1 Мера и интеграл

Чтобы научиться интегрировать функции, значения которых можно складывать друг с другом и умножать на числа, нужно уметь измерять подмножества их области определения.

1.1 Алгебры, кольца и полукольца

Пусть X — множество.

Определение 1.1.1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ будем называть алгеброй подмножеств множества X или алгеброй на X, если*

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Как алгебраическая структура алгебра множеств — это ассоциативная алгебра с единицей, где роль единицы играет всё X, умножения — пересечение множеств, а сложения — симметрическая разность $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Вследствие замкнутости относительно операций дополнения и объединения алгебра также замкнута относительно операции пересечения множеств, что элементарно следует из правил де Моргана: $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Из индукционнных соображений тривиально следует замкнутость относительно конечных объединений. Из этого, однако, не следует замкнутость относительно счётных объединений.

Определение 1.1.2. *Если в предыдущем определении требование (3) заменить на*

1. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$,

то $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X.

Понятие алгебры достаточно для определения измеримого пространства.

Определение 1.1.3. *Пару $(X, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств X, будем называть измеримым пространством.*

Определение 1.1.4. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, $Y \subset X$. Тогда на Y индуцируется структура измеримого пространства с алгеброй множеств $\mathcal{B} = \{Y \cap A | A \in \mathcal{A}\}$.*

Обычно для определения меры на конкретном измеримом пространстве её не задают на всей алгебре подмножеств X, а на более бедном, но обозримом семействе подмножеств множества X, например, кольце или полукольце множеств.

Определение 1.1.5. *Семейство подмножеств $\mathcal{R} \subset 2^X$ — кольцо подмножеств множества X или кольцо на X, если*

1. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
2. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{R}$.

Отметим, что $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, откуда следует, что всякая алгебра является кольцом. Обратное верно тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{A}$.

Приведём примеры колец и алгебр множеств.

1. Семейства $\{\varnothing, X\}$ и 2^X являются σ-алгебрами на X.
2. Пусть $X = \mathbb{N}$. Семейство конечных подмножеств множества X образуют кольцо на X, но не алгебру.
3. Пусть $X = \mathbb{R}$. Конечные объединения промежутков вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ и $[a, b]$ образует кольцо.

Утверждение 1.1. *Пусть* $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *— набор колец подмножеств множества* X*. Тогда семейство подмножеств* $\mathcal{R} = \cap_{\alpha\in I} R_\alpha$ *само является кольцом подмножеств множества* X*.*

Это утверждение обеспечивает существование наименьшего кольца подмножеств множества X, содержащее данное семейство подмножеств $\mathcal{M} \subset 2^X$.

Определение 1.1.6. *Кольцо множеств* $\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \cap_{\mathcal{M}\subset\mathcal{F}\subset 2^X}\mathcal{F}$*, где* $\mathcal{F}$ *— кольцо подмножеств множества* X*, будем называть кольцом подмножеств множества* X*, порождённым семейством* Y*.*

Из определения ясно, что данное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X порождает единственное кольцо, которое его содержит.

Полукольцо удовлетворяет более слабому условию, чем (2) в определении кольца.

Определение 1.1.7. *Семейство подмножеств* $\mathcal{H} \subset 2^X$ *— полукольцо подмножеств множества* X*, если*

1. $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$;
2. $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \colon \forall\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ A \setminus B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$;

Всякое кольцо, очевидно, является полукольцом.

1.2 Мера

Определение 1.2.1. *Пусть* $\mathcal{H}$ *— полукольцо на* X*, а* $(Y, +)$ *— группа. Отображение* $f\colon (X, \mathcal{H}) \to (Y, +)$ *такое, что* $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ *для всяких непересекающихся* $A, B \in \mathcal{H}$*, назовём конечно-аддитивным, или просто аддитивным.*

Определение 1.2.2. *Пусть* $(X, \mathcal{A})$ *— измеримое пространство. Мера на* X *— это аддитивная функция* $\mu\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$*. Множества* $A \in \mathcal{A}$ *назовём* $\mathcal{A}$*-измеримыми или просто измеримыми, если ясно, какая на* X *определена алгебра.*

Определение 1.2.3. *Тройка* $(X, \mathcal{A}, \mu)$*, где* μ *— мера на измеримом пространстве* $(X, \mathcal{A})$*, — пространство с мерой.*

Определение 1.2.4. *Пусть* $(X, \mathcal{A})$*,* $(Y, \mathcal{B})$ *— измеримые пространства. Будем говорить, что* $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ *—* $\mathcal{A}/\mathcal{B}$*-измеримое отображение, если для всякого* $\mathcal{B}$*-измеримого множества* $B \subset Y$ *его прообраз* $f^{-1}(B) \subset X$ $\mathcal{A}$*-измерим.*

Смысл определения заключается в том, что если $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то измеримое отображение $f\colon (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ индуцирует меру $\tilde{\mu}$ на Y, определяемую на измеримых множествах $B \subset Y$ как $\tilde{\mu}(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathcal{B} \arrow[ur, "\tilde{\mu}"] & \end{tikzcd}$$

Измеримые пространства вместе с измеримыми отображениями между ними в качестве морфизмов образуют *категорию.*

1.3 Продолжение меры

1.4 Интеграл

Определение 1.4.1. *Функция* $f\colon X \to Y$ *простая, если* $f(X)$ *конечно.*