## Основные понятия (продолжение)

1. Непрерывный образ компакта компактен.

2. Если $X/A$ хаусдорфово, то $A \subset X$ замкнуто. Приведите пример, когда $A \subset X$ замкнуто, но $X/A$ не хаусдорфово.

3. Отрезок и окружность негомеоморфны. *Указание.* Пространство $X$ называется *связным*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств, и *несвязным* в противном случае. Покажите, что связность является топологическим инвариантом (то есть сохраняется при непрерывных отображениях).

4. Отрезок и интервал негомеоморфны. *Указание.* Какой здесь подходящий инвариант?

5. а) Непрерывный образ отрезка — отрезок.
   б) **(Теорема Брауэра о неподвижной точке)** Пусть $f\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывно. Тогда существует точка $x \in [0,1]$ такая, что $x = f(x)$.

6. **(Теорема Борсука-Улама)** Если $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывно, то существует точка $x \in S^1$ такая, что $g(x) = g(-x)$. (Неформальное следствие: в каждый момент времени на экваторе Земли есть пара противоположных точек с равными температурами воздуха.)

7. **(Теорема Тихонова для конечного произведения)** Если $X$, $Y$ компактны, то $X \times Y$ компактно. (Теорема верна и для произвольного числа множителей: конечного, счётного, несчётного, неважно. Случай конечного произведения очевидно сводится к проверке для двух множителей, что можно сделать по-босяцки. В случае произвольного числа множителей теорема Тихонова следует из знаменитой аксиомы выбора и даже эквивалентна ей.)

## Пространства отображений

Напомню, что на пространстве отображений $\mathcal{C}(X,Y) = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ непрерывно}\}$ вводится компактно-открытая топология: это слабейшая топология, в которой множества вида $U^K = \{f\colon X \to Y | f(K) \subset U\}$, где $K \subset X$ компактно, а $U \subset Y$ открыто, открыты.

Можно показать, что если $Y$ — метрическое пространство с метрикой $d$, то эта топология порождается метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

8. Пространство непрерывных отображений $\mathcal{C}(X,Y)$ с компактно-открытой топологией не зря также обозначается как $Y^X$. Постройте естественную биекцию и докажите гомеоморфность:
$$\mathcal{C}(X, Y\times Z) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(X,Z), \quad \text{или} \quad (Y\times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

9. Пространство $Y$ *локально компактно*, если у каждой точки $y \in Y$ существует окрестность, замыкание которой компактно. (Вообще говоря, если $Y$ таково, что оно локально **свойство**, то всегда подразумевается, что это свойство выполняется для какой-то окрестности каждой точки, то есть оно *локально*). Определим отображение, ставящее в соответствие паре функций их композицию:
$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z) &\to \mathcal{C}(X,Z) \\ (f,g) &\mapsto g\circ f. \end{aligned}$$
   Докажите, что если $Y$ локально компактно и хаусдорфово, то $\Phi$ непрерывно. В частности, отсюда следует, что отображение вычисления
$$\begin{aligned} \mathrm{eval}\colon Y\times\mathcal{C}(Y,Z) &\to Z \\ (y,f) &\mapsto f(y). \end{aligned}$$
   непрерывно. Где в курсе линейной алгебры оно встречается?

10. **(Экспоненциальный закон (сложная задача))** Определено естественное отображение

$$\Phi\colon Z^{X\times Y} \to \left(Z^Y\right)^X,$$

ставящее в соответствие отображению $f\colon X\times Y\to Z$ отображение $\Phi(f)\colon X\to Z^Y$, переводящее $x\in X$ в отображение $\Phi(f)(x)(\cdot)=f(x,\cdot)$. Покажите, что $\Phi$ биективно, а также что если $X$ хаусдорфово, а $Y$ хаусдорфово и локально компактно, то $\Phi$ — гомеоморфизм.

11. Открыто ли множество $\{f\in C[0,1] |\ \forall x\in[0,1]\ 0<f(x)<1\}$?

12. (Для слушателей Константинова) Верно ли, что топология поточечной сходимости на пространстве отображений $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ делает его гомеоморфным произведению $\prod\limits_{x\in[0,1]}\mathbb{R}$?

13. Верно ли, что топология на $Y^X$ совпадает с топологией произведения $\prod\limits_{x\in X} Y$ для произвольного $X$?