Начала общей топологии

1. Открытые множества в смысле окрестностной топологии — это в точности открытые множества.

2. Подмножество замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои точки прикосновения.

3. В хаусдорфовом пространстве точка — замкнутое множество.

4. Если X компактно, Y хаусдорфово, а $f\colon X \to Y$ непрерывно, то прообраз $f^{-1}(V)$ всякого компактного подмножества $V \subset Y$ компактен в X.

5. Приведите пример отображения $f\colon X \times Y \to Z$, непрерывного по каждой переменной, но не непрерывного.

6. Существует ли биекция между компактными пространствами, не являющаяся гомеоморфизмом?

7. Канторово множество гомеоморфно счётному произведению множества $\{0,1\}$ на себя: $\mathcal{C} \cong \prod\limits_{i=1}^{\infty}\{0,1\}$.

8. Индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.

9. Фактор-топология на $X/\sim$ является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение проекции $X \to X/\sim$ непрерывно.

10. Пространство $[0,1]/\{0,1\}$ гомеоморфно S^1. Сформулируйте и докажите более общее утверждение.

11. **(Лемма о склейке.)** Пусть пространство X представлено конечным объединением замкнутых множеств X_i, $i = \overline{1,n}$, и заданы отображения $f_i\colon X_i \to Y$, причём если $X_{ij} = X_i \cap X_j$ непусто, то $f_i|_{X_{ij}} = f_j|_{X_{ij}}$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $f|_{X_i} = f_i$.