

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общая топология	2
1.1. Топологическое пространство и непрерывные отображения	2
1.2. Отделимость	4
1.3. Сходимость, последовательности и направленности	4
1.4. Компактность	5
2. Операции и конструкции	6
3. Гомотопическая топология	8
3.1. Пространства с отмеченной точкой	8
3.2. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность	8
3.3. Клеточные пространства и теорема о клеточной аппроксимации	10
3.4. Фундаментальная группа	11
3.5. Топологические группы, H -группы и H -когруппы	12
3.6. Теорема Зейферта-ван Кампена	12
3.7. Фундаментальная группа клеточного пространства. Классификация двумерных поверхностей	12
3.8. Накрытия	12

1. ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Если вы захотите изучить *непрерывность* в самом общем случае, вы придёте к понятиям *окрестности*, *топологии* и *непрерывного отображения*.

В параграфе 1 мы обсудим, каким образом можно мыслить, чтобы рассмотрение этих вещей выглядело сколько-то естественно. Далее будет рассматриваться топологическая машинерия и её пересечение с категорными явлениями, которая закончится фундаментальной группой и её классическими приложениями.

Всюду в этой главе под пространством мы понимаем топологическое пространство, а под отображениями — непрерывные отображения между ними.

1.1. Топологическое пространство и непрерывные отображения. Вспомним школьное определение непрерывности функции в точке, которое приводится в любом учебнике по введению в матанализ.

Определение 1.1. *Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Школьнику оно может быть объяснено, например, так: представим груз, подвешенный на нитке. Если на груз положить сверху дополнительный грузик, незначительный по массе в сравнении с самим грузом, то нитка незаметно для нашего глаза растянется. Мы говорим, что длина нити *непрерывно зависит* от подвешенной массы. Если положить слишком большой грузик, то нитка растянется слишком сильно и порвётся...

Посмотрим, как это определение обобщить. Для начала, его можно развернуть, используя ε - δ -формализм:

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall x: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Первый возможный шаг — это замена модулей разности на *расстояния* между точками.

Определение 1.2. *Метрикой или расстоянием на множестве X называют функцию $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам:*

- (1) $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \geq 0$;
- (2) $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (3) $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (4) $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Множество X с введённой на ней метрикой ρ называют *метрическим пространством* и пишут (X, ρ) .

Модуль разности $d(x, y) = |x - y|$ удовлетворяет всем четырём аксиомам. В сущности, при доказательстве свойств предела — арифметических и прочих — ничем, кроме этих свойств модуля, мы не пользуемся. Иными словами, о конкретном виде метрики можно не думать, нужны лишь её свойства. Теперь мы можем перенести определение непрерывности в точке с числовых функций на отображения между множествами, на которых введена метрика.

Определение 1.3. *Пусть (X, ρ) , (Y, d) — метрические пространства. Функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если*

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall x: \rho(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Можно пойти дальше. В метрическом пространстве (X, ρ) определим δ -окрестность точки x как множество $U_\delta(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \delta\}$, это шар радиуса δ с центром в точке x . Определение непрерывности тогда можно записать как

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall x \in U_\delta(x_0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)),$$

или, ещё короче,

$$(4) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Повторим фокус снова: забудем про внутреннее устройство окрестности. Будем теперь считать, что каждой точке x множества X приписано семейство $\mathcal{O}(x)$ подмножеств множества X , называемых окрестностями этой точки, свойства которых мы потом отдельно выделим. Наиболее общо, определение непрерывности в точке теперь выглядит так, если мы предполагаем, что на множествах X и Y введены эти системы окрестностей.

Определение 1.4. Функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна в точке $x \in X$, если

$$(5) \quad \forall U \in \mathcal{O}(f(x)) \exists V \in \mathcal{O}(x): f(V) \subset U.$$

Что мы ожидаем от окрестностей точки? Выделим следующие естественные их свойства.

- (1) если $U, V \in \mathcal{O}(x)$, то $U \cap V \in \mathcal{O}(x)$;
- (2) если $U, V \in \mathcal{O}(x)$, то $U \cup V \in \mathcal{O}(x)$;

Эта система аксиом, хоть и выглядит естественной, нигде не применяется. Она эквивалентна традиционному определению топологического пространства.

Итак, топология на множестве — необходимая структура для определения непрерывных отображений.

Определение 1.5. Пусть X — множество. Топологией на X назовём семейство τ подмножеств множества X , удовлетворяющее следующим требованиям:

- (1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$;
- (2) для всякого конечного набора подмножеств $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ верно $\bigcap_{i=1}^n X_i \in \tau$;
- (3) для всякого набора множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ верно $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \in \tau$.

Если $U \in \tau$, то U называют открытым подмножеством X (в этой топологии). Множество $V \subset X$ замкнуто, если его дополнение открыто.

Поясним то, что написано. С первым пунктом определения 1.5 всё должно быть более-менее ясно: пустое множество и всё множество будем считать открытыми. Согласно второму пункту, пересечение всякого конечного семейства открытых множеств снова открыто. Третий же пункт утверждает, что объединение любого семейства открытых множеств открыто.

Из определения ясно, что задание на множестве замкнутых подмножеств эквивалентно введению топологии. Для них, как это следует из правил де Моргана, любые конечные объединения замкнуты и произвольные пересечения замкнуты.

Определение 1.6. Пусть $U \subset X$ открыто в X , а $x \in U$. Тогда U — окрестность точки x .

Покажем, что система аксиом окрестностей точки эквивалентна заданию топологии на множестве.

Приведём первые примеры.

- (1) На всяком множестве X можно рассматривать топологии $\{\emptyset, X\}$ и 2^X . Последнюю также называют *дискретной*: одноточечные множества открыты и замкнуты и каждую точку можно отделить от всех остальных окрестностью, состоящей из её одной.
- (2) На непустом множестве X $\{\emptyset, \{x\}, X\}$ — топология.
- (3) На прямой $X = \mathbb{R}$ открытыми объявляются все не более чем счёные объединения интервалов вида (a, b) , где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. На эту топологию будем ссылаться как на обычную или стандартную.
- (4) На \mathbb{R} можно ввести и другую топологию: замкнутыми пусть будут все конечные множества и X .
- (5) На отрезке $I = [0, 1]$ открытыми объявляются пересечения открытых в стандартной топологии на \mathbb{R} множеств с I .

Определение 1.7. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, если прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого в Y множества U открыт в X .

Эквивалентно, отображение непрерывно, если прообраз замкнутого множества замкнут.

Утверждение 1.1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f непрерывна, а $x \in X$. Рассмотрим произвольную окрестность $V \subset Y$ точки $f(x)$, тогда $U = f^{-1}(V)$ открыто и $x \in U$.

Достаточность. Пусть f непрерывна в каждой точке $x \in X$. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$. Для каждого $y \in V$ множество V — его окрестность, а для каждого $x \in X$ такого, что $f(x) \in V$, найдётся его окрестность $U(x)$ такая, что $f(U(x)) \subset V$, значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Имеем:

$$\bigcup_{x \in X, f(x) \in V} U(x) \subset f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x \in X, f(x) \in V} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X, f(x) \in V} U(x).$$

Таким образом, прообраз $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in X, f(x) \in V} U(x)$ открыт как объединение открытых множеств. \square

Класс топологических пространств вместе с непрерывными отображениями в качестве морфизмов составляют *топологическую категорию Тор*. Конечным объектом в этой категории будет одноточечное пространство $\{*\}$, так как в него существует единственное отображение. О суммах и произведениях в этой категории речь пойдёт в следующем параграфе.

Изоморфизмы в категории *Тор* называют *гомеоморфизмами*. Так, непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, если оно биективно и обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывно. Если для пространств X и Y найдётся гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$, то они называются *гомеоморфными*, пишут $X \equiv Y$. В топологии пространства изучаются с точностью до гомеоморфизма. Так, единичный евклидов шар $D^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ (он же n -мерный диск) гомеоморфен n -мерному кубу $[-1; 1]^n$. Вообще говоря, всякое односвязное тело в \mathbb{R}^n гомеоморфно n -мерному диску.

Одной биективности недостаточно для гомеоморфности: так, например, если $S^1 = \{e^{2\pi it} | \varphi \in [0, 1)\}$, то $e^{2\pi it} \mapsto t$ не является гомеоморфизмом, что и естественно: нельзя превратить окружность в интервал, нигде её не разорвав.

Топологии на множестве X можно сравнивать: если τ_1 и τ_2 — топологии на X , то говорят, что τ_1 *сильнее (тоньше)* τ_2 и что τ_2 *слабее (грубее)* τ_1 , если $\tau_2 \subset \tau_1$. Если никакое включение не выполняется, то топологии не сравнивают. Так, топология $\{\emptyset, X\}$ — слабейшая топология на X , а 2^X — сильнейшая.

В задании топологий на множестве важны понятия базы и предбазы.

Определение 1.8. Семейство подмножеств $\beta \subset \tau$ пространства X — база топологии τ на X , если всякое открытое множество представимо в виде (произвольного) объединения открытых множеств из β .

Определение 1.9. Семейство подмножеств $\sigma \subset \tau$ пространства X , конечные пересечения множеств которого образуют базу топологии τ на X , — это предбаза топологии τ .

Предбаза — это набор множеств, “порождающий” топологию. Пусть имеется семейство σ подмножеств множества X . Мы хотим, чтобы эти множества были открыты в некоторой топологии, причём желательно, чтобы она не содержала “лишних” открытых множеств. Тогда из этого набора нужно получить всевозможные конечные пересечения входящих в него множеств, а то, что получилось, любым образом прообъединять. Эквивалентно, рассмотрим множество $\mathcal{T}(\sigma)$ всех топологий на X , которые содержат в себе семейство σ . Тогда σ — предбаза топологии $\tau_\sigma = \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}(\sigma)} \tau$.

Определение 1.10. Точка $x \in X$ — точка прикосновения X , если каждая её окрестность U содержит ещё какую-то точку из X , то есть $(U \setminus X) \cap X \neq \emptyset$.

Утверждение 1.2. Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои точки прикосновения.

Доказательство. Необходимость. Пусть A замкнуто, а $x \in X$ — точка прикосновения A . Предположим, $x \in X \setminus A$. По определению любая окрестность U точки x содержит точку, отличную от x и входящую в A . Поскольку $X \setminus A$ открыто и является окрестностью точки x , оно пересекает A . Противоречие.

Достаточность. Пусть A содержит все свои точки прикосновения. Возьмём $x \in X \setminus A$, тогда, раз x — не точка прикосновения A , найдётся её окрестность $U(x)$ такая, что $A \cap U(x) = \emptyset$. Имеем $\bigcap_{x \in X \setminus A} U(x) \subset X \setminus A \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} \{x\} \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} U(x)$. Значит, $X \setminus A = \bigcap_{x \in X \setminus A} U(x)$. \square

1.2. Отделимость.

Определение 1.11. Пространство X хаусдорфово, если для всякой пары точек $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся их окрестности U, V такие, что $U \cap V = \emptyset$.

1.3. Сходимость, последовательности и направленности. Введения топологии достаточно, чтобы определить *сходимость*.

Определение 1.12. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Тогда $x_i \rightarrow x$, если для всякой окрестности U точки x найдётся $n \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m \geq n$ $x_m \in U$.

1.4. Компактность. Без компактности в топологии абсурд и коррупция.

Определение 1.13. Говорят, что семейство $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^X$ покрывает (или является покрытием) множества $A \subset X$, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ и \mathcal{U}' покрывает A , то \mathcal{U}' — подпокрытие покрытия \mathcal{U} .

Определение 1.14. Пусть $K \subset X$ таков, что из любого покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^X$, состоящего из открытых подмножеств пространства X , можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Тогда пространство K называют компактом.

Утверждение 1.3. Пусть X компактно, а $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда $f(X) \subset Y$ компактно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие $f(X)$, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие X . Выделим из него открытое подпокрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}_{i=1}^n$. Значит, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ — открытое подпокрытие покрытия \mathcal{U} . \square

Утверждение 1.4. Пусть X компактно, а $A \subset X$ замкнуто. Тогда A — компактно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — открытое покрытие пространства A , тогда $V_i = U_i \cap A$ для какого-то открытого в X множества $U_i, i = \overline{1, n}$. Для X $\mathcal{U} = \{X \setminus A\} \cup \{U_i\}$ — открытое покрытие. Выделим из него конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = (X \setminus A) \cup \{U_1, \dots, U_n\}$, значит, $\mathcal{V}' = \{V_1, \dots, V_n\}$ — конечное подпокрытие покрытия \mathcal{V} . \square

Следующее вспомогательное утверждение всплывает, например, в лемме Гейне-Бореля, классифицирующей все компактные подмножества пространства \mathbb{R}^n .

Утверждение 1.5. Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут.

Важное для приложений свойство, вытекающее из компактности, — *секвенциальная компактность*. В матанализе мы любим изучать свойства последовательностей.

Определение 1.15. Пространство X секвенциально компактно, если из всякой последовательности элементов из X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Утверждение 1.6. Компактное пространство секвенциально компактно.

2. ОПЕРАЦИИ И КОНСТРУКЦИИ

Определение 2.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение, а на Y определена топология. Начальная топология (*initial topology*) на X относительно отображения f — это слабейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.

Несложно дать явное задание этой топологии, стоит только вспомнить определение непрерывности: необходимо и достаточно, чтобы были открыты все множества вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y , то есть $\sigma = \{f^{-1}(U) | U \text{ — открыто в } Y\}$ — предбаза начальной топологии. Эта терминология не может считаться устоявшейся в русской литературе и не встречается за пределами этого конспекта.

Двойственным понятием будет *финальная топология*.

Определение 2.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение, а на X определена топология. Финальная топология (*final topology*) на Y относительно отображения f — это сильнейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.

Зададим явно и эту топологию: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X .

Вопрос 2.1. Что меняется, когда вместо одного отображения $f: X \rightarrow Y$ рассматривается семейства отображений $f_i: X \rightarrow Y_i$ и $f_i: X_i \rightarrow Y$ в определениях начальной и финальной топологии соответственно?

Приведём классические примеры этих топологий.

Индукцированная топология. Пусть $A \subset X$. Рассмотрим отображение включения $i: A \hookrightarrow X$, $i(a) = a$. Если на X есть топология, то, чтобы задать её на A , можно потребовать, чтобы все открытые в A множества имели вид $U \cap A$, где U открыто в X . Элементарно проверяется, что такие множества действительно образуют топологию на A и что i оказывается непрерывным. Более того, это слабейшая топология, относительно которой включение i непрерывно.

Фактортопология. Пусть X — топологическое пространство, на котором определено отношение эквивалентности \sim . Рассмотрим множество X/\sim и каноническую проекцию $\pi: X \rightarrow X/\sim$, $x \rightarrow [x]$. Множество X/\sim можно снабдить топологией, потребовав, чтобы $U \subset X/\sim$ было открыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыт в X .

Полезный пример фактортопологии — *стягивание*. Пусть $A \subset X$, а точки $x, y \in X$ связаны отношением эквивалентности \sim тогда и только тогда, когда $x, y \in A$. Тогда говорят, что X/A получено стягиванием подпространства A в точку.

Топология произведения. Пусть X, Y — топологические пространства. Прямое произведение $X \times Y$ можно наделить естественной топологией, потребовав, чтобы канонические проекции $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ были непрерывны. Аналогично топология определяется для произведения произвольного семейства пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, тогда требуется, чтобы все $\pi_\beta: \prod X_\alpha \rightarrow X_\beta$ были непрерывны. Она называется *тихоновской*. В случае конечного произведения её задание тривиально: множества вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, образуют базу в $X \times Y$.

Если на $X \times Y$ ввести тихоновскую топологию, это пространство станет категорным произведением пространств X и Y .

Классический результат — теорема Тихонова.

Теорема 2.1. Если все X_α , $\alpha \in A$, компактны. Тогда $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ компактно.

Доказательство. Докажем теорему для произведения двух пространств, тогда то же будет верно для любого конечного произведения.

Утверждение теоремы в случае бесконечного числа множителей эквивалентно аксиоме выбора. \square

Несвязное объединение. Теоретико-множественное несвязное объединение определяется следующим образом. Пусть A и B множества, возможно, имеющие ненулевое пересечение. Мы хотим, чтобы в несвязное объединение элементы из пересечения вошли “дважды”: как элементы A и как элементы B . Положим $A \sqcup B = \{(a, 0), (b, 1) | a \in A, b \in B\}$. Вместе с этим определяются вложения $i_A: A \hookrightarrow A \sqcup B$, $a \mapsto (a, 0)$. Эта конструкция является категорной суммой в категории множеств.

Если X и Y — топологические пространства, то $A \sqcup B$ наделяется естественной топологией и оказывается суммой в топологической категории.

Цилиндр. Пусть X — пространство. *Цилиндром над X* называют произведение $X \times I$.

Конус. Если стянуть цилиндр над X по верхнему основанию, то получится *конус над X* :

$$CX = (X \times I)/(X \times \{1\}).$$

Надстройка. Если же у конуса над X нижнее основание, то получится *надстройка над X* :

$$\Sigma X = CX/(X \times \{0\}).$$

Эквивалентно, надстройка над X — это два конуса над X , склеенные по основаниям.

Утверждение 2.1. (*экспоненциальный закон*) Имеет место естественная биекция $\Phi: C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$ (в других обозначениях $\Phi: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$), ставящее в соответствие отображению $f: X \times Y \rightarrow Z$ отображение $\Phi f: X \rightarrow C(Y, Z)$, действующее по правилу $(\Phi f)(x)(y) = f(x, y)$. Если X хаусдорфово, а Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм.

Утверждение 2.2. Пусть X хаусдорфово. Тогда имеет место естественный по X и Y изоморфизм $C(\sigma X, Y) \rightarrow C(X, \Omega Y)$.

Доказательство. Согласно экспоненциальному закону, имеет место изоморфизм

$$C(X \times I, Y) \rightarrow C(X, C(I, Y)).$$

□

3. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

3.1. Пространства с отмеченной точкой. Так будем называть пары (X, x_0) , где X — топологическое пространство, а $x_0 \in X$. Про непрерывное отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ будем говорить, что оно *сохраняет отмеченную точку*, если $f(x_0) = y_0$. Пространства с отмеченной точкой вместе с отображениями, их сохраняющими, в качестве морфизмов, образуют *пунктированную категорию* \mathcal{Top}^* .

В терминах пространств с отмеченной точкой даётся определение фундаментальной группы, высших гомотопических групп и групп гомологий. Для их нужд предыдущие конструкции прокачаем до их аналогов с отмеченными точками.

Надстройка. Для пространства X определим

$$\Sigma X = X \times I$$

Определим *букет*, являющийся суммой в категории \mathcal{Top}^* .

Определение 3.1. Пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — семейство пространств с отмеченными точками. Их *букетом* назовём пространство

$$\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha / \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}.$$

Иными словами, все пространства приклеили друг к другу по отмеченным точкам: так, букет двух окружностей — восьмёрка.

Произведение в \mathcal{Top}^* менее хитрое: отмеченной точкой в π

3.2. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность. Если попытаться придать точный смысл *деформации*, то получится гомотопия. Нарисуем в воображении некоторый объект, будем считать, что он был получен как непрерывный образ $f(X)$ какого-то множества X в Y . “Раскадрируем” то, как объект деформируется с течением времени, получим серию картинок $f_0(X) = f(X), f_1(X), \dots, f_n(X) \subset Y$. Эту серию можно собрать в одно отображение $H: X \times \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow Y$, непрерывное по первой переменной. Пожелав, чтобы кадры менялись непрерывно, мы определим отображение $H: X \times I \rightarrow Y$ такое, что на каждом шаге $t \in I$ имеем некоторую непрерывную функцию $f_t(x) = H(x, t)$, причём $f_0 = f, f_1 = g$.

Изучение пространств и отображений с точностью до гомотопии важно, потому что все используемые функторы из топологической категории не чувствительны к гомотопиям. Прежде чем давать определения, докажем полезное и несложное утверждение, на которое будет удобно сослаться в дальнейшем.

Лемма 3.1 (о склейке). Пусть пространство X представлено конечным объединением замкнутых множеств X_i , и заданы непрерывные отображения $f_i: X_i \rightarrow Y$, причём если $X_{ij} = X_i \cap X_j$ непусто, то $f_i|_{X_{ij}} = f_j|_{X_{ij}}$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ такое, что $f|_{X_i} = f_i$.

Доказательство. Искомое отображение так и задаётся: $f(x) = f_i(x)$, если $x \in X_i$, и в силу условия леммы корректно определено. Покажем, что оно непрерывно. Пусть $M \subset Y$ замкнут, тогда

$$f^{-1}(M) = \bigcap_i X_i \cap f^{-1}(M) = \bigcap_i f_i^{-1}(M).$$

Прообраз замкнутого множества замкнут как конечное объединение замкнутых множеств. □

Определение 3.2. Гомотопией между отображениями $f, g: X \rightarrow Y$ называется отображение $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ такое, что $H|_{t=0} = f$ и $H|_{t=1} = g$, про сами отображения будем говорить, что они *гомотопны* и писать $H: f \simeq g$ или просто $f \simeq g$.

Утверждение 3.1. Отношение “быть гомотопным” на пространстве $C(X, Y)$ — отношение эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность. Отображение $f \in C(X, Y)$ гомотопно самому себе через гомотопию $H(x, t) = f(x)$.

Симметричность. Если $H: f \simeq g$ для $f, g \in C(X, Y)$, то $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ — гомотопия между g и f .

Транзитивность. Пусть $F: f \simeq g$ и $G: g \simeq h$ для $f, g, h \in C(X, Y)$. Представим себе две копии цилиндра $X \times I$: с нижнего основания первого цилиндра бьёт f , с его верхнего основания и с нижнего основания второго цилиндра бьёт g , а h определена на верхнем основании второго цилиндра. Чтобы определить гомотопию $H: f \simeq h$, “склеим” эти цилиндры по тем основаниям, на которых определено g и сожмём полученный цилиндр в два раза. На нём можно задать отображение

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t < 1/2, \\ G(x, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

являющееся искомой гомотопией. Гомотопия H непрерывна в силу леммы о склейке. \square

Факторпространство $C(X, Y)/\simeq$ будем обозначать $[X, Y]$ — это пространство классов гомотопных отображений из X в Y . Гомотопический класс отображения $f \in C(X, Y)$ обозначим $[f] \in [X, Y]$. Топологические пространства вместе с пространствами классов гомотопных отображений образуют категорию $h\mathcal{Top}$.

Утверждение 3.2. Пусть $f, g: X \rightarrow Y$, причём $f \simeq g$, а $f', g': Y \rightarrow Z$, причём $f' \simeq g'$. Тогда $f' \circ f \simeq g' \circ g$.

Определение 3.3. Пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ такие, что $f \circ g = \text{id}_Y$ и $g \circ f = \text{id}_X$. Отображения f и g называют гомотопическими эквивалентностями.

Легко видеть, что это определение изоморфизма в $h\mathcal{Top}$.

Простейший пример — $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$. Построим гомотопию между вложением сферы $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $p: \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$, $x \rightarrow x/||x||$, положим

$$H(x, t) = tx + (1 - t)x/||x||.$$

Определение 3.4. Пространство X стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке pt .

Примеры стягиваемых пространств: I , \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^∞ , S^∞ .

По определению для доказательства стягиваемости нужно привести отображения $f: X \rightarrow pt$ и $g: pt \rightarrow X$ такие, что $f \circ g: pt \rightarrow pt \simeq \text{id}_{pt}$ и $g \circ f: X \rightarrow X \simeq \text{id}_X$. Отображение $X \rightarrow pt$ единственно, а первая гомотопность тривиально выполнена, поэтому нужно убедиться в том, что постоянное отображение $X \rightarrow X$ гомотопно тождественному.

Покажем, что \mathbb{R}^n стягиваемо. Пусть $f(x) = 0$. Тогда искомая гомотопия — это просто $H(x, t) = tx$.

3.2.1. Свойство продолжения гомотопии. Обсудим то, что в англоязычной литературе называется homotopy extension property (HEP).

Определение 3.5. Отображение $r: X \rightarrow X$ — ретракция, если $r^2 = r$.

Ретракция — это топологический аналог проектора. Эквивалентно, r — ретракция, если для $A = r(X)$ верно $r|_A = \text{id}_A$. Множество A называется *ретрактом*. Если ретракция $r: X \rightarrow X$ гомотопна id_X , то она называется *деформационным ретрактом*.

Вместе с пространствами с отмеченными точками будем также рассматривать пары (X, A) , где $A \subset X$. Отображение пар $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — это такое отображение, что $f(A) \subset B$. Ясно, что пары пространств вместе с отображениями пар образуют категорию, и что пространства с отмеченными точками — их частный случай.

Будем говорить, что пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (или является парой Борсука), если для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ и гомотопии $F: A \times I \rightarrow Y$ таких, что $F|_{A \times \{0\}} = f|_A$, существует гомотопия $\hat{F}: X \times I \rightarrow Y$ такая, что $\hat{F}|_{X \times \{0\}} = f$ и $\hat{F}|_{A \times I} = F$. Иными словами, (X, A) обладает HEP, если отображение $X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$ можно продолжить до отображения $X \times I \rightarrow Y$. Вложение $A \hookrightarrow X$, если (X, A) — пара Борсука, называют *корасслоением*.

Пусть X — это основание стакана, а A — граница этого основания, тогда (X, A) — пара Борсука, если отображение из всего стакана можно продолжить на весь цилиндр.

3.3. Клеточные пространства и теорема о клеточной аппроксимации.

Утверждение 3.3. Пусть X — клеточное пространство, а клеточное подпространство $A \subset X$ стягиваемо. Тогда $X \simeq X/A$.

3.4. Фундаментальная группа.

Определение 3.6. *Путь в пространстве X — это непрерывное отображение $I \rightarrow X$.*

В пространстве с отмеченной точкой (X, x_0) все пути начинаются в точке x_0 . Если путь $f: I \rightarrow X$ заканчивается в точке $x = f(1)$, а путь $g: I \rightarrow X$ в ней начинается, то есть $g(0) = x$, то можно определить *произведение путей* $fg: I \rightarrow X$ как $(fg)(t) = f(2t)$ при $0 \leq t < 1/2$ и $(fg)(t) = g(2t - 1)$ при $1/2 \leq t \leq 1$. Произведение корректно определено в силу леммы о склейке.

Можно убедиться, что такое умножение ассоциативно, то есть если определено произведение $(fg)h$, то определено и $f(gh)$, причём $(fg)h = f(gh)$.

Определение 3.7. *Петля в пространстве X — это путь $f: I \rightarrow X$ такой, что $f(0) = f(1)$.*

Петля — то же, что и непрерывное отображение окружности $S^1 \rightarrow X$.

Пространство петель $C(S^1, X)$ в X будем обозначать ΩX , если (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой, то $\Omega(X, x_0)$. В последнем все петли проходят через точку x_0 . Постоянную петлю будем обозначать $\varepsilon(t) = x_0$.

На $\Omega(X, x_0)$ можно ввести умножение так, как мы это сделали для двух путей, один из которых заканчивается, а второй начинается в той же точке: если $\varphi, \psi: I \rightarrow X$ — петли, то произведение петель определяется как

$$(6) \quad (\varphi\psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & 0 \leq t < 1/2 \\ \psi(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Обратная петля $\bar{\varphi}$ к петле φ вводится как $\bar{\varphi} = \varphi(1 - t)$. Эти операции определяют структуру группы на гомотопических классах $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$. Чтобы убедиться в этом, проверим, что умножение и взятие обратного элемента корректно определено на классах эквивалентности, то есть

- (1) если $\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$, то $\varphi\psi \simeq \varphi'\psi'$;
- (2) если $\varphi \simeq \varphi'$, то $\bar{\varphi} \simeq \bar{\varphi}'$;
- (3) для всякой петли φ верно $\varphi\bar{\varphi} \simeq \bar{\varphi}\varphi \simeq \varepsilon$;
- (4) для всякой петли φ верно $\varepsilon\varphi \simeq \varphi\varepsilon$.

Итак, мы доказали, что $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$ — группа. Эта группа называется *фундаментальной группой пространства (X, x_0)* и обозначается $\pi_1(X, x_0)$ или просто $\pi_1(X)$, если ясно, о какой отмеченной точке идёт речь.

Утверждение 3.4. *Если X линейно связно, то для $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ для всяких $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. □

Утверждение 3.5. *Фундаментальная группа π_1 также является гомотопически инвариантным ковариантным функтором $\text{Top} \rightarrow \mathcal{G}r$.*

Доказательство. Каждому отображению $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ставится в соответствие гомоморфизм групп $\pi_1(f) = f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $f_*([\varphi]) = [f \circ \varphi]$. Убедимся, что это действительно гомоморфизм. Пусть $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X)$, тогда

$$f_*([\varphi][\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f_*([\varphi])f_*([\psi]).$$

Несложно убедиться, что это в самом деле функтор. В самом деле, пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ — отображения, сохраняющие отмеченные точки, тогда

$$(g \circ f)^*([\varphi]) = [(g \circ f) \circ \varphi] = [g \circ (f \circ \varphi)] = g_*([f \circ \varphi]) = (g_* \circ f_*)([\varphi]).$$

Гомотопическая инвариантность означает, что если $f, g: X \rightarrow Y$ и $f \simeq g$, то $f_* = g_*$:

$$f_*([\varphi]) = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g_*([\varphi]).$$

□

Следствие 3.1. *Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ — изоморфизм.*

Следствие 3.2. *Если X стягиваемо, то $\pi_1(X) = 0$.*

Так, фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = 0$

Утверждение 3.6. $\pi_1(S^n) = 0$ при $n \geq 2$.

Доказательство. Следствие теоремы о клеточной аппроксимации. □

Теорема 3.1. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. □

Перейдём к классическим результатам, которые элементарно получаются из свойств фундаментальной группы.

Теорема 3.2 (Брауэр, 1909). Если $f: D^n \rightarrow D^n$ непрерывно, то существует $x \in D^n$ такой, что $x = f(x)$.

Доказательство. □

Теорема 3.3. (Борсук, Улам,)

Теорема 3.4. (основная теорема алгебры)

Обсудим ещё некоторые свойства фундаментальной группы как функтора.

3.5. Топологические группы, H -группы и H -когруппы. В H -группах умножение определено с точностью до гомотопии

Определение 3.8. Будем говорить, что топологическое пространство X — H -группа, если определены отображения $\mu: X \times X \rightarrow X$, $i: X \rightarrow X$ и постоянное отображение $e: X \rightarrow X$ такие, что

3.6. Теорема Зейферта-ван Кампена. свободное произведение
категорный смысл — сохранение пушаутов

3.7. Фундаментальная группа клеточного пространства. Классификация двумерных поверхностей.

3.8. Накрытия. свойство поднятия пути и гомотопии, универсальное накрытие, классификация накрытий, теорема Нильсена-Шраера