模糊数学知识整理

1. 模糊矩阵

（1）定义：设 $R=(r_{ij})_{m\times n}, 0\le r_{ij}\le 1$，称 R 为模糊矩阵；当 r_{ij} 只取 0 或 1 时，称 R 为布尔矩阵；当模糊方阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的对角线上的元素 r_{ij} 都为 1 时，称 R 为模糊自反矩阵。

（2）运算：并，交，补。满足交换律、结合律、分配律、幂等律、吸收律、复原律、0-1 律、对偶律。

（3）模糊矩阵的 $\lambda-$截矩阵：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 对任意的 $\lambda\in[0,1]$ 称 $A_\lambda=(a_{ij}^{(\lambda)})_{m\times n}$ 为模糊矩阵 A 的 $\lambda-$截矩阵，其中 $a_{ij}^{(\lambda)}=\begin{cases}1, & a_{ij}\ge\lambda\\ 0, & a_{ij}<\lambda\end{cases}$。

2. 模糊模式识别

（1）模式识别：判断学科，主要目的是让计算机仿照人的思维方式对客观事物进行识别、判断和分类。

（2）最大隶属原则

原则Ⅰ：设 $\tilde{A}\in F(X)$ 为标准模式，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$ 为 n 个待录取对象，若存在 x_i，使得 $\tilde{A}(x_i)=\underset{1\le j\le n}{\vee}\tilde{A}(x_j)=\max\{\tilde{A}(x_1),\tilde{A}(x_2),\cdots,\tilde{A}(x_n)\}$ 则应优先录取 x_i。

原则Ⅱ：设 $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n\in F(X)$ 为 n 个标准模式，待识别对象 $x_0\in X$ 属于模式 $\tilde{A}_i$，若存在 $i:1\le i\le n$，使得

$$\tilde{A}_i(x_0)=\underset{1\le j\le n}{\vee}\tilde{A}_j(x_0)=\max\{\tilde{A}_1(x_0),\tilde{A}_2(x_0),\cdots,\tilde{A}_n(x_0)\}$$

（3）贴近度

格贴近度：σ0(A, B) = [A ○ B + (1 - A ⊙ B)]/2， σ1(A, B) = (A ○ B)∧(1- A ⊙ B)，其中○ 表示先取小再取大，⊙表示先取大再取小。

海明贴近度：$\sigma_2(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)|$

欧几里得贴进度：$\sigma_3(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[(A(x_i)-B(x_i))^2\right]^{\frac{1}{2}}$

3. 模糊聚类

（1）标准差标准化：对于第 i 个变量进行标准化，就是将 x_{ij} 换成 x_{ij}，即 $x'_{ij}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{S_j}\quad(1\le i\le n, 1\le j\le m)$

其中：$\bar{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}, S_j=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}$.

（2）极差正规化：$x'_{ij}=\dfrac{x_{ij}-\min\{x_{ij}\}}{\max\{x_{ij}\}-\min\{x_{ij}\}}$

（3）极差标准化：$x'_{ij}=\dfrac{x_{ij}-\bar{x}_j}{\max\{x_{ij}\}-\min\{x_{ij}\}}$

（4）最大值规格化：$x'_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{M_j}$　　其中：$M_j=\max(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj})$

（5）构造模糊相似矩阵

a.最大最小法：$r_{ij}=\dfrac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ij}\wedge x_{kj})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ij}\vee x_{kj})}$

b.算术平均最小法：$r_{ij}=\dfrac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}+x_{jk})}$

c.几何平均最小法：$r_{ij}=\dfrac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{x_{ik}.x_{jk}}}$

4. 模糊综合评判

（1）确定影响评判结果的主要因素；
（2）确定描述评判结果的评语；
（3）通过实际调查或试验，进行单因素评判；
（4）确定权重；
（5）评判结果。

案例：污染分类

一、问题重述

某环保部门对该地区 5 个环境区域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 按污染情况进行分类。设每个区域包含空气、水分、土壤、作物 4 个要素，环境区域的污染情况由污染物在 4 个要素中的含量超过的程度来衡量。设这 5 个环境区域的污染数据为：

$x_1=(70,10,6,2),x_2=(50,0,6,4),x_3=(100,6,4,6),$

$x_4=(40,5,7,3),x_5=(10,1,2,4).$

题目要求对 X 分类。

二、基本假设

1. 假设每个区域只包含空气、水分、土壤、作物 4 个要素；
2.假设忽略外界其它污染因素影响。

三、模型建立

某地区 5 个环境区域污染情况集合为 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，每个区域包含空气、水分、土壤、作物 4 个要素。5 个环境区域的污染数据为 $x_1=(70,10,6,2)$，$x_2=(50,0,6,4)$，$x_3=(100,6,4,6)$，$x_4=(40,5,7,3)$，$x_5=(10,1,2,4)$。由题意，设特性指标矩阵为

$$X^*=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$。

对第 i 个变量进行最大值规划，就是将 x_{ij} 换成 $x_{ij}^{'}$，如下

$$x_{ij}^{'}=\frac{x_{ij}}{M_j} \tag{2}$$

$$M_j=\max\left(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj}\right)$$

用最大最小法（本文以此方法为例）对矩阵 X^* 构造模糊相似矩阵：

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik}\wedge x_{jk}\right)}{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik}\vee x_{jk}\right)} \tag{3}$$

得到矩阵 R：

$$R=\left(r_{ij}\right)_{n\times m}\qquad \left(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots m\right)$$

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

若 R 是 n 阶模糊相似矩阵，则存在一个最小自然数 $k(k\le n)$，对于一切大于 k 的自然数 l，恒有 $R^l=R^k$，此时称 R^k 为 R 的传递闭包，记作 $t(R)=R^k$。

据题意，$k=4$（k 就等于矩阵的维数），平方法合成矩阵传递闭包：

$$t(R)=R^2\bullet R^2=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1j} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i1} & R_{i2} & \cdots & R_{ij} \end{bmatrix} \tag{5}$$

将得到的 $t(R)$ 中的元素从大到小编排，$t_1 \rangle t_2 \rangle t_3 \rangle \cdots$，然后根据编排将 5 个环境区域的污染情况进行分类。

四、模型求解

根据前面建立的模型进行求解，得到特性矩阵为：

$$X^* = \begin{bmatrix} 70 & 10 & 6 & 2 \\ 50 & 0 & 6 & 4 \\ 100 & 6 & 4 & 6 \\ 40 & 5 & 7 & 3 \\ 10 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

采用最大值规格化法将矩阵 X^* 规格化为：

$$X = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0.86 & 0.33 \\ 0.5 & 0 & 0.86 & 0.67 \\ 1 & 0.6 & 0.57 & 1 \\ 0.4 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.67 & 0.67 \end{bmatrix}$$

用最大最小法构造模糊相似矩阵如下：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.52 & 0.57 & 0.65 & 0.25 \\ 0.52 & 1 & 0.5 & 0.66 & 0.46 \\ 0.57 & 0.5 & 1 & 0.55 & 0.37 \\ 0.65 & 0.66 & 0.55 & 1 & 0.39 \\ 0.25 & 0.46 & 0.37 & 0.39 & 1 \end{bmatrix}$$

分析上述矩阵，得知 R 是 4 阶模糊相似矩阵，则其存在一个最小自然数 $k(k \le 4)$，对于一切大于 k 的自然数 l，恒有 $R^l = R^k$，$R^l = R^k$ 即为 R 的传递闭包，记为 $t(R) = R^k$，用 $Matlab$ 编程求得 $t(R)$：

$$t(R) = R^2 \bullet R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.65 & 0.57 & 0.65 & 0.46 \\ 0.65 & 1 & 0.57 & 0.66 & 0.46 \\ 0.57 & 0.57 & 1 & 0.57 & 0.46 \\ 0.65 & 0.66 & 0.57 & 1 & 0.46 \\ 0.46 & 0.46 & 0.46 & 0.46 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $t(R)$ 中的元素从大到小编排如下：

$$1 > 0.66 > 0.65 > 0.57 > 0.46$$

取 $\lambda = 1$，得

$$t(R)_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从上述矩阵得知，X 被分为 5 类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_3\}$，$\{x_4\}$，$\{x_5\}$。

取 $\lambda = 0.66$，得

$$t(R)_{0.66}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

从上述矩阵得知，X 被分为 4 类：$\{x_1\}$，$\{x_2,x_4\}$，$\{x_3\}$，$\{x_5\}$。

取 $\lambda=0.65$，得

$$t(R)_{0.65}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

从上述矩阵得，知 X 被分为 3 类：$\{x_1,x_2,x_4\}$，$\{x_3\}$，$\{x_5\}$。

取 $\lambda=0.57$，得

$$t(R)_{0.57}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

从上述矩阵得，知 X 被分为 2 类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$\{x_5\}$。

取 $\lambda=0.46$，得

$$t(R)_{0.46}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

从上述矩阵得，知 X 没有被划分。

附录

最大值规格化矩阵程序	运行环境：Matlab2011a

```
function Y = bzh1(X)
[a,b] = size(X);%计算矩阵维度，a是行数，b是列数
C = max(X);
D = min(X);
Y = zeros(a,b);
for i = 1:a
        for j = 1:b;
                Y(i,j) = X(i,j)/C(j);%  最大值规格化
        end
end
fprintf('输出结果');
disp(Y)
end
```

运行程序如下：

```
X=[70 10 6 2;
        50 0 6 4;
        100 6 4 6;
        40 5 7 3;
        10 1 2 4];
Y = bzh1(X)
```

相似矩阵	运行环境：Matlab2011a

```
function Y = bzh2(X)
[a,b] = size(X);%找出矩阵的维度
C = max(X);
D = min(X);
Y = zeros(a,b);
for i = 1:a
        for j = 1:a
                sum1 = 0;
                sum2 = 0;
                for k = 1:b
                q = min(X(i,k),X(j,k));%取最小值
                w = max(X(i,k),X(j,k));%最大值
                sum1 = sum1 + q;
                sum2 = sum2 + w;
                Y(i,j) = sum1/sum2;
                end
        end
end
fprintf('标准化矩阵如下：Y = \n');
disp(Y)
end
```

直接运行：

```
Y = bzh2(X)
```

将得到的结果矩阵带入R矩阵计算出传递闭包矩阵

传递闭包程序	运行环境：Matlab2011a

```
clear all
R = [1.0000      0.5244      0.5716      0.6532      0.2540;
        0.5244      1.0000      0.5028      0.6589      0.4955;
        0.5716      0.5028      1.0000      0.5476      0.3634;
        0.6532      0.6589      0.5476      1.0000      0.3840;
        0.2540      0.4955      0.3634      0.3840      1.0000];
```

```
a=size(R);
B=zeros(a);
flag=0;
while flag==0
for i= 1: a
    for j= 1: a
        for k=1:a
        B( i , j ) = max(min( R( i , k) , R( k, j) ) , B( i , j ) ) ;%R 与 R 内积，先取小再取大
        end
    end
end
if B==R
    flag=1;
else
    R=B;%循环计算 R 传递闭包
end
end
R%传递闭包矩阵
```