Estratégias de Controle para um Manipulador Plano com Dois Graus de Liberdade

Ígor Yamamoto, Miguel Becker

***Abstract*—Este trabalho apresenta técnicas de controle não-linear aplicadas a um manipulador robótico planar com dois graus de liberdade. Para o projeto do controlador foi utilizado a técnica de realimentação linearizante e também por modos deslizantes, ambos com objetivo de seguimento de referência de uma trajetória pré-estabelecida. Neste documento, as etapas de projeto de controle são apresentadas, partindo do modelo matemático até chegarmos aos resultados dos seguimentos de trajetória.**

***Keywords*—Robótica, controle não-linear, geração de trajetória, realimentação linearizante.**

I. INTRODUÇÃO

Manipuladores robóticos são utilizados em uma vasta gama de aplicações, tendo foco principal na robótica industrial. A análise consiste na aplicação de técnicas de controle que permitam o seguimento de trajetórias considerando as não-linearidades inerentes ao sistema. Na Figura 1 podemos observar um exemplo deste tipo de manipulador.

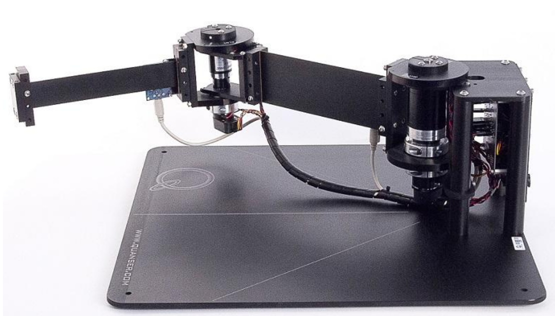

Fig. 1. Exemplo de um manipulador robótico

Esse trabalho tem como objetivo representar o modelo do sistema por equações de estado, estudar a sua dinâmica (equilíbrios, estabilidade dos equilíbrios, e depois projetar controladores utilizando as técnicas de controle não-linear aprendidas durante a disciplina de Sistemas Dinâmicos. A seguir serão apresentados o modelo matemático do sistema e a análise dos seus equilíbrios. Depois será apresentada a cinemática direta e inversa do manipulador, necessárias para o seguimento de trajetória. E por fim é feito o projeto dos controladores e as analises de malha fechada, junto com a conclusão do trabalho.

II. MODELO MATEMÁTICO

O modelo dinâmico do manipulador robótico é dado pela seguinte equação diferencial:

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = \tau \tag{1}$$

onde

- $M(q) = \left[\begin{smallmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{smallmatrix}\right]$ representa a matriz de inércia
- $V(q,\dot{q})$ representa os termos centrífugos (relacionados às forças de Coriolis)
- $G(q)$ representa os termos relacionados às forças gravitacionais
- $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ é o torque aplicado nas juntas
- $q = [\theta_1 \ \ \theta_2]^T$, $\dot{q} = [\dot{\theta}_1 \ \ \dot{\theta}_2]^T$ e $\ddot{q} = [\ddot{\theta}_1 \ \ \ddot{\theta}_2]^T$ são as variáveis de junta

Os termos da matriz de inércia são:

$$\begin{aligned} m_{11} =& I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + (m_2 + m_p)L_1^2 + \\ & + m_2(l_2^2 + L_2^2) + 2L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)cos(\theta_2) \\ m_{12} =& m_{21} = I_2 + m_2 l_2^2 + m_p L_2^2 + \\ & + L_1(m_2 l_2 + m_p l_2)cos(\theta_2) \\ m_{22} =& I_2 + m_2 l_2^2 + m_p L_2^2 \end{aligned}$$

E juntando os termos centrífugos e gravitacionais $H(q,\dot{q}) = V(q,\dot{q}) + G(q)$, temos:

$$\begin{aligned} h_1 =& -L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)sin(\theta_2)(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \\ & + (m_1 l_1 + (m_2 + m_p)L_1)gcos(\theta_1) + \\ & + (m_2 l_2 + m_p L_1)gcos(\theta_1 + \theta_2) \\ h_2 =& L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \\ & + (m_2 l_2 + m_p L_1)gcos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

As massas (m_1, m_2) são de 2.2 kg, os comprimentos (L_1, L_2) têm 0.6 m, os comprimentos (l_1, l_2) têm 0.3 m e os momentos de inércia (I_1, I_2) são ambos de 0.066 kg.m^2. A aceleração da gravidade utilizada é $g = 9.81$ m/s^2.

Os ângulos de junta (θ_1, θ_2) são ilustrados na Figura 2

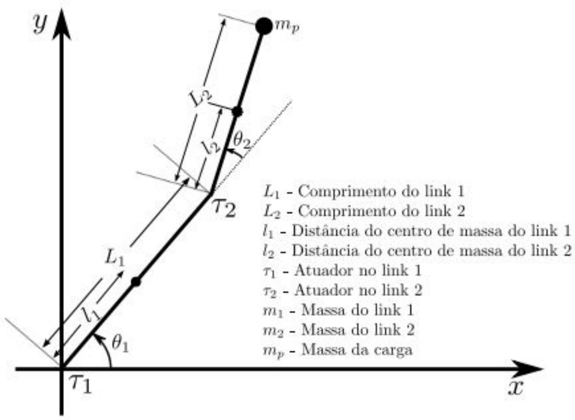

Fig. 2. Manipulador planar com 2 graus de liberdade

III. Análise dos equilíbrios

Para que o sistema fique em equilíbrio é necessário que as derivadas dos seus estados sejam nulas. De acordo com essa condição, as equações do sistema reduzem-se à:

$$\begin{aligned} A_1 cos(\theta_1) + A_2 cos(\theta_1+\theta_2) =& \tau_1 \\ A_2 cos(\theta_1+\theta_2) =& \tau_2 \end{aligned}$$

No qual:

$$\begin{aligned} A_1 =& (m_1 l_1 + (m_2+m_p)L_1)g \\ A_2 =& (m_2 l_2 + m_p L_1)g \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima temos:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pm\text{ArcCos}\left[\frac{A_1A_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2 \pm \sqrt{A_1^2A_2^2(A_1^2-(\tau_1-\tau_2)^2)(A_2^2-\tau_2^2)}}{A_1^2A_2^2}\right] \\ \theta_1 &= \pm\text{ArcCos}\left[\frac{\tau_1-\tau_2}{A_1}\right] \end{aligned}$$

Quando os torques (τ_1,τ_2) são nulos, os pontos de equilíbrio são independentes das massas do sistema. São eles:

$$\begin{aligned} \theta_2 =& 0, \theta_1 = -\frac{\pi}{2}(\text{estável}) \\ \theta_2 =& 0, \theta_1 = \frac{\pi}{2}(\text{instável}) \\ \theta_2 =& pi, \theta_1 = -\frac{\pi}{2}(\text{instável}) \\ \theta_2 =& pi, \theta_1 = \frac{\pi}{2}(\text{instável}) \end{aligned}$$

Nota-se nas equações anteriores que os torques são máximos quando (θ_1,θ_2) são iguais a 0. Nessas condições, os torques necessários para segurar uma carga m_p nessa posição são:

$$\begin{aligned} \tau_1 =& 72.912, \tau_2 = 29.988 \rightarrow m_p = 4kg \\ \tau_1 =& 96.432, \tau_2 = 41.748 \rightarrow m_p = 6kg \end{aligned}$$

O sistema foi simulado em malha aberta visto na Figura 3 , com os torques iguais a 0, e foi verificado que o sistema realmente tende ao primeiro equilíbrio apresentado acima.

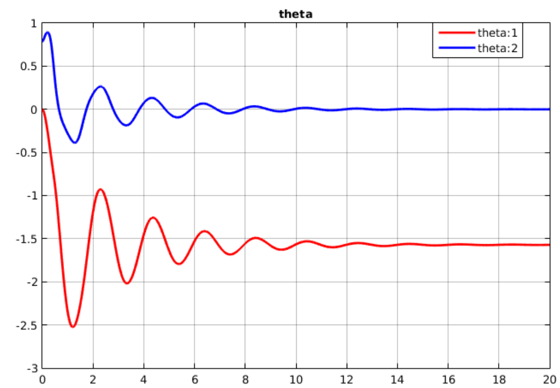

Fig. 3. Simulação em malha aberta com os torques nulos

IV. Cinemática Direta e Inversa

Para determinarmos um determinado ponto descrito em coordenadas cartesianas para o espaço de juntas utilizamos a cinemática inversa. Após o controle sobre o manipulador, calculamos a cinemática direta para definir a saida, a qual transforma do espaço de juntas (ângulos) novamente para o espaço cartesiano. Em seguida apresentamos uma breve descrição destes métodos.

A. Cinemática Direta

Na cinemática direta, partindo dos valores dos ângulos θ_1 e θ_2, podemos obter as coordenadas cartesianas x, y da extremidade do manipulador utilizando as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = L_1 cos\theta_1 + L_2 cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1 sin\theta_1 + L_2 sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases} \tag{2}$$

B. Cinemática inversa

A cinemática inversa em manipuladores de cadeia aberta é bem mais complexa. Agora é necessário fazer o caminho contrário para obter os ângulos das juntas, dada uma posição no espaço cartesiano.

Tendo definido a posição final do efetuador (P_x, P_y), é possivel obter os angulos θ_1 e θ_2 do modo a seguir:

Já que a distância da base ao efetuador é definida como $r = \sqrt{P_x^2+P_y^2}$, aplicamos a regra dos cossenos no triângulo formado por L_1, L_2 e r, onde β é o ângulo entre L_1 e L_2:

$$\beta = acos(\frac{a_1^2+a_2^2-r^2}{2a_1a_2})$$

O ângulo beta é escolhido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi < \beta < 0 \rightarrow (\text{cotovelo para baixo}) \\ -\pi < \beta < 0 \rightarrow (\text{cotovelo para cima}) \end{aligned}$$

Assim, é possivel determinar o ângulo θ_2.

$$\theta_2 = \pi - \beta$$

Sendo:

$$\alpha = atan(\frac{P_y}{P_x})$$
$$\gamma = acos(\frac{L_1^2 - L_2^2 - r^2}{2L_1 r})$$

A escolha do sinal de γ é análoga a explicada para o ângulo β. Assim, obtém-se o ângulo da primeira junta:

$$\theta_1 = \alpha + \gamma$$

Logo, dado uma entrada (P_x, P_y) no espaço cartesiano, é possivel obter os ângulos do espaço de juntas.

Ambas cinemáticas direta e inversa foram implementadas nas simulações no Matlab. A inversa para converter o ponto definido em coordenadas cartesianas como referencia para o controle e planta que trabalham no espaço de juntas. Já a direta foi utilizada para retraduzir o resultado da planta em espaço de juntas para coordenadas cartesianas e permitir ser mostrado graficamente em coordenadas cartesianas no espaço.

V. Geração de Trajetória

A trajetória gerada como referência para o manipulador robótico consiste em um círculo centrado em $(x_c, y_c) = (0.3, 0.3)$ e com raio $r = 1/5$. Para a construção da trajetória, são escolhidos $n = 30$ pontos igualmente espaçados ao longo do círculo e, então, faz-se a interpolação dos pontos. Os pontos são calculados da seguinte forma:

$$P_x = x_c + r\,cos(i\Delta\theta)$$
$$P_y = y_c + r\,sin(i\Delta\theta)$$

onde $\Delta\theta = 2\pi/n$ é o arco entre os pontos e $0 < i < n$ é um dos n pontos. A figura 4 mostra a trajetória gerada para o manipulador.

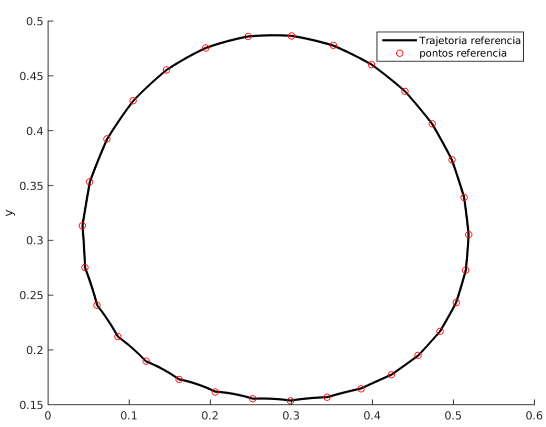

Fig. 4. Trajetória gerada

VI. Projeto de Controle

Nesta secção são apresentados os projetos de controle para seguimento de referência da trajetória gerada. Duas técnicas de controle não-linear são utilizadas: realimentação linearizante e controle de estrutura variável por modos deslizantes.

Primeiramente, reescrevemos a equação 1, definindo variáveis de estado com o intuito de facilitar o projeto dos controladores:

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \\ y = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M(x_1)^{-1}[\tau - V(x_1, x_2) - G(x_1)] \end{cases} \tag{3}$$

A. Realimentação Linearizante

Para linearizarmos o sistema de equações em 3, definimos uma variável de controle auxiliar $v(t)$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v(t) \end{cases} \tag{4}$$

Duas estruturas de controle são propostas para $v(t)$: a primeira consiste de uma ação proporcional e uma derivativa (PD) em relação ao erro de trajetória; na segunda, adiciona-se um termo integrador ao controlador.

1) PD: Propõe-se a seguinte estrutura para a variável de controle auxiliar:

$$v(t) = \ddot{y}_r + k_p(y_r - x_1) + k_d(\dot{y}_r - x_2) \tag{5}$$
$$= \ddot{y}_r + k_p\,e(t) + k_d\,\dot{e}(t) \tag{6}$$

Substituindo 6 em 4, temos

$$\ddot{e}(t) + k_d\,\dot{e}(t) + k_p\,e(t) = 0 \tag{7}$$

Da equação diferencial 7, temos a equação característica:

$$\lambda^2 + k_d\lambda + k_p = 0 \tag{8}$$

Podemos projetar um controlador com os seguintes requisitos: $t_{5\%} = 0.3s$ e sem sobressinal. Assim, temos $\xi = 1$, $\omega_n = 10$ e a equação característica desejada:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

Portanto, $k_d = 20$ e $k_p = 100$. As figuras 5, 6 e 7 ilustram a simulação do seguimento de trajetória do manipulador utilizando a estrutura de controle por realimentação linearizante PD.

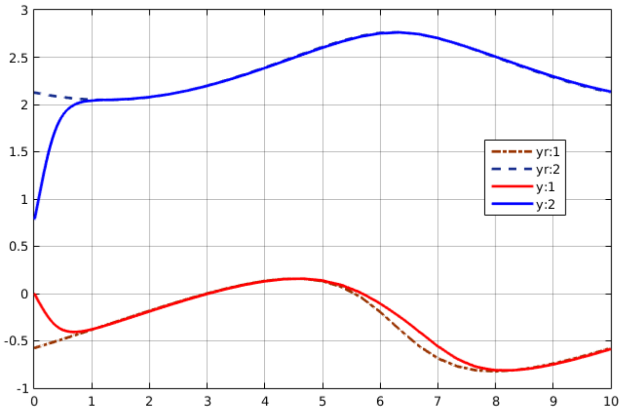

Fig. 5. Simulação PD - seguimento de trajetória (radianos)

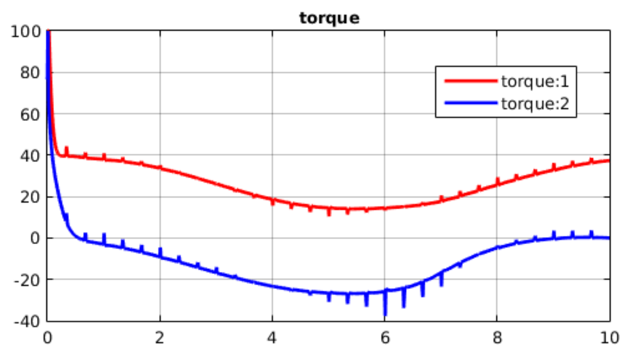

Fig. 6. Simulação PD - torque aplicado nas juntas

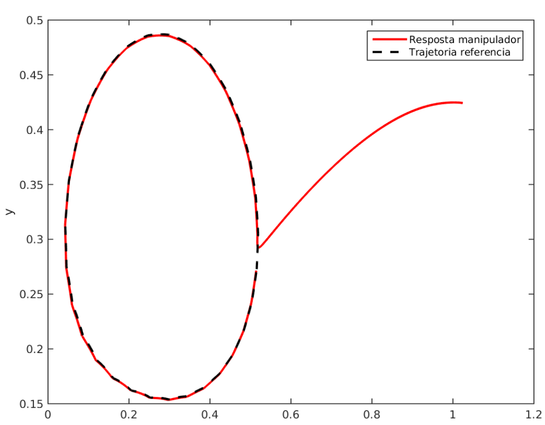

Fig. 7. Simulação PD - seguimento de trajetória

2) PID: Propõe-se uma nova estrutura para a variável de controle auxiliar, adicionando-se um termo integrativo:

$$v(t) = \ddot{y}_r + k_p(y_r - x_1) + k_d(\dot{y}_r - x_2) + k_i \int (y_r - x_1) \tag{9}$$

$$= \ddot{y}_r + k_p\, e(t) + k_d\, \dot{e}(t) + k_i \int e(t)dt \tag{10}$$

A mesma simulação para seguimento de trajetória foi feita, ajustando-se o parâmetro $k_i = 1$. As figuras 8, 9 e 10 mostram a simulação com a estrutura de controle por realimentação linearizante PID.

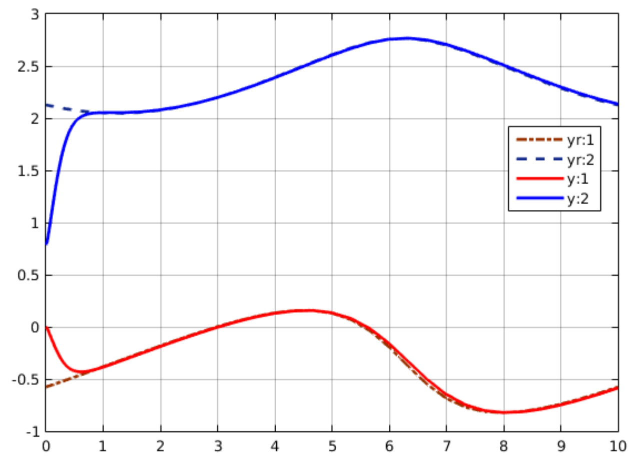

Fig. 8. Simulação PID - seguimento de trajetória (radianos)

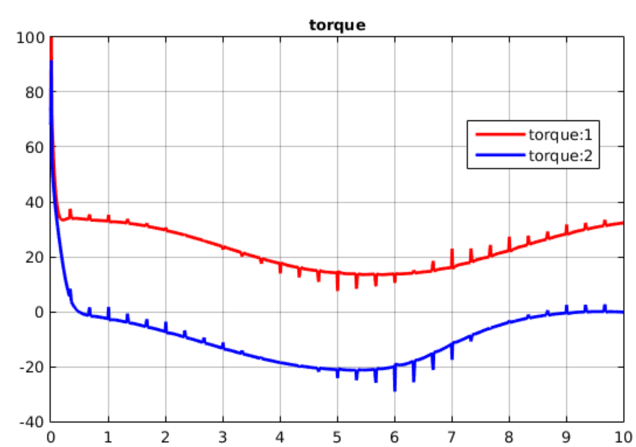

Fig. 9. Simulação PID - torque aplicado nas juntas

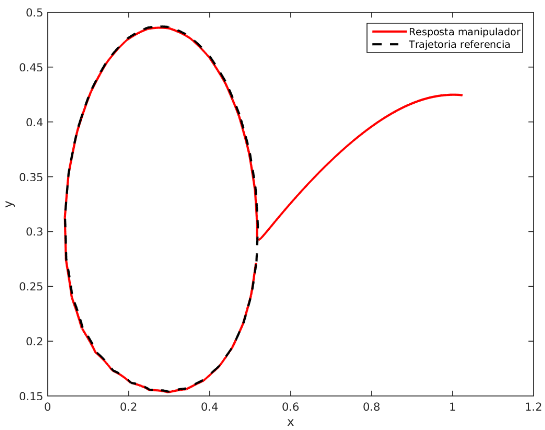

Fig. 10. Simulação PID - seguimento de trajetória

B. Modos Deslizantes

Para a implementação do controlador com estrutura variável utilizando modos deslizantes foi considerada a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{11}$$

onde $\sigma = k_1(y_r - x_1) + k_2(\dot{y}_r - x_2)$

Tomando-se a derivada da função de Lyapunov, temos:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma\dot{\sigma} \\ &= \sigma(-k_1\dot{x}_1 - k_2\dot{x}_2) \\ &= \sigma[-k_1 x_2 - k_2(M^{-1}(\tau - V - G))]\end{aligned}$$

Separamos o sinal de controle em $\tau = \tau_{eq} + \tau_N$. O primeiro termo ($\tau_{eq}$) é destinado ao cancelamento da dinâmica não-linear do sistema, enquanto o segundo termo (τ_N) garante a estabilidade pela função de Lyapunov. Assim temos:

$$\boxed{\tau_{eq} = -\frac{k_1}{k_2} M\, x_2 + V + G} \tag{12}$$

$$\dot{V} = -\sigma k_2\, M^{-1}\tau_N < 0 \rightarrow \boxed{\tau_N = sign(\sigma)} \tag{13}$$

As figuras 11, 12 e 13 mostram a simulação com a estrutura de controle por variável utilizando modos deslizantes, com parâmetros ajustados em $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$.

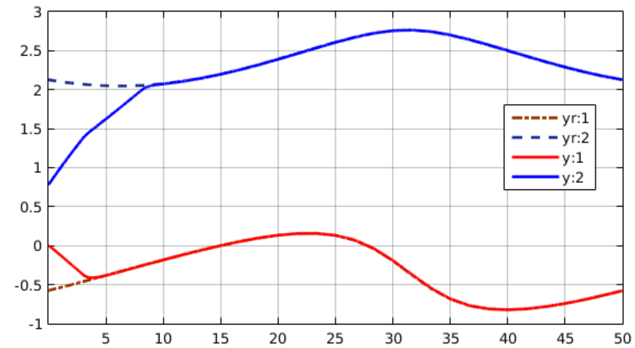

Fig. 11. Simulação Modos Deslizantes - seguimento de trajetória (radianos)

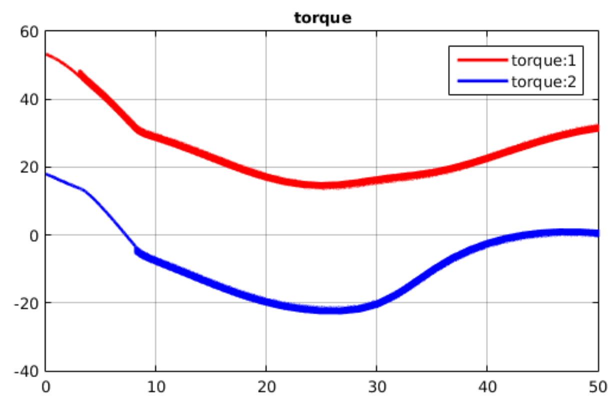

Fig. 12. Simulação Modos Deslizantes - torque aplicado nas juntas

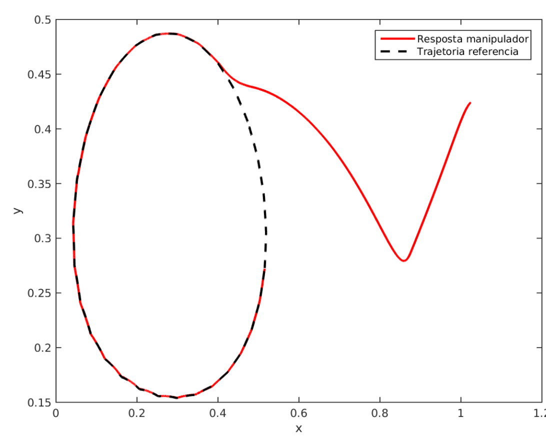

Fig. 13. Simulação Modos Deslizantes - seguimento de trajetória

1) Anti-Chattering: Com o intuito de eliminar o *chattering* introduzido na ação de controle (figura 12), propomos o cálculo do torque da seguinte forma:

$$\tau(t) = \tau_{eq}(t) + \tau_N(t)$$
$$\tau_{eq}(t) = \int \dot{\tau}_{eq}(t)dt$$
$$\dot{\tau}_{eq} = sign(\sigma + \dot{\sigma})$$

As figuras 14, 15 e 16 mostram a mesma simulação feita anteriormente para o controlador de estrutura variável com a adição da técnica de eliminação de *chattering*.

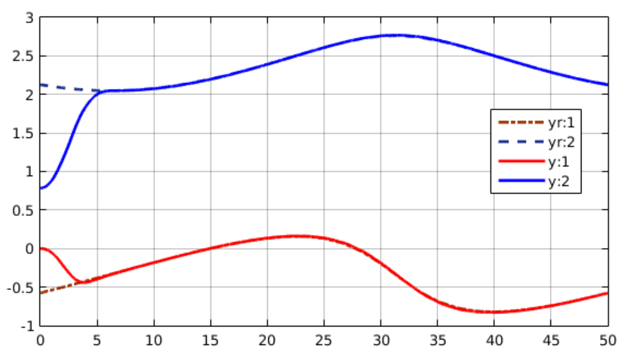

Fig. 14. Simulação com eliminação de chattering - seguimento de trajetória (radianos)

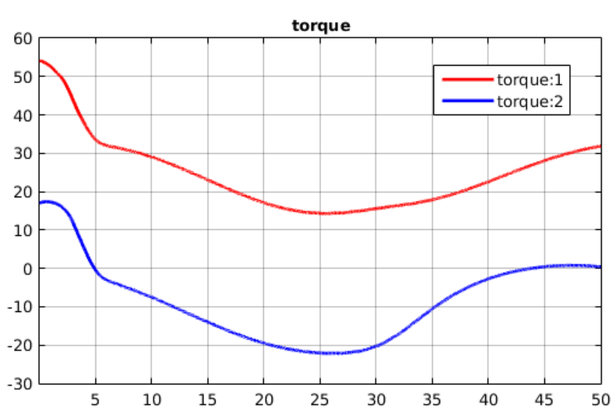

Fig. 15. Simulação com eliminação de chattering - torque aplicado nas juntas

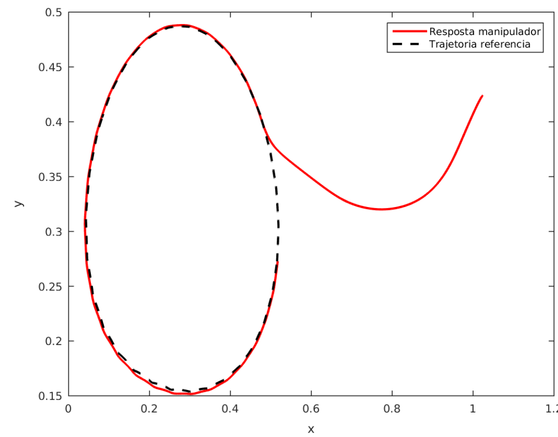

Fig. 16. Simulação com eliminação de chattering - seguimento de trajetória

VII. Conclusão

O controle do manipulador robótico plano de dois graus de liberdade para seguimento de trajetória foi realizado através de técnicas de controle não-linear. Primeiro, a geração da trajetória do manipulador foi desenvolvida pela cinemática inversa. Com a trajetória proposta, controladores projetados através da técnica de realimentação linearizante foram implementados (PD e PID). Por último, a técnica de controle por modos deslizantes foi desenvolvida.

Através de simulações feitas no Matlab e Simulink, as implementações dos controladores puderam ser comparadas. Os desempenhos em relação ao seguimento da trajetória proposta foram considerados satisfatórios. O controlador PID demonstrou-se ser mais robusto em comparação com o PD. Quanto ao controle por estrutura variável, obtivemos respostas mais lentas no transitório da condição inicial do manipulador até a trajetória proposta. Com a técnica de eliminação do *chattering* nas ação dos torques das juntas, a implementação do controlador mostrou-se viável.

O trabalho feito ainda poderia ser expandido através da implementação de uma interface gráfica no Matlab, permitindo o seguimento de diferentes trajetórias, além da visualização dos resultados por animações do robô utilizando o *toolbox SimMechanics*. Além disso, uma análise de robustez mais rigorosa variando-se os parâmetros estimados no controlador pode ser feita. Por último, o cálculo da inversa da matriz de inércia precisa ser elaborado com os devidos cuidados para evitar situações de singularidade do manipulador.