

# Análise do teorema da amostragem e aliasing através de sinais PAM

1<sup>st</sup> Felipe Queiroz

Dep. Tecnologia (DTEC)

Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

Feira de Santana, Brasil

lipesq16@gmail.com

2<sup>nd</sup> Igor Soares

Dep. Tecnologia (DTEC)

Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

Feira de Santana, Brasil

ifs5544@gmail.com

3<sup>rd</sup> Marcus Aldrey

Dep. Tecnologia (DTEC)

Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

Feira de Santana, Brasil

marcusaldrey@gmail.com

**Resumo**—O estudo investigou os efeitos da amostragem seguindo e não seguindo o teorema de Nyquist na reconstrução de um sinal senoidal, utilizando também um filtro Butterworth passa-baixas para limitar o sinal de entrada em banda. Os resultados mostraram que a amostragem em conformidade com o teorema de Nyquist permitiu a reconstrução sinal original, enquanto a amostragem fora do teorema resultou em *aliasing*, impossibilitando a reconstrução do sinal original. Esses achados evidenciam a importância da adequação da taxa de amostragem aos requisitos de Nyquist para garantir uma reconstrução precisa do sinal original e ressaltam as limitações inerentes ao processo de reconstrução, mesmo com o uso de técnicas de filtragem.

**Index Terms**—Amostragem, teorema de Nyquist, filtro Butterworth, reconstrução de sinal, *aliasing*, frequência de amostragem.

## I. INTRODUÇÃO

O processo de amostragem é uma das etapas mais importantes na conversão analógico-digital de sinais, pois determina se o sinal resultante terá *aliasing*, com isso em mente este artigo apresenta as etapas de desenvolvimento da simulação da amostragem de um sinal senoidal utilizando a técnica de modulação por trens de pulso (PAM) que discretizará o sinal, após isso a obtenção do espectro na frequência para que seja feita a análise das propriedades do sinal, a filtragem utilizando o filtro butterworth e a reconstrução do sinal original. Foi realizado feito também a amostragem sem obedecer o critério de Nyquist afim de observar o efeito de *aliasing*.

## II. METODOLOGIA

Para a execução do processo de amostragem, foi necessário inicialmente definir uma alternativa para limitar o sinal de entrada em banda, de modo a evitar a superposição de espectros (*aliasing*). Para isso, optou-se por utilizar um filtro analógico Butterworth passa-baixas, o qual permite filtrar o sinal antes da amostragem. Além disso, também foi necessário definir um tipo de amostragem a ser aplicada ao sinal. Neste caso, optou-se por utilizar a amostragem natural, devido à menor

complexidade de implementação em relação aos outros tipos de amostragem.

Já para a reconstrução do sinal original, aplicou-se a técnica de filtragem do espectro do sinal amostrado. Nesta abordagem, é obtido o espectro do sinal amostrado; posteriormente, um filtro passa-baixas é aplicado ao espectro com a finalidade de eliminar as componentes que não pertencem ao sinal original. A partir do espectro obtido com a filtragem, o sinal original é reconstruído.

O sinal de entrada aplicado foi a soma de uma senoide com amplitude unitária e frequência de 20 Hz com outra senoide de amplitude 0,5 e frequência de 100 Hz. A componente de interesse do sinal foi a senoide com amplitude unitária e frequência de 20 Hz. Além disso, duas frequências de amostragem foram empregadas: uma de 200 Hz, seguindo o teorema de Nyquist, e outra de 25 Hz, em desacordo com o teorema de Nyquist.

Ademais, o ciclo de trabalho (*duty cycle*) do sinal da portadora foi configurado em 25% (1/4) para evitar atenuações no espectro das componentes múltiplas das frequências de amostragem. Além disso, o filtro Butterworth passa-baixas aplicado foi de quinta ordem, com uma frequência de corte de 50 Hz. Enquanto que o filtro aplicado no domínio da frequência para a filtragem de reconstrução do sinal foi um filtro passa-baixas ideal, com frequência de corte de 45 Hz.

## III. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os sinais produzidos na natureza são ondas eletromagnéticas que carregam informações de forma analógica no tempo contínuo. Contudo, os computadores não conseguem processar a informação obtida sem dessa maneira. Com isso, é necessário realizar uma técnica de discretização do sinal, de forma que não se perca suas características principais. Para isso, é utilizado o teorema de Nyquist, que estabelece que a menor frequência da taxa de amostragem deve ser de duas vezes a maior frequência do sinal recebido para que a conversão do sinal seja fidedigna e viável, dessa forma

evitando o *aliasing* de sinal, um fenômeno que ocorre quando as amostras de um sinal podem ser representadas por outro sinal de menor frequência.

Como na prática é impossível realizar a amostragem com pulsos instantâneos, é necessário utilizar a técnica de amostragem de modulação de amplitude de pulsos (PAM), onde uma série de pulsos é multiplicada pelo sinal principal a fim de criar um trem de pulsos de valores finitos.

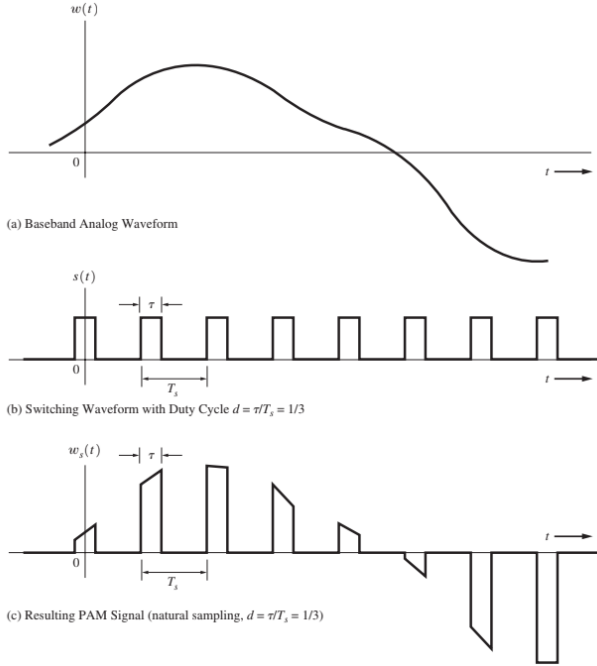


Figura 1. Amostragem PAM natural. Fonte: adaptado de [1]

Por conta da técnica utilizada para a amostragem do sinal, a sua transformada no domínio da frequência é equivalente à convolução de uma sinc, correspondente à transformada do trem de pulsos, convoluído com dois impulsos simétricos ao ponto central do sinal. Com isso, nossa resultante é uma função sinc amostrada em pares de impulsos. É possível determinar os pontos onde a função será zero.

Para  $X = 0$ :

$$p(f) = T \left( \frac{\sin(T \cdot f \cdot \pi)}{T \cdot f \cdot \pi} \right) \Rightarrow T \left( \frac{\cos(T \cdot f \cdot \pi) T \cdot \pi}{T \cdot f \cdot \pi} \right) \quad (1)$$

logo:

$$T \cdot f \cdot \pi = \pm \pi \Rightarrow f = \pm \frac{1}{T} \quad (2)$$

Para  $Y = 0$ :

$$T \cdot f \cdot \pi = \pm 2\pi \Rightarrow f = \pm \frac{2}{T} \quad (3)$$



Figura 2. Demonstração dos zeros de uma sinc. Fonte: adaptado de [2]

#### IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O sinal de entrada do sistema é composto de uma senoide de 20 Hz com amplitude unitária (Figura 3) somada a outra senoide de 100 Hz com amplitude de 0,5 (Figura 4). O sinal de entrada resultante pode ser visto na Figura 5. Este sinal de entrada é inicialmente submetido ao filtro Butterworth passa-baixas (filtro *anti-aliasing*) de quinta ordem com frequência de corte de 50 Hz, resultando em um sinal limitado em banda.

Após o sinal ser submetido ao filtro *anti-aliasing*, observa-se que a componente de maior frequência, neste caso a senoide de 100 Hz, foi removida, restando apenas a componente de menor frequência, a senoide de 20 Hz, como pode ser visto na Figura 6. Além disso, é possível notar que o sinal filtrado apresenta uma pequena defasagem e distorção na porção inicial devido às características do filtro.

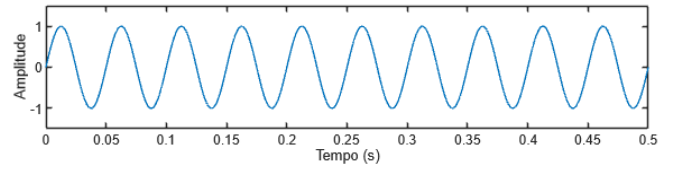


Figura 3. Sinal 1 - senoide de 20 Hz e amplitude 1.

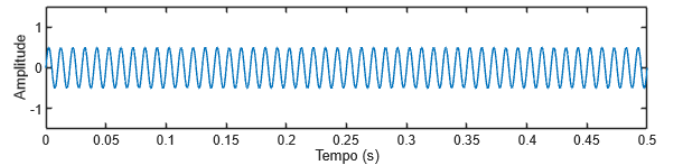


Figura 4. Sinal 2 - senoide de 100 Hz e amplitude 0,5.

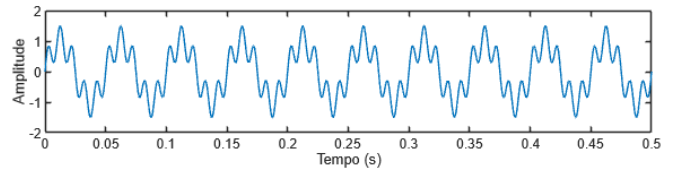


Figura 5. Sinal de entrada (senoides somadas).

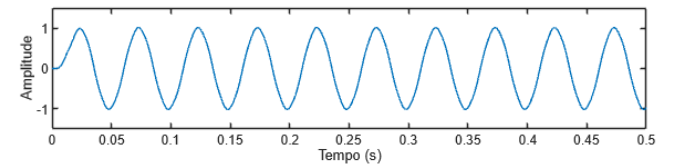


Figura 6. Sinal de entrada filtrado.

Após limitar o sinal em banda, foi efetuada duas amostragens distintas, uma amostragem seguindo o teorema de Nyquist e outra fora do teorema. Além disso, o sinal foi reconstruído a partir de cada uma das amostragem com o intuito de avaliar o impacto das frequências no processo de amostragem do sinal.

### A. Amostragem e reconstrução do sinal seguindo o teorema de Nyquist

Com a limitação em banda do sinal a maior componente de frequência remanescente no foi 20 Hz, deste modo, seguindo o teorema de amostragem de Nyquist a frequência de amostragem do sinal deve ser maior que 40 Hz. Foi adotada então uma frequência de amostragem de 200 Hz e um ciclo de trabalho de 25% para o trem de impulsos modulador, de modo que satisfaz o teorema de Nyquist.

Na Figura 7 temos o trem de pulsos retangulares periódicos aplicado na amostragem do sinal de entrada. No processo de amostragem PAM o trem de pulsos multiplica o sinal de entrada, deste modo, é gerado um novo sinal com uma série de pulsos modulados pela amplitude do sinal de entrada. O sinal amostrado é exibido na Figura 8.

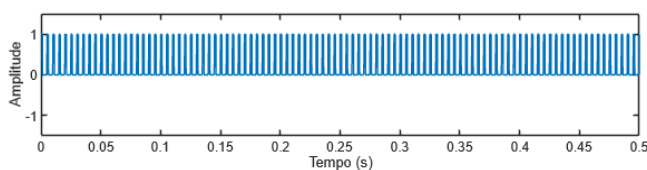


Figura 7. Trem de pulsos retangulares para amostragem do sinal dentro do critério de Nyquist.

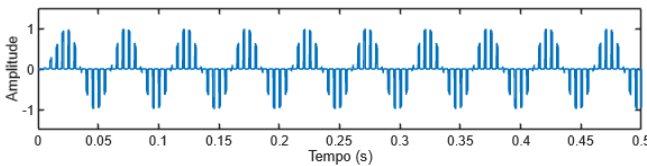


Figura 8. Sinal amostrado com a frequência de amostragem de 200 Hz.

A partir disso, foi obtido o espectro do sinal amostrado através da transformada de Fourier implementada por meio do algoritmo da transformada rápida de Fourier - do inglês Fast Fourier Transform (FFT). Através do espectro foi possível identificar as componentes em frequências presentes no sinal amostrado como ilustrado na Figura 9.

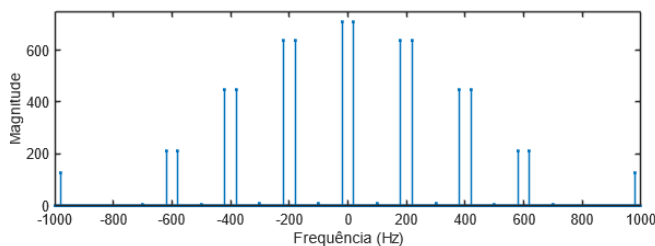


Figura 9. Espectro do sinal amostrado com a frequência de amostragem de 200 Hz.

Podemos notar que o espectro do sinal amostrado é composto por réplicas do espectro do sinal senoidal de 20 Hz, repetidas de maneira harmônica a cada múltiplo da frequência

de amostragem e ponderadas por uma função sinc de valor máximo igual ao ciclo de trabalho (1/4) do trem de pulsos.

Para a reconstrução do sinal original, foi aplicado um filtro passa-baixas ideal no espectro do sinal amostrado. Esse filtro foi estruturado de modo que removesse as componentes de frequências presentes no espectro maiores que 20 Hz. Para isso, foi construído um pulso retangular com magnitude unitária para as frequências até 25 Hz e magnitude nula para as demais frequências (Figura 10). Este pulso foi então aplicado sobre o espectro do sinal amostrado, gerando um espectro filtrado, exibido na Figura 11, contendo somente a componente de frequência de 20 Hz que corresponde ao sinal original a ser reconstruído.

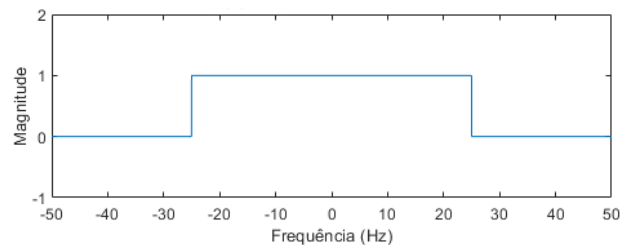


Figura 10. Filtro passa baixa ideal com frequência de corte de 25 Hz.

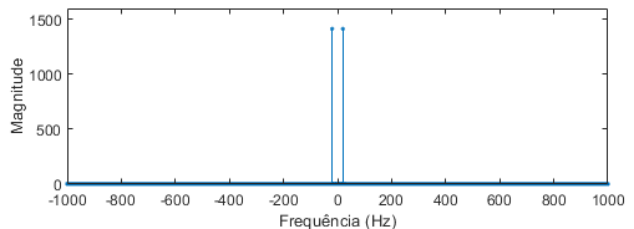


Figura 11. Espectro do sinal amostrado após a filtragem ideal.

Antes da reconstrução do sinal original, foi necessário aplicar um ganho de 4 vezes ao espectro filtrado para compensar a atenuação gerada pela função sinc do trem de impulsos com o ciclo de trabalho de 1/4. Após isso, efetuamos a transformada inversa de Fourier e obtivemos então o sinal original reconstruído a partir do sinal amostrado, como pode ser visto na Figura 12. É possível observar que o sinal reconstruído é praticamente o mesmo do sinal original (Figura 3), havendo apenas uma pequena defasagem no tempo proveniente da aplicação do filtro *anti-aliasing*.

### B. Amostragem e reconstrução do sinal fora do teorema de Nyquist

Já para o caso da amostragem em desacordo com o teorema de Nyquist, foi definida uma frequência de amostragem menor que duas vezes a frequência de 20 Hz, sendo assim, a utilizada para amostragem foi de 25 Hz mantendo o mesmo ciclo de trabalho da amostragem anterior. O trem de pulsos retangulares periódicos aplicado na amostragem do sinal pode ser visto na Figura 13.

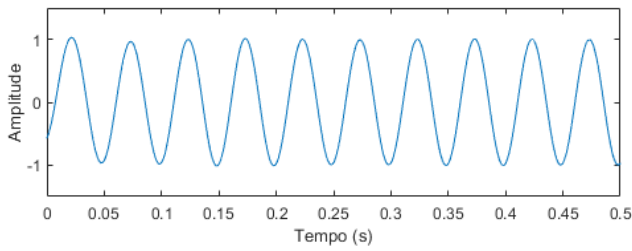


Figura 12. Sinal reconstruído seguindo o teorema da amostragem de Nyquist.

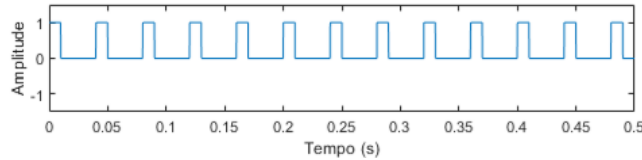


Figura 13. Trem de pulsos retangulares para amostragem do sinal fora do critério de Nyquist.

De modo análogo ao que é aplicado a primeira amostragem, este trem de pulsos multiplica o sinal de entrada, gerando um novo sinal com uma série de pulsos modulados pela amplitude do sinal de entrada. O sinal amostrado é exibido na Figura 14.

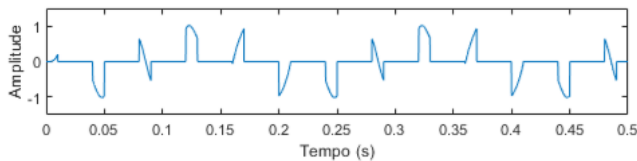


Figura 14. Sinal amostrado com a frequência de amostragem de 25 Hz.

Obtivemos então o espectro do sinal amostrado (Figura 15) por meio da FFT. Neste caso, podemos observar que não há exatamente as réplicas do espectro do sinal senoidal de 20 Hz, repetidas de maneira harmônica a cada múltiplo da frequência de amostragem como obtivemos na amostragem seguindo o teorema de Nyquist; existem uma série de outras componentes presentes no sinal.

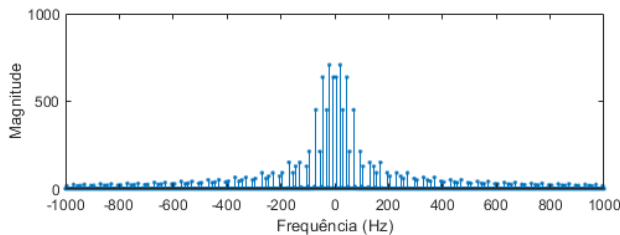


Figura 15. Espectro do sinal amostrado com a frequência de amostragem de 25 Hz.

Antes da reconstrução do sinal, aplicamos o mesmo filtro ideal (Figura 10) utilizado na primeira amostragem, novamente com frequência de corte de 25 Hz. Podemos então observar que mesmo após a filtragem no espectro do sinal amostrado,

temos a presença de mais de uma componente, como é mostrado na Figura 16.

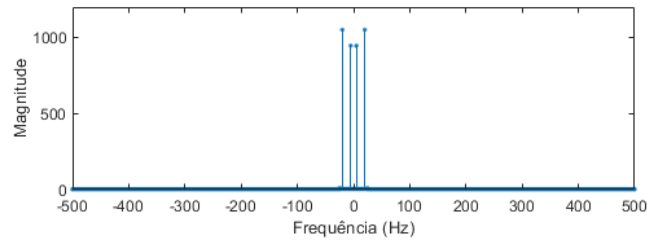


Figura 16. Espectro do sinal amostrado após a filtragem ideal.

Além disso, assim como na amostragem inicial, foi necessário aplicar um ganho de 4 vezes ao espectro filtrado para compensar a atenuação do espectro. Após isso, efetuamos a transformada inversa de Fourier e obtivemos então o sinal original reconstruído a partir do sinal amostrado, como pode ser visto na Figura 17. É possível observar que o sinal reconstruído é completamente diferente do sinal original (Figura 3), sendo uma série de sinais somados.

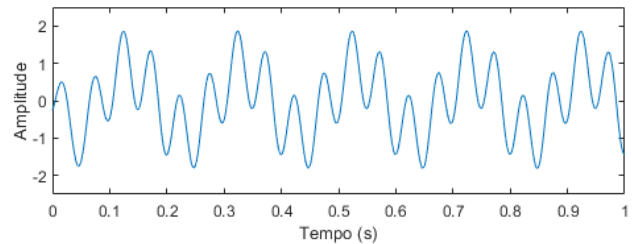


Figura 17. Sinal reconstruído fora do teorema da amostragem de Nyquist.

Deste modo, pode-se perceber que para a primeira amostragem, seguindo o teorema de Nyquist, é possível reconstruir o sinal original sem problemas, enquanto que na segunda amostragem, fora do teorema de Nyquist, não é possível reconstruir o sinal original. Isso se deve ao fato de que ao empregar uma taxa de amostragem inferior a duas vezes a maior frequência do sinal a ser amostrado, há uma sobreposição de espectros, de modo que frequências originalmente altas no espectro do sinal aparecem em regiões de mais baixa frequência, impossibilitando a recuperação do sinal original.

## V. CONCLUSÃO

A principal diferença entre os casos apresentados no relatório é o *aliasing* que ocorre no cenário que a amostragem não obedece Nyquist, com isso o sinal que é convertido para o domínio da frequência apresenta um espectro que apresenta uma sobreposição de frequências que não estão presentes no sinal original, esse efeito é particularmente evidente nas frequências mais altas do sinal, que não são adequadamente representadas devido à amostragem inadequada. Ao realizar a reconstrução do sinal a resultante é uma senoíde que é válida para a amostragem realizada mas não representa a onda original.

Outro detalhe que é perceptível por meio da análise é que a reconstrução da onda não é fidedigna a onda original, visto que a transformada resulta em infinitas ondas e o filtro passa baixa utilizado para fazer o recorte resulta em uma imprecisão nos extremos do sinal reconstruído.

Portanto, é crucial garantir que a taxa de amostragem atenda aos requisitos de Nyquist para evitar o *aliasing* e garantir uma reconstrução precisa do sinal original. Mesmo assim, é importante reconhecer que a reconstrução não será totalmente perfeita devido às limitações dos filtros e às características do processo de amostragem.

#### REFERÊNCIAS

- [1] L. W. Couch, “Digital and analog communication systems”, 8th ed., Upper Saddle River: Pearson, 2013.
- [2] P. Y. K. Cheung, “Lecture 4: Frequency Domain Analysis and Fourier Transform”, London: Imperial College, 2024.