

GM 预测

模型的建立

设原始数列为 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ ，把这些数列依次累加：

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n; r \geq 1$$

其中， $x^{(1)}(k)$ 称为 $x^{(0)}$ 的 1 次累加生成数列。

定义 $x^{(1)}$ 的灰导数为

$$d(k) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)$$

令 $z^{(r)}$ 为 $x^{(r)}$ 的均值数列，即

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)} + 0.5x^{(1)}(k-1)$$

本模型于是定义灰微分方程模型 **GM (1, 1)** 为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

上式中，称 $x^{(0)}(k)$ 为灰导数， a 为发展系数， $z^{(1)}(k)$ 为白化背景值， b 为灰作用量。

将时刻 $k = 2, 3, \dots, n$ 代入 **GM (1, n)** 模型，得：

$$x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = b$$

$$x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = b$$

⋮

$$x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = b$$

令

$$Y_N = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T, u = (a, b)^T, B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix}$$

其中，称 Y_N 为数据向量， u 为参数向量， B 为数据矩阵，则 **GM (1, n)** 模型可以表示为矩阵 $Y_N = Bu$ 。

参数向量 u 可用最小二乘法求取，如果 $B^T B$ 奇异，则 $\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$

对于 **GM** 灰微分方程，将灰导数 $x^{(0)}(k)$ 的时刻 $k = 2, 3, \dots, n$ 视为连续变量 t ，则 $x^{(1)}$ 视为时间 $x^{(1)}(t)$ ，于是 $x^{(0)}(k)$ 对应于导数量级 $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}$ ，白化背景值 $z^{(1)}(k)$

对应于导数 $x^{(1)}(t)$ 。于是建立白微分方程：

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$$

解为：

$$x^{(1)}(t) = (x^{(0)}(t-1) - \frac{b}{a})e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a}$$

于是得到预测值表达式：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(k) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

即：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (\hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)), k = 1, 2, \dots, n-1$$

预测下一个数据时，令 $k+1=n-1$ 有：

$$\Rightarrow \hat{x}^{(0)}(n+1) = (x^{(0)}(n) - \frac{b}{a})(e^{-an} - e^{-a(n-1)})$$

程序 1 为较通用的程序，单个数据预测（模型和程序在原有基础上进行了微调）

程序 1: GM (1, 1) 预测	运行环境: Matlab2011a
<pre>clear han1=[]; %数据，建议十行以上的数据 han1(end,:)=[]; m=size(han1,2); x0=mean(han1,2); %平均每行的数据 x1=cumsum(x0); %累加 x0 alpha=0.5; n=length(x0); %x0 中元素个数 z1=alpha*x1(2:n)+(1-alpha)*x1(1:n-1)%x1 的邻值生成数列 Y=x0(2:n); B=[-z1,ones(n-1,1)]; ab=B\Y %a,b 的值 c=ab(2)/ab(1) xhat=(x0(1)-c)*(exp(-ab(1)*n)-exp(-ab(1)*(n-1)))%预测值方程</pre>	
<p>数据预测:</p> <pre>han1=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %数据，建议十行以上的数据</pre>	<p>结果:</p> <pre>ab = -0.1760 2.3760 xhat = 11.4063</pre>
<p>预测下一个数据时，将 11.4063 加入 han1 矩阵即可</p>	