

蒙特卡洛——非线性规划求解

蒙特卡洛原理及思想：

当所要求解的问题是某种事件出现的概率，或者是某个随机变量的期望值时，它们可以通过某种“试验”的方法，得到这种事件出现的频率，或者这个随机变数的平均值，并用它们作为问题的解。这就是蒙特卡罗方法的基本思想。蒙特卡罗方法通过抓住事物运动的几何数量和几何特征，利用数学方法来加以模拟，即进行一种数字模拟实验。它是以一个概率模型为基础，按照这个模型所描绘的过程，通过模拟实验的结果，作为问题的近似解。可以把蒙特卡罗解题归结为三个主要步骤：构造或描述概率过程；实现从已知概率分布抽样；建立各种估计量。

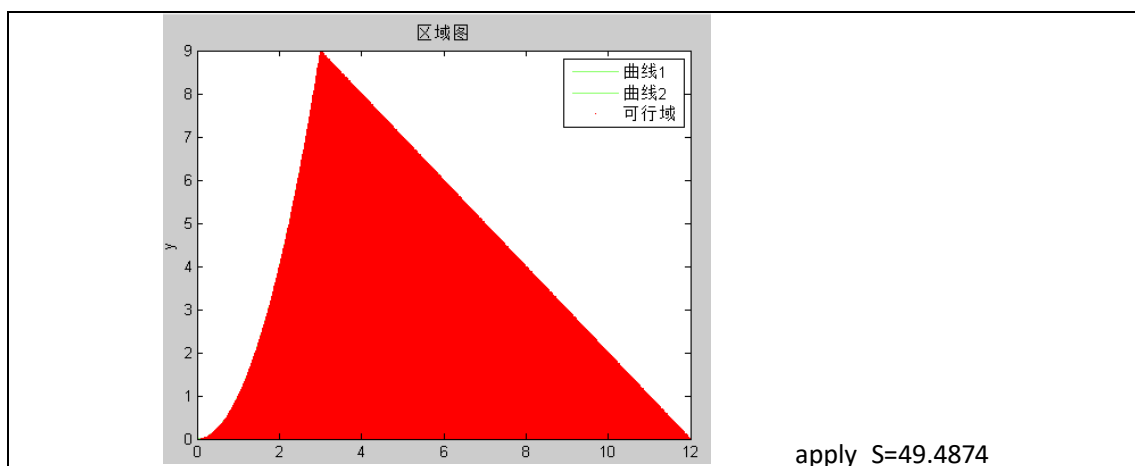
案例①求曲线围成的面积

$y = x^2$ 、 $y = 12 - x$ 与 x 轴在第一象限围成一个曲边三角形。设计一个随机实验，求该图形面积的近似值。

随机试验思路：

在矩形区域 $[0,12] \times [0,9]$ 上产生服从均匀分布的 10^7 个随机点，统计随机点落在去边三角形的频数，则曲边三角形的面积近似为上述矩形的面积乘以频率。

附录 1	运行环境：Matlab2011a
<pre> Clear%该程序以二维图面积为例 clc%友情提示，运行后别点开 x 和 y 表格，否则 matlab 会炸 x=unifrnd(0,12,[1,1000000]);%随机生成 0 到 12 一百万个数 y=unifrnd(0,9,[1,1000000]);%随机生成 0 到 9 一百万个数 pinshu=sum(y<=x.^2&x<=3)+sum(y<=12-x&x>=3);%条件 % y<=x.^2&x<=3 为第一个函数，x<3 为限制条件；y<=12-x&x>=3 为第二个函数，x>=3 为限制条件。该步骤以 sum（&）形式将函数和限制条件录入 apply_S=12*9*pinshu/10^6%结果，12*9 为 x 和 y 最大变量范围相乘，10^6 中的 6 次方与 unifrnd(0,12,[1,1000000])中的 1000000 对应 %-----画区域图-----其他函数参照以下画图程序即可，该图可不画，但画了更好 h1=ezplot('y-x.^2'); hold on h2=ezplot('y-12+x'); a=0:0.01:12; b=0:0.01:9; [x0,y0]=meshgrid(a,b); z1=y0-x0.^2; z2=y0-12+x0; ind=(z1<=0&z2<=0);%y<=x.^2 和 y<=12-x h=plot(x0(ind),y0(ind),'r','MarkerSize',2);%画出非线性方程组区域 axis([0 12 0 9])%x, y 轴区间 title('区域图') legend([h1(1);h2(1);h],'曲线 1','曲线 2','可行域') </pre>	
区域图及运行结果	



案例②求非线性函数最优解

非线性整数规划:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 0 \leq x_i \leq 99, i = 1, \dots, 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 400 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \leq 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 200 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 200 \end{cases} \end{aligned}$$

如果用显枚举法试探, 则共需要计算 $(100)^5 = 10^{10}$ 个点, 其计算量很大, 而应用蒙特卡洛则仅需计算 10^6 个点, 便可找到满意解。

附录 2	运行环境: Matlab2011a
<pre> function [f,g]=mengte(x) f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)^2-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)-x(4)-2*x(5);%主函数 g=[sum(x)-400 x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800 2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200 x(3)+x(4)+5*x(5)-200];%约束条件 end </pre>	
<pre> clear clc rand('state',sum(clock));%初始化随机数发生器 p0=0; tic;%计时开始 for i=1:10^6 x=randi([0,99],1,5);%产生一行五列的区间在【0, 99】上的随机整数 [f,g]=mengte(x); if all(g<=0) if p0<f%如果求最小值, 则将 if p0<f 中的<改成>符号 x0=x; p0=f;%记录当前较好的解 end end end x0,p0 toc;%计时结束 </pre>	

运行结果 (x0 为 x1, x2, x3, x4, x5 的值, p0 为函数最大值)

如果想求最小值, 一是将函数

$f = x(1)^2 + x(2)^2 + 3x(3)^2 + 4x(4)^2 + 2x(5)^2 - 8x(1) - 2x(2) - 3x(3) - x(4) - 2x(5)$ 加符号, 最后程序取相反数即可, 二是将 if p0<f 中的<改成>符号

```
x0 =  
  
    37    95     5    98    19  
  
p0 =  
  
    48970  
  
Elapsed time is 74.682135 seconds.
```