

Introdução à Robótica

<http://www.coep.ufrj.br/gscar>



1/46

Cinemática Inversa

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 21 de julho de 2018



Voltar

Fechar



Cinemática Inversa

A cinemática direta pode ser descrita de duas formas:

$$T_{be}(\theta) \quad \text{ou} \quad x = k(\theta)$$

Ela define uma relação entre os ângulos das juntas θ e a configuração do efetuador no sistema de coordenadas da base, $\{p_{be}, R_{be}\}$.

A cinemática inversa **determina** os ângulos das juntas θ a partir da configuração do efetuador $\{p_{be}, R_{be}\}$, e tem as seguintes características:

1. Ela é geralmente não linear, e difícil de representar em forma fechada
2. podem existir múltiplas soluções, ou
3. podem existir infinitas soluções \implies manipuladores redundantes ($n > 6$), ou
4. pode não existir solução



Para ter uma idéia da dificuldade consideremos um manipulador de n juntas:

$$T_{be}(\theta) = \begin{bmatrix} R_{be}(\theta) & p_{be}(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}^n$$

tendo 9 equações em R + 3 equações em p , portanto 12 **EQUAÇÕES** com n **INCÓGNITAS**.

Outros possíveis métodos para resolver a cinemática inversa:

1. Desacoplamento cinemático
2. Algoritmo Iterativo
3. Decomposição em sub-problemas (Paden-Kahan)



3/46



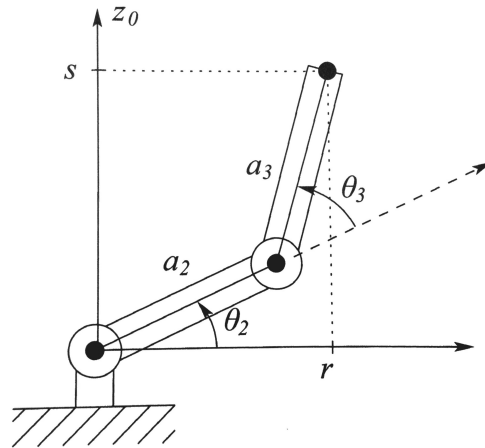
Voltar

Fechar



Enfoque Geométrico

Considere o seguinte manipulador planar 2R:



Pelo teorema do triângulo tem-se

$$r^2 + s^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos(\pi - \theta_3)$$

$$r^2 + s^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3 \cos(\theta_3)$$



Voltar

Fechar

Então

$$\cos(\theta_3) = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = D$$

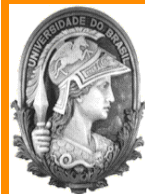
se $|D| \leq 1$ então θ_3 tem 2 soluções:

$$\theta_3 = \pm \arccos(D)$$

senão a cinemática inversa não tem solução.

Para calcular θ_2 tem-se

$$\theta_2 = \underbrace{\text{atan2}(r, s)}_{\beta} - \underbrace{\text{atan2}(a_2 + a_3 \cos(\theta_3), a_3 \sin(\theta_3))}_{\alpha}$$



5/46



Voltar

Fechar



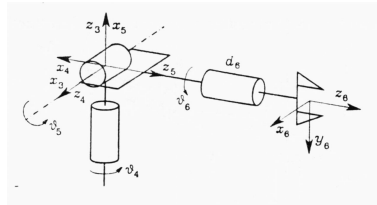
6/46

Desacoplamento Cinemático

Calcular a cinemática inversa em forma fechada requer intuição algébrica e geométrica.

Em muitos robôs industriais é possível desacoplar a posição da orientação do efetuador, por exemplo, no caso do manipulador ter um punho esférico.

Consideremos por exemplo um manipulador de 6 DOF sendo que os eixos das 3 últimas juntas interceptam num ponto



Pode ser observado que qualquer movimento destas 3 juntas não alteram a posição do ponto O .

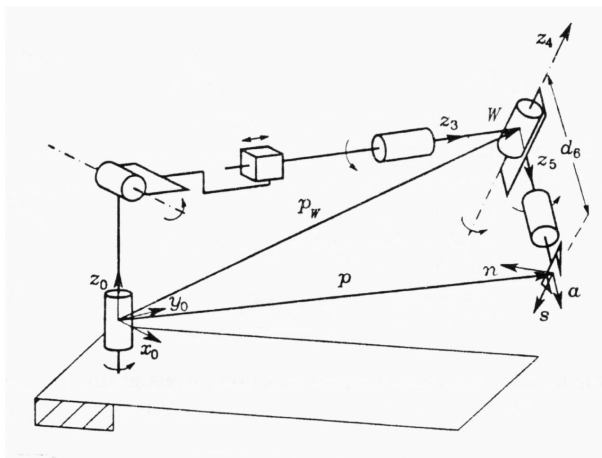


Então considerando a posição e orientação do efetuador como

$$R_{be}(\theta) = R_e \quad p_{be}(\theta) = p_e$$

o problema é determinar o vetor de juntas θ .

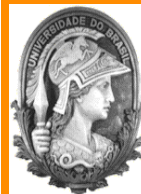
Considerando a junta esférica temos o seguinte



$$p - p_w = d_6 z_5$$

onde z_5 pode ser obtido de $R_e = [x_5 \ y_5 \ z_5]$ e portanto

$$p_e = p_w + d_6 z_5 \Rightarrow p_w = p_e - d_6 z_5$$





Então dado R_e e p_e podemos calcular p_w que é função de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, i.e., $p_w(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ tendo 3 equações com 3 incógnitas.

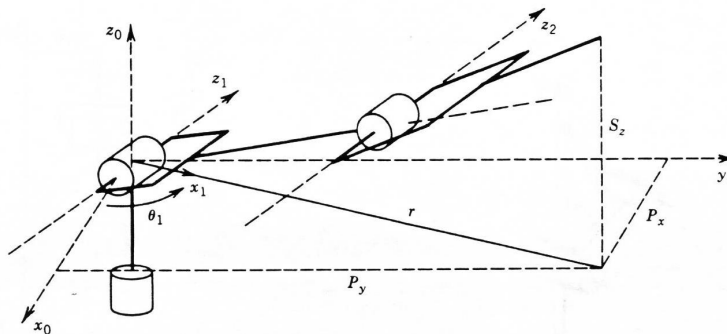
Uma vez calculada os ângulos das 3 primeiras juntas, podemos calcular $R_{b3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e como temos que

$$R_{be} = R_{b3} R_{3e} \Rightarrow R_{3e} = R_{b3}^T R_{be}$$

Com $R_{3e}(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ definindo mais equações que incógnitas.

Manipulador Elbow: Inversa da posição

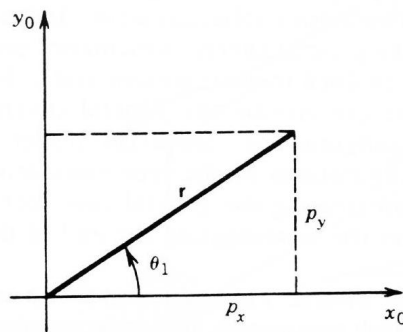
Agora considere o manipulador Elbow da figura



Dado p_w o objetivo é calcular $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, onde

$$p_w = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Da projeção no plano $x - y$



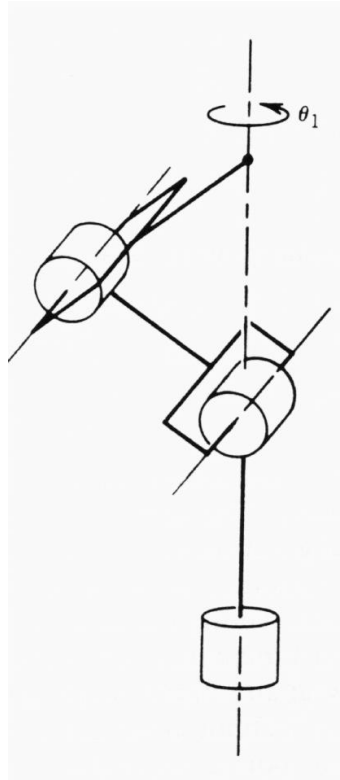
claramente pode ser observado que

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x)$$

desde que $p_x \neq 0$ e $p_y \neq 0$. A posição $p_x = p_y = 0$ caracteriza uma singularidade.



Singularidade (top of the head):



Uma segunda solução válida é

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) + \pi$$



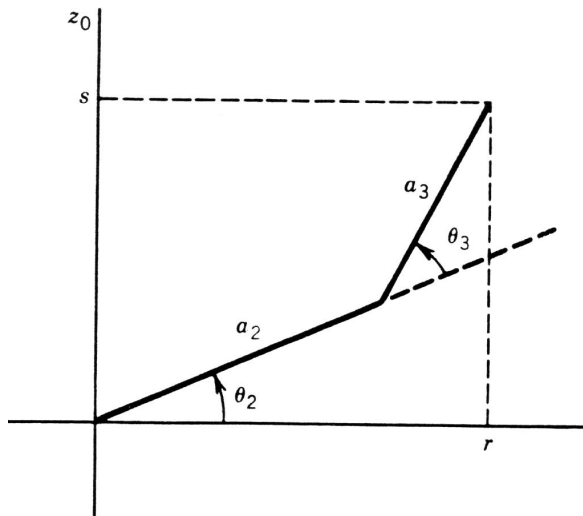
10/46



Voltar

Fechar

Uma vez calculado θ_1 podemos calcular θ_2, θ_3 .
Então observando o plano definido pelo elo 2 e 3,



temos pela lei do cosseno que

$$c^2 = r^2 + s^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos(\pi - \theta_3)$$

onde $s^2 = p_z^2$ e $r^2 = p_x^2 + p_y^2$.



Como $\cos(\pi - \theta_3) = -\cos(\theta_3)$ tem-se

$$\cos(\theta_3) = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = D$$

com $D \in [-1, 1]$ para existir solução. Senão a posição p_e está fora do espaço de trabalho.

Então considerando $\sin(\theta_3) = \pm\sqrt{1 - D^2}$:

$$\theta_3 = \text{atan2}(\pm\sqrt{1 - D^2}, D)$$

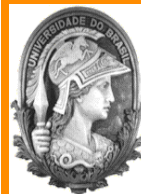
tendo 2 soluções: cotovelo para acima, cotovelo para abaixo.

Similarmente

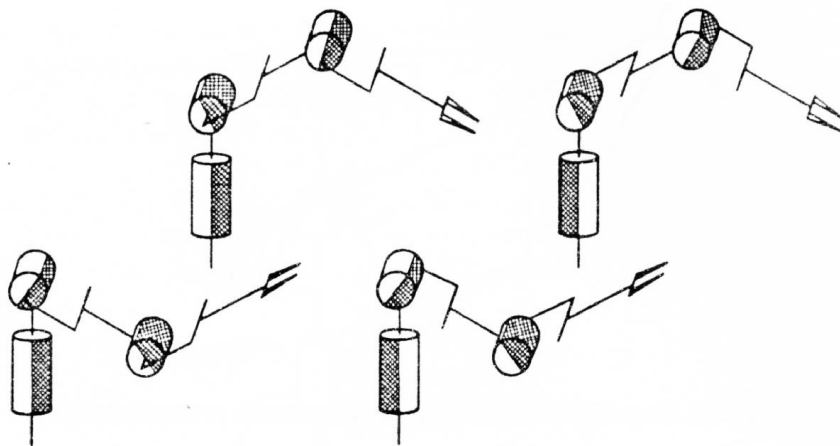
$$\theta_2 = \underbrace{\text{atan2}(s, r)}_{\alpha} - \underbrace{\text{atan2}(a_3s_3, a_2 + a_3c_3)}_{\beta}$$

onde

$$\alpha = \text{atan2}\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, p_z\right)$$



As 4 soluções dependem da configuração do cotovelo.



13/46



Voltar

Fechar

Punho Esférico: Inversa da orientação

Uma vez calculadas $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pode-se calcular $R_{3e} = R_{b3}^T R_{be}$.

Devido às 3 últimas juntas estarem na configuração dos ângulos de Euler (ZYZ), temos o trabalho simplificado dado que a estrutura de R_{3e} é:

$$R_{3e} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c_4 s_5 \\ \cdot & \cdot & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Então temos:

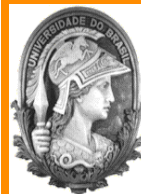
$$\theta_5 = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33})$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(r_{23}/s_5, r_{13}/s_5)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-r_{32}/s_5, r_{31}/s_5)$$

Existindo um singularidade para $s_5 = 0$ que implica $\theta_5 = 0, \pm\pi, \dots$.

Exercício: Cinemática inversa de um manipulador RRP.





Enfoque Iterativo

Considere a posição e orientação do efetuador representada no **espaço operacional** x :

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix}$$

onde p_e é a **posição** e ϕ_e é uma **representação da orientação** do efetuador. Considerando que a **cinemática direta do manipulador** é dada por:

$$x = k(\theta) \quad ; \quad k(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$, tem-se que a **cinemática inversa** é definida pela determinação da função inversa de $k(\cdot)$:

$$\theta = k^{-1}(p_e, \phi_e)$$

O cálculo da solução da cinemática inversa pode ser realizado utilizando um **algoritmo recursivo**.



Para isto, considere uma representação mínima ϕ da orientação e $n = m$, então definindo a função de erro $e = x - k(\theta(\tau))$:

$$2V = e^T e > 0$$

onde τ é uma **variável de iteração**. Então derivando V tem-se

$$\frac{dV}{d\tau} = e^T \frac{de}{d\tau} = - e^T \frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Equivalentemente

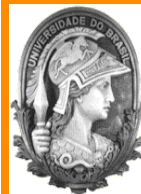
$$\frac{dV}{d\tau} = - e^T J(\theta) \frac{d\theta}{d\tau}$$

onde

$$J(\theta) = \frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta}$$

Então com o objetivo de garantir a convergência do algoritmo podemos escolher:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \alpha J(\theta)^{-1} e \implies \frac{dV}{d\tau} = -\alpha e^T e < 0$$

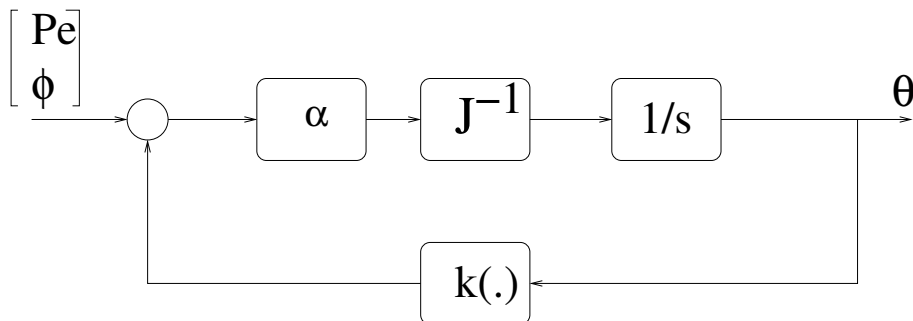


Então dado que $\frac{dV}{d\tau} < 0$ e $V > 0$ tem-se que $V \rightarrow 0$ com $\tau \rightarrow \infty$.

Isto implica que o erro $e(\tau)$ também tende para zero, i.e.

$$\|e\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad k(\theta) \rightarrow x \quad \text{para } \tau \rightarrow \infty$$

Diagrama Bloco do Algoritmo



Ou ainda podemos escolher

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \alpha J^T(\theta) [x - k(\theta)] \rightarrow \text{gradiente conjugado}$$

com $\theta(0) = \theta_0$.

Versão Discreta: substituir $s \mapsto (1 - z^{-1})$.





```
% Inverse Kinematic: planar 2R arm
mdl_planar2

%desired position
xd=[0.366; 1.366]

%joint angle initial guess
q0=[0;30]*pi/180

qk=q0;
Q=[qk];

for i=1:20
    %Forward Kinematic
    %Tk=p2.fkine(qk);    xk=Tk(1:2,4)
    xk=[a1*cos(qk(1))+a2*cos(qk(1)+qk(2)); a1*sin(qk(1))+a2*sin(qk(1)+qk(2))];

    %Jacobian Calculation
    %jk=p2.jacob0(qk);    jk=jk(1:2,1:2)
    jk=[-a1*sin(qk(1))-a2*sin(qk(1)+qk(2)) -a2*sin(qk(1)+qk(2));
        a1*cos(qk(1))+ a2*cos(qk(1)+qk(2)) a2*cos(qk(1)+qk(2))];

    % update law
    qk=qk+0.4*inv(jk)*(xd - xk);
    Q=[Q qk];
end
p2.plot(Q, 'delay', 1, 'trail', '*')
```



Resumo de cinemática inversa

1. **Enfoque Analítico:** força bruta e tedioso (6 DOF: solução de polinômio de ordem 16 - MLS seção 3.4; casos especiais, e.g. punho esférico: solução analítica).
2. **Enfoque Geométrico:** elegante e utiliza a geometria do manipulador, mas não sempre funciona (aplicável a manipuladores com punho esférico).
3. **Enfoque Iterativo:** simples de implementar, mas o tempo de computação depende da configuração. A técnica não funciona bem perto de singularidades.



19/46



Voltar

Fechar



Decomposição em subproblemas

Conhecido como método de **Paden-Kahan**.

Para certos manipuladores, a solução da cinemática inversa pode ser calculada através da solução de uma serie de subproblemas.

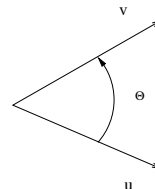
Subproblema 0

Dado \vec{u} e \vec{v} , satisfazendo $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, e o vetor unitário \vec{w} perpendicular a \vec{u} e \vec{v} .

Calcule θ tal que

$$\exp(\theta \vec{w} \times) \vec{u} = \vec{v}$$

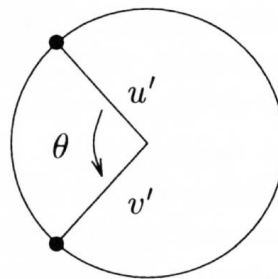
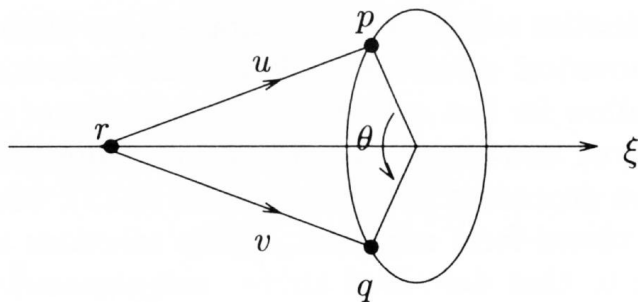
Sempre existe uma solução única.



Subproblema 1

Dado \vec{u} e \vec{v} , satisfazendo $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, e o vetor unitário \vec{w} tal que

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$



Calcule θ tal que

$$\exp(\theta \vec{w} \times) \vec{u} = \vec{v}$$

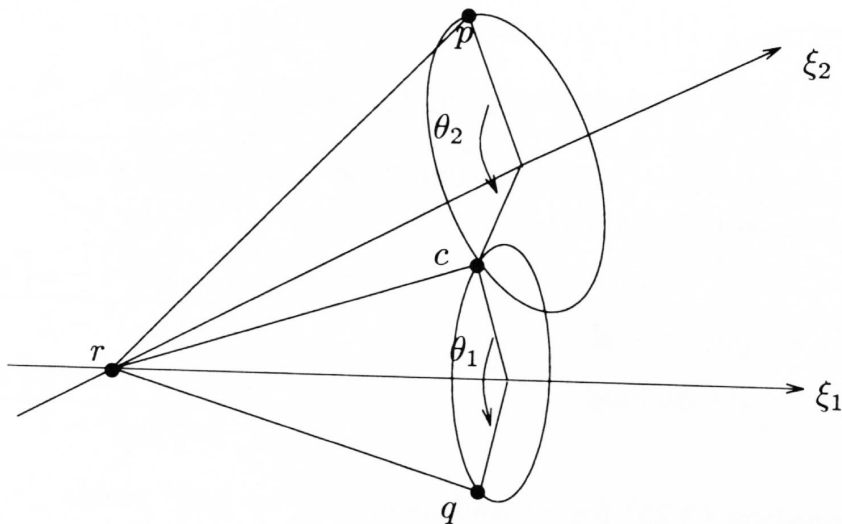
Sempre existe uma solução única.

Observação: no caso de \vec{u} e \vec{v} serem colineares, existem infinitas soluções.



Subproblema 2

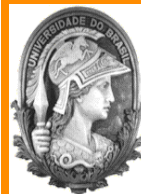
Dado \vec{u} e \vec{v} , satisfazendo $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, e os vetores unitários \vec{w}_1 e \vec{w}_2 .



Calcule θ_1 e θ_2 tal que

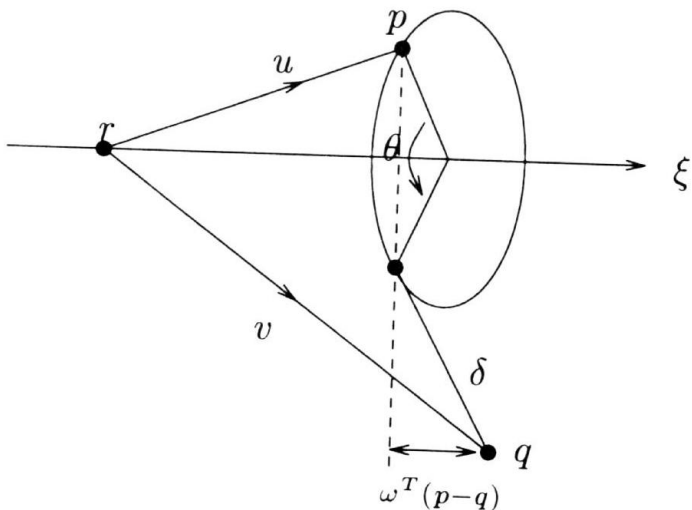
$$\exp(\theta_1 \vec{w}_1 \times) \exp(\theta_2 \vec{w}_2 \times) \vec{u} = \vec{v}$$

Pode ter 0, 1 ou 2 soluções.



Subproblema 3

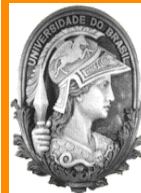
Dado \vec{u} e \vec{v} , o vetor unitário \vec{w} , e a constante positiva δ .



Calcule θ tal que

$$\|\vec{v} - \exp(\theta \vec{w} \times) \vec{u}\| = \delta$$

Pode ter 0, 1 ou 2 soluções.



23/46



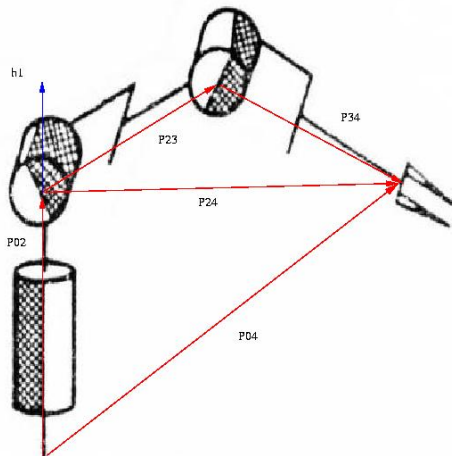
Voltar

Fechar

Exemplos de cálculos da cinemática inversa

Manipulador Elbow

Considere somente a posição do efetuador de um manipulador Elbow (3DOF).



Cinemática Inversa: dado p_{04} calcular $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Escolhendo $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ como os eixos de rotação tem-se que

$$R_{01} = e^{\theta_1 \hat{h}_1}, \quad R_{12} = e^{\theta_2 \hat{h}_2}, \quad R_{23} = e^{\theta_3 \hat{h}_3}$$



Notando que

$$(\vec{p}_{24})_0 = (\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{02})_0$$

Por outro lado tem-se

$$(\vec{p}_{24})_0 = (\vec{p}_{23})_0 + (\vec{p}_{34})_0 = R_{01}R_{12} [(\vec{p}_{23})_2 + R_{23} (\vec{p}_{34})_3]$$

Comparando as duas equações anteriores tem-se

$$(\vec{p}_{24})_0 = (\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{02})_0 = R_{01}R_{12} [(\vec{p}_{23})_2 + R_{23} (\vec{p}_{34})_3]$$

Calculando a norma de ambos lados,

$$\|(\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{02})_0\| = \|R_{01}R_{12}[(\vec{p}_{23})_2 + R_{23} (\vec{p}_{34})_3]\| = \|(\vec{p}_{23})_2 + R_{23} (\vec{p}_{34})_3\|$$

Deixando em evidência θ_3 tem-se então

$$\|(\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{02})_0\| = \|(\vec{p}_{23})_2 + R_{23}(\theta_3) (\vec{p}_{34})_3\|$$

Sendo que $\|(\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{02})_0\|$, $(\vec{p}_{23})_2$, $(\vec{p}_{34})_3$ são conhecidos, pode-se utilizar o **Subproblema 3** para calcular θ_3 (0,1 ou 2 soluções).



Uma vez calculado θ_3 tem-se

$$\underbrace{(\vec{p}_{23})_0 + (\vec{p}_{34})_0}_{\text{conhecido}} = R_{01}(\theta_1) R_{12}(\theta_2) \underbrace{[(\vec{p}_{23})_2 + R_{23} (\vec{p}_{34})_3]}_{\text{conhecido}}$$

$\{\theta_1, \theta_2\}$ podem ser calculados pelo **Subproblema 2** (0,1 ou 2 soluções).

```
% Elbow arm example
```

```
%
```

```
% parameters
```

```
l0=1; l1=1; l2=1;
```

```
%
```

```
h1=[0;0;1]; h2=[1;0;0]; h3=h2;
```

```
h4=[0;0;1];
```

```
H=[h1 h2 h3 h4];
```

```
p01=zeros(3,1); p12=[0;0;l0]; p23=[0;l1;0]; p34=[0;l2;0];
```

```
P=[p01 p12 p23 p34];
```

```
type=[0 0 0 0]; % 3R robot
```

```
n=4;
```

```
disp('Forward Kinematic: Elbow arm');
```

```
theta=input(['enter theta vector (',num2str(n),'x1): ']);
```

```
[R04,p04] = fwdkin(theta, type, H, P, n)
```

```
showarm(theta, type, H, P, n, 1, 0.3, 3);
```



26/46



Voltar

Fechar

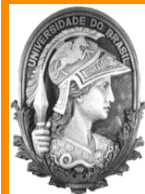
```
disp('Inverse Kinematic ...')
disp('Elbow arm (3R)..')
disp('3DOF Task, only p04 is given')
```

```
p24 = p04 - p01 - p12;
```

```
% solve for theta3
% norm(v - exp(w x theta) u) = d
% input: w, u, v as R^3 column vectors, delta: scalar
% output: theta (2x1 vector, 2 solutions)
v = p23;
d = norm(p24);
w = h3; u = -p34;
theta3 = subproblem3(w, u, v, d);
```

```
% solve for theta2
% exp(w1 x theta1) * exp(w2 x theta2) u = v
% input: w1, w2, u,v as R^3 column vectors
% output: theta1 and theta2 as 2x1 columns corresponding to 2 solutions
w1 = h1; w2 = h2;
v = p24;
u = p23 + expm(chat(h3)*theta3(1)) * p34;
[theta1a,theta2a] = subproblem2(w1, w2, u, v);

u = p23 + expm(chat(h3)*theta3(2)) * p34;
[theta1b,theta2b] = subproblem2(w1, w2, u, v);
```



27/46



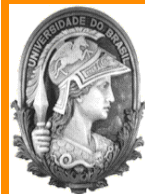
Voltar

Fechar

```
thetasol = zeros(3,4);  
thetasol(1:3,1) = [theta1a(1) theta2a(1) theta3(1)]';  
thetasol(1:3,2) = [theta1a(2) theta2a(2) theta3(1)]';  
thetasol(1:3,3) = [theta1b(1) theta2b(1) theta3(2)]';  
thetasol(1:3,4) = [theta1b(2) theta2b(2) theta3(2)]';
```

```
disp('theta Solutions:');  
disp(thetasol);
```

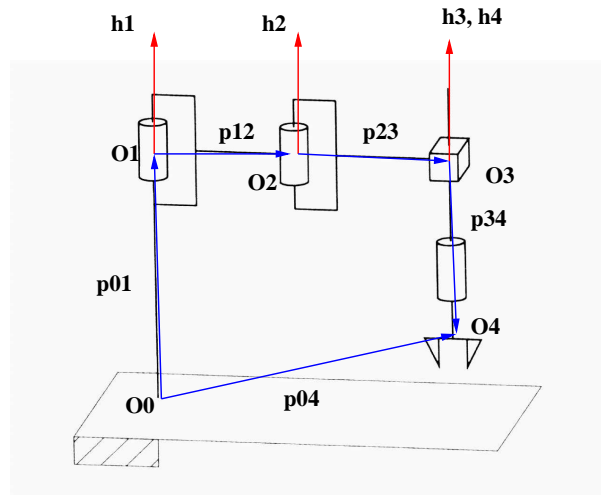
```
% plot the configurations  
for i=1:4  
    theta=[thetasol(:,i); 0];  
    [R,p] = fwdkin(theta, type, H, P, n);  
    showarm(theta, type, H, P, n, 2, 0.3, 3);  
end
```



Manipulador SCARA



29/46



Dados p_{04} e R_{04} o problema é determinar $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$.

Tem-se que

$$\vec{h}_1 = \vec{h}_2 = \vec{h}_3 = \vec{h}_4 = \vec{z}$$

Por outro lado,

$$\vec{p}_{04} = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{23} + \vec{p}_{34}$$

Primeiramente, considerando que $\vec{p}_{34} = \vec{p}_{34}(0) - \theta_3 \vec{z}$, tem-se que:

$$(\vec{p}_{04} \cdot \vec{z}) \vec{z} = \vec{p}_{01} - \vec{p}_{34}(0) + \theta_3 \vec{z} \implies \theta_3 = (\vec{p}_{04} \cdot \vec{z}) - \|\vec{p}_{01}\| + \|\vec{p}_{34}(0)\|$$

Por outro lado, \vec{p}_{04} no sistema de coordenadas 0 é dado por:

$$(\vec{p}_{04})_0 = (\vec{p}_{01})_0 + R_{01}(\vec{p}_{12})_1 + R_{01}R_{12}(\vec{p}_{23})_2 + R_{01}R_{12}R_{23}(\vec{p}_{34})_3$$

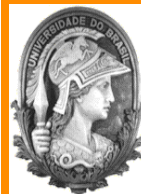
Desta última equação e dado que $R_{23} = I$ podemos escrever:

$$\underbrace{(\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{01})_0}_{\text{conhecido}} = R_{01} \left[\underbrace{(\vec{p}_{12})_1}_{\text{conhecido}} + R_{12} \underbrace{((\vec{p}_{23})_2 + (\vec{p}_{34})_3)}_{\text{conhecido}} \right]$$

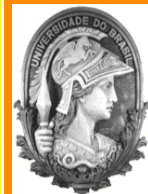
Então considerando a norma desta equação e $\|R_{01}\| = 1$:

$$\|(\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{01})_0\| = \|(\vec{p}_{12})_1 + R_{12}(\theta_2) ((\vec{p}_{23})_2 + (\vec{p}_{34})_3)\|$$

O **subproblema 3** fornece 2 soluções para θ_2 .



Agora tem-se



31/46

$$\underbrace{(\vec{p}_{04})_0 - (\vec{p}_{01})_0}_{\text{conhecido}} = R_{01}(\theta_1) \left[\underbrace{(\vec{p}_{12})_1 + R_{12} ((\vec{p}_{23})_2 + (\vec{p}_{34})_3)}_{\text{conhecido}} \right]$$

O **subproblema 1** fornece 1 solução para θ_1 .

O ângulo θ_4 pode ser determinado de:

$$R_{04} = R_{01}(\theta_1) R_{12}(\theta_2) R_{34}(\theta_4) \implies R_{34}(\theta_4) = R_{12}^T(\theta_2) R_{01}^T(\theta_1) R_{04}$$

dado que R_{34} é uma rotação elementar ao redor de z .

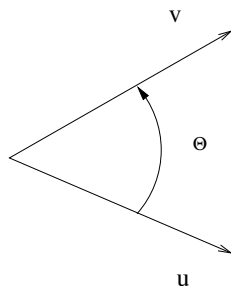


Voltar

Fechar

Subproblema 0: Prova

Sabe-se que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$.



Pode-se calcular

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

Alternativamente tem-se

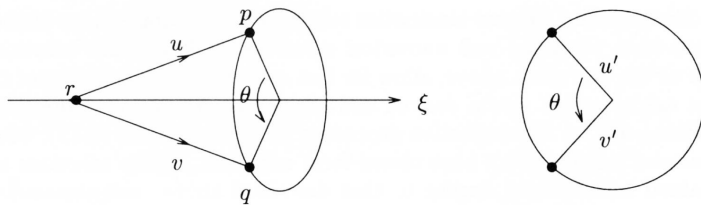
$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{\|\vec{u} - \vec{v}\| / 2}{\|\vec{u} + \vec{v}\| / 2} \right) = 2 \arctan \left(\frac{\|\vec{u} - \vec{v}\|}{\|\vec{u} + \vec{v}\|} \right)$$

Se $\vec{\omega}$ tem a mesma direção que $\vec{u} \times \vec{v}$ então θ é positivo senão troca de sinal, i.e., $\vec{\omega} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) < 0 \implies \theta = -\theta$.



Subproblema 1: Prova

Girando \vec{u} com respeito a \vec{w} forma um cone



Tem-se:

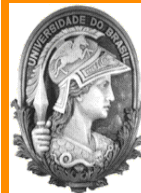
$$\vec{u}' = \vec{u} - (\vec{\omega} \cdot \vec{u}) \vec{\omega}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega}$$

Aplicando o subproblema 0 e considerando que $\vec{\omega} \cdot \vec{u} = \vec{\omega} \cdot \vec{v}$ tem-se:

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{\|\vec{u}' - \vec{v}'\|}{\|\vec{u}' + \vec{v}'\|} \right) = 2 \arctan \left(\frac{\|\vec{u} - \vec{v}\|}{\|\vec{u} + \vec{v} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{u}) \vec{\omega}\|} \right)$$

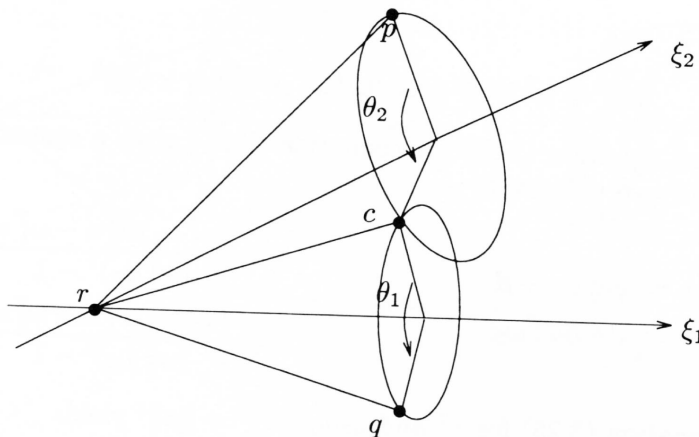
Se $\vec{\omega}$ tem a mesma direção que $\vec{u}' \times \vec{v}'$ então θ é positivo, senão troca de sinal, i.e., $\vec{\omega} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) < 0 \implies \theta = -\theta$.



Subproblema 2: Prova

Se $\vec{\omega}_1$ for colinear com $\vec{\omega}_2$ recai-se no [subproblema 1](#).

Suponha que $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ não são colineares.

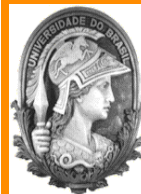


Os 2 cones gerados podem ter 0, 1 ou 2 interseções.

Se \vec{z} é o vetor dado pela interseção tem-se

$$\vec{z} = \exp(-\theta_1 \vec{\omega}_1 \times) \vec{v} = \exp(\theta_2 \vec{\omega}_2 \times) \vec{u}$$

Conhecendo \vec{z} recai-se no [subproblema 1](#).



O vetor \vec{z} pode ser representado na base $\{\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2\}$, então:

$$\vec{z} = \alpha \vec{\omega}_1 + \beta \vec{\omega}_2 + \gamma (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

Calculando a projeção de \vec{z} em $\vec{\omega}_i$ tem-se:

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{z} = \alpha + \beta (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{v}$$

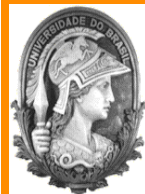
$$\vec{\omega}_2 \cdot \vec{z} = \alpha (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) + \beta = \vec{\omega}_2 \cdot \vec{u}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) \\ (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{\omega}_2 \cdot \vec{u} \end{bmatrix}$$

Dado que $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ não são colineares este sistema tem solução dada por:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) \\ -(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) & 1 \end{bmatrix}}{1 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)^2} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{\omega}_2 \cdot \vec{u} \end{bmatrix}$$



Para ter a expressão de \vec{z} falta calcular a componente γ .

Ela pode ser calculada da norma de \vec{z} :

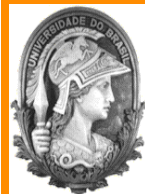
$$\|z\|^2 = \vec{z} \cdot \vec{z} = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) + \gamma^2 \|\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2\|^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Tendo-se então

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{\|\vec{u}\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)}{\|\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2\|^2}}$$

Desta forma existem as seguintes situações:

1. γ complexo $\Rightarrow \nexists$ solução;
2. $\gamma = 0 \Rightarrow \exists$ 1 solução e;
3. $\gamma \in \mathbb{R} \neq 0 \Rightarrow \exists$ 2 soluções.



Uma vez calculadas (α, β, γ) podemos calcular \vec{z} :

$$\vec{z} = \alpha \vec{\omega}_1 + \beta \vec{\omega}_2 + \gamma (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

e pelo **subproblema 1** resolver

$$\vec{z} = \exp(-\theta_1 \vec{\omega}_1 \times) \vec{v} = \exp(\theta_2 \vec{\omega}_2 \times) \vec{u}$$

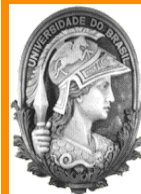
obtendo

$$\theta_2 = 2 \arctan \left(\frac{\|\vec{u} - \vec{z}\|}{\|\vec{u} + \vec{z} - 2(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{u}) \vec{\omega}_2\|} \right)$$

Se $\vec{\omega}_2$ tem a mesma direção que $\vec{u} \times \vec{z}$ então θ_2 é positivo senão troca de sinal, i.e., $\vec{\omega}_2 \cdot (\vec{u} \times \vec{z}) < 0 \implies \theta_2 = -\theta_2$.

$$\theta_1 = -2 \arctan \left(\frac{\|\vec{v} - \vec{z}\|}{\|\vec{v} + \vec{z} - 2(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{v}) \vec{\omega}_1\|} \right)$$

Se $\vec{\omega}_1$ tem a mesma direção que $\vec{v} \times \vec{z}$ então θ_1 é positivo senão troca de sinal, i.e., $\vec{\omega}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{z}) < 0 \implies \theta_1 = -\theta_1$.



Resumindo, pelo **subproblema 1** podem ser resolvidos θ_1 e θ_2 :

$$\theta_2 = 2 \arctan \left(\frac{\|\vec{u} - \vec{z}\|}{\|\vec{u} + \vec{z} - 2(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{u}) \vec{\omega}_2\|} \right)$$
$$\theta_1 = -2 \arctan \left(\frac{\|\vec{v} - \vec{z}\|}{\|\vec{v} + \vec{z} - 2(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{v}) \vec{\omega}_1\|} \right)$$

onde

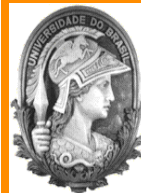
$$\vec{z} = \alpha \vec{\omega}_1 + \beta \vec{\omega}_2 + \gamma (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

com

$$\alpha = \frac{\vec{\omega}_1 \cdot \vec{v} - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{u})}{1 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)^2}$$
$$\beta = \frac{\vec{\omega}_2 \cdot \vec{u} - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{v})}{1 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)^2}$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{\|\vec{u}\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)}{\|\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2\|^2}}$$

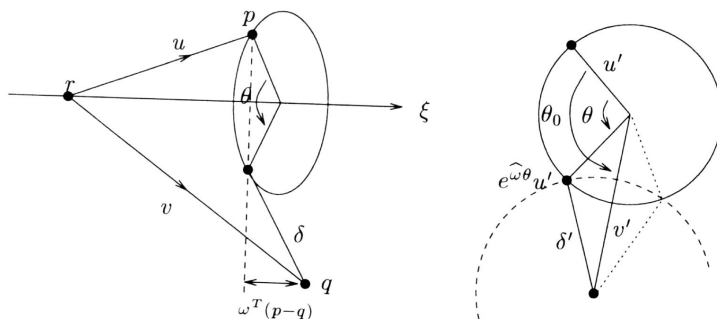
$$\text{Se } \vec{\omega}_2 \cdot (\vec{u} \times \vec{z}) < 0 \quad \implies \quad \theta_2 = -\theta_2.$$

$$\text{Se } \vec{\omega}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{z}) < 0 \quad \implies \quad \theta_1 = -\theta_1.$$



Subproblema 3: Prova

Tem-se que $\delta = \|\vec{v} - \exp(\theta \vec{\omega} \times) \vec{u}\|$.



Do cone gerado pela rotação de \vec{u} , tem-se

$$\vec{u}' = \vec{u} - (\vec{\omega} \cdot \vec{u}) \vec{\omega}$$

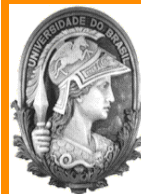
$$\vec{v}' = \vec{v} - (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega}$$

Por outro lado

$$\delta'^2 = \delta^2 - ((\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{\omega})^2$$

se $\delta^2 - ((\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{\omega})^2 < 0$ não existe solução.

se $\delta^2 - ((\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{\omega})^2 = 0$ recai no subproblema 1.



Então pela lei do cosseno, pode-se calcular o ângulo ϕ entre $\exp(\hat{\omega}\theta)\vec{u}'$ e \vec{v}' :

$$\delta'^2 = \|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - 2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\| \cos(\phi)$$

que implica

$$\phi = \pm \arccos \left(\frac{\|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \delta'^2}{2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\|} \right)$$

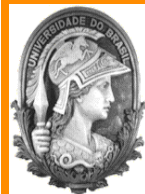
se $\left| \|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \delta'^2 \right| > 2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\|$ não existe solução.

Desta forma

$$\theta = \theta_0 - \phi$$

onde θ_0 (ângulo entre os vetores \vec{u}' e \vec{v}') pode ser calculado de \vec{u}' e \vec{v}' como (Livro Murray, Li e Sastry, pag 103)

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{\vec{\omega} \cdot (\vec{u}' \times \vec{v}')}{\vec{u}' \cdot \vec{v}'} \right)$$



Alternativamente, θ_0 pode ser calculado utilizando o **subproblema 0** para os vetores unitários $\vec{u}' / \|\vec{u}'\|$ e $\vec{v}' / \|\vec{v}'\|$, i.e.,

$$\theta_0 = 2 \arctan \left(\frac{\vec{u}' / \|\vec{u}'\| - \vec{v}' / \|\vec{v}'\|}{\vec{u}' / \|\vec{u}'\| + \vec{v}' / \|\vec{v}'\|} \right)$$

Se $\vec{\omega}$ tem a mesma direção que $\vec{u}' \times \vec{v}'$ então θ_0 é positivo senão troca de sinal, i.e., $\vec{\omega} \cdot (\vec{u}' \times \vec{v}') < 0 \implies \theta_0 = -\theta_0$.

Desta forma

$$\theta = \theta_0 - \phi; \quad \phi = \pm \arccos \left(\frac{\|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \delta'^2}{2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\|} \right)$$

onde existem as seguintes situações:

1. se $\delta'^2 - ((\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{\omega})^2 < 0 \implies \nexists$ solução;
2. se $\left| \|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \delta'^2 \right| > 2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\| \implies \nexists$ solução;
3. se $\left| \|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \delta'^2 \right| = 2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\| \implies \exists$ 1 solução e;



4. se $\left| \|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \delta'^2 \right| < 2 \|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\| \Rightarrow \exists 2 \text{ soluções.}$



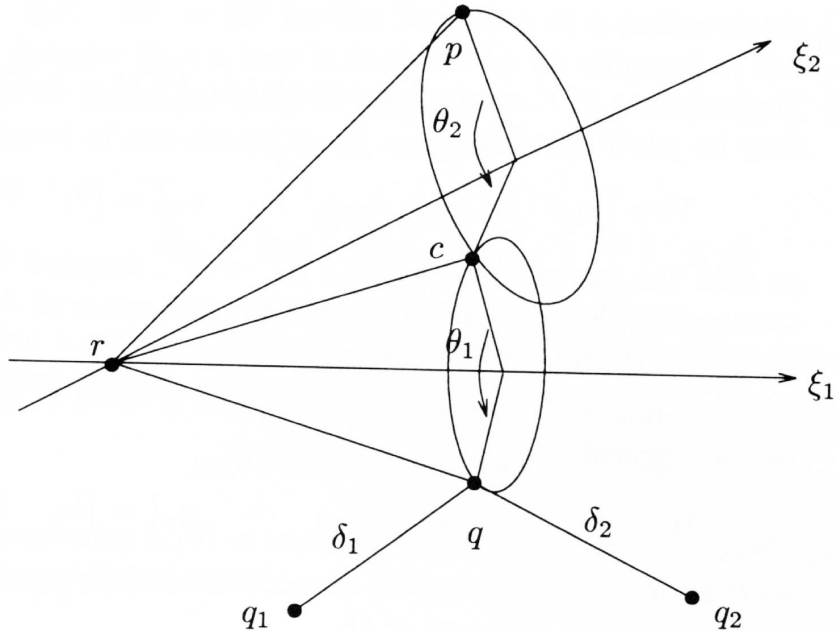
42/46



Voltar

Fechar

Exercício: Subproblema 4 (Exercício 4, Cap. 3, Livro Murray, Li e Sastry, pag. 149).



43/46

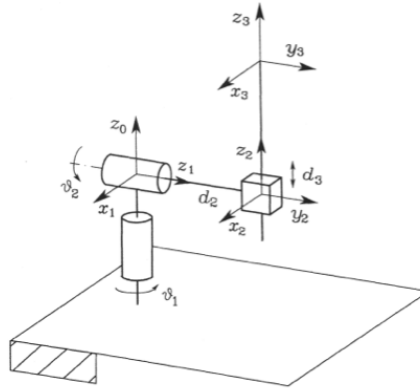


Voltar

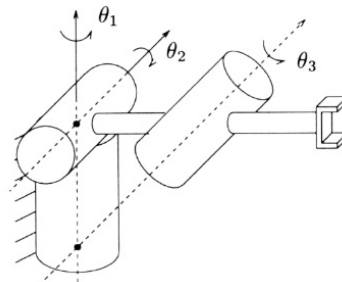
Fechar

Exercícios: Calcular a cinemática inversa dos seguintes manipuladores:

1. Manipulador Esférico



2. Manipulador 3R: considere que o ângulo entre o eixo da junta 3 e a horizontal é de 45° .



```
% Lista 2 Exercício 2.ii  
disp('Cinemática direta')
```

```
% Parametros do Manipulador
```

```
l1=1;    l2=1;    l3=1;
```

```
phi=pi/4
```

```
%
```

```
x=[1;0;0]; y=[0;1;0]; z=[0;0;1];
```

```
h1=z;    h2=-y;    h3=sin(phi)*x+cos(phi)*z
```

```
n=3;
```

```
theta = input(['enter theta vector (',num2str(n),'x1) e.g. [0 0 pi/2]: ']);
```

```
% Cinematica Direta: calculada sem usar [R,p] = fwdkin(theta, type, H, P, n);
```

```
R01 = expm(crossmat(h1) * theta(1));
```

```
R12 = expm(crossmat(h2) * theta(2));
```

```
R23 = expm(crossmat(h3) * theta(3));
```

```
R03 = R01*R12*R23;
```

```
p01 = l1*z;
```

```
p12 = 0;
```

```
p23 = R01*R12 * (l2*x);
```

```
p34 = R01*R12*R23 * (l3*x);
```

```
p04 = p01 + p12 + p23 + p34;
```

```
T04=[R03 p04; 0 0 0 1]
```





46/46

```
disp('Cinemática Inversa ...')  
disp('Dado que o Manipulador tem 3 juntas..')  
disp('somente 3DOF poderão ser determinados, e.g. p04')
```

```
disp('Calculo do teta3 pelo subproblema 3 (duas soluções) ...')
```

```
% norm(v - exp(w x theta) u) = d  
% input: w,u,v as R^3 column vectors, delta: scalar  
% output: theta (2x1 vector, 2 solutions)  
v = l2*x;  
d = norm(p04 - l1*z);  
w = h3;                u = -l3*x;
```

```
theta3 = subproblem3(w, u, v, d)
```

```
disp('Calculo do teta1 e teta2 pelo subproblema 2 (duas soluções) ...')  
% exp(w1 x theta1) * exp(w2 x theta2) u = v  
% input: w1, w2, u, v as R^3 column vectors  
% output: theta1 and theta2 as 2x1 columns corresponding to 2 solutions  
w1 = h1;                w2 = h2;  
v = p04 - l1*z;  
u = l2*x + expm(chat(h3)*theta3(2)) * (l3*x);
```

```
[theta1,theta2] = subproblem2(w1, w2, u, v)
```

```
theta = [theta1(1) theta2(1) theta3(2)]
```



Voltar

Fechar