Introdução à Robótica

http://www.coep.ufrj.br/gscar

Cinemática Direta

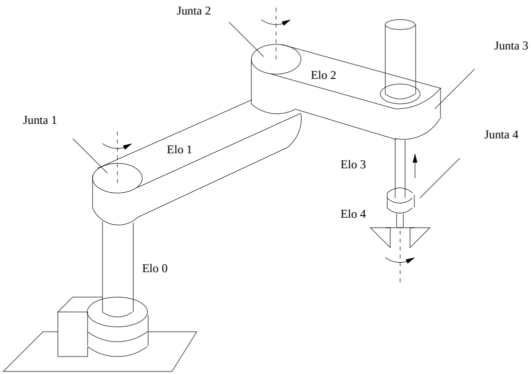
Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 13 de julho de 2018

Cinemática Direta

Um robô é composto por juntas de revolução e/ou prismáticas que unem elos rígidos formando uma cadeia cinemática.

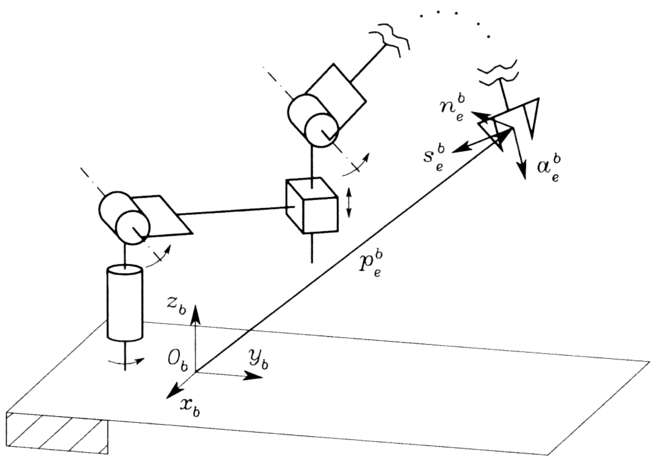


Um extremo da cadeia esta fixada à base, entanto que a outra termina no efetuador.

Cada junta adiciona um grau de mobilidade e esta associado a uma variável de junta (ângulo ou deslocamento).

O objetivo da cinemática direta é calcular a posição e orientação do efetuador (com relação a um sistema de coordenadas fixo) em função das variáveis das juntas.

Dado um manipulador



onde

$\bar{E}_b = [\vec{x}_b,\ \vec{y}_b,\ \vec{z}_b]$ é o sistema de coordenadas da base, e

$\bar{E}_e = [\vec{n},\ \vec{s},\ \vec{a}]$ é o sistema de coordenadas do efetuador

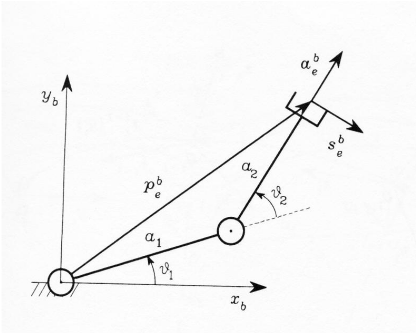
- a: approach $\quad$ s: slide $\quad$ n: normal

Podemos representar a configuração do sistema de coordenadas do efetuador utilizando a transformação homogênea

$$T_{be}(\theta) = \begin{bmatrix} n_e(\theta) & s_e(\theta) & a_e(\theta) & p_{be}(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com } \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Uma primeira idéia para calcular a cinemática direta é analisar a geometria de estrutura do sistema robótico.

Exemplo: Considere um manipulador planar de 2 elos



Utilizando conceitos básicos de trigonometria pode-se determinar a cinemática direta deste manipulador:

$$T_{be}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{be} & p_{be} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

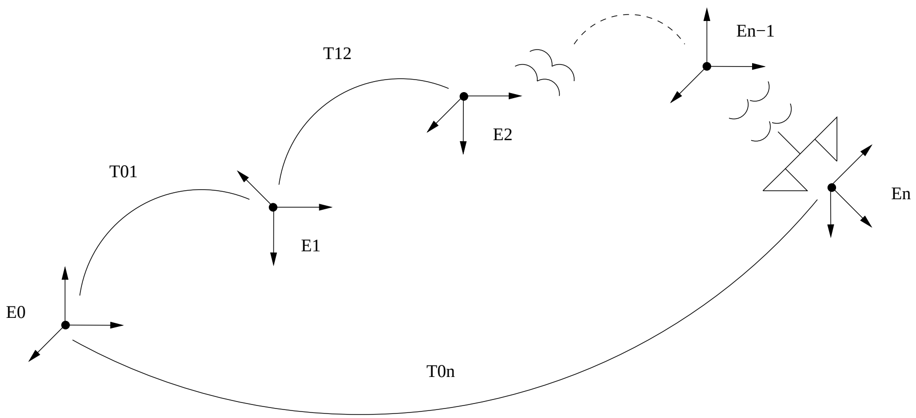
$c_1 = \cos(\theta_1)$, $\quad s_1 = \sin(\theta_1)$,

$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $\quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

Voltar
Fechar

Cadeia Cinemática Aberta

Considere a seguinte cadeia cinemática constituída por $n+1$ elos, numerados de 0 até n começando com o elo 0 sendo a base. Os elos são unidos por juntas numeradas de 1 até n.



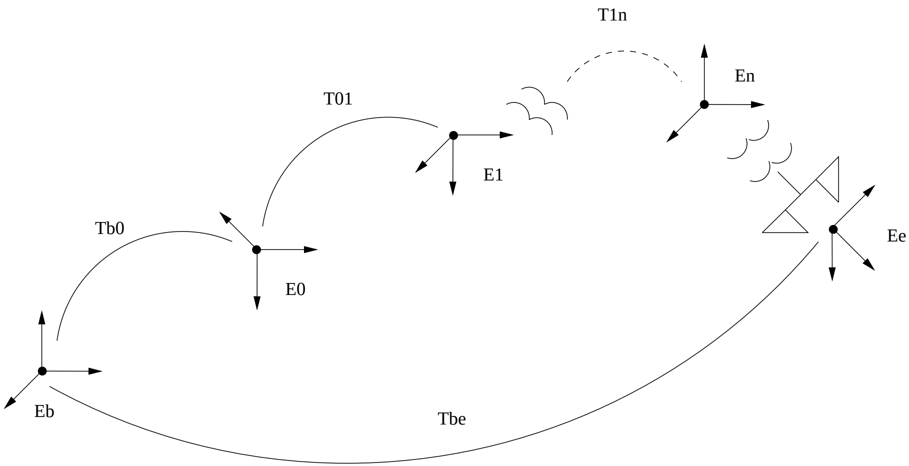
Considerando que cada junta possui um grau de mobilidade associado a uma variável de junta, temos que

$$T_{0n}(\theta) = T_{01}(\theta_1)\ T_{12}(\theta_2) \cdots T_{n-1,n}(\theta_n)$$

Portanto a transformação homogênea descrevendo a posição e orientação do efetuador com respeito à base do manipulador é dada por:

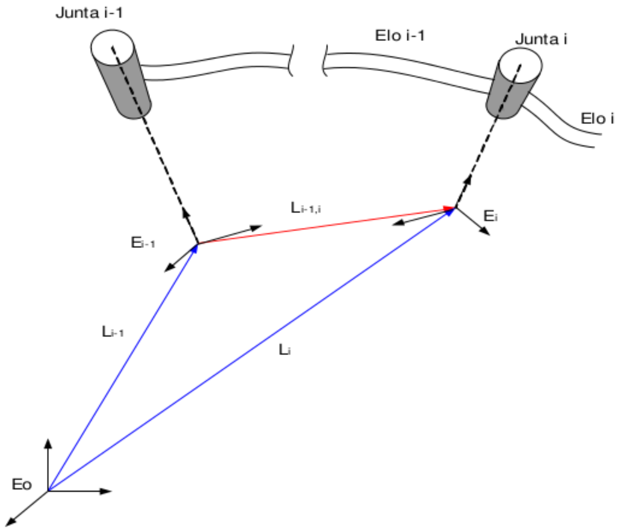
$$T_{be}(\theta) = T_{b0}\ T_{0n}(\theta)\ T_{ne}$$

O espaço definido por θ é chamado de espaço das juntas.



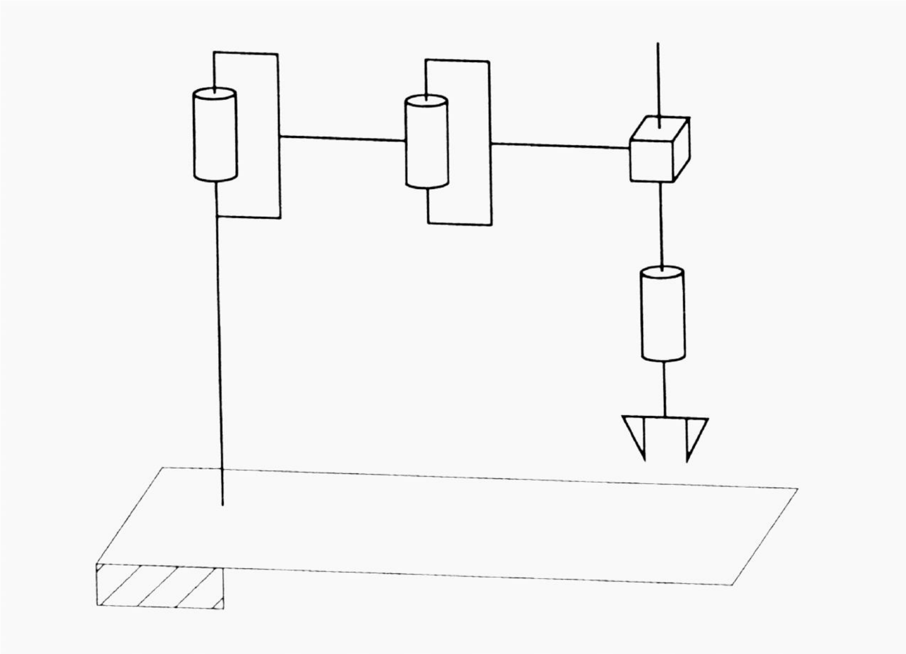
LEMBRETE: a junta i une o elo $i{-}1$ ao elo i. O sistema de coordenadas $\bar{E}_i$ é solidário ao elo i.

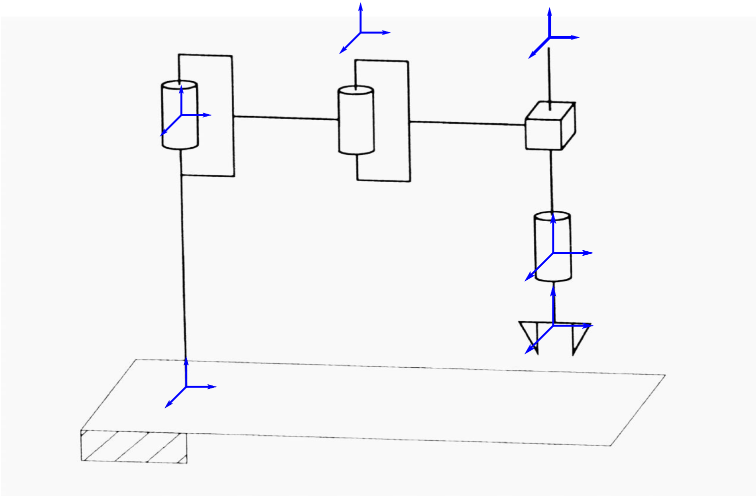
Pode ser proposta uma forma recursiva utilizando a translação e a orientação entre juntas vizinhas, $\vec{p}_{i-1,i}$ e $R_{i-1,i}$ (escolha livre dos frames):



$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \vec{p}_{i-1,i}; \qquad \bar{E}_i = \bar{E}_{i-1}\, R_{i-1,i}; \qquad T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} R_{i-1,i} & (\vec{p}_{i-1,i})_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Manipulador SCARA (RRPR)





Cinemática rotacional:

$$
\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= \bar{E}_0 \; R_{01} \\
\bar{E}_2 &= \bar{E}_1 \; R_{12} \\
\bar{E}_3 &= \bar{E}_2 \; R_{23} \\
\bar{E}_4 &= \bar{E}_3 \; R_{34} \Longrightarrow \bar{E}_4 = \bar{E}_0 \; \underbrace{R_{01} \; R_{12} \; R_{23} \; R_{34}}_{R_{04}}
\end{aligned}
$$

onde

$$R_{01} = e^{\hat{z}_0 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{12} = e^{\hat{z}_1 \theta_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{34} = e^{\hat{z}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{23} = I$$

Cinemática Translacional:

$$\vec{p}_{04} = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{23} + \vec{p}_{34}$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{01} &= d_0\ \vec{z}_0 \\
\vec{p}_{12} &= l_1\ \vec{y}_1 + d_1\ \vec{z}_1 \\
\vec{p}_{23} &= l_2\ \vec{y}_2 - \theta_3\ \vec{z}_2 \\
\vec{p}_{34} &= -d_3\ \vec{z}_3
\end{aligned}$$

Neste ponto, podemos definir as transformações homogênea $T_{i-1,i}$

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R_{01}(\theta_1) & (\vec{p}_{01})_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ T_{12} = \begin{bmatrix} R_{12}(\theta_2) & (\vec{p}_{12})_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} R_{23} & (\vec{p}_{23}(\theta_3))_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ T_{34} = \begin{bmatrix} R_{34}(\theta_4) & (\vec{p}_{34})_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

onde

$$
\begin{aligned}
(\vec{p}_{01})_0 &= d_0 \; (\vec{z}_0)_0 \\
(\vec{p}_{12})_1 &= l_1 \; (\vec{y}_1)_1 + d_1 \; (\vec{z}_1)_1 \\
(\vec{p}_{23})_2 &= l_2 \; (\vec{y}_2)_2 - \theta_3 \; (\vec{z}_2)_2 \\
(\vec{p}_{34})_3 &= -d_3 \; (\vec{z}_3)_3
\end{aligned}
$$

Podendo calcular

$$T_{04} = T_{01} \; T_{12} \; T_{23} \; T_{34}$$

O podemos calcular diretamente $\vec{p}_{04}$ no sistema de coordenadas 0:

$$
\begin{aligned}
(\vec{p}_{04})_0 &= d_0\ (\vec{z}_0)_0 + R_{01}\ (l_1(\vec{y}_1)_1 + d_1(\vec{z}_1)_1) + R_{02}\ (l_2(\vec{y}_2)_2 - \theta_3(\vec{z}_2)_2) \\
&\qquad - d_3 R_{03}(\vec{z}_3)_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{p}_{04})_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_0 \end{bmatrix} + R_{01}\begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + R_{01}R_{12}\begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ -\theta_3 \end{bmatrix} - R_{01}R_{12}R_{23}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ d_0 + d_1 - \theta_3 - d_3 \end{bmatrix} \qquad d_3 = d_1 + d_{30}
\end{aligned}
$$

Então, a transformação homogênea que descreve a posição e orientação do efetuador $(\bar{E}_4)$ com relação à base $(\bar{E}_0)$ é dada por

$$
T_{04} = \begin{bmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_0 - \theta_3 - d_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Enfoque por Produto de Exponenciais

Cinemática direta de uma cadeia aberta.

Procedimento:

1. Coloque a cadeia aberta na configuração zero (você escolhe !),
2. Escolha a origem O_i do sistema de coordenadas i ao longo do eixo de rotação/translação, $\vec{h}_i$, da junta i,
3. Escolha os sistemas de coordenadas $\bar{E}_i$ $(i = 0, \cdots, n)$ todos com a mesma orientação (você escolhe $\bar{E}_0$),
4. Exprima $\vec{h}_i$ e $\vec{p}_{i-1,i}$ no sistema de coordenada $\bar{E}_{i-1}$,
5. Aplique as equações de cálculo da Cinemática Direta

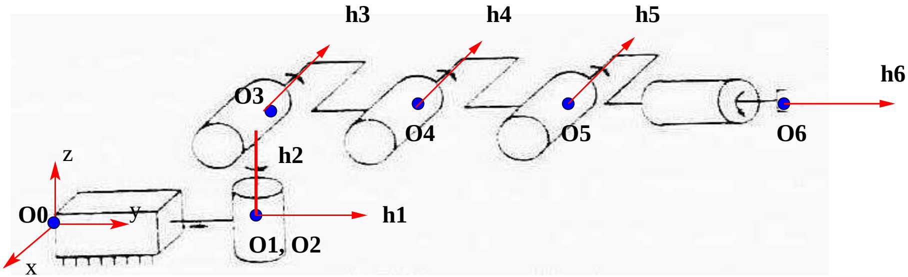
$$R_{0i} = R_{0,i-1} \underbrace{R_{i-1,i}}_{\text{R: } e^{(\vec{h}_i)_{i-1}\times\ \theta_i}} \quad , \qquad (\vec{p}_i)_0 = (\vec{p}_{i-1})_0 + R_{0,i-1} \underbrace{(\vec{p}_{i-1,i})_{i-1}}_{\text{P: } (\vec{h}_i)_{i-1}\ \theta_i}$$

Voltar
Fechar

```
% fwdkin.m
% General forward kinematics for serial chain
%
% theta: n-vector of rotational angle / translational displacement
% type: 0 = rotational  nonzero = prismatic
% H = [ h1 h2 ... hn ] axis of rotation or translation
% P = [p01 p12 p23 .. p_{n-1}n] inter-link vectors
% n: # of links (>1)
%
function [T]=fwdkin(theta,type,H,P,n)

  if type(1) == 0
    R=expm(crossmat(H(1:3,1))*theta(1));     p=P(1:3,1);
  else
    R=eye(3,3);                              p=P(1:3,1)+theta(1)*H(1:3,1);
  end

  T=[R p;zeros(1,3) 1];

  for i = 2:n
    if type(i) == 0
        Ti=[expm(crossmat(H(1:3,i))*theta(i)) P(1:3,i); zeros(1,3) 1];
    else
        Ti=[eye(3) (P(1:3,i)+theta(i)*H(1:3,i)); zeros(1,3) 1];
    end
    T=T*Ti;
  end
```

```
% SCARA arm example

% Parameters
l0 = 1
l1 = 1;
l2 = 1;
l34 = .8;

% Joint Axis
h1 = [0; 0; 1];
h2 = h1; h3 = h1; h4 = h1;
H = [h1 h2 h3 h4];

% Links
p01 = l0*h1;
p12 = [0; l1; 0.2];
p23 = [0; l2; 0];
p34 = [0; 0; -0.2];
P = [p01 p12 p23 p34];
type = [0 0 1 0]; % RRPR robot
n = 4;

theta = input(['enter theta vector (',num2str(n),'x1): ']);

[R, p] = fwdkin(theta, type, H, P, n);

disp(R); disp(p)
```

Exercício: Calcule a cinemática direta do manipulador RHINO (6 DOF - PRRRRR).



Na configuração zero tem-se

$$\vec{h}_1 = \vec{h}_6 = \vec{y}; \qquad \vec{h}_2 = \vec{z}; \qquad \vec{h}_3 = \vec{h}_4 = \vec{h}_5 = -\vec{x}$$

Cinemática rotacional:

$$R_{06} = R_{01}\ R_{12}\ R_{23}\ R_{34}\ R_{45}\ R_{56}$$

onde

$$R_{01} = I; \qquad R_{12} = e^{\hat{z}\theta_2} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{23} = e^{-\hat{x}\theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{bmatrix}; \qquad R_{34} = e^{-\hat{x}\theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & s_4 \\ 0 & -s_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$R_{45} = e^{-\hat{x}\theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & s_5 \\ 0 & -s_5 & c_5 \end{bmatrix}; \qquad R_{56} = e^{\hat{y}\theta_6} = \begin{bmatrix} c_6 & 0 & s_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 \end{bmatrix}$$

Cinemática Translacional:

$$\vec{p}_{06} = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{23} + \vec{p}_{34} + \vec{p}_{45} + \vec{p}_{56}$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{p}_{01} &= (l_1 + \theta_1)\ \vec{y}; & \vec{p}_{12} &= 0; \\ \vec{p}_{23} &= l_2\ \vec{z}_2; & \vec{p}_{34} &= l_3\ \vec{y}_3; \\ \vec{p}_{45} &= l_4\ \vec{y}_4; & \vec{p}_{56} &= l_5\ \vec{y}_5; \end{aligned}$$

Conseqüentemente no sistema de coordenadas 0 ($R_{01} = I, \vec{p}_{12} = 0$):

$$(\vec{p}_{06})_0 = (l_1+\theta_1)(\vec{y})_0 + l_2 R_{02}\,(\vec{z}_2)_2 + l_3 R_{03}\,(\vec{y}_3)_3 + l_4 R_{04}\,(\vec{y}_4)_4 + l_5 R_{05}\,(\vec{y}_5)_5$$

$$\begin{aligned}
(\vec{p}_{06})_0 &= (l_1+\theta_1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + l_2 R_{12}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \\
&\qquad + R_{12}\,(l_3 R_{23} + l_4 R_{24} + l_5 R_{25})\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ? \\ l_1+\theta_1+\cdots \\ l_2+\cdots \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

```
% Rhino arm example

% parameters
l0=1;  l2=1;  l3=1;  l4=1;

% Joint Axis
x0=[1;0;0]; y0=[0;1;0];  z0=[0;0;1];   nullvec=[0;0;0];

h1=y0;  h2=z0;  h3=-x0;
h4=h3;  h5=h3;  h6=y0;
H=[h1 h2 h3 h4 h5 h6];

% Links
p01=y0*l0;
p12=nullvec;
p23=l2*z0;
p34=l3*y0;
p45=l4*y0;
p56=nullvec;
P=[p01 p12 p23 p34 p45 p56];
type=[1 0 0 0 0 0]; % PRRRRR robot
n=6;

theta=input(['enter theta vector (',num2str(n),'x1): ']);

[R, p] = fwdkin(theta, type, H, P, n);
disp(R);disp(p)
```

Cinemática Direta: outros métodos

Existem outros métodos e convenções para determinar a cinemática direta de um manipulador:

1. POE (Product of Exponentials): baseada na representação exponencial de transformações homogêneas, i.e. $T = e^{\hat{\zeta}\theta}$.

2. Peter Corke's Method: anda pela cadeia cinemática da base até o efetuador realizando rotações e translações puras. Por exemplo, um manipulador planar 3R, a cinemática direta é obtida:

```
% Plannar Manipulator 3R
syms  l1 l2 l3   %  link lenght
syms q1 q2 q3    % joint angles

T03=trchain('Rz(q1)Tx(l1)Rz(q2)Tx(l2)Rz(q3)Tx(l3)',[q1 q2 q3]);
T03=simplify(T03);   % simplificaction

p=T03(1:3,4);
disp(p)
```

3. Universal Robot Description Format The Universal Robot Description Format (URDF): XML (eXtensible Markup Language) file format used by ROS to describe kinematics, inertial properties, and link geometry of robots.

   A URDF file describes the joints and links of a robot:

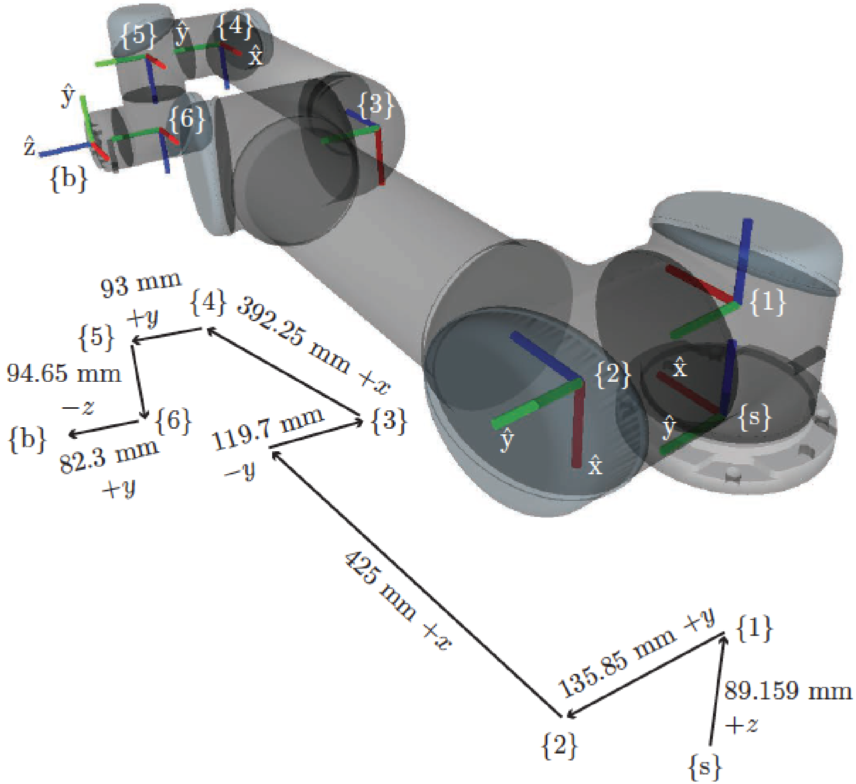
   - Joints: joints connect two links: a parent link and a child link. Possible joint types: prismatic, revolute and fixed.

     Each joint has an origin frame that defines the position and orientation of the child link frame relative to the parent link frame when the joint variable is zero.

   - Links: define its mass properties necessary for to study the dynamics of robots: its mass; an origin frame that defines the position/orientation of a frame at the link's center of mass relative to the link's joint frame described above; and an inertia matrix, relative to the link's center of mass frame.

A URDF file can represent any robot with a tree structure.

Exemplo: cinemática e dinâmica de um manipulador UR5



```xml
<?xml version="1.0" ?>
<robot name="ur5">
<!-- ********** KINEMATIC PROPERTIES (JOINTS) ********** -->

<joint name="world_joint" type="fixed">
<parent link="world"/>
<child link="base_link"/>
<origin rpy="0.0 0.0 0.0" xyz="0.0 0.0 0.0"/>
</joint>

<joint name="joint1" type="continuous">
<parent link="base_link"/>
<child link="link1"/>
<origin rpy="0.0 0.0 0.0" xyz="0.0 0.0 0.089159"/>
<axis xyz="0 0 1"/>
</joint>

<joint name="joint2" type="continuous">
<parent link="link1"/>
<child link="link2"/>
<origin rpy="0.0 1.570796325 0.0" xyz="0.0 0.13585 0.0"/>
<axis xyz="0 1 0"/>
</joint>

...
```

```
<joint name="ee_joint" type="fixed">
<origin rpy="-1.570796325 0 0" xyz="0 0.0823 0"/>
<parent link="link6"/>
<child link="ee_link"/>
</joint>
...
<!-- ********** INERTIAL PROPERTIES (LINKS) ********** -->
<link name="world"/>
<link name="base_link">
<inertial>
<mass value="4.0"/>
<origin rpy="0 0 0" xyz="0.0 0.0 0.0"/>
<inertia ixx="0.00443333156" ixy="0.0" ixz="0.0"
iyy="0.00443333156" iyz="0.0" izz="0.0072"/>
</inertial>
</link>
....
<link name="ee_link"/>
</robot>
```

URDF can describe other properties of a robot, e.g. visual appearance (including geometric models of the links), simplified representations of link geometries (used for collision detection in motion planning algorithms).

Parâmetros de Denavit-Hartenberg

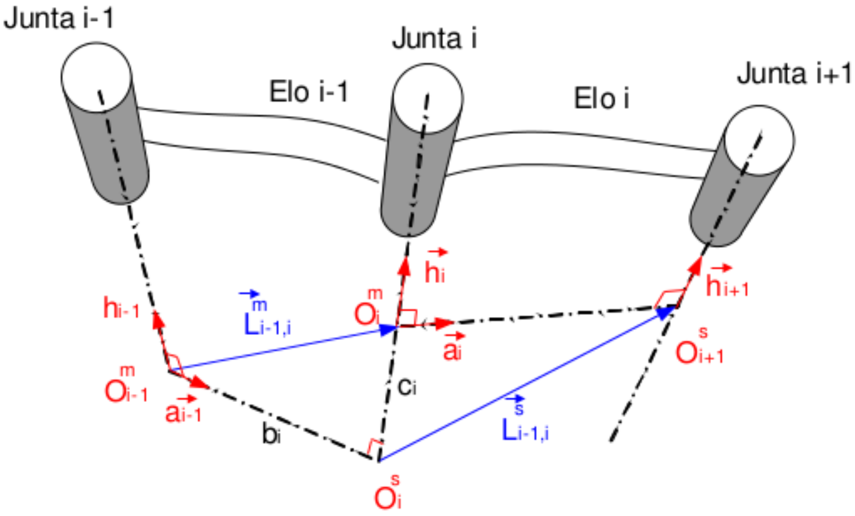
A escolha sistemática de coordenadas simplifica a obtenção da cinemática direta de um sistema robótico.
Neste sentido a convenção de Denavit Hartenberg é a mais popular.
Infelizmente existem duas versões:

1. DH Standard: livros de Siciliano&Sciavicco, Spong&Vidyasagar, etc.
2. DH Modificado: livro de Craig, NASA JPL, etc.

No Robot Toolbox são consideradas as duas versões.

A idéia por traz desta convenção pode ser retratada na seguinte figura:

Conceito de DH



1. Definir a normal comum $\vec{a}_{i-1}$ entre $\vec{h}_{i-1}$ e $\vec{h}_i$.
2. Definir
   - O_i^s : interseção entre $\vec{h}_i$ e $\vec{a}_{i-1}$
   - O_i^m : interseção entre $\vec{h}_i$ e $\vec{a}_i$

3. Então tem-se que

$$\vec{h}_i = e^{\beta_{i-1}\vec{a}_{i-1}\times}\ \vec{h}_{i-1} \qquad \text{com } \vec{a}_{i-1} = \pm\frac{\vec{h}_{i-1}\times\vec{h}_i}{\left\|\vec{h}_{i-1}\times\vec{h}_i\right\|}$$

onde β_{i-1} é o ângulo de rotação ao redor $\vec{a}_{i-1}$.

4. Dado que

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{h}_i\times\vec{h}_{i+1}}{\left\|\vec{h}_i\times\vec{h}_{i+1}\right\|} \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}_i = e^{\gamma_i\vec{h}_i\times}\ \vec{a}_{i-1}$$

onde γ_i é o ângulo de rotação ao redor $\vec{h}_i$.

5. Definindo um sistema de coordenadas como $\{\vec{a}_i, \vec{h}_i\}$, a propagação de $\{\vec{a}_{i-1}, \vec{h}_{i-1}\}$ para $\{\vec{a}_i, \vec{h}_i\}$ é parametrizada através de γ_i e β_{i-1}.

6. Para a translação, definindo

- c_i: distância entre O_i^s e O_i^m ao longo de $\vec{h}_i$
- b_i: distância entre O_{i-1}^m e O_i^s ao longo de $\vec{a}_{i-1}$

O vetor $\vec{p}^{\,s}_{i-1,i}$ definido entre O_i^s e O_{i+1}^s é dado por

$$\vec{p}^{\,s}_{i-1,i} = c_i\ \vec{h}_i + b_{i+1}\ \vec{a}_i \qquad \text{Standard}$$

Por outro lado, o vetor $\vec{p}^{\,m}_{i-1,i}$ definido entre O_{i-1}^m e O_i^m é dado por

$$\vec{p}^{\,m}_{i-1,i} = b_i\ \vec{a}_{i-1} + c_i\ \vec{h}_i \qquad \text{Modificado}$$

Portanto para representa a transformação do sistema de coordenada $i-1$ para o i são necessários 4 parâmetros $(b_i,\ c_i,\ \beta_i,\ \gamma_i)$.

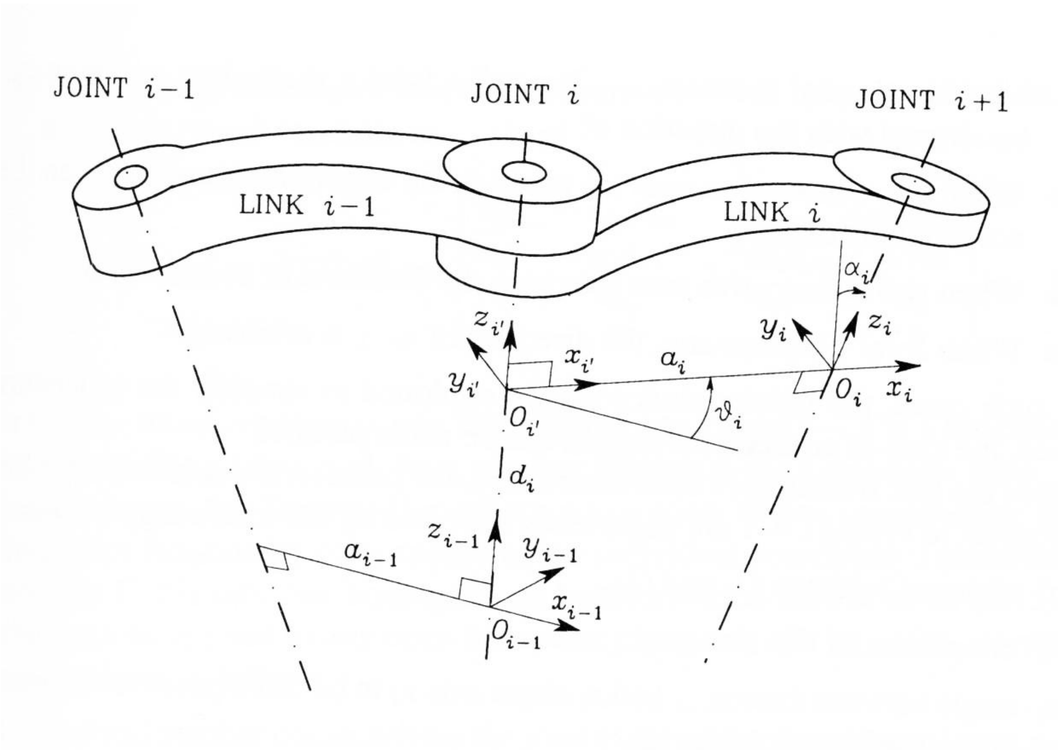
Mais especificamente para as duas versões temos:

DH Standard

1. $i = 0, \cdots, n-1$
2. $\vec{z}_i = \vec{h}_{i+1}$ (i.e. no eixo da junta $i+1$)
3. $\vec{x}_i = \vec{a}_i$
4. $\bar{E}_i = [\vec{x}_i \quad \vec{z}_i \times \vec{x}_i \quad \vec{z}_i]$
5. Origem O_i na interseção entre $\vec{a}_i$ e $\vec{h}_{i+1}$: O^s_{i+1}
6. $\alpha_i = \beta_i \qquad \theta_i = \gamma_i$
7. $a_i = b_{i+1} \qquad d_i = c_i$
8. Parâmetros $(a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i)$
9. $\vec{p}_{i-1,i} = d_i \ \vec{z}_{i-1} + a_i \ \vec{x}_i$
10. $\bar{E}_i = e^{\alpha_i \vec{x}_i \times} \ \underbrace{e^{\theta_i \vec{z}_{i-1} \times} \ \bar{E}_{i-1}}_{\bar{E}'_i} \Longrightarrow R_{i-1,i} = \exp(\hat{z}_{i-1}\theta_i) \ \exp(\hat{x}_i \alpha_i)$

Voltar
Fechar

DH Standard

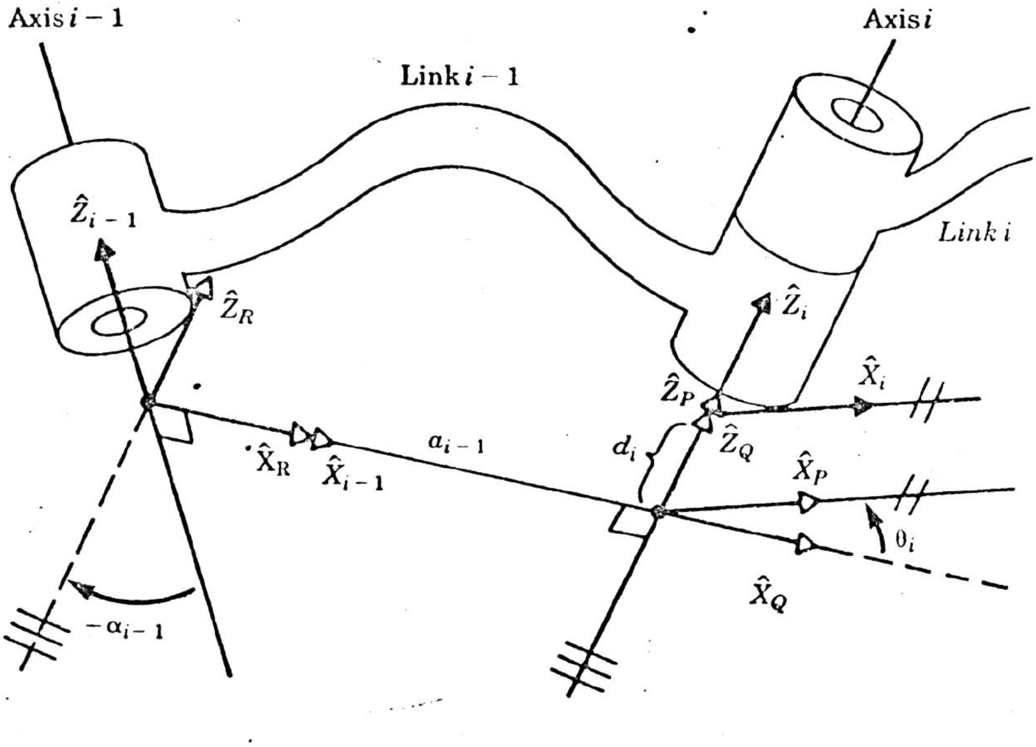


onde $\theta_i = \mathcal{V}_i$.

DH Modificado

1. $i = 1, \cdots, n$
2. $\vec{z}_i = \vec{h}_i$ (i.e. no eixo da junta i)
3. $\vec{x}_i = \vec{a}_i$
4. $\bar{E}_i = [\vec{x}_i \quad \vec{z}_i \times \vec{x}_i \quad \vec{z}_i]$
5. Origem O_i na interseção entre $\vec{a}_i$ e $\vec{h}_i$: O_i^m
6. $\alpha_i = \beta_i \qquad \theta_i = \gamma_i$
7. $a_{i-1} = b_i \qquad d_i = c_i$
8. Parâmetros $(a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i)$
9. $\vec{p}_{i-1,i} = a_{i-1}\ \vec{x}_{i-1} + d_i\ \vec{z}_i$
10. $\bar{E}_i = e^{\theta_i \vec{z}_i \times}\ e^{\alpha_{i-1} \vec{x}_{i-1} \times}\ \bar{E}_{i-1} \Longrightarrow R_{i-1,i} = \exp(\hat{x}_i \alpha_{i-1})\ \exp(\hat{z}_i \theta_i)$

DH Modificado



Comentários sobre a normal comum

Normal comum entre $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$:suponha uma linha que une as linhas definidas pela direção dos eixos $\vec{z}_{i-1}$ a $\vec{z}_i$. A normal comum é a linha de menor distância.

Resumindo, a normal comum entre duas linhas é a linha contendo o segmento de mínima distância entre as duas linhas.

Se as duas linhas não são coplanares o segmento é único.

Se as duas linhas são coplanares existem dois casos:

1. linhas paralelas: existem infinitas soluções que definem a mínima distância. Neste caso colocamos O_i na junta i
2. linhas que interceptam: é a normal ao plano definido pelas duas linhas. O sentido é arbitrario.

Convenção de Denavit-Hartenberg Standard

1. Definir $\vec{z}_i$ no eixo de rotação/translação da junta $i+1$.
2. Colocar a origem O_i onde a normal comum entre $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$ intercepta $\vec{z}_i$.

   Se $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$ interceptam colocar O_i na intersecção.

   Se $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$ são paralelas colocar O_i na junta $i+1$.
3. Definir $\vec{x}_i$ ao longo da normal comum a $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$.

   Se $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$ interceptam escolher a direção normal ao plano definido por $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i-1}$. O sentido é arbitrario.

Parâmetros de Denavit Hartenberg Standard

1. a_i: distância entre $\vec{z}_{i-1}$ e $\vec{z}_i$ ao longo de $\vec{x}_i$
2. α_i: ângulo entre $\vec{z}_{i-1}$ e $\vec{z}_i$ ao redor de $\vec{x}_i$
3. d_i: distância entre $\vec{x}_{i-1}$ e $\vec{x}_i$ ao longo de $\vec{z}_{i-1}$
4. θ_i: ângulo entre $\vec{x}_{i-1}$ e $\vec{x}_i$ ao redor de $\vec{z}_{i-1}$

A tabela com os parâmetros deve ser formada da seguinte forma:

Elo i	θ_i	d_i	a_i	α_i	type	offset
1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
5	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Convenção de Denavit-Hartenberg Modificada

1. Definir $\vec{z}_i$ no eixo de rotação/translação da junta i.
2. Colocar a origem O_i onde a normal comum entre $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$ intercepta $\vec{z}_i$.

   Se $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$ interceptam colocar O_i na intersecção.

   Se $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$ são paralelas colocar O_i na junta i.
3. Definir $\vec{x}_i$ ao longo da normal comum a $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$.

   Se $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$ interceptam escolher a direção normal ao plano definido por $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$. O sentido é arbitrario.

Parâmetros de Denavit Hartenberg Modificado

1. a_i: distância entre $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$ ao longo de $\vec{x}_i$
2. α_i: ângulo entre $\vec{z}_i$ e $\vec{z}_{i+1}$ ao redor de $\vec{x}_i$
3. d_i: distância entre $\vec{x}_{i-1}$ e $\vec{x}_i$ ao longo de $\vec{z}_i$
4. θ_i: ângulo entre $\vec{x}_{i-1}$ e $\vec{x}_i$ ao redor de $\vec{z}_i$

Voltar
Fechar

A tabela com os parâmetros deve ser formada da seguinte forma:

Elo i	θ_i	d_i	a_{i-1}	α_{i-1}	type	offset
1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
5	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Algumas Considerações

Dos 4 parâmetros, tem-se que a_i e α_i são constantes e dependendo da geometria da junta um dos restantes é variável:

1. junta prismática $\longrightarrow d_i$ variável
2. Junta de revolução $\longrightarrow \theta_i$ variável

Transformação Homogênea $T_{i-1,i}$

DH standard

A parte rotacional, i.e. a orientação do sistema de coordenada $\bar{E}_i$ com relação a $\bar{E}_{i-1}$, é dada pela matriz de rotação $R_{i-1,i}$.

Como foi visto anteriormente, na convenção DH standard, esta rotação pode ser decomposta em 2 rotações elementares ao redor do sistemas de coordenadas corrente:

$$R_{i-1,i} = R_z(\theta_i)\ R_x(\alpha_i)$$

isto é,

$$R_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix}$$

Por outro lado, a parte translacional é dada por

$$\vec{p}_{i-1,i} = d_i\ \vec{z}_{i-1} + a_i\ \vec{x}_i$$

Podemos representar esta distância no sistema de coordenadas $i-1$:

$$(\vec{p}_{i-1,i})_{i-1} = d_i\ (\vec{z}_{i-1})_{i-1} + a_i\ \underbrace{(\vec{x}_i)_{i-1}}_{R_{i-1,i}\ (\vec{x}_i)_i}$$

$$(\vec{p}_{i-1,i})_{i-1} = d_i\ (\vec{z}_{i-1})_{i-1} + a_i\ R_{i-1,i}\ (\vec{x}_i)_i = d_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_i\ R_{i-1,i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\vec{p}_{i-1,i})_{i-1} = \begin{bmatrix} a_i c\theta_i \\ a_i s\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Note que o vetor não é constante.

Exercício: Calcule $(\vec{p}_{i-1,i})_i$ e mostre que é um vetor constante.

Portanto, a transformação homogênea $T_{i-1,i}$ é dada por

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos que a posição e orientação do efetuador é dada por:

$$\vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i-1,i}$$

$$R_{0,n} = \prod_{i=1}^{n} R_{i-1,i}$$

DH Modificado

A parte rotacional, i.e. a orientação do sistema de coordenada $\bar{E}_i$ com relação a $\bar{E}_{i-1}$, é dada pela matriz de rotação $R_{i-1,i}$.
Como foi visto anteriormente, na convenção DH modificada, esta rotação pode ser decomposta em 2 rotações elementares ao redor do sistemas de coordenadas corrente:

$$R_{i-1,i} = R_x(\alpha_{i-1})\ R_z(\theta_i)$$

isto é,

$$\begin{aligned} R_{i-1,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado, a parte translacional é dada por

$$\vec{p}_{i-1,i} = a_{i-1}\ \vec{x}_{i-1} + d_i\ \vec{z}_i$$

Podemos representar esta distância no sistema de coordenadas $i-1$:

$$(\vec{p}_{i-1,i})_{i-1} = a_i\ (\vec{x}_{i-1})_{i-1} + d_i\ \underbrace{(\vec{z}_i)_{i-1}}_{R_{i-1,i}\ (\vec{z}_i)_i}$$

$$(\vec{p}_{i-1,i})_{i-1} = a_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d_i\ R_{i-1,i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ -d_i\ s\alpha_{i-1} \\ d_i\ c\alpha_{i-1} \end{bmatrix}$$

Note que o vetor é constante.

Então a transformação homogênea $T_{i-1,i}$ é dada por:

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos que a posição e orientação do efetuador é dada por:

$$\vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i-1,i}$$

$$R_{0,n} = \prod_{i=1}^{n} R_{i-1,i}$$

Espaço das Juntas e Espaço Operacional

Como vimos até agora a cinemática direta consiste em determinar a posição e orientação do efetuador (com respeito ao sistema de coordenadas da base) em função dos ângulos das juntas.

Se uma tarefa é especificada em função da posição e orientação do efetuador (possivelmente em função do tempo), teríamos um problema.

Dado que, entanto a posição é bastante simples, especificar a orientação é uma tarefa difícil (9 parâmetros $+$ 6 restrições).

O procedimento pode ser simplificado utilizando uma representação mínima da orientação ou mesmo o quaternion.

Desta forma é possível representar a configuração do efetuador com respeito à base como:

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix}$$

onde p é a posição, ϕ é uma representação da orientação.

Então $x \in \mathbb{R}^m$ define o espaço operacional.

Por outro lado o espaço das juntas é definido por

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

Com base nestas definições a cinemática direta pode ser expressa como

$$x = k(\theta)$$

onde $k(\cdot)$ é uma função não linear.

Exemplo: Considere um manipulador planar de 3 elos:

$$x = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = k(\theta) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

Espaço de Trabalho

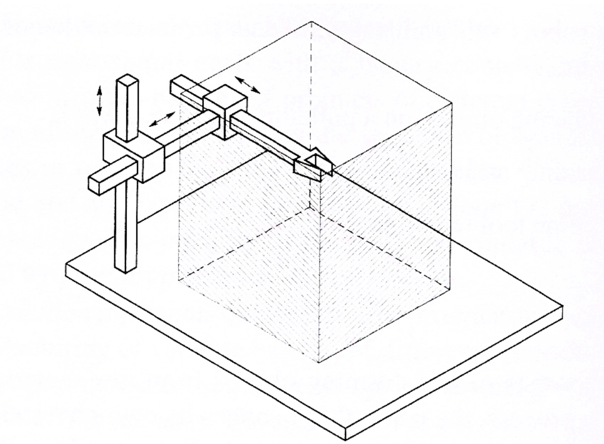
É definido como o conjunto de configurações do efetuador que podem ser atingidas com alguma escolha de θ:

$$W_R = \{p(\theta) : \theta \in \Theta\}$$

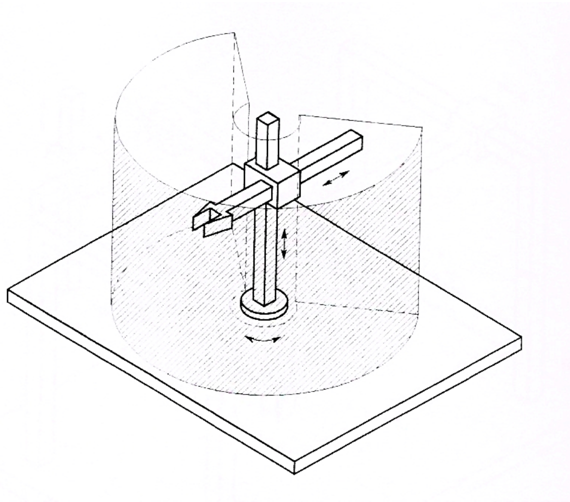
onde Θ é o espaço definido pelas possíveis valores de θ, dados por

$$\theta_{im} \leq \theta_i \leq \theta_{Mi}$$

Espaço de trabalho de alguns manipuladores

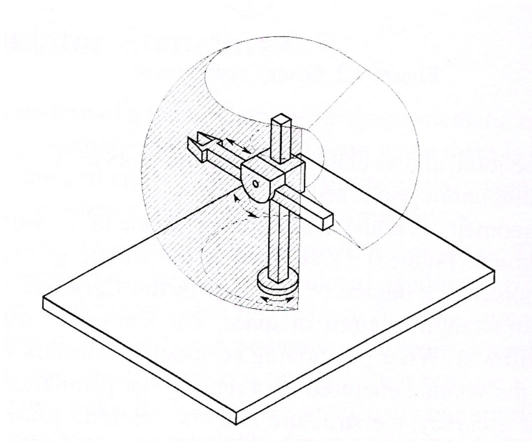


Manipulador Cartesiano

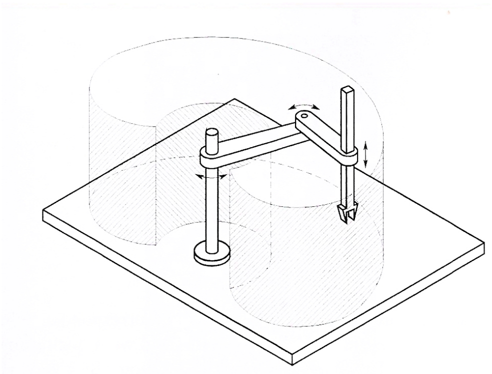


Manipulador Cilíndrico

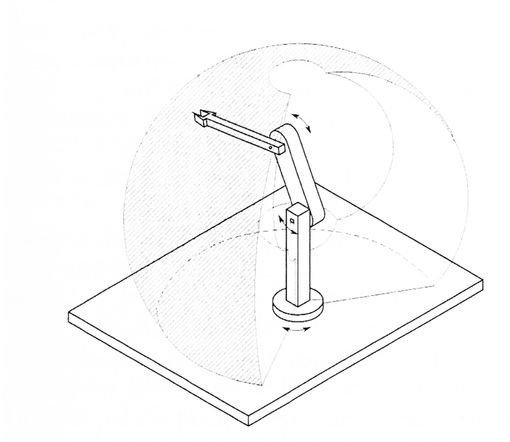
Voltar
Fechar



Manipulador Esférico



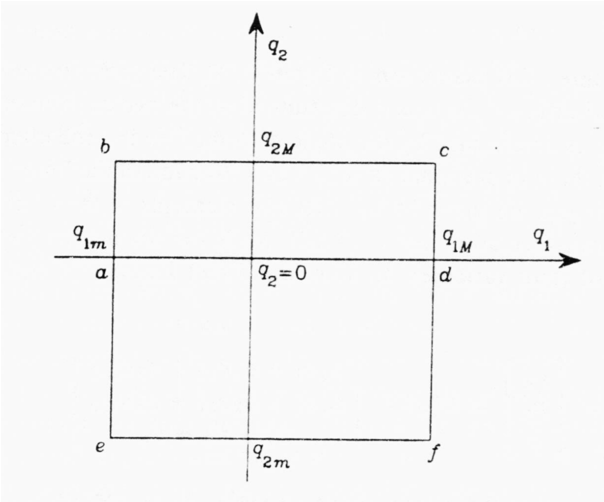
Manipulador SCARA



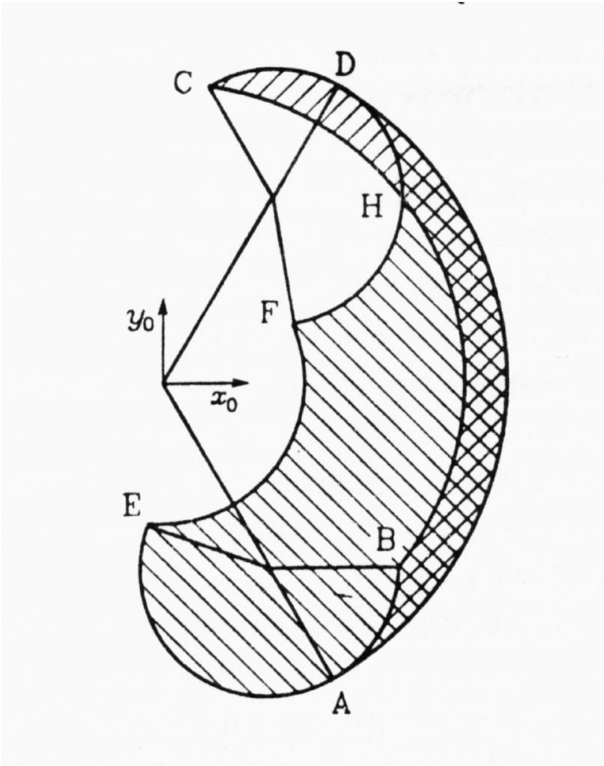
Manipulador Antropomórfico

Exemplo: Considere um manipulador planar de 2 elos.

No espaço das juntas, os valores dos ângulos das juntas fica limitada à região definida pelos ângulos máximos e mínimos das juntas 1 e 2 (quadrado $\{b, c, e, f\}$).



O espaço de trabalho pode ser determinado:



Voltar

Fechar

Redundância Cinemática

O manipulador é redundante quando o número de graus de mobilidade é maior que a quantidade de variáveis (graus de liberdade) necessárias para descrever uma tarefa.

Dado que considera-se que cada junta adiciona somente um grau de mobilidade, um manipulador de n juntas tem n grau de mobilidade.

Desta forma considerando uma tarefa com m graus de liberdade, um manipulador é redundante se:

$$m < n$$

Neste caso, uma dada configuração do manipulador pode ser atingida com diversos valores de juntas (em geral infinitos).