Forecast Framework

Прогнозирование временных рядов

Теоретическая база

Игорь Успеньев

Версия документа: 1.0.7 (8 октября 2016)

ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N – множество натуральных чисел.
Z – множество целых чисел.
R – множество действительных чисел.
◀ – начало доказательства.
▶ – конец доказательства.
$[a,b]$ – отрезок с концами в точках a и b.
$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A.
$A=\{a,b,c\}$ – множество A состоит из элементов a, b, c.
$A \subset B$ – подмножество A включено в множество B.
$A \subseteq B$ – подмножество A включено в множество B или совпадает с ним.
$A = B \cup C$ – множество A равно объединению множеств B и C.
$\{x_i\}$ – бесконечное множество элементов x_i.
$\{(a_i,b_i):\ldots\}$ – множество элементов, состоящих из двух значений (a_i,b_i), с условиями ... .
(a_0,b_0) – точка с координатами a_0, b_0.
$U(x_0)$ – окрестность точки x_0.
$U(x_0,\varepsilon)$ – ε-окрестность точки x_0.
$\exists v:\ldots$ – существует такое v, что... .
$\forall v$ – для любого v.
$v = f(t)$ – переменная v является функцией переменной t.
$f(t,v,g,u)$ – функция нескольких переменных: t,v,g,u.
$u(t_0)$ – значение функции $u(t)$ в точке t_0.
$g(u(t))$ – композиция функций $y=u(t)$ и $g(y)$ (сложная функция аргумента t).
$\sum\limits_{i=m}^{n} d_i$ – сумма $(n-m+1)$ слагаемых $d_m, d_{m+1},\ldots,d_i,\ldots,d_{n-1},d_n$.
$i=1,\ldots,n$ – число i принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до n включительно.
$t \to b$ – переменная t стремится к точке b.
$f(x)=\begin{cases} a:\ldots \\ b:\ldots \end{cases}$ – функция $f(x)$ принимает значение a при условии ..., и принимает значение b при условии ... .
dt – дифференциал аргумента t.
$v'(t), v'_t, \dfrac{dv}{dt}, v'$ – производная функции $v = f(t)$.
$v^{(n)}$ – производная n порядка функции v.
a^b – возведение в степень с основанием a и показателем степени b.
$\ln a$ – натуральный логарифм от числа a (по основанию e).
$\log_a b$ – логарифм числа b по основанию a.
$\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$ – синус, косинус, тангенс, котангенс числа a.
$\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ – арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа a.
$\operatorname{sh} a$, $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{th} a$, $\operatorname{cth} a$ – гиперболические синус, косинус, тангенс, котангенс числа a.

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Задача прогнозирования временных рядов обычно связана с исследованием поведения процессов, природа которых недостаточно изучена. При этом имеется множество внешних наблюдаемых величин, значения которых изменяются с течением времени, образуя временные ряды. Документ посвящен изложению теории прогнозирования временных рядов, обоснованию её фундаментальных принципов и исследованию проблем решения задач прогнозирования. Цель – способствовать выработке универсальных методов анализа и прогнозирования закономерностей без применения экспертной оценки.

На сегодняшний день общепринятым подходом прогнозирования временных рядов является эвристика. Каждый временной ряд прогнозируется с прямым или косвенным участием эксперта, который закладывает предопределенный набор апроксимирующих функций и субъективно оценивает результат. Даже так называемые самообучающиеся системы не лишены привязки к готовым шаблонам или принципам. И главное – ни один существующий метод прогнозирования не может быть аналитически обоснован критериями оптимальности прогноза, поскольку таких критериев на сегодняшний день не существует. Статистические же методы позволяют лишь ответить на вопрос приемлемости выбранного метода прогнозирования до обнаружения неудовлетворительного несовпадения ожидаемого значения с наблюдаемым.

Чем сложнее поведение наблюдаемых величин, тем сложнее эвристическая модель и ниже ее точность. Независимо от выбранной эвристики лишь в частных случаях удается подобрать модель поведения наблюдаемой величины и спрогнозировать временной ряд в пределах приемлемой погрешности. В случае наличия достаточных сведений о причинно-следственных связях внутренней природы наблюдаемого процесса, удается декомпозировать задачу на прогнозирование отдельных его частей. Однако это также не гарантирует успешность эвристического подбора модели их поведения. Возможости эксперта, в том числе полностью автоматизированного, всегда ограничены и начиная с некоторого уровня энтропии, временной ряд внешне представляет собой непрогнозируемую эвристическим способом случайную величину.

При таком подходе только хорошо изученный и декомпозированный процесс может быть успешно спрогнозирован по его значениям временного ряда.

Для построения более эффективных подходов необходима теоретическое обоснование прогнозирования: его функционального определения, существования и условий единственности, принципиальной возможности поиска решения и метода его определения.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Временной ряд

Временной ряд – это множество конечных значений наблюдаемой величины v в разные моменты времени t. $\Omega = \{(t_i, v_i) : t \in T; v \in V; i \in N\}$, где T – область определения времени, V – область значений наблюдаемой величины. Мощность множества может быть бесконечной, однако практически анализируемое число элементов всегда ограничено. Наблюдаемой величиной может выступать:

- Значение неизвестной исходной функции $v(t)$,
- Значение численного свойства условно замкнутой физической системы. Изменение во времени данного численного свойства также может быть представлено как неизвестная исходная функция $v(t)$.

Прогнозирование временного ряда – это нахождение распределения вероятностностей ожидаемого значения величины v в искомые моменты времени t.

Для удобства дальнейшего изложения будем считать T объединенной областью определения, куда входят моменты времени временного ряда и искомые моменты времени, в которые необходимо получить прогноз.

В зависимости от природы исходной функции значения наблюдаемой величины во временном ряду могут быть представлены единственными значениями или доверительным интервалом, специально заданным для каждого отдельного элемента.

В случае прогнозирования свойств физических систем важно учитывать неизбежные искажения данных измерения и неполную замкнутость физической системы, вносящие случайные отклонения в исходные данные. В таком случае существует доверительный интервал, различный для каждого замера, а временной ряд представляется множеством элементов $\{(t_i, v\min_i, v\max_i)\}$. Данная запись может быть эквивалентно представлена как $\{(t_i, v_i, \varepsilon_i)\}$, где $v_i = \dfrac{v\max_i + v\min_i}{2}$ является срединой интервала, а $\varepsilon_i = \dfrac{v\max_i - v\min_i}{2}$ является допустимым отклонением в данной точке. При этом значения исходной функции в момент времени t_i находятся в ε_i-окрестности значения v_i: $v(t_i) \in U(v_i, \varepsilon_i)$.

В случае прогнозирования точных алгебраических функций, представленных временными рядами без погрешностей, допустимое отклонение будет стремиться к нулю: $\varepsilon \to 0 \Leftrightarrow v(t_i) \to v_i$.

Инструментом прогнозирования временного ряда $\Omega = \{(t_i, v_i) : t \in T; v \in V; i = 1,\ldots,n; n \in N\}$ с конечным числом элементов является множество $\{m_j(t)\}$ функций-моделей исходной функции $v(t)$. Из всего мыслимого многообразия функций множеству $\{m_j(t)\}$ принадлежат те, которые удовлетворяют условию допустимого отклонения для всех элементов временного ряда:

$$m_j(t_i) \in U(v_i, \varepsilon_i) : i = 1,\ldots,n \quad (2.1)$$

Следует отметить, что даже при $\varepsilon_i \to 0 : \forall i$ множеству $\{m_j(t)\}$ в данном определении будет принадлежать бесконечное количество функций.

Функции множества $\{m_j(t)\}$ не равнозначны между собой по приоритету применения при прогнозировании. Способ численного определения и его обоснование будут рассмотрены далее, а пока что введем функцию $\rho(m_j)$ приоритета функции-модели без ее детализации. Распределение вероятностей ожидаемой величины v в искомый момент времени t_0 равно суммарному распределению вероятностей пучка функций-моделей с учетом их приоритета применения:

$$F_v(t_0,v_0)=P(v\le v_0)\equiv\frac{\sum_{i=0}^{n}P\big(m_i(t_0)\le v_0\big)\cdot\rho(m_i)}{\sum_{i=0}^{n}\rho(m_i)}:\quad F_v(t_0,v_0)\in[0,1];\,n\in N;\,P(x)=\begin{cases}0:x=\mathit{false}\\1:x=\mathit{true}\end{cases}\qquad(2.2)$$

Аксиома обоснованности функции-модели

Функции-модели определяются исключительно значениями временного ряда, образованного исходной функцией. Ни вид функций-моделей, ни их область значений и свойства не задаются априорно и не являются случайно заданными.

При отсутствии данной аксиомы однозначная причинно-следственная связь между условием и решением не может быть построена, а критерии оптимальности решения не могут быть не только доказанными, но даже рассмотренными.

Эта на первый взгляд простая аксиома задает весь логический ход рассуждений в теории прогнозирования временных рядов. Докажем ряд утверждений, являющихся следствиями аксиомы обоснованности функции-модели.

Энтропия функции

Введем определение энтропии функции:

Энтропия функции или процесса – мера неопределенности и сложности формального описания функции или процесса.

Методы численного анализа энтропии функции будут рассмотрены далее.

Пока же примем условное определение: чем выше неопределенность функции, тем выше ее энтропия. Следовательно, наименьшей энтропией обладает константа, неизменная во времени, а наибольшей энтропией обладает истинно случайная функция, мера неопределенности которой не поддается описанию.

Ограничение максимальной энтропии функции-модели

Максимальная энтропия функций-моделей определяется количеством элементов временного ряда.

◄ Поскольку функции-модели определяются исключительно данными временного ряда, то и энтропия этих функций-моделей определяется исключительно данными временного ряда. Количество информации, содержащееся в множестве элементов временного ряда ограничено мощностью данного множества. Следовательно, максимальная энтропия функций-моделей определяется количеством элементов временного ряда. ►

Ограничение минимальной энтропии функции-модели

Минимальная энтропия функции-модели определяется необходимой сложностью функции-модели для принадлежности элементам временного ряда.

◄ По определению множества функций-моделей, ему принадлежат только те функции, которые удовлетворяют условию допустимого отклонения (2.1). Следовательно, энтропия функции-модели должна быть достаточной, чтобы охватить вариативность временного ряда. ►

Увеличение энтропии функций-моделей

Увеличение количества элементов временного ряда приводит к увеличению или неизменности энтропии функций-моделей, образованных данным временным рядом.

◄ Пусть для конечного временного ряда $\Omega_n=\{(t_i,v_i,\varepsilon_i):t\in T;\,v\in V;\,i=1,\ldots,n;\,n\in N\}$ определено множество функций-моделей M_n. Энтропия каждой из функций-моделей принадлежит отрезку $E_j\in[a,b]$, границы которого соответственно определяются необходимой сложностью функций-моделей и мощностью множества Ω_n.

Если временной ряд дополнить элементом $(t_{n+1}, v_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$, то получившемуся временному ряду $\Omega_{n+1} = \{(t_i, v_i, \varepsilon_{n+1}) : t \in T; v \in V; i = 1, \ldots, n+1; n \in N\}$ будет соответствовать множество функций-моделей M_{n+1}, являющееся объединением множеств:

- Подмножества $\overline{M_n} \subseteq M_n$, в котором функции-модели удовлетворяют добавленной точке $m_j(t_{n+1}) \in U(v_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$,
- Множества $\overline{M_{n+1}}$, в котором функции-модели имеют максимально возможную для Ω_{n+1} энтропией.

$M_{n+1} = \overline{M_n} \cup \overline{M_{n+1}}$.

Следовательно, увеличение количества элементов временного ряда приводит к увеличению или неизменности энтропии функций-моделей, образованных данным временным рядом. ►

Конечность необходимого аргумента

Если функция v является прогнозируемой, то существует хотя бы одна функция-модель m_0, удовлетворяющая условию допустимого отклонения (2.1) в интервале времени $t \in T$, для получения которой необходимо конечное число точек временного ряда, образованного исходной функцией.

◄ Докажем данное утверждение от противоположного: пусть функция v является прогнозируемой, но не существует ни одной функции-модели m, удовлетворяющая условию допустимого отклонения (2.1) в интервале времени $t \in T$, которая может быть получена из конечного числа точек временного ряда.

Пусть задан временной ряд $\Omega_n = \{(t_i, v_i, \varepsilon_i) : t \in T; i = 1, \ldots, n\}$, для которого множество функций-моделей M_n не содержит ни одной функции, удовлетворяющей условию допустимого отклонения (2.1) на остальных точках интервала T. При дополнении временного ряда элементами $(t_{n+j}, v_{n+j}, \varepsilon_{n+j}) : \forall i, \forall t_j$ энтропия функций-моделей множества M_{n+j} не будет оставаться постоянной, иначе хотя бы одна искомая функция-модель считалась бы найденной. Таким образом, минимальная энтропия функций-моделей не может быть ограничена, а значит функция-модель является случайной функцией, моделирование которой невозможно. Это указывает на неверность исходного противоположного утверждения.

Следовательно, если функция v является прогнозируемой, то существует хотя бы одна функция-модель m_0, удовлетворяющая условию допустимого отклонения (2.1) в интервале времени $t \in T$, для получения которой необходимо конечное число точек временного ряда, образованного исходной функцией. ►

Приоритет применения функции-модели

Для полного соответствия функции-модели m_0 исходной функции v необходимо и достаточно, чтобы $m_0(t)$, удовлетворяющая временному ряду $\Omega_n = \{(t_i, v_i, \varepsilon_i) : t \in T; v \in V; i = 1, \ldots, n; n \in N\}$ по условиям допустимого отклонения (2.1) сохраняла это свойство для временного ряда, дополненного произвольными элементами $\Omega_{n+k} = \{(t_i, v_i, \varepsilon_i) : t \in T; v \in V; i = 1, \ldots, n+k; n \in N; k \in N\}$. Каждый дополнительный элемент $(t_{n+j}, v_{n+j}, \varepsilon_{n+j})$, удовлетворяющий условию (2.1) будет повышать вероятность соответствия $m_0(t)$ исходной функции v.

Введем обозначения:

$E_v(k)$ – количество элементов временного ряда, задающих максимальную энтропию функции-модели для прогнозирования исходной функции v для k элементов временного ряда. Как было определено в утверждении об ограничении максимальной энтропии, $E_v(k) = k$.

$E_m(k)$ – количество элементов временного ряда, фактически задавших энтропию функции m для k элементов.

Соответственно, $E_v(k)-E_m(k)$ является количеством элементов, не приведших к росту энтропии функции-модели m. Данная разность характеризует приращение количества элементов при сохранении функции-модели.

Пусть имеется функция-модель m, энтропия которой максимальна для k элементов ряда Ω_k, на основе которого она составлена, т.е. $E_m(k)=E_v(k)$. Во временной ряд добавляется элемент $(t_{n+1}, v_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$. Составим функцию приоритета соответствия функции-модели m исходной функции v при добавлении этого элемента во временной ряд как соотношение приращения количества элементов к приращению неполного соответствия функций:

$$\alpha(m_{n+1}) = \frac{E_v(k+1)-E_m(k+1)}{\left|v(t_{n+j})-m(t_{n+j})\right|} \quad (2.3)$$

Если $(t_{n+1}, v_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$ приведет к росту энтропии функции-модели m, то $E_v(k+1)-E_m(k+1)=0$.

Если $(t_{n+1}, v_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$ не приведет к росту энтропии m, то $E_v(k+1)-E_m(k+1)=1$.

$\left|v(t_{n+j})-m(t_{n+j})\right|$ определяет близость совпадения значения функции-модели m со значением исходной функции v. При совпадении значений и отсутствии роста энтропии $\alpha(m_{n+1})\to\infty$, т.е. является наивысшим.

Составим функцию приоритета соответствия функции-модели m исходной функции v для множества элементов:

$$\rho(m) = \frac{E_v(n)-E_m(n)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\left|v(t_i)-m(t_i)\right|\right)} \quad (2.4)$$

Учитывая, что $E_v(n)=n$, получим:

$$\rho(m) = \frac{n-E_m(n)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\left|v(t_i)-m(t_i)\right|\right)} \quad (2.5)$$

Если бы функции $v(t)$ и $m(t)$ были заданы аналитически, то обозначив рост энтропии функции f на интервале T как $\int_T U(f)\cdot dt$ формула имела бы вид:

$$\rho(m) = \frac{\int_T \left(U(v)-U(m)\right)\cdot dt}{\int_T \left|v(t)-m(t)\right|\cdot dt} \quad (2.6)$$

Следует отметить, что $\rho(m)$ – относительный приоритет функции и его значение имеет смысл только при сравнении функций.

Таким образом, формула (2.2) примет вид:

$$\begin{cases} F_v\left(t_0,v_0\right)=P\left(v\le v_0\right)\equiv\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}P\left(m_i\left(t_0\right)\le v_0\right)\cdot\rho\left(m_i\right)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\rho\left(m_i\right)} \\ \rho\left(m_i\right)=\dfrac{n-E_{m_i}\left(n\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\left|v\left(t_j\right)-m_i\left(t_j\right)\right|\right)} \end{cases} : F_v\left(t_0,v_0\right)\in\left[0,1\right];\ n\in N;\ P\left(x\right)=\begin{cases}0: x=\mathit{false}\\ 1: x=\mathit{true}\end{cases} \quad (2.7)$$

Если $\varepsilon\to 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\left|v\left(t_j\right)-m_i\left(t_j\right)\right|\right)\to 0$:

$$F_v\left(t_0,v_0\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}P\left(m_i\left(t_0\right)\le v_0\right)\cdot\dfrac{n-E_{m_i}\left(n\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\left|v\left(t_j\right)-m_i\left(t_j\right)\right|\right)}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{n-E_{m_i}\left(n\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\left|v\left(t_j\right)-m_i\left(t_j\right)\right|\right)}}\equiv\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}P\left(m_i\left(t_0\right)\le v_0\right)\cdot\left(n-E_{m_i}\left(n\right)\right)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(n-E_{m_i}\left(n\right)\right)} \quad (2.8)$$

Таким образом, при $\varepsilon\to 0$ выражение (2.7) примет вид:

$$\begin{cases} F_v\left(t_0,v_0\right)=P\left(v\le v_0\right)\equiv\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}P\left(m_i\left(t_0\right)\le v_0\right)\cdot\rho\left(m_i\right)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\rho\left(m_i\right)} \\ \rho\left(m_i\right)=n-E_{m_i}\left(n\right) \end{cases} : F_v\left(t_0,v_0\right)\in\left[0,1\right];\ n\in N;\ P\left(x\right)=\begin{cases}0: x=\mathit{false}\\ 1: x=\mathit{true}\end{cases} \quad (2.9)$$

На данном этапе остается не известен метод определения исчерпывающего множества функций-моделей $\{m_i\}$ от заданного временного ряда и количество элементов $E_{m_i}\left(n\right)$, задающих их энтропию. Это будет рассмотрено в следующем разделе.

3. ТЕОРЕМА УНИВЕРСАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Ограничения применения

На сегодняшний день всё многообразие функций не удается представить в виде арифметических действий с элементарными функциями и их композициями. Следовательно, этим определением нельзя ограничиться, так как, ставя задачу сделать возможным прогнозирование неизвестной функции, выраженной в виде временного ряда, мы должны максимально расширить рассматриваемое множество функций.

В то же время, расширяя это множество, мы неизбежно сталкиваемся с вопросом способа заданя функций. И прежде всего с вопросом – считать ли неизвестную функцию дифференцируемой.

Ответ на этот вопрос необратимо разделяет пути решения задачи.

Рассмотрим положительный ответ на вопрос о дифференцируемости.

В данном случае множество рассматриваемых функций значительно расширяется, так как существенное, и, возможно, неизмеримо большее число мыслимых функций имеют только дифференциальное представление.

Например, дифференциальное уравнение $\frac{du}{d\varphi}=e^{-\varphi^2}$ имеет решение в квадратурах $u=\int e^{-\varphi^2}\cdot d\varphi+a : a=const$, интеграл которого не может быть найден. Однако это не мешает функции $u(\varphi)$ существовать и быть одной из возможных исходных функций, сформировавших временной ряд, и одной из функций-моделей, которые могут быть применены для прогнозирования временного ряда. Функции, которые, подобно $u(\varphi)$, могут быть выражены в квадратурах, бесконечное множество, и интегральные конструкции в них могут быть более сложны.

Более того, функции, заданные в виде дифференциальных уравнений, разрешимы в квадратурах лишь в исключительных случаях. Значительно большая часть функций существует только в виде дифференциальных уравнений без возможности приведения их к виду $v=f(t)$ даже в квадратурах.

Как известно, к квадратурам могут быть сведены дифференциальные уравнения первого порядка с интегрирующим множителем, однородные и квазиоднородные уравнения, уравнения Бернулли и некоторые уравнения Рикатти. Дифференциальные уравнения высших порядков имеют решение в квадратурах только в случае линейного представления, а даже незначительная неоднородность приводит лишь к оценочным критериям правильности решения, как в формуле Лиувилля-Остроградского. Известных общих методов решения неоднородных дифферециальных уравнений не существует вовсе, однако функции, удовлетворяющие данным уравнениям, объективно существуют и могут выступать исходными функциями временных рядов, а также функциями-моделями для прогнозирования.

Таким образом, в случае утвердительного ответа на вопрос о дифференцируемости, особенно при бесконечной дифференцируемости, мы получаем возможность значительно расширить множество функций за счет их представления в виде дифференциальных уравнений.

Однако недифференцируемые функции при этом теряются из вида. Рассмотрим отрицательный или неопределенный ответ на вопрос о дифференцируемости.

Данный путь рассуждений значительно сложней, т.к. возникает вопрос о методе описания недифференцируемых функций, каждая из которых может быть весьма специфичной, начиная от простейших вариантов, содержащих в определении модуль, и заканчивая специальными определениями для прерывистых функций или специальных функций как функция Дирихле.

Недифференцируемые функции не принадлежат одной группе, для которой разработаны специальные методы функционального анализа. Они лишь ***не*** принадлежат группе дифференцируемых функций. При этом, отрицание возможности дифференцирования не дает дополнительных теоретических инструментов функционального анализа, а лишь исключает множество известных инструментов, свойственных дифференцируемым функциями.

В рамках данной изложенной теории сделан выбор в пользу дифференцируемых функций. В дальнейшем возможно расширение множества функций за счет недифференцируемых, однако в рамках данного изложения все рассматриваемые функции будут считаться бесконечно дифференцируемыми на рассматриваемом интервале T временного ряда и его прогноза.

Цель

Для применения функций, заданных в виде дифференциальных уравнений, в качестве функций-моделей прогнозирования временного ряда необходимо определить способ эквивалентного преобразования произвольного дифференциального уравнения к универсальной форме. Такая форма должна варьироваться только исходя из численного значения энтропии, сохраняя при этом возможность универсального представления любых мыслимых функций, задаваемых дифференциальными уравнениями произвольного вида.

Для достижения данной цели рассмотрим несколько утверждений, докажем их в общем виде и рассмотрим частные примеры.

Дифференциальное представление без функции аргумента

Пусть существует бесконечно дифференцируемая функция, заданная произвольным дифференциальным уравнением, в которое могут входить значение аргумента и элементарные функции (назовем их радикалами $\{R_i\}$):

$$F\left(t,\left\{v^{(i)}\right\},\left\{R_j\right\}\right)=0: i=0,\ldots,z;\ j=1,\ldots,\mu;\ \{z,\mu\}\in N \quad (3.1)$$

Докажем, что $F\left(t,\left\{v^{(i)}\right\},\left\{R_j\right\}\right)=0$ может быть эквивалентно выражено дифференциальным уравнением более высокого порядка с множеством начальных условий, состоящим только из арифметических действий, операций дифференцирования и не содержащим значение аргумента и радикалов:

$$F\left(t,\left\{v^{(i)}\right\},\left\{R_j\right\}\right)=0: i=0,\ldots,z;\ j=1,\ldots,\mu;\ \{z,\mu\}\in N \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\cdot\prod\limits_{j=0}^{m}\left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}}=0:\left\{n,m,p_{i,j}\right\}\in N; a_i\in R \\ v^{(i)}\left(t_0\right)=v_0^{(i)}:\ i=z,\ldots,m-1; m>z \end{cases} \quad (3.2)$$

Эквивалентность обратного преобразования при этом обеспечивается начальными условиями значений дифференциалов.

◄ Доказательство состоит из нескольких последовательных этапов.

1. Исходная функция.

Все мыслимые функции состоят из компонентов: значений аргумента, арифметических действий, элементарных функций и их композиций, операций интегрирования и диференцирования. При этом, все элементарные функции (для краткости назовем их радикалами) имеют либо простейшую арифметическую, либо дифференциальную взаимную зависимость. В частности:

$$f=x^n \quad f'=n\cdot x^{n-1}\cdot x' \quad \Rightarrow \quad f'=\frac{n\cdot x'}{x}\cdot f$$

$$f=a^x \quad f'=\ln a\cdot x'\cdot a^x \quad \Rightarrow \quad f'=\ln a\cdot x'\cdot f$$

$$f=\ln x \quad f'=\frac{x'}{x}$$

$$f=\log_a x \quad f'=\frac{x'}{x\cdot\ln a}$$

$$f=\sin x \quad f'=\cos x\cdot x' \quad f''=-\sin x\cdot\left(x'\right)^2+\cos x\cdot x'' \quad \Rightarrow \quad f''=-\left(x'\right)^2\cdot f+\frac{x''}{x'}\cdot f'$$

$$f=\cos x \quad f'=-\sin x\cdot x' \quad f''=-\cos x\cdot\left(x'\right)^2-\sin x\cdot x'' \quad \Rightarrow \quad f''=-\left(x'\right)^2\cdot f+\frac{x''}{x'}\cdot f'$$

$$f = \operatorname{tg} x \quad f' = \frac{x'}{\cos^2 x}$$

$$f = \operatorname{ctg} x \quad f' = -\frac{x'}{\sin^2 x}$$

$$f = \arcsin x \quad f' = \frac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f = \arccos x \quad f' = -\frac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f = arctgx \quad f' = \frac{x'}{1+x^2}$$

$$f = \operatorname{arcctg} x \quad f' = -\frac{x'}{1+x^2}$$

$$f = \operatorname{sh} x \quad f' = x' \cdot \operatorname{ch} x$$

$$f = \operatorname{ch} x \quad f' = x' \cdot \operatorname{sh} x$$

$$f = \operatorname{th} x \quad f' = \frac{x'}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$f = \operatorname{cth} x \quad f' = -\frac{x'}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Таким образом, многократное дифференцирование радикала приводит к одному из трех вариантов:

- Простейшим арифметическим операциям, например, в случае логарифма, арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккатангенса и пр.,
- Цикличной завимости между конечным числом дифференциалов радикала $f\left(R, R', \ldots, R^{(q)}\right) = 0$, намример, в случае синуса, косинуса и пр.,
- Цикличной зависимости между конечным числом дифференциалов нескольких радикалов $f\left(R_1, R_1', \ldots, R_1^{(q_1)}, R_2, R_2', \ldots, R_2^{(q_2)}, \ldots, R_\mu, R_\mu', \ldots, R_\mu^{(q_\mu)}\right) = 0$, например, между гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом, логарифмом и натуральным логарифмом, тангенсом и косинусом и пр..

Первые два варианта являются частными случаями, а третий вариант является общим случаем, который в том числе включает в себя первый и второй.

2. Следствие конечности изменения радикалов при дифференцировании.

Таким образом, дифференцирование радикалов конечно по своей вариативности, а значит уравнение функции $F\left(t, \left\{v^{(i)}\right\}, \left\{R_j\right\}\right) = 0 : i = 0, \ldots, z;\ j = 1, \ldots, \mu;\ \{z, \mu\} \in N$, содержащее кроме простейших арифметических операций конечное количество радикалов, путем конечного конечного количества итераций дифференцирования функции $F_i = F^{(i)}$ сводится к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} F_0\left(t, \left\{v^{(i)}\right\}, R_1, R_2, \ldots, R_\mu\right) = 0 : i = 0, \ldots, z \\ F_1\left(t, \left\{v^{(i)}\right\}, R_1, R_1^{(1)}, R_2, R_2^{(1)} \ldots, R_\mu, R_\mu^{(1)}\right) = 0 : i = 0, \ldots, z+1 \\ F_2\left(t, \left\{v^{(i)}\right\}, R_1, R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_2, R_2^{(1)}, R_2^{(2)} \ldots, R_\mu, R_\mu^{(1)}, R_\mu^{(2)}\right) = 0 : i = 0, \ldots, z+2 \\ \ldots \\ F_k\left(t, \left\{v^{(i)}\right\}, R_1, R_1^{(1)}, \ldots, R_1^{(q_1)}, R_2, R_2^{(1)}, \ldots, R_2^{(q_2)} \ldots, R_\mu, R_\mu^{(1)}, \ldots, R_\mu^{(q_\mu)}\right) = 0 : i = 0, \ldots, z+k \end{cases}$$

где $k = 1 + \sum_{i=0}^{m} q_i$ в силу конечности дифференциальных взаимосвязей между радикалами. Согласно основной теореме алгебры, этой системе уравнений относительно множества переменных $\left\{R_j^{(h)}\right\}$ соответствует уравнение, избавленное от радикалов: $\overline{F}\left(t, \left\{v^{(i)}\right\}\right) = 0 : i = 0, \ldots, z + k$, содержащие значения аргумента, функции, операции дифференцирования и простейшие арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление, а также возведение значений t и $v^{(i)}$ в целочисленную степень:

$$\sum_{i=0}^{x} \left(\omega_i \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{i,j}} \cdot t^{d_i} \right) = 0 : b_{i,j} \in Z; d_i \in Z; x \in N; \omega_i \in R \quad (3.3)$$

Преобразование из (3.1) в (3.3) является обратимым в случае задания начальных условий значений дифференциалов $v^{(j)}(t_0) = v_0^{(j)} : i = z, \ldots, z + k - 1; \{z, k\} \in N$

3. Вынесение значения аргумента

Учитывая линейную зависимость между слагаемыми $\omega_i \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{i,j}} \cdot t^{d_i}$, продифференцируем уравнение (2.3) x раз и запишем определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} \omega_0 \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{0,j}} \cdot t^{d_0} & \omega_1 \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{1,j}} \cdot t^{d_1} & \cdots & \omega_x \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{x,j}} \cdot t^{d_x} \\ \left(\omega_0 \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{0,j}} \cdot t^{d_0} \right)' & \left(\omega_1 \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{1,j}} \cdot t^{d_1} \right)' & \cdots & \left(\omega_x \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{x,j}} \cdot t^{d_x} \right)' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\omega_0 \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{0,j}} \cdot t^{d_0} \right)^{(x)} & \left(\omega_1 \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{1,j}} \cdot t^{d_1} \right)^{(x)} & \cdots & \left(\omega_x \cdot \prod_{j=0}^{z+k} \left(v^{(j)} \right)^{b_{x,j}} \cdot t^{d_x} \right)^{x} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Раскрытие определителя приводит к выносу за скобки и сокращению множителя $t^{\sum_{i=0}^{x} d_i - \frac{x \cdot (x+1)}{2}}$, т.е. получаем дифференциальное уравнение, полностью избавленное от значения аргумента t:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)} \right)^{p_{i,j}} = 0 : \quad \left\{ n, m, p_{i,j} \right\} \in N; a_i \in R \quad (3.5)$$

Преобразования (3.3) в (3.5) также являются обратимыми в случае наличия начальных условий, задающими задачу Коши $v^{(i)}(t_0) = v_0^{(i)} : \ i = \mu, \ldots, m - 1; m > \mu$.

Функция, удовлетворяющая (3.1), будет удовлетворять (3.5). И наборорот, при наличии начальных условий задачи Коши, функция, удовлетворяющая (3.5), будет удовлетворять (3.1).►

Сведение к предопределенному виду

Докажем, что уравнение (3.5) путем конечного числа преобразований может быть эквивалентно приведено к уравнению с неопределенностью только в дифференциалах.

◄ Пусть функция задана уравнением: $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)} \right)^{p_{i,j}} = 0$, где $\{a_i\}, \{p_{i,j}\}$ – неизвестные константы.

Введем дополнительную функцию $g_{0,i} = 1 : \forall i$, на первом этапе она будет играть роль нейтрального множителя:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot g_{0,i} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}} = 0 \quad (3.6)$$

Разделим (3.6) на $g_{0,n} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{n,j}}$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ a_i \cdot \frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j} - p_{n,j}} \right\} + a_n = 0 \qquad (3.7)$$

Продифференцируем (3.7) по dt :

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j} - p_{n,j}} + a_n \right)' = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \left(\left(\frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \right)' \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j} - p_{n,j}} + \frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j} - p_{n,j}} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(p_{i,j} - p_{n,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}} \right) + \left(a_n\right)' = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \left(\left(\frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \right)' + \frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(p_{i,j} - p_{n,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}} \right) \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j} - p_{n,j}} = 0 \quad (3.8)$$

Умножим (3.8) на $\prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{n,j}}$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \left(\left(\frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \right)' + \frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(p_{i,j} - p_{n,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}} \right) \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \left(\frac{g_{0,i}' \cdot g_{0,n} - g_{0,i} \cdot g_{0,n}'}{\left(g_{0,n}\right)^2} + \frac{g_{0,i}}{g_{0,n}} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(p_{i,j} - p_{n,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}} \right) \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \left(g_{0,i}' \cdot g_{0,n} - g_{0,i} \cdot g_{0,n}' + g_{0,i} \cdot g_{0,n} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(p_{i,j} - p_{n,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}} \right) \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}} = 0 \qquad (3.9)$$

Введя новую функцию $g_{1,i} = g_{0,i}' \cdot g_{0,n} - g_{0,i} \cdot g_{0,n}' + g_{0,i} \cdot g_{0,n} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(p_{i,j} - p_{n,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}}$, получим:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot g_{1,i} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}} = 0 \qquad (3.10)$$

Таким образом, путем замены $g_{0,i}$ на $g_{1,i}$, из (3.6) получено (3.10), содержащее на одно слагаемое меньше. Итеративно повторяя шаги от (3.6) до (3.10), вводя замену на $g_{2,i}$, $g_{3,i}$,..., $g_{n,i}$, получим уравнение

$$\sum_{i=0}^{n-n} a_i \cdot g_{n,i} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{i,j}} = a_0 \cdot g_{n,0} \cdot \prod_{j=0}^{m} \left(v^{(j)}\right)^{p_{0,j}} = 0 \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) эквивалентно уравнению $g_{n,0} = 0$, заданному рекуррентной формулой:

$$\begin{cases} g_{k+1,i} = g_{k,i}' \cdot g_{k,n-k} - g_{k,i} \cdot g_{k,n-k}' + g_{k,i} \cdot g_{k,n-k} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left(P_{i,j} - P_{n-k,j}\right) \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(j)}} \\ g_{0,i} = 1 \end{cases} \qquad (3.12)$$

Сравним способ задания функции уравнением (3.12) и уравнением (3.5).

Уравнение (3.12) имеет более высокий порядок дифференцирования, однако меньшее количество неизвестных скалярных коэффициентов. При этом, уравнение (3.12) также сводится к сумме произведений дифференциалов, однако в отличие от уравнения (3.5), показатели степеней в уравнении (3.12) зависят только от n и m.

Значения множителей в уравнении (3.12) зависят от показателей степеней уравнения (3.5).

Данное преобразование понижения неопределенности коэффициентов может быть осуществлено вторично, уже по отношению к (3.12). Тогда будет получено дифференциальное уравнение с не только с известными показателями степеней, но и с известными коэффициентами умножения. Неопределенность будет только в дифференциалах, т.е. в начальных условиях теоремы Коши для данного уравнения. ►

Рассмотрим пример.

Пусть функция $y(t)$ задана дифференциальным уравнением:

$$a_0 \cdot (y)^{p_{0,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}} + a_1 \cdot (y)^{p_{1,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}} + a_2 \cdot (y)^{p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{2,1}} = 0 \quad (3.13)$$

Здесь $\{a_i\}$ и $\{p_{i,j}\}$ – скалярные значения, которые нам не известны. Введем дополнительную функцию $g_{0,i} = 1 : \forall i$ в качестве нейтрального множителя:

$$a_0 \cdot g_{0,0} \cdot (y)^{p_{0,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}} + a_1 \cdot g_{0,1} \cdot (y)^{p_{1,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}} + a_2 \cdot g_{0,2} \cdot (y)^{p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{2,1}} = 0 \quad (3.14)$$

Разделим (3.14) на $g_{0,2} \cdot (y)^{p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{2,1}}$:

$$a_0 \cdot \frac{g_{0,0}}{g_{0,2}} \cdot (y)^{p_{0,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}-p_{2,1}} + a_1 \cdot \frac{g_{0,1}}{g_{0,2}} \cdot (y)^{p_{1,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}-p_{2,1}} + a_2 = 0 \quad (3.15)$$

Продифференцируем (3.15) по dt:

$$\left(a_0 \cdot \frac{g_{0,0}}{g_{0,2}} \cdot (y)^{p_{0,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}-p_{2,1}} + a_1 \cdot \frac{g_{0,1}}{g_{0,2}} \cdot (y)^{p_{1,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}-p_{2,1}} + a_2 \right)' = 0$$

$$a_0 \cdot \left(\left(\frac{g_{0,0}}{g_{0,2}} \right)' \cdot (y)^{p_{0,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}-p_{2,1}} + \frac{g_{0,0}}{g_{0,2}} \cdot (y)^{p_{0,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}-p_{2,1}} \cdot \left((p_{0,0}-p_{2,0}) \cdot \frac{y'}{y} + (p_{0,1}-p_{2,1}) \cdot \frac{y''}{y'} \right) \right) +$$

$$+a_1 \cdot \left(\left(\frac{g_{0,1}}{g_{0,2}} \right)' \cdot (y)^{p_{1,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}-p_{2,1}} + \frac{g_{0,1}}{g_{0,2}} \cdot (y)^{p_{1,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}-p_{2,1}} \cdot \left((p_{1,0}-p_{2,0}) \cdot \frac{y'}{y} + (p_{1,1}-p_{2,1}) \cdot \frac{y''}{y'} \right) \right) = 0$$

$$a_0 \cdot \left(\left(\frac{g_{0,0}}{g_{0,2}} \right)' + \frac{g_{0,0}}{g_{0,2}} \cdot \left((p_{0,0}-p_{2,0}) \cdot \frac{y'}{y} + (p_{0,1}-p_{2,1}) \cdot \frac{y''}{y'} \right) \right) \cdot (y)^{p_{0,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{0,1}-p_{2,1}} +$$

$$+a_1 \cdot \left(\left(\frac{g_{0,1}}{g_{0,2}} \right)' + \frac{g_{0,1}}{g_{0,2}} \cdot \left((p_{1,0}-p_{2,0}) \cdot \frac{y'}{y} + (p_{1,1}-p_{2,1}) \cdot \frac{y''}{y'} \right) \right) \cdot (y)^{p_{1,0}-p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{1,1}-p_{2,1}} = 0 \quad (3.16)$$

Умножим (3.16) на $(y)^{p_{2,0}} \cdot (y')^{p_{2,1}}$ и раскроем дифференциал дроби:

$$a_0\cdot\left(\frac{g_{0,0}{}'\cdot g_{0,2}-g_{0,0}\cdot g_{0,2}{}'}{\left(g_{0,2}\right)^2}+\frac{g_{0,0}}{g_{0,2}}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\right)\cdot(y)^{p_{0,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}}+$$
$$+a_1\cdot\left(\frac{g_{0,1}{}'\cdot g_{0,2}-g_{0,1}\cdot g_{0,2}{}'}{\left(g_{0,2}\right)^2}+\frac{g_{0,1}}{g_{0,2}}\cdot\left(\left(p_{1,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{1,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\right)\cdot(y)^{p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{1,1}}=0$$

Умножим обе части уравнения на $\left(g_{0,2}\right)^2$:

$$a_0\cdot\left(g_{0,0}{}'\cdot g_{0,2}-g_{0,0}\cdot g_{0,2}{}'+g_{0,0}\cdot g_{0,2}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\right)\cdot(y)^{p_{0,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}}+$$
$$+a_1\cdot\left(g_{0,1}{}'\cdot g_{0,2}-g_{0,1}\cdot g_{0,2}{}'+g_{0,1}\cdot g_{0,2}\cdot\left(\left(p_{1,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{1,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\right)\cdot(y)^{p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{1,1}}=0\quad(3.17)$$

Получили два слагаемых вместо трех в исходном уравнении (3.13). Введем замену:

$$\begin{cases}g_{1,0}=g_{0,0}{}'\cdot g_{0,2}-g_{0,0}\cdot g_{0,2}{}'+g_{0,0}\cdot g_{0,2}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\\ g_{1,1}=g_{0,1}{}'\cdot g_{0,2}-g_{0,1}\cdot g_{0,2}{}'+g_{0,1}\cdot g_{0,2}\cdot\left(\left(p_{1,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{1,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\end{cases}\quad(3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.17), получим:

$$a_0\cdot g_{1,0}\cdot(y)^{p_{0,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}}+a_1\cdot g_{1,1}\cdot(y)^{p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{1,1}}=0\quad(3.19)$$

Повторим действия по уменьшению на одно слагаемое:

$$a_0\cdot\frac{g_{1,0}}{g_{1,1}}\cdot(y)^{p_{0,0}-p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}-p_{1,1}}+a_1=0$$

$$\left(a_0\cdot\frac{g_{1,0}}{g_{1,1}}\cdot(y)^{p_{0,0}-p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}-p_{1,1}}+a_1\right)'=0$$

$$a_0\cdot\left(\left(\frac{g_{1,0}}{g_{1,1}}\right)'\cdot(y)^{p_{0,0}-p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}-p_{1,1}}+\frac{g_{1,0}}{g_{1,1}}\cdot(y)^{p_{0,0}-p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}-p_{1,1}}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{1,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{1,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\right)=0$$

$$a_0\cdot\left(g_{1,0}{}'\cdot g_{1,1}-g_{1,0}\cdot g_{1,1}{}'+g_{1,0}\cdot g_{1,1}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{1,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{1,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)\right)\cdot(y)^{p_{0,0}-p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}-p_{1,1}}=0$$

Введя замену, $g_{2,0}=g_{1,0}{}'\cdot g_{1,1}-g_{1,0}\cdot g_{1,1}{}'+g_{1,0}\cdot g_{1,1}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{1,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{1,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)$, получим:

$$a_0\cdot g_{2,0}\cdot(y)^{p_{0,0}-p_{1,0}}\cdot(y')^{p_{0,1}-p_{1,1}}=0\quad\Rightarrow\quad g_{2,0}=0$$

Учитывая что изначально введенные $g_{0,i}=1:\forall i$, имеем:

$$\begin{cases}g_{1,0}=\left(p_{0,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\\ g_{1,1}=\left(p_{1,0}-p_{2,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{1,1}-p_{2,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\\ g_{1,0}{}'\cdot g_{1,1}-g_{1,0}\cdot g_{1,1}{}'+g_{1,0}\cdot g_{1,1}\cdot\left(\left(p_{0,0}-p_{1,0}\right)\cdot\frac{y'}{y}+\left(p_{0,1}-p_{1,1}\right)\cdot\frac{y''}{y'}\right)=0\end{cases}\quad(3.20)$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение с известными показателями степеней и коэффициентами умножения, зависимыми от показателей степеней уравнения (3.13):

$$\begin{cases} \dfrac{y'''}{y} + b_0 \cdot \dfrac{(y'')^2}{y \cdot y'} + b_1 \cdot \dfrac{(y'')^3}{(y')^3} + b_2 \cdot \dfrac{y' \cdot y''}{(y)^2} + b_3 \cdot \dfrac{(y')^3}{(y)^3} = 0 \\ b_k = f_k\left(\left\{p_{i,j}\right\}\right) \end{cases} \quad (3.21)$$

С полученным результатом осуществим повторное понижение неопределенности коэффициентов:

$$\frac{y'''}{y} + b_0 \cdot \frac{(y'')^2}{y \cdot y'} + b_1 \cdot \frac{(y'')^3}{(y')^3} + b_2 \cdot \frac{y' \cdot y''}{(y)^2} + b_3 \cdot \frac{(y')^3}{(y)^3} = 0$$

$$(y)^2 \cdot (y')^{-3} \cdot y''' + b_0 \cdot (y)^2 \cdot (y')^{-4} \cdot (y'')^2 + b_1 \cdot (y)^3 \cdot (y')^{-6} \cdot (y'')^3 + b_2 \cdot y \cdot (y')^{-2} \cdot y'' + b_3 = 0 \quad (3.21)$$

Вводим замену:

$$\begin{cases} g_{1,0} = 2 \cdot \dfrac{y'}{y} - 3 \cdot \dfrac{y''}{y'} + \dfrac{y^{(4)}}{y'''} \\ g_{1,1} = 2 \cdot \dfrac{y'}{y} - 4 \cdot \dfrac{y''}{y'} + 2 \cdot \dfrac{y'''}{y''} \\ g_{1,2} = 3 \cdot \dfrac{y'}{y} - 6 \cdot \dfrac{y''}{y'} + 3 \cdot \dfrac{y'''}{y''} \\ g_{1,3} = \dfrac{y'}{y} - 2 \cdot \dfrac{y''}{y'} + \dfrac{y'''}{y''} \end{cases} \quad (3.22)$$

Подставляя замену (3.22) в (3.21), получаем:

$$g_{1,0} \cdot (y)^2 \cdot (y')^{-3} \cdot y''' + b_0 \cdot g_{1,1} \cdot (y)^2 \cdot (y')^{-4} \cdot (y'')^2 + b_1 \cdot g_{1,2} \cdot (y)^3 \cdot (y')^{-6} \cdot (y'')^3 + b_2 \cdot g_{1,3} \cdot y \cdot (y')^{-2} \cdot y'' = 0$$

$$\frac{g_{1,0}}{g_{1,3}} \cdot y \cdot (y')^{-1} \cdot (y'')^{-1} \cdot y''' + b_0 \cdot \frac{g_{1,1}}{g_{1,3}} \cdot y \cdot (y')^{-2} \cdot y'' + b_1 \cdot \frac{g_{1,2}}{g_{1,3}} \cdot (y)^2 \cdot (y')^{-4} \cdot (y'')^2 + b_2 = 0 \quad (3.23)$$

Вводим замену:

$$\begin{cases} g_{2,0} = g_{1,0}{}' \cdot g_{1,3} - g_{1,0} \cdot g_{1,3}{}' + g_{1,0}{}' \cdot g_{1,3} \cdot \left(\dfrac{y'}{y} - \dfrac{y''}{y'} - \dfrac{y'''}{y''} + \dfrac{y^{(4)}}{y'''} \right) \\ g_{2,1} = g_{1,1}{}' \cdot g_{1,3} - g_{1,1} \cdot g_{1,3}{}' + g_{1,1} \cdot g_{1,3} \cdot \left(\dfrac{y'}{y} - 2 \cdot \dfrac{y''}{y'} + \dfrac{y'''}{y''} \right) \\ g_{2,2} = g_{1,2}{}' \cdot g_{1,3} - g_{1,2} \cdot g_{1,3}{}' + g_{1,2} \cdot g_{1,3} \cdot \left(2 \cdot \dfrac{y'}{y} - 4 \cdot \dfrac{y''}{y'} + 2 \cdot \dfrac{y'''}{y''} \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

Подставляя замену (3.24) в (3.23), получаем:

$$g_{2,0} \cdot y \cdot (y')^{-1} \cdot (y'')^{-1} \cdot y''' + b_0 \cdot g_{2,1} \cdot y \cdot (y')^{-2} \cdot y'' + b_1 \cdot g_{2,2} \cdot (y)^2 \cdot (y')^{-4} \cdot (y'')^2 = 0$$

$$\frac{g_{2,0}}{g_{2,2}} \cdot (y)^{-1} \cdot (y')^3 \cdot (y'')^{-3} \cdot y''' + b_0 \cdot \frac{g_{2,1}}{g_{2,2}} \cdot (y)^{-1} \cdot (y')^2 \cdot (y'')^{-1} + b_1 = 0 \quad (3.25)$$

Вводим замену:

$$\begin{cases} g_{3,0} = g_{2,0}{}' \cdot g_{2,2} - g_{2,0} \cdot g_{2,2}{}' + g_{2,0} \cdot g_{2,2} \cdot \left(-\dfrac{y'}{y} + 3 \cdot \dfrac{y''}{y'} - 3 \cdot \dfrac{y'''}{y''} + \dfrac{y^{(4)}}{y'''} \right) \\ g_{3,1} = g_{2,1}{}' \cdot g_{2,2} - g_{2,1} \cdot g_{2,2}{}' + g_{2,1} \cdot g_{2,2} \cdot \left(-\dfrac{y'}{y} + 2 \cdot \dfrac{y''}{y'} - \dfrac{y'''}{y''} \right) \end{cases} \quad (3.26)$$

Подставляя замену (3.26) в (3.25), получаем:

$$g_{3,0} \cdot (y)^{-1} \cdot (y')^{3} \cdot (y'')^{-3} \cdot y''' + b_0 \cdot g_{3,1} \cdot (y)^{-1} \cdot (y')^{2} \cdot (y'')^{-1} = 0$$

$$\frac{g_{3,0}}{g_{3,1}} \cdot y' \cdot (y'')^{-2} \cdot y''' + b_0 = 0$$

$$g_{3,0}{}' \cdot g_{3,1} - g_{3,0} \cdot g_{3,1}{}' + g_{3,0} \cdot g_{3,1} \cdot \left(\frac{y''}{y'} - 2 \cdot \frac{y'''}{y''} + \frac{y^{(4)}}{y'''} \right) = 0 \quad (3.27)$$

Таким образом, из (3.13) с неизвестными константами мы получаем дифференциальное уравнение (3.27) с рекуррентно заданными функциями, не содержащее неизвестных констант.

Следует отметить, что подобное преобразование сохраняет эквивалентность и не является трюком или ошибочной потерей информации. Здесь неопределенность с коэффициентов переходит на неопределенность начальных значений при формулировке задачи Коши.

Таким образом, любое дифференциальное уравнение с произвольным набором элементарных функций, и их композиций может быть сведено к дифференциальному уравнению более высокого порядка, представляющего собой сумму произведений дифференциалов в известных целых степенях и с известными целыми скалярными сомножителями.

Сложность (энтропия) исходной функции эквивалентно преобразуется в максимальный порядок дифференцирования и количество слагаемых на этапе (3.5), которые в свою очередь однозначно определяют дифференциальное уравнение на этапе (3.12).

Прогнозирование

Таким образом, нами получена форма универсального дифференциального уравнения для произвольной функции, которое имеет неопределенность только в порядке дифференцирования. Данный численный параметр является мерой неопределенности (сложности) дифференциального уравнения, то есть минимальным количеством элементов временного ряда, необходимых для задания функции. Следует отметить, что данное количество элементов не является гарантированно достаточным, так как задача Коши, однозначно определяющая единственность решения дифференциального уравнения, требует начальных условий для каждой отдельной производной. Это не противоречит утверждению о конечности необходимого аргумента, представленного в разделе 2, так как действительно – часть точек могут не приводить к росту энтропии функции, удовлетворяя ранее найденной модели.

Прогнозирование временного ряда сводится к итеративной последовательности действий:

1. Принять предположение о количестве n элементов временного ряда, образующем энтропию функции-модели на данной итерации. Для первой итерации принимается значение, равное 1, являющееся минимальным количеством элементов, из которых может быть построен временной ряд и проверена его модель прогнозирования.
2. Для данного значения взять модель функции $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(m^{(j)} \right)^{p_{i,j}} = 0$, где n выбрано на предыдущем шаге, и преобразуется к предопределенному виду двумя итерациями, чтобы получить универсальную форму $g\left(\left\{ v^{(i)} \right\} \right) = 0$ с известными значениями степеней и коэффициентов умножения, неопределенность которой будет заключаться только в порядке дифференцирования.
3. Используя численные методы проверить удовлетворяют ли найденные функции, заданные уравнением $g\left(\left\{ v^{(i)} \right\} \right) = 0$ данному временному ряду согласно условию допустимого отклонения (2.1).

4. Использовать найденные на данной итерации функции-модели для прогнозирования временного ряда по формулам (2.7) или (2.9) в зависимости от существования интервалов допустимого отклонения.
5. Перейти к следующей итерации цикла. На практике количество итераций будет определяться необходимым количеством элементов для роста энтропии функций-моделей. Начиная с некоторого количества численные методы решения дифференциального уравнения будут приводить к функциям, близким к найденным на предыдущей итерации.

Данный алгоритм является решением задачи в общем виде. В силу возможного существования специальных требований к времени расчета прогноза на практике алгоритм может быть модифицирован и упрощен. Однако чем ближе упрощенный алгоритм будет к вышеописанному, тем задача прогнозирования будет решена точнее, а результат более объективен.