第五节　指派问题（Assignment Problem）

1. 标准指派问题的提法及模型

指派问题的标准形式是：有n个人和n件事，已知第i个人做第j件事的费用为c_{ij}（i，j=1，2，…，n），要求确定人和事之间的一一对应的指派方案，使完成这n件事的总费用最小。

设n^2个0-1变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若指派第i个人做第j件事}\\ 0 & \text{若不指派第i个人做第j件事}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\dots,n)$$

数学模型为:

$$\min\quad Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\\ x_{ij}=0\quad or\quad 1,\quad i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

其中矩阵C称为是效率矩阵或系数矩阵。

其解的形式可用0-1矩阵的形式来描述，即 $(x_{ij})_{n\times n}$。

标准的指派问题是一类特殊的整数规划问题，又是特殊的0-1规划问题和特殊的运输问题。1955年W. W. Kuhn利用匈牙利数学家D. Konig关于矩阵中独立零元素的定理，提出了解指派问题的一种算法，习惯上称之为匈牙利解法。

2. 匈牙利解法

匈牙利解法的关键是指派问题最优解的以下性质：**若从指派问题的系数矩阵C=（c_{ij}）的某行（或某列）各元素分别减去一个常数k，得到一个新的矩阵C'=（c'_{ij}），则以C和C'为系数矩阵的两个指派问题有相同的最优解。**（这种变化不影响约束方程组，而只是使目标函数值减少了常数k，所以，最优解并不改变。）

作变换，其不变性是最优解

对于指派问题，由于系数矩阵均非负，故若能在在系数矩阵中找到n个位于不同行和不同列的零元素（独立的0元素），则对应的指派方案总费用为零，从而一定是最优的。

匈牙利法的步骤如下：

步1：变换系数矩阵。对系数矩阵中的每行元素分别减去该行的最小元素；再对系数矩阵中的每列元素分别减去该列中的最小元素。若某行或某列已有0元素，就不必再减了（不能出现负元素）。

步2：在变换后的系数矩阵中确定独立0元素（试指派）。若独立0元素已有n个，则已得出最优解；若独立0元素的个数少于n个，转步3。

确定独立0元素的方法：当n较小时，可用观察法、或试探法；当n较大时，可按下列顺序进行

• 从只有一个0元素的行（列）开始，给这个0元素加圈，记作◎，然后划去◎所在的列（行）的其它0元素，记作φ。

•给只有一个0元素的列（行）的0加圈，记作◎，然后划去◎所在行的0元素，记作φ。

•反复进行，直到系数矩阵中的所有0元素都被圈去或划去为止。

•如遇到行或列中0元素都不只一个（存在0元素的闭回路），可任选其中一个0元素加圈，同时划去同行和同列中的其它0元素。被划圈的0元素即是独立的0元素。

•步3：作最少数目的直线，覆盖所有0元素（目的是确定系数矩阵的下一个变换），可按下述方法进行

1）对没有◎的行打“✓”号；

2）在已打“✓”号的行中，对φ所在列打“✓”

3）在已打“✓”号的列中，对◎所在的行打“✓”号；

4）重复2）3），直到再也找不到可以打“✓”号的行或列为止；

5）对没有打“✓”的行划一横线，对打“✓”的列划一纵线，这样就得到覆盖所有0元素的最少直线数。

步4：继续变换系数矩阵，目的是增加独立0元素的个数。方法是在未被直线覆盖的元素中找出一个最小元素，然后在打“✓”行各元素中都减去这一元素，而在打“✓”列的各元素都加上这一最小元素，以保持原来0元素不变（为了消除负元素）。得到新的系数矩阵，返回步2。

以例说明匈牙利法的应用。

例①

例2 某大型工程有五个工程项目，决定向社会公开招标，有五家建筑能力相当的建筑公司分别获得中标承建。已知建筑公司A_i（I=1，2，3，4，5）的报价c_{ij}（百万元）见表，问该部门应该怎样分配建造任务，才能使总的建造费用最小？

公司＼工程	B1	B2	B3	B4	B5
A1	4	8	7	15	12
A2	7	9	17	14	10
A3	6	9	12	8	7
A4	6	7	14	6	10
A5	6	9	12	10	6

$$\min\ Z = 4x_{11} + 8x_{12} + \cdots + 10x_{54} + 6x_{55}$$

$$s.t\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 & j = 1,2,\cdots,5 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 & i = 1,2,\cdots,5 \\ x_{ij} = 0\ \ or\ \ 1 & i,j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

解：第一步：系数矩阵的变换（目的是得到某行或列均有0元素）

$$
\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

第二步：确定独立0元素, 即加圈

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix} \cancel{0} & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 5 & \cancel{0} & 4 \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

◎元素的个数m=4，而n=5，进行第三步。

第三步：作最少的直线覆盖所有的0元素，目的是确定系数矩阵的下一个变换。

$$
\longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \cancel{0} & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 5 & \cancel{0} & 4 \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \checkmark & & & & \end{array} & \end{array}
$$

第四步：对上述矩阵进行变换，目的是增加独立0元素个数。方法是在未被直线覆盖的元素中找出一个最小元素，然后在打“✓”行各元素中都减去这一元素，而在打“✓”列的各元素都加上这一最小元素，以保持原来0元素不变（消除负元素）。得到新的系数矩阵。（它的最优解和原问题相同，为什么？因为仅在目标函数系数中进行操作）

此处纠正，应为0，0

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ -1 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ \cancel{0} & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

此矩阵中已有5个独立的0元素，故可得指派问题的最优指派方案为：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也就是说，最优指派方案为：让A1承建B3， A2承建B2，A3承建B1，A4承建B4，A5承建B5。这样安排建造费用为最小，即

7+9+6+6+6=34（百万元）

例②

求解下列指派问题，已知指派矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

程序：指派优化	运行环境：Matlab2011a

```
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5 ;8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:);
a=zeros(10,25);
for i=1:5
a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1);
[x,y]=bintprog(c,[],[],a,b);% bintprog 函数功能：提供的新的 0-1 线性规划求解函数
x=reshape(x,[5,5])
y%最小值
```

运行结果

```
x =
     0     0     0     0     1
     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     0     1     0
     1     0     0     0     0
y =
    21
```

程序：指派优化	运行环境：Lingo11

```
model:
sets:
var/1..5/;
link(var,var):c,x;
  endsets
data: c=3 8 2 10 3
8 7 2 9 7
6 4 2 7 5
8 4 2 3 5
9 10 6 9 10;
enddata
min=@sum(link:c*x);
```

```
@for(var(i):@sum(var(j):x(i,j))=1);
@for(var(j):@sum(var(i):x(i,j))=1);
@for(link:@bin(x));
End
```