Содержание

1. Общая топология

Если вы захотите изучить *непрерывность* в самом общем случае, вы придёте к понятиям *окрестности*, *топологии* и *непрерывного отображения*.

В параграфе 1 мы обсудим, каким образом можно мыслить, чтобы рассмотрение этих вещей выглядело сколько-то естественно. Далее будет рассматриваться топологическая машинерия и её пересечение с категорными явлениями, которая закончится фундаментальной группой и её классическими приложениями.

Всюду в этой главе под пространством мы понимаем топологическое пространство, а под отображениями — непрерывные отображения между ними.

1.1. Топологическое пространство и непрерывные отображения.

Вспомним школьное определение непрерывности функции в точке, которое приводится в любом учебнике по введению в матанализ.

Определение 1.1. *Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Школьнику оно может быть объяснено, например, так: представим груз, подвешенный на нитке. Если на груз положить сверху дополнительный грузик, незначительный по массе в сравнении с самим грузом, то нитка незаметно для нашего глаза растянется. Мы говорим, что длина нити *непрерывно зависит* от подвешенной массы. Если положить слишком большой грузик, то нитка растянется слишком сильно и порвётся...

Посмотрим, как это определение обобщить. Для начала, его можно развернуть, используя ε-δ-формализм:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon \forall x\colon |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Первый возможный шаг — это замена модулей разности на *расстояния* между точками.

Определение 1.2. *Метрикой или расстоянием на множестве X называют функцию $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам:*

(1) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) \geqslant 0$;
(2) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(3) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(4) $\forall x, y, z \in X\ \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Множество X с введёной на ней метрикой ρ называют метрическим пространством и пишут (X, ρ).

Модуль разности $d(x, y) = |x - y|$ удовлетворяет всем четырём аксиомам. В сущности, при доказательстве свойств предела — арифметических и прочих — ничем, кроме этих свойств модуля, мы не пользуемся. Иными словами, о конкретном виде метрики можно не думать, нужны лишь её свойства. Теперь мы можем перенести определение непрерывности в точке с числовых функций на отображения между множествами, на которых введена метрика.

Определение 1.3. *Пусть (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства. Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon \forall x\colon \rho(x, x_0) < \delta\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Можно пойти дальше. В метрическом пространстве (X, ρ) определим *δ-окрестность точки x* как множество $U_\delta(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \delta\}$, это шар радиуса δ с центром в точке x. Определение непрерывности тогда можно записать как

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon \forall x \in U_\delta(x_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)), \tag{3}$$

или, ещё короче,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)). \tag{4}$$

Повторим фокус снова: забудем про внутреннее устройство окрестности. Будем теперь считать, что каждой точке x множества X приписано семейство $\mathcal{O}(x)$ подмножеств множества X, называемых окрестностями этой точки, свойства которых мы потом отдельно выделим. Наиболее общо, определение непрерывности в точке теперь выглядит так, если мы предполагаем, что на множествах X и Y введены эти системы окрестностей.

Определение 1.4. *Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке $x \in X$, если*

(5) $$\forall U \in \mathcal{O}(f(x))\ \exists V \in \mathcal{O}(x)\colon f(V) \subset U.$$

Что мы ожидаем от окрестностей точки? Выделим следующие естественные их свойства.

(1) если $U, V \in \mathcal{O}(x)$, то $U \cap V \in \mathcal{O}(x)$;
(2) если $U, V \in \mathcal{O}(x)$, то $U \cup V \in \mathcal{O}(x)$;

Эта система аксиом, хоть и выглядит естественной, нигде не применяется. Она эквивалентна традиционному определению топологического пространства.

Итак, топология на множестве — необходимая структура для определения непрерывных отображений.

Определение 1.5. *Пусть X — множество. Топологией на X назовём семейство τ подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим требованиям:*

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;
(2) для всякого конечного набора подмножеств $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ верно $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i \in \tau$;
(3) для всякого набора множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \tau$ верно $\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \in \tau$.

Если $U \in \tau$, то U называют открытым подмножеством X (в этой топологии). Множество $V \subset X$ замкнуто, если его дополнение открыто.

Поясним то, что написано. С первым пунктом определения 1.5 всё должно быть более-менее ясно: пустое множество и всё множество будем считать открытыми. Согласно второму пункту, *пересечение* всякого *конечного* семейства открытых множеств снова открыто. Третий же пункт утверждает, что *объединение любого* семейства открытых множеств открыто.

Из определения ясно, что задание на множестве замкнутых подмножеств эквивалентно введению топологии. Для них, как это следует из правил де Моргана, любые *конечные* объединения замкнуты и *произвольные* пересечения замкнуты.

Определение 1.6. *Пусть $U \subset X$ открыто в X, а $x \in U$. Тогда U — окрестность точки x.*

Покажем, что система аксиом окрестностей точки эквивалентна заданию топологии на множестве.

Приведём первые примеры.

(1) На всяком множестве X можно рассматривать топологии $\{\varnothing, X\}$ и 2^X. Последнюю также называют *дискретной*: одноточечные множества открыты и замкнуты и каждую точку можно отделить от всех остальных окрестностью, состоящей из её одной.
(2) На непустом множестве X $\{\varnothing, \{x\}, X\}$ — топология.
(3) На прямой $X = \mathbb{R}$ открытыми объявляются все не более чем счёные объединения интервалов вида (a, b), где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. На эту топологию будем ссылаться как на обычную или стандартную.
(4) На $\mathbb{R}$ можно ввести и другую топологию: замкнутыми пусть будут все конечные множества и X.
(5) На отрезке $I = [0, 1]$ открытыми объявляются пересечения открытых в стандартной топологии на $\mathbb{R}$ множеств с I.

Определение 1.7. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого в Y множества U открыт в X.*

Эквивалентно, отображение непрерывно, если прообраз замкнутого множества замкнут.

Утверждение 1.1. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть f непрерывна, а $x \in X$. Рассмотрим произвольную окрестность $V \subset Y$ точки $f(x)$, тогда $U = f^{-1}(V)$ открыто и $x \in U$.

Достаточность. Пусть f непрерывна в каждой точке $x \in X$. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$. Для каждого $y \in V$ множество V — его окрестность, а для каждого $x \in X$ такого, что $f(x) \in V$, найдётся его окрестность $U(x)$ такая, что $f(U(x)) \subset V$, значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Имеем:

$$\bigcup_{x\in X, f(x)\in V} U(x) \subset f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x\in X, f(x)\in V} \{x\} \subset \bigcup_{x\in X, f(x)\in V} U(x).$$

Таким образом, прообраз $f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in X, f(x)\in V} U(x)$ открыт как объединение открытых множеств. $\square$

Класс топологических пространств вместе с непрерывными отображениями в качестве морфизмов составляют *топологическую категорию* $\mathcal{T}op$. Конечным объектом в этой категории будет одноточечное пространство $\{*\}$, так как в него существует единственное отображение. О суммах и произведениях в этой категории речь пойдёт в следующем параграфе.

Изоморфизмы в категории $\mathcal{T}op$ называют *гомеоморфизмами*. Так, непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ — гомеоморфизм, если оно биективно и обратное отображение $f^{-1}\colon Y\to X$ непрерывно. Если для пространств X и Y найдётся гомеоморфизм $f\colon X\to Y$, то они называются *гомеоморфными*, пишут $X\equiv Y$. В топологии пространства изучаются с точностью до гомеоморфизма. Так, единичный евклидов шар $D^n=B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$ (он же n-мерный диск) гомеоморфен n-мерному кубу $[-1;1]^n$. Вообще говоря, всякое односвязное тело в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно n-мерному диску.

Одной биективности недостаточно для гомеоморфности: так, например, если $S^1=\{e^{2\pi it}|\varphi\in[0,1)\}$, то $e^{2\pi it}\mapsto t$ не является гомеоморфизмом, что и естественно: нельзя превратить окружность в интервал, нигде её не разорвав.

Топологии на множестве X можно сравнивать: если τ_1 и τ_2 — топологии на X, то говорят, что τ_1 *сильнее (тоньше)* τ_2 и что τ_2 *слабее (грубее)* τ_1, если $\tau_2\subset\tau_1$. Если никакое включение не выполняется, то топологии не сравнивают. Так, топология $\{\varnothing,X\}$ — слабейшая топология на X, а 2^X — сильнейшая.

В задании топологий на множестве важны понятия базы и предбазы.

Определение 1.8. *Семейство подмножеств $\beta\subset\tau$ пространства X — база топологии τ на X, если всякое открытое множество представимо в виде (произвольного) объединения открытых множеств из β.*

Определение 1.9. *Семейство подмножеств $\sigma\subset\tau$ пространства X, конечные пересечения множеств которого образуют базу топологии τ на X, — это предбаза топологии τ.*

Предбаза — это набор множеств, “порождающий” топологию. Пусть имеется семейство σ подмножеств множества X. Мы хотим, чтобы эти множества были открыты в некоторой топологии, причём желательно, чтобы она не содержала “лишних” открытых множеств. Тогда из этого набора нужно получить всевозможные конечные пересечения входящих в него множеств, а то, что получилось, любым образом пробъединять. Эквивалентно, рассмотрим множество $\mathcal{T}(\sigma)$ всех топологий на X, которые содержат в себе семейство σ. Тогда σ — предбаза топологии $\tau_\sigma=\bigcap\limits_{\tau\in\mathcal{T}(\sigma)}\tau$.

Определение 1.10. *Точка $x\in X$ — точка прикосновения X, если каждая её окрестность U содержит ещё какую-то точку из X, то есть $(U\setminus X)\cap X\neq\varnothing$.*

Утверждение 1.2. *Множество $A\subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои точки прикосновения.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть A замкнуто, а $x\in X$ — точка прикосновения A. Предположим, $x\in X\setminus A$. По определению любая окрестность U точки x содержит точку, отличную от x и входящую в A. Поскольку $X\setminus A$ открыто и является окрестностью точки x, оно пересекает A. Противоречие.

Достаточность. Пусть A содержит все свои точки прикосновения. Возьмём $x\in X\setminus A$, тогда, раз x — не точка прикосновения A, найдётся её окрестность $U(x)$ такая, что $A\cap U(x)=\varnothing$. Имеем $\bigcap_{x\in X\setminus A}U(x)\subset X\setminus A\subset\bigcap_{x\in X\setminus A}\{x\}\subset\bigcap_{x\in X\setminus A}U(x)$. Значит, $X\setminus A=\bigcap_{x\in X\setminus A}U(x)$. $\square$

1.2. Отделимость.

Определение 1.11. *Пространство X хаусдорфово, если для всякой пары точек $x,y\in X$, $x\neq y$, найдутся их окрестности U,V такие, что $U\cap V=\varnothing$.*

1.3. **Сходимость, последовательности и направленности.** Введения топологии достаточно, чтобы определить *сходимость*.

Определение 1.12. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$. Тогда $x_i\to x$, если для всякой окрестности U точки x найдётся $n\in\mathbb{N}$ такой, что для всех $m\geqslant n$ $x_m\in U$.*

1.4. **Компактность.** Без компактности в топологии абсурд и коррупция.

Определение 1.13. *Говорят, что семейство $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X$ покрывает (или является покрытием) множества $A \subset X$, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ покрывает A, то $\mathcal{U}'$ — подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$.*

Определение 1.14. *Пусть $K \subset X$ таков, что из любого покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X$, состоящего из открытых подмножеств пространства X, можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Тогда пространство K называют компактом.*

Утверждение 1.3. *Пусть X компактно, а $f\colon X \to Y$ непрерывно. Тогда $f(X) \subset Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — открытое покрытие $f(X)$, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — открытое покрытие X. Выделим из него открытое подпокрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Значит, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ — открытое подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$. $\square$

Утверждение 1.4. *Пусть X компактно, а $A \subset X$ замкнуто. Тогда A — компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — открытое покрытие пространства A, тогда $V_i = U_i \cap A$ для какого-то открытого в X множества U_i, $i = \overline{1,n}$. Для X $\mathcal{U} = \{X \setminus A\} \cup \{U_i\}$ — открытое покрытие. Выделим из него конечное подпокрытие $\mathcal{U}' = (X \setminus A) \cup \{U_1, \ldots, U_n\}$, значит, $\mathcal{V}' = \{V_1, \ldots, V_n\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathcal{V}$. $\square$

Следующее вспомогательное утверждение всплывает, например, в лемме Гейне-Бореля, классифицирующей все компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 1.5. *Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут.*

Важное для приложений свойство, вытекающее из компактности, — *секвенциальная компактность*. В матанализе мы любим изучать свойства последовательностей.

Определение 1.15. *Пространство X секвенциально компактно, если из всякой последовательности элементов из X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Утверждение 1.6. *Компактное пространство секвенциально компактно.*

2. Операции и конструкции

Определение 2.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, а на Y определена топология. Начальная топология (initial topology) на X относительно отображения f — это слабейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.*

Несложно дать явное задание этой топологии, стоит только вспомнить определение непрерывности: необходимо и достаточно, чтобы были открыты все множества вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y, то есть $\sigma = \{f^{-1}(U) | U \text{ — открыто в Y}\}$ — предбаза начальной топологии. Эта терминология не может считаться устоявшейся в русской литературе и не встречается за пределами этого конспекта.

Двойственным понятием будет *финальная топология.*

Определение 2.2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, а на X определена топология. Финальная топология (final topology) на Y относительно отображения f — это сильнейшая топология, относительно которой отображение f непрерывно.*

Зададим явно и эту топологию: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X.

Вопрос 2.1. *Что меняется, когда вместо одного отображения $f\colon X \to Y$ рассматривается семейства отображений $f_i\colon X \to Y_i$ и $f_i\colon X_i \to Y$ в определениях начальной и финальной топологии соответственно?*

Приведём классические примеры этих топологий.

Индуцированная топология. Пусть $A \subset X$. Рассмотрим *отображение включения* $i\colon A \hookrightarrow X$, $i(a) = a$. Если на X есть топология, то, чтобы задать её на A, можно потребовать, чтобы все открытые в A множества имели вид $U \cap A$, где U открыто в X. Элементарно проверяется, что такие множества действительно образуют топологию на A и что i оказывается непрерывным. Более того, это слабейшая топология, относительно которой включение i непрерывно.

Фактортопология. Пусть X — топологическое пространство, на котором определено *отношение эквивалентности* $\sim$. Рассмотрим множество $X/\sim$ и каноническую *проекцию* $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \to [x]$. Множество $X/\sim$ можно снабдить топологией, потребовав, чтобы $U \subset X/\sim$ было открыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыт в X.

Полезный пример фактортопологии — *стягивание.* Пусть $A \subset X$, а точки $x, y \in X$ связаны отношением эквивалентности $\sim$ тогда и только тогда, когда $x, y \in A$. Тогда говорят, что X/A получено стягиванием подпространства A в точку.

Топология произведения. Пусть X, Y — топологические пространства. Прямое произведение $X\times Y$ можно наделить естественной топологией, потребовав, чтобы канонические проекции $\pi_X\colon X\times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ были непрерывны. Аналогично топология определяется для произведения произвольного семейства пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, тогда требуется, чтобы все $\pi_\beta\colon \prod X_\alpha \to X_\beta$ были непрерывны. Она называется *тихоновской.* В случае конечного произведения её задание тривиально: множества вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, образуют базу в $X \times Y$.

Если на $X \times Y$ ввести тихоновскую топологию, это пространство станет категорным произведением пространств X и Y.

Классический результат — теорема Тихонова.

Теорема 2.1. *Если все X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, компактны. Тогда $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ компактно.*

Доказательство. Докажем теорему для произведения двух пространств, тогда то же будет верно для любого конечного произведения.

Утверждение теоремы в случае бесконечного числа множителей эквивалентно аксиоме выбора. $\square$

Несвязное объединение. Теоретико-множественное несвязное объединение определяется следующим образом. Пусть A и B множества, возможно, имеющие ненулевое пересечение. Мы хотим, чтобы в несвязное объединение элементы из пересечения вошли “дважды”: как элементы A и как элементы B. Положим $A \sqcup B = \{(a, 0), (b, 1) | a \in A, b \in B\}$. Вместе с этим определяются вложения $i_A\colon A \hookrightarrow A \sqcup B$, $a \mapsto (a, 0)$. Эта конструкция является категорной суммой в категории множеств.

Если X и Y — топологические пространства, то $A \sqcup B$ наделяется естественной топологией и оказывается суммой в топологической категории.

Цилиндр. Пусть X — пространство. *Цилиндром над* X называют произведение $X \times I$.

Конус. Если стянуть цилиндр над X по верхнему основанию, то получится *конус над* X:

$$CX = (X \times I)/(X \times \{1\}).$$

Надстройка. Если же у конуса над X нижнее основание, то получится *надстройка над* X:

$$\Sigma X = CX/(X \times \{0\}).$$

Эквивалентно, надстройка над X — это два конуса над X, склеенные по основаниям.

Утверждение 2.1. *(экспоненциальный закон) Имеет место естественная биекция* $\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ *(в других обозначениях* $\Phi\colon Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$*), ставящее в соответствие отображению* $f\colon X \times Y \to Z$ *отображение* $\Phi f\colon X \to C(Y, Z)$*, действующее по правилу* $(\Phi f)(x)(y) = f(x, y)$*. Если* X *хаусдорфово, а* Y *хаусдорфово и локально компактно, то* Φ *— гомеоморфизм.*

Утверждение 2.2. *Пусть* X *хаусдорфово. Тогда имеет место естественный по* X *и* Y *изоморфизм* $C(\sigma X, Y) \to C(X, \Omega Y)$.

Доказательство. Согласно экспоненциальному закону, имеет место изоморфизм

$$C(X \times I, Y) \to C(X, C(I, X)).$$

$\square$

3. Гомотопическая топология

3.1. **Пространства с отмеченной точкой.** Так будем называть пары (X, x_0), где X — топологическое пространство, а $x_0 \in X$. Про непрерывное отображение $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ будем говорить, что оно *сохраняет отмеченную точку*, если $f(x_0) = y_0$. Пространства с отмеченной точкой вместе с отображениями, их сохраняющими, в качестве морфизмов, образуют *пунктированную категорию* $\mathcal{T}op^*$.

В терминах пространств с отмеченной точкой даётся определение фундаментальной группы, высших гомотопических групп и групп гомологий. Для их нужд предыдущие конструкции прокачаем до их аналогов с отмеченными точками.

Надстройка. Для пространства X определим

$$\Sigma X = X \times I$$

Определим *букет*, являющийся суммой в категории $\mathcal{T}op^*$.

Определение 3.1. *Пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство пространств с отмеченными точками. Их букетом назовём пространство*

$$\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha / \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}.$$

Иными словами, все пространства приклеили друг к другу по отмеченным точкам: так, букет двух окружностей — восьмёрка.

Произведение в $\mathcal{T}op^*$ менее хитрое: отмеченной точкой в п

3.2. **Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.** Если попытаться придать точный смысл *деформации*, то получится гомотопия. Нарисуем в воображении некоторый объект, будем считать, что он был получен как непрерывный образ $f(X)$ какого-то множества X в Y. "Раскадрируем" то, как объект деформируется с течением времени, получим серию картинок $f_0(X) = f(X), f_1(X), \ldots, f_n(X) \subset Y$. Эту серию можно собрать в одно отображение $H\colon X \times \{0, 1, \ldots, n\} \to Y$, непрерывное по первой переменной. Пожелав, чтобы кадры менялись непрерывно, мы определим отображение $H\colon X \times I \to Y$ такое, что на каждом шаге $t \in I$ имеем некоторую непрерывную функцию $f_t(x) = H(x, t)$, причём $f_0 = f$, $f_1 = g$.

Изучение пространств и отображений с точностью до гомотопии важно, потому что все используемые функторы из топологической категории не чувствительны к гомотопиям. Прежде чем давать определения, докажем полезное и несложное утверждение, на которое будет удобно сослаться в дальнейшем.

Лемма 3.1 (о склейке)**.** *Пусть пространство X представлено конечным объединенем замкнутых множеств X_i, и заданы непрерывные отображения $f_i\colon X_i \to Y$, причём если $X_{ij} = X_i \cap X_j$ непусто, то $f_i|_{X_{ij}} = f_j|_{X_{ij}}$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $f|_{X_i} = f_i$.*

Доказательство. Искомое отображение так и задаётся: $f(x) = f_i(x)$, если $x \in X_i$, и в силу условия леммы корректно определено. Покажем, что оно непрерывно. Пусть $M \subset Y$ замкнут, тогда

$$f^{-1}(M) = \bigcap_i X_i \cap f^{-1}(M) = \bigcap_i f_i^{-1}(M).$$

Прообраз замкнутого множества замкнут как конечное объединение замкнутых множеств. $\square$

Определение 3.2. *Гомотопией между отображениями $f, g\colon X \to Y$ называется отображение $H\colon X \times [0, 1] \to Y$ такое, что $H|_{t=0} = f$ и $H|_{t=1} = g$, про сами отображения будем говорить, что они гомотопны и писать $H\colon f \simeq g$ или просто $f \simeq g$.*

Утверждение 3.1. *Отношение "быть гомотопным" на пространстве $C(X, Y)$ — отношение эквивалентности.*

Доказательство. **Рефлексивность.** Отображение $f \in C(X, Y)$ гомотопно самому себе через гомотопию $H(x, t) = f(x)$.

Симметричность. Если $H\colon f \simeq g$ для $f, g \in C(X, Y)$, то $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ — гомотопия между g и f.

Транзитивность. Пусть $F\colon f \simeq g$ и $G\colon g \simeq h$ для $f,g,h \in C(X,Y)$. Представим себе две копии цилиндра $X \times I$: с нижнего основания первого цилиндра бьёт f, с его верхнего основания и с нижнего основания второго цилиндра бьёт g, а h определена на верхнем основании второго цилиндра. Чтобы определить гомотопию $H\colon f \simeq h$, "склеим" эти цилиндры по тем основаниям, на которых определено g и сожмём полученный цилиндр в два раза. На нём можно задать отображение

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), 0 \leqslant t < 1/2, \\ G(x,2t-1), 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

являющееся искомой гомотопией. Гомотопия H непрерывна в силу леммы о склейке. □

Факторпространство $C(X,Y)/\simeq$ будем обозначать $[X,Y]$ — это пространство классов гомотопных отображений из X в Y. Гомотопический класс отображения $f \in C(X,Y)$ обозначим $[f] \in [X,Y]$. Топологические пространства вместе с пространствами классов гомотопных отображений образуют категорию $h\mathcal{T}op$.

Утверждение 3.2. *Пусть $f,g\colon X \to Y$, причём $f \simeq g$, а $f',g'\colon Y \to Z$, причём $f' \simeq g'$. Тогда $f' \circ f \simeq g' \circ g$.*

Определение 3.3. *Пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ такие, что $f \circ g = id_Y$ и $g \circ f = id_X$. Отображения f и g называют гомотопическими эквивалентностями.*

Легко видеть, что это определение изоморфизма в $h\mathcal{T}op$.

Простейший пример — $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$. Построим гомотопию между вложением сферы $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $p\colon \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$, $x \to x/||x||$, положим

$$H(x,t) = tx + (1-t)x/||x||.$$

Определение 3.4. *Пространство X стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке pt.*

Примеры стягиваемых пространств: I, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty$, S^∞.

По определению для доказательства стягиваемости нужно привести отображения $f\colon X \to pt$ и $g\colon pt \to X$ такие, что $f \circ g\colon pt \to pt \simeq \mathrm{id}_{pt}$ и $g \circ f\colon X \to X \simeq \mathrm{id}_X$. Отображение $X \to pt$ единственно, а первая гомотопность тривиально выполнена, поэтому нужно убедиться в том, что постоянное отображение $X \to X$ гомотопно тождественному.

Покажем, что $\mathbb{R}^n$ стягиваемо. Пусть $f(x) = 0$. Тогда искомая гомотопия — это просто $H(x,t) = tx$.

3.2.1. *Свойство продолжения гомотопии.* Обсудим то, что в англоязычной литературе называется homotopy extension property (HEP).

Определение 3.5. *Отображение $r\colon X \to X$ — ретракция, если $r^2 = r$.*

Ретракция — это топологический аналог проектора. Эквивалентно, r — ретракция, если для $A = r(X)$ верно $r|_A = \mathrm{id}_A$. Множество A называется *ретрактом*. Если ретракция $r\colon X \to X$ гомотопна id_X, то она называется *деформационным ретрактом*.

Вместе с пространствами с отмеченными точками будем также рассматривать *пары* (X,A), где $A \subset X$. *Отображение пар* $f\colon (X,A) \to (Y,A)$ — это такое отображение, что $f(A) \subset B$. Ясно, что пары пространств вместе с отображениями пар образуют категорию, и что пространства с отмеченными точками — их частный случай.

Будем говорить, что пара (X,A) удовлетворяет *свойству продолжения гомотопии* (или *является парой Борсука*), если для любого отображения $f\colon X \to Y$ и гомотопии $F\colon A \times I \to Y$ таких, что $F|_{A\times\{0\}} = f|_A$, существует гомотопия $\hat{F}\colon X \times I \to Y$ такая, что $\hat{F}|_{X\times\{0\}} = f$ и $\hat{F}|_{A\times I} = F$. Иными словами, (X,A) обладает HEP, если отображение $X\times\{0\}\cup A\times I \to Y$ можно продолжить до отображения $X \times I \to Y$. Вложение $A \hookrightarrow X$, если (X,A) — пара Борсука, называют *корасслоением*.

Пусть X — это основание стакана, а A — граница этого основания, тогда (X,A) — пара Борсука, если отображение из всего стакана можно продолжить на весь цилиндр.

3.3. **Клеточные пространства и теорема о клеточной аппроксимации.**

Утверждение 3.3. *Пусть X — клеточное пространство, а клеточное подпространство $A \subset X$ стягиваемо. Тогда $X \simeq X/A$.*

3.4. **Фундаментальная группа.**

Определение 3.6. *Путь в пространстве X — это непрерывное отображение $I \to X$.*

В пространстве с отмеченной точкой (X, x_0) все пути начинаются в точке x_0. Если путь $f\colon I \to X$ заканчивается в точке $x = f(1)$, а путь $g\colon I \to X$ в ней начинается, то есть $g(0) = x$, то можно определить *произведение путей* $fg\colon I \to X$ как $(fg)(t) = f(2t)$ при $0 \leqslant t < 1/2$ и $(fg)(t) = g(2t-1)$ при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Произведение корректно определено в силу леммы о склейке.

Можно убедиться, что такое умножение ассоциативно, то есть если определено произведение $(fg)h$, то определено и $f(gh)$, причём $(fg)h = f(gh)$.

Определение 3.7. *Петля в пространстве X — это путь $f\colon I \to X$ такой, что $f(0) = f(1)$.*

Петля — то же, что и непрерывное отображение окружности $S^1 \to X$.

Пространство петель $C(S^1, X)$ в X будем обозначать ΩX, если (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой, то $\Omega(X, x_0)$. В последнем все петли проходят через точку x_0. Постоянную петлю будем обозначать $\varepsilon(t) = x_0$.

На $\Omega(X, x_0)$ можно ввести умножение так, как мы это сделали для двух путей, один из которых заканчиватся, а второй начинается в той же точке: если $\varphi, \psi\colon I \to X$ — петли, то произведение петель определяется как

$$(\varphi\psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t), 0 \leqslant t < 1/2 \\ \psi(2t-1), 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Обратная петля $\overline{\varphi}$ к петле φ вводится как $\overline{\varphi} = \varphi(1-t)$. Эти операции определяют структуру группы на гомотопических классах $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$. Чтобы убедиться в этом, проверим, что умножение и взятие обратного элемента корректно определено на классах эквивалентности, то есть

(1) если $\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$, то $\varphi\psi \simeq \varphi'\psi'$;
(2) если $\varphi \simeq \varphi'$, то $\overline{\varphi} \simeq \overline{\varphi'}$;
(3) для всякой петли φ верно $\varphi\overline{\varphi} \simeq \overline{\varphi}\varphi \simeq \varepsilon$;
(4) для всякой петли φ верно $\varepsilon\varphi \simeq \varphi\varepsilon$.

Итак, мы доказали, что $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$ — группа. Эта группа называется *фундаментальной группой пространства* (X, x_0) и обозначается $\pi_1(X, x_0)$ или просто $\pi_1(X)$, если ясно, о какой отмеченной точке идёт речь.

Утверждение 3.4. *Если X линейно связно, то для $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ для всяких $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. □

Утверждение 3.5. *Фундаментальная группа π_1 также является гомотопически инвариантным ковариантным функтором $\mathcal{T}op \to \mathcal{G}r$.*

Доказательство. Каждому отображению $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ставится в соответствие гомоморфизм групп $\pi_1(f) = f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $f_*([\varphi]) = [f \circ \varphi]$. Убедимся. что это действительно гомоморфизм. Пусть $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X)$, тогда

$$f^*([\varphi][\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f^*([\varphi])f^*([\psi]).$$

Несложно убедиться, что это в самом деле функтор. В самом деле, пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — отображения, сохраняющие отмеченные точки, тогда

$$(g \circ f)^*([\varphi]) = [(g \circ f) \circ \varphi] = [g \circ (f \circ \varphi)] = g^*([f \circ \varphi]) = (g^* \circ f^\circ)([\varphi]).$$

Гомотопическая инвариантность означает, что если $f, g\colon X \to Y$ и $f \simeq g$, то $f^* = g^*$:

$$f^*([\varphi]) = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g^*([\varphi]).$$

□

Следствие 3.1. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f^*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ — изоморфизм.*

Следствие 3.2. *Если X стягиваемо, то $\pi_1(X) = 0$.*

Так, фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = 0$

Утверждение 3.6. *$\pi_1(S^n) = 0$ при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Следствие теоремы о клеточной аппроксимации. □

Теорема 3.1. *$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. □

Перейдём к классическим результатам, которые элементарно получаются из свойств фундаментальной группы.

Теорема 3.2 (Брауэр, 1909)**.** *Если $f\colon D^n \to D^n$ непрерывно, то существует $x \in D^n$ такой, что $x = f(x)$.*

Доказательство. □

Теорема 3.3. *(Борсук, Улам,)*

Теорема 3.4. *(основная теорема алгебры)*

Обсудим ещё некоторые свойства фундаментальной группы как функтора.

3.5. Топологические группы, H-группы и H-когруппы.

В H-группах умножение определено с точностью до гомотопии

Определение 3.8. *Будем говорить, что топологическое пространство X — H-группа, если определены отображения $\mu\colon X \times X \to X$, $i\colon X \to X$ и постоянное отображение $e\colon X \to X$ такие, что*

3.6. Теорема Зейферта-ван Кампена.

свободное произведение

категорный смысл — сохранение пушаутов

3.7. Фундаментальная группа клеточного пространства. Классификация двумерных поверхностей.

3.8. Накрытия.

свойство поднятия пути и гомотопии, универсальное накрытие, классификация накрытий, теорема Нильсена-Шраера