Introdução à Robótica

Álgebra e Geometria Vetorial

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 13 de junho de 2018

Movimento de Corpo Rígido

Enfoque

- Independente de sistemas de coordenadas
- Vetores são objetos geométricos abstratos
- Escolha do sistema de coordenadas somente quando seja necessário realizar os cálculos númericos

Cinemática de Corpos Rígidos é baseada em vetores e transformações lineares de vetores.

Revisão de Álgebra Linear

- O Espaço Vetorial $\mathcal{V}$ é um conjunto fechado sob adição e multiplicação por um número real, cujos elementos são os vetores.

  Outras propriedades:

  1. comutatividade,
  2. distributividade,
  3. elemento zero,
  4. associatividade (soma/produto).

- Espaço Vetorial Normado: espaço vetorial onde é definido uma norma (magnitude) dos vetores.

- Espaço Produto Interno: espaço vetorial normado onde é definido o produto interno (e.g. produto escalar, permite projeção e conceito de ortogonalidade)

Espaço Euclidiano 3D

Aqui consideraremos o Espaço Euclidiano 3D:

1. Espaço Produto Interno
2. definindo adicionalmente a operação produto vetorial.

Transformação Linear

Considere os espaços vetoriais $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ e os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$.

Dada a transformação

$$\bar{L} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$$

satisfazendo o princípio de superposição (homogeneidade e aditividade), i.e.

$$\bar{L}(\alpha_1\ \vec{v}_1 + \alpha_2\ \vec{v}_2) = \alpha_1\ \bar{L}(\vec{v}_1) + \alpha_2\ \bar{L}(\vec{v}_2)$$

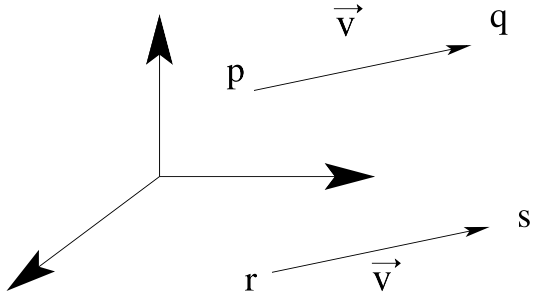
Então $\bar{L}(\cdot)$ define uma transformação linear.

Revisão de Geometria vetorial

p: pontos

$\vec{v}$: vetores $\qquad \vec{v} \in \mathcal{V}$ (vetores livres)

$\mathcal{V}$: espaço vetorial linear normado



p, q, r, s são pontos; $\qquad \vec{v} = q - p = s - r$

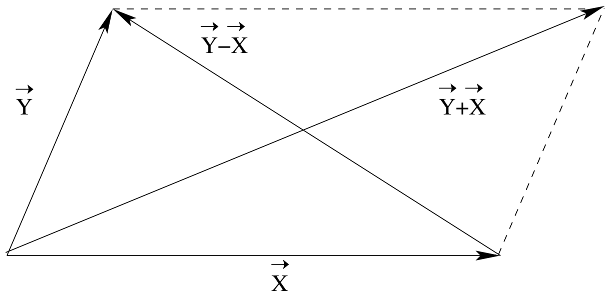
Mais adiante consideraremos o operador (transformação) linear $\bar{E}$:

$\bar{E} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{V}$ $\qquad$ e.g. Sistema de coordenadas

Vetores pode ser somados, escalados e tem comprimento.

É válida a lei do paralelogramo

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$



Implica na existência do produto interno (funcional bilinear simétrico e positivo) associado com a norma $\|\cdot\|$.

Produto interno (escalar)

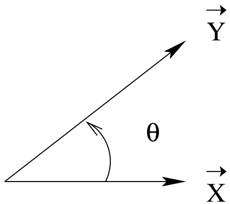
Definido como um funcional bilinear simétrico e positivo:

$(\cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ e.g. $\vec{x} \cdot \vec{y} = a$ $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V},\ a \in \mathbb{R}$

Propriedades do produto interno

1. $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ para $\vec{x} \neq 0$ (positividade)
2. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (comutatividade, simetria)
3. $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha\ (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \beta\ (\vec{x} \cdot \vec{z})$ (bilinearidade)
4. $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|x\|^2$

No espaço Euclidiano: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\| \cos(\theta)$



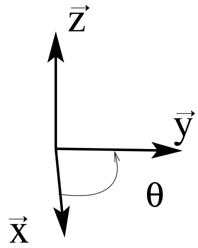
Definição: Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são ortogonais se $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Produto vetorial

$(\times) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$

$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$ onde $\vec{z}$ é um vetor tal que:

$$\vec{z} \cdot \vec{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \vec{z} \cdot \vec{y} = 0$$



$$\|\vec{z}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, \sin(\theta)$$

A direção do vetor $\vec{z}$ é determinada pela regra da mão direita.

Transformações Lineares

Uma transformação linear pode ser representada por um operador $\bar{L}$ de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ para outro espaço vetorial $\mathcal{W}$;

$$\bar{L} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$$

Para $\vec{v} \in \mathcal{V}$ e $\vec{w} \in \mathcal{W}$ tem-se que

$$\vec{w} = \bar{L}\,\vec{v}$$

Tipos particulares de transformações lineares no espaço euclidiano 3D são: projeções, reflexões e rotações.

Operador Adjunto

O Operador Adjunto de $\bar{L}$ é uma generalização da Transposta Conjugada de matrizes.

Definição: Dado $\bar{L} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$. O Operador Adjunto $\bar{L}^*$ satisfaz a seguinte relação:

$$(\vec{w} \cdot \bar{L}\vec{v})_{\mathcal{W}} = (\bar{L}^*\vec{w} \cdot \vec{v})_{\mathcal{V}} \qquad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \vec{w} \in \mathcal{W}$$

Exemplo: considere a Transformação linear $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definindo o produto interno de $v, w \in \mathbb{R}^n$ como

$$(v \cdot w) = v^T w = w^T v,$$

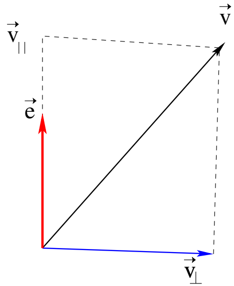
tem-se, pela definição, que o operador adjunto A^* satisfaz

$$\begin{aligned} w^T A v &= (A^* w)^T v \\ &= w^T (A^*)^T v \quad \Longrightarrow \quad A^* = A^T \end{aligned}$$

Exemplo de Transformações Lineares

1. Decomposição ortogonal

   Considere as projeções do vetor $\vec{v}$ no vetor unitário $\vec{e}$, i.e. $\|\vec{e}\| = 1$:



   Projeção Paralela ($\bar{P}_{\|}$): na direção de $\vec{e}$

$$\vec{v}_{\|} = (\vec{e} \cdot \vec{v})\ \vec{e} = (\vec{e}\ \vec{e} \cdot)\ \vec{v} = \bar{P}_{\|}\ \vec{v} \quad ; \qquad \bar{P}_{\|} = (\vec{e}\ \vec{e} \cdot)$$

   Projeção Ortogonal ($\bar{P}_{\perp}$): na direção ortogonal de $\vec{e}$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\|} = (\mathcal{I} - \vec{e}\ \vec{e} \cdot)\ \vec{v} = \bar{P}_{\perp}\ \vec{v} \quad ; \qquad \bar{P}_{\perp} = (\mathcal{I} - \vec{e}\ \vec{e} \cdot)$$

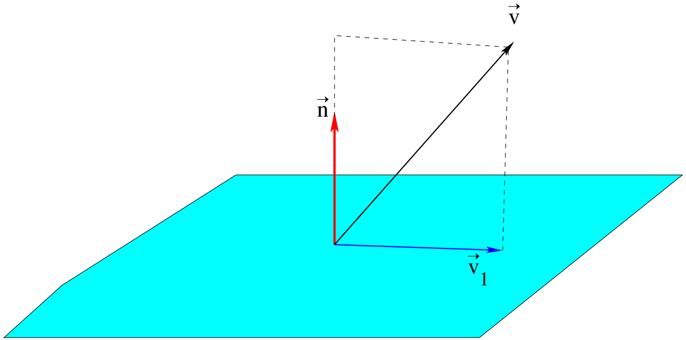
   Tal que:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp} \quad ; \quad \bar{P}_{\|}\ \vec{e} = \vec{e} \quad ; \quad \bar{P}_{\perp}\ \vec{e} = 0$$

Voltar
Fechar

2. Projeção Ortonormal

Considere o operador $\bar{P}$ que realiza a projeção de um vetor $\vec{v}$ num plano Π definido pelo vetor normal $\vec{n}$ com $\|\vec{n}\| = 1$.



Propriedades: $\bar{P}^2 = \bar{P}$ $\quad\quad$ $\bar{P}\,\vec{n} = 0$

A projeção $\vec{v}_1 = \bar{P}\,\vec{v}$ é dada por:

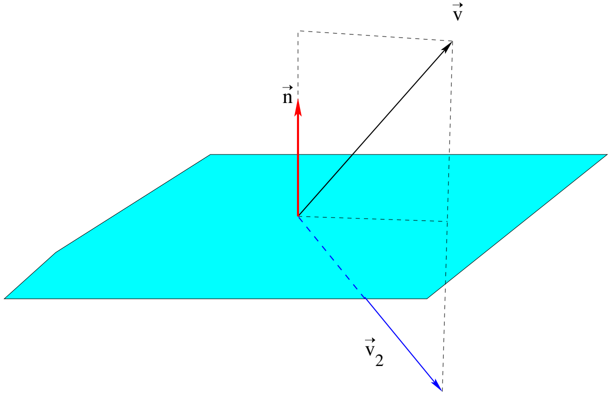
$$\vec{v}_1 = \vec{v} - (\vec{n}\cdot\vec{v})\,\vec{n} = (\mathcal{I} - \vec{n}\vec{n}\cdot)\,\vec{v}$$

Então o operador projeção ortogonal é dado por:

$$\bar{P} = (\mathcal{I} - \vec{n}\vec{n}\cdot\ )$$

3. Reflexão

Considere o operador $\bar{R}$ que realiza a reflexão de um vetor $\vec{v}$ com respeito ao plano Π definido pelo vetor normal $\vec{n}$ com $\|\vec{n}\| = 1$.



Propriedades: $\bar{R}^2 = \mathcal{I}$ $\bar{R}^{-1} = \bar{R}$

Então a reflexão $\vec{v}_2 = \bar{R}\,\vec{v}$ é dada por:

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - 2\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{v}) = (\mathcal{I} - 2\vec{n}\vec{n}\cdot)\,\vec{v}$$

e portanto o operador reflexão $\bar{R}$ é dado por:

$$\bar{R} = (\mathcal{I} - 2\vec{n}\vec{n}\cdot)$$

4. Isomorfismo Linear: transformação linear um a um de $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$.

5. Isometria: é um Isomorfismo Linear que preserva a distância dos elementos de $\mathcal{V}$.

   Isto é, considerando $\vec{v}_1 = \bar{Q}\ \vec{v}$, $\bar{Q}$ é uma isometria se satisfaz

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}\|$$

   Tendo consequentemente, o operador $\bar{Q}$, a seguinte propriedade:

$$\bar{Q}^* \bar{Q} = \mathcal{I}$$

Sistema de coordenadas ortonormal

Definição: Um sistema de coordenadas ortonormal $\bar{E}$ é o conjunto de 3 vetores, i.e. $\bar{E} = [\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}]$ $\quad (\vec{e_i} \in \mathcal{V})$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\|\vec{e_i}\| = 1$ para $i = 1, 2, 3$ Normalidade
2. $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0$ para $i \neq j$ Ortogonalidade
3. $\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$ Regra da mão direita

Um sistema de coordenadas $\bar{E} = [\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}]$ pode ser interpretado como uma transformação linear $\bar{E}$: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{V}$ tal que

$$\vec{v} = \bar{E} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = [\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1\ \vec{e_1} + v_2\ \vec{e_2} + v_3\ \vec{e_3}; \qquad v_i \in \mathbb{R}$$

Operador Adjunto de $\bar{E}$

O operador adjunto de $\bar{E}$ é dado por $\bar{E}^* = \begin{bmatrix} \vec{e_1}\cdot \\ \vec{e_2}\cdot \\ \vec{e_3}\cdot \end{bmatrix}$, e define o mapeamento $\bar{E}^* : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^3$.

Prova: Pela definição de operador adjunto tem-se que $\vec{x}\cdot\bar{E}y = \bar{E}^*\vec{x}\cdot y$. Dado que $\bar{E}^*\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ e $y \in \mathbb{R}^3$ tem-se que $\bar{E}^*\vec{x}\cdot y = (\bar{E}^*\vec{x})^T y$, e

$$\vec{x}\cdot\bar{E}\ y = (\bar{E}^*\vec{x})^T y$$

Então por comparação tem-se $\vec{x}\cdot\bar{E} = (\bar{E}^*\vec{x})^T$, ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \bar{E}^*\vec{x} &= (\vec{x}\cdot\bar{E})^T = (\vec{x}\cdot[\vec{e_1}\ \ \vec{e_2}\ \ \vec{e_3}])^T = [\vec{x}\cdot\vec{e_1}\ \ \vec{x}\cdot\vec{e_2}\ \ \vec{x}\cdot\vec{e_3}]^T \\ &= \begin{bmatrix} \vec{x}\cdot\vec{e_1} \\ \vec{x}\cdot\vec{e_2} \\ \vec{x}\cdot\vec{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e_1}\cdot\vec{x} \\ \vec{e_2}\cdot\vec{x} \\ \vec{e_3}\cdot\vec{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{e_1}\cdot \\ \vec{e_2}\cdot \\ \vec{e_3}\cdot \end{bmatrix}}_{\bar{E}^*}\vec{x} \qquad \text{CQD.} \end{aligned}$$

Tem-se também

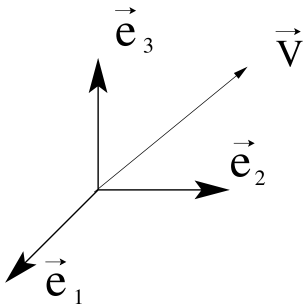
1. $\bar{E}^*\bar{E} = I_{3\times 3} \quad [: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3]$
2. $\bar{E}\bar{E}^* = \mathcal{I} \quad [: \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}]$ (operador identidade)

Representação de vetores em sistemas de coordenadas

Considere o vetor $\vec{v}$ representado como uma combinação linear dos elementeos do sistema de coordenadas $\bar{E} = [\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}]$:

$$\vec{v} = v_1\ \vec{e_1} + v_2\ \vec{e_2} + v_3\ \vec{e_3}$$

As coordenadas de $\vec{v}$ em $\bar{E}$ são definidas como $v_E = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$



$$\boxed{\vec{v} = \bar{E}\ v_E = v_E^T \bar{E}^T} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_E = \bar{E}^*\ \vec{v}}$$

Voltar
Fechar

Representação de operadores em sistemas de coordenadas

Dado um operador $\bar{L} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$, tal que

$$\vec{w} = \bar{L}\,\vec{v}$$

com $\vec{v} \in \mathcal{V}, \vec{w} \in \mathcal{W}$.

Considere os sistemas de coordenadas $\bar{E}_1 \in \mathcal{V}$ e $\bar{E}_2 \in \mathcal{W}$; sendo

- v_1 a representação de $\vec{v}$ em $\bar{E}_1$ (i.e. $\vec{v} = \bar{E}_1\, v_1$) e;
- w_2 a representação de $\vec{w}$ em $\bar{E}_2$ (i.e. $\vec{w} = \bar{E}_2\, w_2$).

Pode-se representar o operador $\bar{L}$ nos respectivos sistemas de coordenadas $(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$.

A representação de $\bar{L}$ nestes sistemas de coordenadas é notada como L; e é dada por:

$$w_2 = L\, v_1; \qquad L : \bar{E}_1 \mapsto \bar{E}_2$$

Então considerando

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \bar{L}\ \vec{v} \\
\bar{E}_2\ w_2 &= \bar{L}\ \bar{E}_1\ v_1
\end{aligned}
$$

Multiplicando a ambos os lados por $\bar{E}_2^*$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\bar{E}_2^*\ \bar{E}_2\ w_2 &= \bar{E}_2^*\ \bar{L}\ \bar{E}_1\ v_1 \\
w_2 &= \underbrace{\bar{E}_2^*\ \bar{L}\ \bar{E}_1}_{L}\ v_1
\end{aligned}
$$

Tem-se então as seguintes relações:

$$\boxed{\bar{L} = \bar{E}_2\ L\ \bar{E}_1^*} \quad \text{e} \quad \boxed{L = \bar{E}_2^*\ \bar{L}\ \bar{E}_1}$$

Exemplo 1: $\bar{L} = \vec{v}\cdot : \underbrace{\mathcal{V}}_{\bar{E}} \mapsto \mathbb{R} \qquad$ ($\vec{v}$ vetor fixo)

$$L = \vec{v} \cdot \bar{E} = \vec{v} \cdot [\vec{e_1} \quad \vec{e_2} \quad \vec{e_3}] = [\vec{v} \cdot \vec{e_1} \quad \vec{v} \cdot \vec{e_2} \quad \vec{v} \cdot \vec{e_3}]$$

Então considerando que

$$\vec{v} = \bar{E}\ v_E = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$$

e que

$$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0 \qquad \text{etc}$$

tem-se

$$L = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = v_E^T$$

Exemplo 2: $\bar{L} = \vec{v}\times : \underbrace{\mathcal{V}}_{\bar{E}} \mapsto \underbrace{\mathcal{V}}_{\bar{E}}$ ($\vec{v}$ vetor fixo)

$$L = \bar{E}^*\vec{v} \times \bar{E} = \bar{E}^* \left[\vec{v} \times \vec{e_1} \quad \vec{v} \times \vec{e_2} \quad \vec{v} \times \vec{e_3}\right]$$

como $\vec{v} = v_1\ \vec{e_1} + v_2\ \vec{e_2} + v_3\ \vec{e_3}$ e os $\vec{e_i}$ são ortonormais, tem-se

$$L = \bar{E}^* \left[(v_3\vec{e_2} - v_2\vec{e_3}) \quad (-v_3\vec{e_1} + v_1\vec{e_3}) \quad (v_2\vec{e_1} - v_1\vec{e_2})\right]$$

Levando em consideração que $\bar{E}^*\vec{e_1} = [1\ 0\ 0]^T$ (similarmente para $\vec{e_2}, \vec{e_3}$)

$$L = \left[\left(\begin{bmatrix} 0 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) \quad \left(-\begin{bmatrix} v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \end{bmatrix}\right) \quad \left(\begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right]$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{v} \quad ; \qquad L = -L^T !!$$

Conclui-se que $L = \hat{v}$ é uma MATRIZ ANTISIMÉTRICA.

Resumo: o produto interno e o produto vetorial quando representados num sistema de coordenadas equivalem a:

- O produto interno $\vec{v} \cdot \longrightarrow v^T$
- O produto vetorial $\vec{v} \times \longrightarrow \hat{v}$

Definição:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad V^{\vee} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Observações:

1. os autovalores de $\hat{v}$ são $\lambda = 0, \pm j \left\| v \right\|$;
2. o polinômio característico é: $\lambda \left(\lambda^2 + \left\| v \right\|^2 \right) = 0$
3. de Cayley-Hamilton tem-se: $\hat{v}^3 + \left\| v \right\|^2 \hat{v} = 0 \Rightarrow \hat{v}^3 = - \left\| v \right\|^2 \hat{v}$

Propiedades de $\hat{v}$

- $\hat{v}v = 0$
- $\hat{v} = -\hat{v}^T$ (anti-simetria)
- $\hat{v}w = -\hat{w}v$
- $\hat{v}^3 = \hat{v}\hat{v}\hat{v} = -\|v\|^2 \hat{v}$ (Cayley-Hamilton)
- $\hat{v}^4 = \hat{v}\hat{v}\hat{v}\hat{v} = -\|v\|^2 \hat{v}^2$
- Se $\|v\| = 1$ então

$$\begin{aligned}
\hat{v}^{4k-0} &= -\hat{v}^2 \\
\hat{v}^{4k-1} &= -\hat{v} \\
\hat{v}^{4k-2} &= \hat{v}^2 \\
\hat{v}^{4k-3} &= \hat{v}, \qquad k = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

- $\hat{v}\hat{w} = wv^T - (v^T w)I_{3\times 3}$ (equivalentemente para $(\vec{v} \times (\vec{w}\times))$)
- $\widehat{\hat{v}w} = wv^T - vw^T$ (equivalentemente para $((\vec{v} \times \vec{w})\times)$)

Relação de vetores em diferentes sistemas de coordenadas

Considere 2 sistemas de coordenadas $\bar{E}_1$ e $\bar{E}_2$ em $\mathcal{V}$.

$$\vec{v} = \bar{E}_1 \, v_1 = \bar{E}_2 \, v_2$$

Podemos concluir então que

$$v_1 = \bar{E}_1^* \bar{E}_2 \, v_2$$

Chamando

$$R_{12} = \bar{E}_1^* \bar{E}_2$$

Tem-se também

$$R_{21} = (R_{12})^{-1} = (R_{12})^T$$

Relação de operadores em diferentes sistemas de coord.

Considere o operador $\bar{L} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$. Ele pode ser representado nos sistemas de coordenadas $\bar{E}_1$ e $\bar{E}_2$

$$\bar{L} = \bar{E}_1 \; L_1 \; \bar{E}_1^* = \bar{E}_2 \; L_2 \; \bar{E}_2^*$$

onde L_1 e L_2 são as representações de $\bar{L}$ em $\bar{E}_1$ e $\bar{E}_2$.
Podemos concluir então que

$$L_1 = \bar{E}_1^* \; \bar{E}_2 \; L_2 \; \bar{E}_2^* \; \bar{E}_1$$

ou considerando $R_{12} = \bar{E}_1^* \bar{E}_2$,

$$\boxed{L_1 = R_{12} \, L_2 \, R_{12}^T}$$

Exercicio: qual é a relação entre $\hat{w}_1$ e $\hat{w}_2$ considerando $w_1 = R_{12} \; w_2$?