то есть если определено произведение $(fg)h$, то определено и $f(gh)$, причём $(fg)h = f(gh)$.

Определение 4.7. *Петля в пространстве X — это путь $f\colon I \to X$ такой, что $f(0) = f(1)$.*

Петля — то же, что и непрерывное отображение окружности $S^1 \to X$.

Пространство петель $C(S^1, X)$ в X будем обозначать ΩX, если (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой, то $\Omega(X, x_0)$. В последнем все петли проходят через точку x_0. Постоянную петлю будем обозначать $\varepsilon(t) = x_0$.

На $\Omega(X, x_0)$ можно ввести умножение так, как мы это сделали для двух путей, один из которых заканчиватся, а второй начинается в той же точке: если $\varphi, \psi\colon I \to X$ — петли, то произведение петель определяется как

$$(\varphi\psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t), 0 \leqslant t < 1/2 \\ \psi(2t-1), 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Обратная петля $\overline{\varphi}$ к петле φ вводится как $\overline{\varphi} = \varphi(1-t)$. Эти операции определяют структуру группы на гомотопических классах $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$. Чтобы убедиться в этом, проверим, что умножение и взятие обратного элемента корректно определено на классах эквивалентности, то есть

(1) если $\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$, то $\varphi\psi \simeq \varphi'\psi'$;
(2) если $\varphi \simeq \varphi'$, то $\overline{\varphi} \simeq \overline{\varphi'}$;
(3) для всякой петли φ верно $\varphi\overline{\varphi} \simeq \overline{\varphi}\varphi \simeq \varepsilon$;
(4) для всякой петли φ верно $\varepsilon\varphi \simeq \varphi\varepsilon$.

Итак, мы доказали, что $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$ — группа. Эта группа называется *фундаментальной группой пространства* (X, x_0) и обозначается $\pi_1(X, x_0)$ или просто $\pi_1(X)$, если ясно, о какой отмеченной точке идёт речь.

Утверждение 4.4. *Если X линейно связно, то для $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ для всяких $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. □

Утверждение 4.5. *Фундаментальная группа π_1 также является гомотопически инвариантным ковариантным функтором $\mathcal{T}op \to \mathcal{G}r$.*

Доказательство. Каждому отображению $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ставится в соответствие гомоморфизм групп $\pi_1(f) = f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $f_*([\varphi]) = [f \circ \varphi]$. Убедимся. что это действительно гомоморфизм. Пусть $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X)$, тогда

$$f^*([\varphi][\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f^*([\varphi])f^*([\psi]).$$

Несложно убедиться, что это в самом деле функтор. В самом деле, пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — отображения, сохраняющие отмеченные точки, тогда

$$(g \circ f)^*([\varphi]) = [(g \circ f) \circ \varphi] = [g \circ (f \circ \varphi)] = g^*([f \circ \varphi]) = (g^* \circ f^\circ)([\varphi]).$$

Гомотопическая инвариантность означает, что если $f, g\colon X \to Y$ и $f \simeq g$, то $f^* = g^*$:

$$f^*([\varphi]) = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g^*([\varphi]).$$

□

Следствие 4.1. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f^*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ — изоморфизм.*

Следствие 4.2. *Если X стягиваемо, то $\pi_1(X) = 0$.*

Так, фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = 0$

Утверждение 4.6. *$\pi_1(S^n) = 0$ при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Следствие теоремы о клеточной аппроксимации. □

Теорема 4.1. *$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. □

Перейдём к классическим результатам, которые элементарно получаются из свойств фундаментальной группы.

Теорема 4.2 (Брауэр, 1909)**.** *Если $f\colon D^n \to D^n$ непрерывно, то существует $x \in D^n$ такой, что $x = f(x)$.*

Доказательство. □

Теорема 4.3. *(Борсук, Улам,)*

Теорема 4.4. *(основная теорема алгебры)*

Обсудим ещё некоторые свойства фундаментальной группы как функтора.

4.5. **Топологические группы, H-группы и H-когруппы.** В H-группах умножение определено с точностью до гомотопии

Определение 4.8. *Будем говорить, что топологическое пространство X — H-группа, если определены отображения $\mu\colon X \times X \to X$, $i\colon X \to X$ и постоянное отображение $e\colon X \to X$ такие, что*

4.6. **Теорема Зейферта-ван Кампена.** свободное произведение
категорный смысл — сохранение пушаутов

4.7. **Фундаментальная группа клеточного пространства. Классификация двумерных поверхностей.**

4.8. **Накрытия.** свойство поднятия пути и гомотопии, универсальное накрытие, классификация накрытий, теорема Нильсена-Шраера

5. Дифференциальная геометрия

5.1. Многообразия и гладкие отображения.

Определение 5.1. *Про хаусдорфово топологическое пространство T будем говорить, что оно локально евклидово, или что оно является топологическим многоообразием размерности* $\dim T = n$, *если существует его покрытие открытыми множествами $\{U_\alpha\}$ и набор гомеоморфизмов $\phi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$.*

Набор пар $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ называется *атласом* многообразия T, множества U_α — *картами*, а отображения ϕ_α — *координатными гомеоморфизмами*. Отображения $x^i_\alpha = \pi_i \circ \phi_\alpha$ называют *локальными координатами* на карте U_α.

Анализ на многообразиях начинается с определения гладкости. Про атлас $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ на топологическом многообразии T будем говорить, что он принадлежит классу гладкости C^k, если для всякой пары карт U_α, U_β таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, *функции перехода* $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ — гладкие функции класса C^k для всех α, β. Если функции перехода бесконечно гладкие, то будем говорить, что атлас гладкий.

На множестве атласов класса C^k на многообразии T можно ввести отношение эквивалентности: мы не будем различать два атласа, если их объединение — снова атлас того же класса гладкости. Класс эквивалентности гладкого атласа будем называть *гладкой структурой* на топологическом многообразии M.

Мы готовы дать главное определение этой главы.

Определение 5.2. *Топологическое пространство M называется гладким многообразием размерности* $\dim M = n$ *гладкости C^k, если оно хаусдорфово, обладает счётной локальной базой и является топологическим многообразием размерности n, наделённым гладкой структурой класса C^k.*

Требование существования счётной локальной базы пригодится в дальнейшем, когда мы будем определять разбиение единицы и интегралы на многообразии, это свойство окажется необходимым.

Определение 5.3. *Отображение $F\colon M \to R^m$ гладкое, если все отображения $F \circ \phi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ гладкие.*

Важный частный случай — гладкие функции $f\colon M \to \mathbb{R}$. Их множество образует алгебру $C^\infty(M)$.

Это определение естественно переносится на случай отображений между многообразиями.

Определение 5.4. *Отображение $F\colon M \to N$ гладкое, если для всяких карт (U, ϕ) на M и (V, ψ) на N отображение $\psi \circ F \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ гладкое.*

Определим частные производные функции $f \in C^\infty(M)$ в точке $p \in M$ как

$$\frac{\partial f}{dx^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)). \tag{7}$$

Семейство гладких многообразий вместе с гладкими отображениями образует категорию гладких многообразий $\mathcal{M}an$.

5.2. Касательное и кокасательное пространство.

Пусть $p \in M$. Определим *дифференцирование* гладкой функции в точке p как линейное отображение $X : C^\infty \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница: для любых функций $f, g \in C^\infty$ верно

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Множество дифференцирований в точке p будем обозначать T_pM. Введём на нём сложение и умножение на скаляр по правилам

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2)(f) &= X_1(f) + X_2(f), \\ (\alpha X)(f) &= \alpha X(f). \end{aligned}$$

Таким образом, множество T_pM — линейное пространство. Его называют *касательным пространством* к многообразию M в точке p. Двойственное к нему пространство $(T_pM)^*$ называется *кокасательным пространством* в точке p и обозначается T_p^*M.

Сформулируем как отдельную лемму несложные свойства дифференцирований.

Лемма 5.1. *Пусть $X \in T_pM$.*

(1) Если $f = \mathrm{const}$, то $Xf = 0$.
(2) Если $f(p) = g(p) = 0$, то $X(fg) = 0$.

Выясним, как выклядит касательное пространство к точке $p \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p\mathbb{R}^n$ для $i \in \overline{0, n}$, то любая линейная комбинация $X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ лежит в $T_p\mathbb{R}^n$. Мы построили оператор $v\colon \mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$, $X = (X^1, \ldots, X^n) \mapsto X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Покажем, что он является изоморфизмом. В самом деле, v инъективен, так как если $v(X) = 0$, то для всякой функции $v(X)(f) = 0$, в том числе и для всех координатных функций x^j:

$$0 = X^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = X^j, \tag{8}$$

значит, $X = 0$. Чтобы показать сюръективность, вспомним, что всякая гладкая функция раскладывается по формуле Тейлора в точке p как

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - p^i),$$

где функции g_i гладкие и $g_i(p) = 0$. Выберем $X \in T_pM$ и обозначим $X^i = X(x^i)$, тогда

$$\begin{aligned} Xf &= X(f(a)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(X(x^i) - X(p^i)) + \sum_{i=1}^n X(g_i(x)(x^i - p^i)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) f. \end{aligned}$$

Мы доказали, что дифференцирования $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_1^n$ вдоль координатных линий образуют базис в пространстве $T_p\mathbb{R}^n$ и что тем самым его размерность равна n.

Выберем точку $p \in M$. Определим *дифференциал в точке* (push-forward) как функтор, каждому многообразию M ставящий касательное пространство T_pM, а гладкому отображению $F\colon M \to N$ линейный оператор $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}M$, действующий по правилу

$$(F_*X)(f) = X(F \circ f). \tag{9}$$

Убедимся, что F_* корректно определён, то есть что он линеен, и F_*X действительно дифференцирование для любых $X \in T_pM$. Несложно убедиться, что это действительно функтор. В дальнейшем мы усложним конструкцию, перенеся её на касательные расслоения.

Лемма 5.2. *Для всякой окрестности U точки $p \in M$ верно $T_pU = T_pM$.*

Доказательство. □

В силу функториальности дифференциала имеем $T_pU = T_\phi(p)\mathbb{R}^n$, тогда $T_pM = T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$.

5.3. **Касательное и кокасательное расслоение.**

5.4. **Тензорное поле на многообразии.**

6. Мера и интеграл

Чтобы научиться интегрировать функции, значения которых можно складывать друг с другом и умножать на числа, нужно уметь измерять подмножества их области определения. Это ясно из интуитивного представления об интеграле как о сумме

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{x\in X} f(x)\mu(f^{-1}(x)).$$

6.1. **Алгебры, кольца и полукольца.** Пусть X — множество.

Определение 6.1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ будем называть алгеброй подмножеств множества X или алгеброй на X, если*

(1) $\varnothing \in \mathcal{A}$;
(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;
(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Как алгебраическая структура алгебра множеств — это ассоциативная алгебра с единицей, где роль единицы играет всё X, умножения — пересечение множеств, а сложения — симметрическая разность $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Вследствие замкнутости относительно операций дополнения и объединения алгебра также замкнута относительно операции пересечения множеств, что элементарно следует из правил де Моргана: $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Из индукционнных соображений тривиально следует замкнутость относительно конечных объединений. Из этого, однако, не следует замкнутость относительно счётных объединений.

Определение 6.2. *Если в предыдущем определении требование (3) заменить на*

(1) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$,

то $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X.

Понятие алгебры достаточно для определения измеримого пространства.

Определение 6.3. *Пару $(X, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств X, будем называть измеримым пространством. Множества $A \in \mathcal{A}$ назовём $\mathcal{A}$-измеримыми или просто измеримыми, если ясно, какая на X определена алгебра.*

Определение 6.4. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, $Y \subset X$. Тогда на Y индуцируется структура измеримого пространства с алгеброй множеств $\mathcal{B} = \{Y \cap A | A \in \mathcal{A}\}$.*

Обычно для определения меры на конкретном измеримом пространстве её не задают на всей алгебре подмножеств X, а на более бедном, но обозримом семействе подмножеств множества X, например, кольце или полукольце множеств.

Определение 6.5. *Семейство подмножеств $\mathcal{R} \subset 2^X$ — кольцо подмножеств множества X или кольцо на X, если*

(1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
(2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A\triangle B \in \mathcal{R}$.

Отметим, что $A \setminus B = A\triangle(A \cap B)$, откуда следует, что всякая алгебра является кольцом. Обратное верно тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{A}$.

Утверждение 6.1. *Пусть $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — набор колец подмножеств множества X. Тогда семейство подмножеств $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{\alpha\in I} R_\alpha$ само является кольцом подмножеств множества X.*

Это утверждение обеспечивает существование наименьшего кольца подмножеств множества X, содержащее данное семейство подмножеств $\mathcal{M} \subset 2^X$.

Определение 6.6. *Кольцо множеств $\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \bigcap\limits_{\mathcal{M}\subset\mathcal{F}\subset 2^X} \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — кольцо подмножеств множества X, будем называть кольцом подмножеств множества X, порождённым семейством Y.*

Из определения ясно, что данное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X порождает единственное кольцо, которое его содержит.

Определение 6.7. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Борелевской σ-алгеброй на X называется алгебра $\mathcal{A}(\tau)$, порождённая открытыми подмножествами пространства X.*

Полукольцо удовлетворяет более слабому условию, чем (2) в определении кольца.

Определение 6.8. *Семейство подмножеств $\mathcal{H} \subset 2^X$ — полукольцо подмножеств множества X, если*

(1) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$;
(2) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \colon \forall\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ A \setminus B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$;

Всякое кольцо, очевидно, является полукольцом.

Приведём примеры семейств множеств.

(1) Семейства $\{\varnothing, X\}$ и 2^X являются σ-алгебрами на X.
(2) Пусть $X = \mathbb{N}$. Семейство конечных подмножеств множества X образует кольцо на X, но не алгебру.
(3) Пусть $X = \mathbb{R}$. Конечные объединения промежутков вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ и $[a, b]$ образуют алгебру.
(4) Множество $P_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *блоком*, если найдутся векторы $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $a_i \leqslant b_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, и
$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset P_{a,b} \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i],$$
и *блочным*, если оно представимо в виде конечного объединения непересекающихся блоков. Семейство блочных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ образует полукольцо.

6.2. **Мера.**

Определение 6.9. *Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Функцию $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ такую, что $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ для всяких непересекающихся $A, B \in \mathcal{S}$ таких, что $A \cup B \in \mathcal{S}$, назовём конечно-аддитивной, или просто аддитивной.*

Очевидно, что для конечно-аддитивного отображения $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ и конечного набора непересекающихся множеств $\{A_i\}_1^n$ выполнено $f\left(\bigcup A_i\right) = \sum f(A_i)$, что, конечно, в общем случае неверно для счётного набора. Если это равенство имеет место для счётного набора непересекающихся множеств, функция f называется *счётно-аддитивной*.

Определение 6.10. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо (σ-кольцо) на X. Конечно-аддитивная мера (счётно-аддитивная) на множестве X — это конечно-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{R} \to (-\infty, +\infty]$ такая, что $\mu(\varnothing) = 0$.*

Определение 6.11. *Тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, а μ — счётно-аддитивная мера, заданная на ней, называется пространством с мерой.*

Приведём некоторые примеры.

(1) Рассмотрим кольцо конечных подмножеств множества X. Определим на нём меру как
$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{если } A \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{если } A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$
Эта мера называется *считающей*. Она конечно-аддитивна, но не счётно-аддитивна.
(2) Выберем точку $x \in X$. Определим на X меру как
$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$
Эта мера называется *дираковской*. Она задана на σ-алгебре всех подмножеств множества X и счётно-аддитивна.

(3) Продолжая пример 4, определим на блоке $P_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ меру как

$$\mu_0(P_{a,b}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Для блочного множества $B = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$, составленного из непересекающихся блоков $P_j \subset \mathbb{R}^m$, положим

$$\mu_0(B) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(P_j).$$

Это конечно-аддитивная функция, заданная на полукольце блочных множеств.
дописать

Определение 6.12. *Пусть $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства. Будем говорить, что отображение $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-измеримое, если для всякого $\mathcal{B}$-измеримого множества $B \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(B) \subset X$ $\mathcal{A}$-измерим.*

Смысл определения заключается в том, что если $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то измеримое отображение $f\colon (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ индуцирует меру $\tilde{\mu}$ на Y, определяемую на измеримых множествах $B \subset Y$ как $\tilde{\mu}(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathcal{B} \arrow[ur, "\tilde{\mu}"] & \end{tikzcd}$$

Измеримые пространства в качестве объектов вместе с измеримыми отображениями в качестве морфизмов образуют *категорию измеримых пространств $\mathcal{M}eas$.*

6.3. **Продолжение меры.** Теорема Каратеодори

6.4. **Мера и вероятность.**

6.5. **Вариация.**

6.6. **Произведение мер.** категорный смысл Пусть $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства. Прямое произведение $X \times Y$ тогда естественно наделяется структурой измеримого пространства, если определить прямое произведение алгебр $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

6.7. **Мера Лебега.**

6.8. **Интеграл.** Следующая конструкция интеграла числовой функции, видимо, является наиболее общей.

Определение 6.13. *Функция $f\colon X \to Y$ простая, если множество множество $f(X)$ конечно.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Рассмотрим неотрицательную простую функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, принимающую на измеримых множествах $\{A_i\}_1^n$, образующих разбиение X, значения $c_i = f(A_i)$.

Определение 6.14. *Интегралом неотрицательной простой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ назовём сумму*

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i). \tag{10}$$

Корректность определения, а именно независимость от разбиения пространства X, необходимо проверить

Утверждение 6.2.

Определение 6.15. *Пусть*

6.9. **Изотропические меры.**

7. Выпуклость

Явления выпуклости служат нулевым приближением в задачах оптимизации, потому что минимум выпуклой функции, заданной на выпуклом множестве, всегда существует и единственнен.

Выпуклую геометрию пронизывают идеи двойственности, я постараюсь явно указывать на симметрию везде, где это возможно.

Далее X обозначает произвольное линейное пространство над $\mathbb{R}$. Действие линейного функционала $p \in X^*$ будем обозначать через $\langle p, x\rangle$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ рассматривается вместе со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{11}$$

где x_i, y_i, $i = \overline{1, n}$ — компоненты векторов в стандартном базисе в $\mathbb{R}^n$.

7.1. **Выпуклые множества и функции.**

Определение 7.1. *Пусть $A, B \subset X$, $t \in \mathbb{R}$. Определим*

$$A + B = \{x + y | x \in X, y \in B\}, \tag{12}$$

$$tA = \{tx | x \in X\}. \tag{13}$$

Определение 7.2. *Множество A центрально-симметрично, если $(-A) = A$.*

Определение 7.3. *Множество $A \subset X$ выпукло, если для всякой пары точек $x, y \in A$ и $\lambda \in (0, 1)$*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A. \tag{14}$$

Эквивалентно, A выпукло, если $\lambda A + (1 - \lambda)A \subset A$. Геометрически, множество A выпукло, если со всякой парой точек, входящих в A, оно содержит и отрезок, их соединяющий.

Если X — топологическое векторное пространство, то *телом* будем называть любой компакт с непустой внутренностью. Мы будем изучать выпуклые тела в X.

Самый важный пример выпуклого множества: если $|| \cdot ||$ — норма на линейном пространстве X, то единичный шар $B_1^{||\cdot||}(0) \subset X$ в этой норме выпуклый. В самом деле, для $x, y \in X$ таких, что $||x||, ||y|| \leqslant 1$, и $\lambda \in (0, 1)$

$$||\lambda x + (1 - \lambda) y|| \leqslant |\lambda| ||x|| + |1 - \lambda| ||y|| \leqslant 1.$$

Простейшие свойства:

(1) если $A, B \subset X$ выпуклы, то $A + B$ и tA выпуклы при произвольных $t \in \mathbb{R}$.
(2) если $A \subset X$ и $B \subset Y$ выпуклы, то $A \times B \subset X \times Y$ выпукло.
(3) если $A_\alpha \subset X$ выпуклы при всех $\alpha \in \mathcal{A}$, то $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ выпукло.

Определение 7.4. *Пусть подмножество $A \subset X$ выпуклое. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ выпуклая, если её надграфик* $\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} |\ x \in A,\ y \geqslant f(x)\}$ *— выпуклое множество.*

7.2. **Неравенства. Неравенство Брунна-Минковского**

Теорема 7.1. *Пусть A, B — положительно определённые матрицы размера $n \times n$. Тогда*

$$(\det(A + B))^{\{}1/n\} \geqslant (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}, \tag{15}$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $B = cA$ для какого-то $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Воспользуемся положительной определённостью, тогда найдётся матрица P такая, что $A = P^2$. Тогда

$$\begin{aligned}(\det(P^2 + B))^{1/n} &= (\det P^2 \det(I + (P^{-1} B P^{-1})))^{1/n} \\ &= (\det P)^{2/n} (\det(I + P^{-1} B P^{-1}))^{1/n}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(\det P)^{2/n} + (\det B)^{1/n} = (\det P)^{2/n} (1 + (\det P^{-1} B P^{-1})^{1/n}).$$

Обозначив $C = P^{-1}BP^{-1}$, получаем, что нужное неравенство эквивалентно

$$(\det(I+C))^{1/n} \geqslant 1 + (\det C)^{1/n}. \tag{16}$$

Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – спектр оператора C. Тогда утверждение теоремы эквивалентно неравенству

$$(1+\lambda_1)^{1/n} \cdot \ldots \cdot (1+\lambda_n)^{1/n} \geqslant 1 + (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)^{1/n} \tag{17}$$

□

7.3. **Функционал Минковского и норма.** Нормы на $\mathbb{R}^n$ двойственны центрально-симметричным выпуклым телам в $\mathbb{R}^n$: каждой норме можно поставить в соответствие единичный шар в этой норме, каждому центрально-симметричному выпуклому телу можно поставить в соответствие его функционал Минковского, являющийся нормой.

Определение 7.5. *Пусть $A \subset X$. Определим функционал Минковского $\mu_A \colon X \to \mathbb{R}$ как*

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 | x \in tA\}. \tag{18}$$

Утверждение 7.1. *Функционал Минковского $\mu_A(\cdot)$ произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ положительно однородный, то есть $\mu_A(\lambda x) = \lambda \mu_A(x)$ для $\lambda > 0$. Если A ограничено и $0 \in \int A$, то $\mu_A(x) > 0$ для $x \neq 0$ и $\mu_A(0) = 0$. Если A выпукло, то выполняется неравенство треугольника: $\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y)$.*

Утверждение 7.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое центрально-симмметричное тело. Тогда $\mu_A(\cdot)$ — норма на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Элементарное следствие предложения 7.1. □

7.4. **Преобразование Лежандра.**

Определение 7.6. *Пусть $f \colon X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Преобразованием Лежандра функции f называют функцию $f^* \colon X \to \mathbb{R}$, определённую в каждой точке как*

$$f^*(y) = \sup_{x \in X}(\langle x, y \rangle - f(x)). \tag{19}$$

7.5. **Опорная функция.**

Определение 7.7. *Пусть $A \subset X$. Опорной функцией множества A называется функция $s_A \colon X^* \to \mathbb{R}$, определённую в каждой точке как*

$$s_A(p) = \sup\{\langle p, x \rangle |\ x \in A\}. \tag{20}$$

7.6. **Двойственность Минковского.**

Определение 7.8. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Полярой множества A называется множество*

$$A^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n | \forall x \in A\ \langle x, y \rangle \leqslant 1\}. \tag{21}$$

Утверждение 7.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело, содержащее 0 в своей внутренности. Тогда*

$$\mu_A(x) = s_{A^\circ}(x). \tag{22}$$

7.7. **Расстояние Банаха-Мазура и расстояние Хаусдорфа.**