Моделирование случайных процессов с заданной функцией корреляции

Козак Артем Владимирович

19 ноября 2019 г.

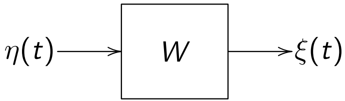
Формирующий фильтр

Определение

Формирующий фильтр – это динамическая система, на выходе которой формируется требуемый процесс, соответствующий решению определенного дифференциального уравнения. На вход такой динамической системы подается типовой сигнал.

Определение

Если система линейна, то фильтр называется **линейным формирующим**. Линейность системы определяется принципом суперпозиции.



$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;W, h\;} \longrightarrow y(t)$$

где W – частотная характеристика фильтра (или передаточная функция) и h – импульсная характеристика.

Для линейной системы верно соотношение:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

При этом:

$$h(t) = 0, \text{ при } t < 0$$

Связь корреляционных функций входа и выхода

Замечание

Предположим, что на вход этой системы подан стационарный случайный процесс с равным нулю средним значением. Если рассматриваемая линейная система устойчива и сама стационарна, то установившийся выходной сигнал также будет стационарным случайным процессом, среднее значение которого будет равно нулю, однако его статистические характеристики будут отличаться от статистических характеристик входного сигнала. (Аналогично для эргодичности)

Пусть $x(t)$ – стационарный эргодический случайный процесс, тогда $y(t)$ – стационарен и эргодичен.

Связь корреляционных функций входа и выхода

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Тогда для момента времени $t + t_0$ имеем:

$$y(t+t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t+t_0-\tau)d\tau$$

Так как y – стационарный и эргодический СП, то мы можем найти корреляционную функцию как среднее по времени:

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t)y(t+\tau)dt$$

Связь корреляционных функций входа и выхода

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)x(t+\tau-\eta)d\eta \right) dt$$

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)h(\eta) \int\limits_{-T}^{+T} x(t-\lambda)x(t+\tau-\eta)dtd\lambda d\eta$$

$$R_y(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)h(\eta) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x(t-\lambda)x(t+\tau-\eta)dtd\lambda d\eta$$

Заметим, что:

$$R_x(\tau+\lambda-\eta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x(t-\lambda)x(t+\tau-\eta)dt$$

Тогда:

Theorem

$$R_y(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)h(\eta)R_x(\tau+\lambda-\eta)d\lambda d\eta$$

Выражение является основным интегральным соотношением, позволяющим по известной корреляционной функции случайного процесса на входе системы и известной импульсной переходной функции системы найти корреляционную функцию случайного процесса на выходе системы.

Связь спектральных плотностей входа и выхода

Спектральная плотность случайного процесса (на выходе) равна (как следствие из теоремы Хинчина — Колмогорова):

$$S_y(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$S_y(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) h(\eta) R_x(\tau + \lambda - \eta) d\lambda d\eta e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$S_y(\omega) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} h(\lambda) h(\eta) R_x(\tau + \lambda - \eta) e^{-i\omega\tau} d\lambda d\eta d\tau$$

$$S_y(\omega) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} h(\lambda)h(\eta)R_x(\tau+\lambda-\eta)e^{-i\omega(\tau+\lambda-\eta)}e^{i\omega\lambda}e^{-i\omega\eta}d\lambda d\eta d\tau$$

Рассмотрим интеграл по τ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau+\lambda-\eta)e^{-i\omega(\tau+\lambda-\eta)}d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_x(\upsilon)e^{-i\omega\upsilon}d\upsilon = S_x(\omega)$$

Связь спектральных плотностей входа и выхода

Тогда:

$$S_y(\omega) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(\lambda)h(\eta)S_x(\omega)e^{i\omega\lambda}e^{-i\omega\eta}d\lambda d\eta$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(\lambda)h(\eta)e^{i\omega\lambda}e^{-i\omega\eta}d\lambda d\eta$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)e^{i\omega\lambda}d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)e^{-i\omega\eta}d\eta$$

Осталось вспомнить связь импульсной и частотной характеристики фильтра:

$$W(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Вопрос: *Что это за преобразование?*

Связь спектральных плотностей входа и выхода

$$W(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Учитывая **физическую реализуемость** системы, то есть соотношение:

$$h(t) = 0, \text{ при } t < 0$$

Получим:

$$W(s) = \int\limits_{0}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \text{ где } s = 0 + i\omega$$

Последние есть эквивалент **преобразования Лапласа.**

Связь спектральных плотностей входа и выхода

Theorem

В линейной динамической физически реализуемой системе импульсная и частотная характеристи фильтра связаны преобразованием Лапласа. При этом импульсная характеристика $h(\tau)$ есть оригинал, а частотная характеристика $W(i\omega)$ – изображение функции $h(\tau)$.

Вернемся к спектральным плотностям:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) e^{i\omega\lambda} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta$$

Или же учитывая связь импульсной и частотной характеристик:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) W(i\omega) W(-i\omega)$$

Или же учитывая выдержки из теории комплексного анализа:

Theorem

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Таким образом, спектральная плотность стационарного случайного процесса на выходе линейной системы равна спектральной плотности случайного процесса на входе системы, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной функции этой системы.

Моделирование случайного процесса

Пусть нам известны характеристики входного сигнала (например, $R_x(\tau)$). Мы хотим плучить на выходе сигнал с заранее известными характеристиками (напиример, $R_y(\tau)$).

Понятно, что зная $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, мы можем найти $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$.

Для получения характеристик формирующего фильтра воспользуемся соотношением:

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Заметим, что любую четную функцию можно представить в виде:

$$f(t) = g(it)g(-it)$$

Тогда получаем систему вида:

$$\begin{cases} S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_x(\omega) \\ S_x(\omega) = \phi(i\omega)\phi(-i\omega) \\ S_y(\omega) = \psi(i\omega)\psi(-i\omega) \end{cases}$$

Отсюда:

$$W(i\omega) = \frac{\psi(i\omega)}{\phi(i\omega)}$$

Воспользовавшись связью передаточной и инмульсной функциями, получим:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(i\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$$

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(i\omega)}{\phi(i\omega)} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

Тогда для линейной динамической системы получим:

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(i\omega)}{\phi(i\omega)} e^{-i\omega\tau} d\omega \, x(t-\tau) d\tau$$

Алгоритм генерации

1. Найти $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$
2. Решив систему, получить $W(i\omega) = \dfrac{\psi(i\omega)}{\phi(i\omega)}$
3. По входному сигналу получить
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(i\omega)}{\phi(i\omega)} e^{-i\omega\tau} x(t-\tau) d\tau d\omega$$

Моделирование СП с заданной функцией корреляции

Предположим, что мы хотим получить случайный процесс с функцией корреляции равной:

$$R_y(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$$

Тогда:

$$S_y(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$S_y(\omega) = \frac{2\alpha}{(\alpha + i\omega)(\alpha - i\omega)} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha + i\omega}\frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha - i\omega}$$

Таким образом:

$$\psi(i\omega) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha + i\omega}$$

Осталось определить характеристики входного случайного процесса.

Как правило на вход подоется типовой случайный процесс.

В качестве такого СП выберем **белый шум**.

Тогда:

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

$$S_x(\omega) = \sigma^2$$

$$\phi(i\omega) = \sigma$$

Моделирование СП с заданной функцией корреляции

То есть передаточная функция для такого формирующего фильтра имеет вид:

$$W(i\omega) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

Учитывая, что $W(i\omega)$ – изображение функции $h(\tau)$. Получим, что:

$$W(s) \risingdotseq h(\tau)$$

$$\frac{1}{\alpha + s} \risingdotseq e^{-\alpha\tau}$$

$$\Downarrow$$

$$h(\tau) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} e^{-\alpha\tau}$$

Тогда зная реализацию входного СП, мы можем найти реализацию моделируемого СП:

$$y(t) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau} x(t-\tau) d\tau$$

Или же в цифровом виде:

$$y_j = \frac{\sqrt{2\alpha}\,\triangle\tau}{\sigma} \sum_{i=0}^{j} e^{-\alpha i \triangle\tau} x_{i-j}$$

где $\triangle\tau$ –шаг дискретизации.

Моделирование СП с заданной функцией корреляции

Theorem

Зная импульсную характеристику фильтра и реализацию входного случайного процесса, мы можем найти выходной случайный процесс линейной динамической системы

1. *в аналоговом виде:*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

2. *в цифровом виде:*

$$y_j = \triangle\tau \sum_{i=0}^{N} h(i\triangle\tau)\, x_{i-j}$$

при этом N может быть как перемменной (для y_j берем $N = j$), так и константой.

Разложение по координатным случайным величинам

Давайте рассмотрим дискретный (цифровой случай). Тогда любая конечная реализация случайного процесса есть вектор. И можно рассматривать как случайный вектор.

Пусть мы хотим представить выходной сигнал в виде:

$$y_n = \sum_{i=0}^{N} c_i x_{n-i}$$

.

Пусть входной сигнал – белый шум.

Разложение по координатным случайным величинам

Пусть $K_{|i-j|} = M[y_i y_j]$.
Ясно, что $K_{>N} = 0$. Действительно:

$$K_{>N} = K_{N+k,\, k>0} = M[y_m y_{m+N+k}] = M\left[\sum_{i=0}^{N} c_i x_{m-i} \sum_{i=0}^{N} c_i x_{m+N+k-i}\right]$$

.

$$M[x_i x_j] = 0,\ i \neq j$$

$$K_{>N} = 0$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} K_N = M[y_k y_{k+N}] \\ K_{N-1} = M[y_k y_{k+N-1}] \\ \dots \\ K_0 = M[y_k y_k] \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_N = c_0 c_N \\ K_{N-1} = c_0 c_{N-1} + c_1 c_N \\ \dots \\ K_0 = c_0 c_0 + c_1 c_1 + \dots + c_N c_N \end{cases}$$

Тест Дики-Фуллера

- Рассмотрим авторегрессионное уравнение первого порядка:

$$y_t = ay_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Или приведенное уравнение: $\triangle\, y_t = by_{t-1} + \varepsilon_t$
- Находим/оцениваем параметр b (например, с помощью МНК)
- Далее проверяем гипотезу о **единичном корне**. То есть $b = 0$. При этом альтернативная гипотезе о том, что $b < 0$.
- Если значение статистики лежит левее критического значения (критические значения — отрицательные) при данном уровне значимости, то нулевая гипотеза о единичном корне отклоняется и процесс признается стационарным (в смысле данного теста).

Спасибо за внимание!