Introdução à Robótica

http://www.coep.ufrj.br/gscar

Propriedade $\dot{\theta}^T(\dot{M} - 2C)\dot{\theta}$

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 11 de agosto de 2018

O Modelo dinâmico de um manipulador rígido de n juntas é dado por:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + \underbrace{\dot{M}(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_1(\theta)\dot{\theta} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_n(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}}_{C(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta}} + G(\theta) = \tau$$

Podendo escrever a equação dinâmica do manipulador em forma compacta como:

$$\boxed{M(\theta)\ \ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) = \tau}$$

onde

- ângulo da juntas: $\theta \in \mathbb{R}^n$
- torque: $\tau \in \mathbb{R}^n$
- matriz de inércia do Manipulador: $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- matriz das forças centrípetas/Coriolis: $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- vetor de gravidade: $G \in \mathbb{R}^n$

Propriedades do Modelo Dinâmico

1. $M(\theta) = M^T(\theta) > 0$, i.e. $x^T M(\theta) x > 0$ Positiva Definida
2. Para $\dot{M} - 2C = N(\theta, \dot{\theta})$ tem-se

$$\dot{\theta}^T \; N(\theta, \dot{\theta}) \; \dot{\theta} = 0$$

Para uma escolha particular de $C(\theta, \dot{\theta})$ tem-se que $x^T N(\theta, \dot{\theta}) x = 0$ para todo x, i.e., $N = -N^T$.

Esta propriedade é útil no projeto de controladores via teoria de Lyapunov, principalmente porque ela implica na passividade do sistema de $\tau \mapsto \dot{\theta}$.

Prova da propriedade $\dot\theta^T\ (\dot M(\theta,\dot\theta) - 2C(\theta,\dot\theta))\ \dot\theta = 0$

Considerando que:

$$\dot M(\theta,\dot\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M}{\partial \theta_i}\ \dot\theta_i = \sum_{i=1}^{n} M_i(\theta)\ \dot\theta_i$$

que implica que

$$\dot M(\theta,\dot\theta)\ z = \sum_{i=1}^{n} \dot\theta_i\ M_i(\theta)\ z = \overbrace{[M_1 z \cdots M_n z]}^{M_D(\theta,z)}\ \dot\theta = M_D(\theta,z)\ \dot\theta$$

Pela definição de $C(\theta,\dot\theta)\dot\theta$ e M_D tem-se que:

$$C(\theta,\dot\theta)\ \dot\theta = \dot M(\theta,\dot\theta)\ \dot\theta - \frac{1}{2}\ M_D^T(\theta,\dot\theta)\ \dot\theta$$

conseqüentemente como $\dot M(\theta,\dot\theta)\ z = M_D(\theta,z)\ \dot\theta$ tem-se

$$C(\theta,\dot\theta)\ \dot\theta = M_D(\theta,\dot\theta)\ \dot\theta - \frac{1}{2}\ M_D^T(\theta,\dot\theta)\ \dot\theta = \underbrace{[M_D(\theta,\dot\theta) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta,\dot\theta)]}_{C(\theta,\dot\theta)}\ \dot\theta$$

Por tanto tem-se que

$$C(\theta,\dot{\theta}) = M_D(\theta,\dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta,\dot{\theta})$$

Está escolha de $C(\theta,\dot{\theta})$ não é única (vide Símbolos de Chrisroffels no Livro do Sciavicco e Siciliano).

Então pode-se considerar o termo $\dot{\theta}^T\ (\dot{M}(\theta,\dot{\theta}) - 2C(\theta,\dot{\theta}))\ \dot{\theta}$ em função de M_D, isto é:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^T\ (\dot{M}(\theta,\dot{\theta}) - 2C(\theta,\dot{\theta}))\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}^T \left[M_D(\theta,\dot{\theta}) - 2\left(M_D(\theta,\dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta,\dot{\theta})\right)\right]\dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}^T\ \left[M_D - 2\ M_D + M_D^T\right]\ \dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}^T\ \left[M_D^T - M_D\right]\ \dot{\theta}
\end{aligned}$$

Dado que a matriz $S = M_D^T - M_D$ é antisimetrica, i.e. $S^T = -S$, e portanto $x^TSx = 0$, tem-se que

$$\dot{\theta}^T\ (\dot{M}(\theta,\dot{\theta}) - 2C(\theta,\dot{\theta}))\ \dot{\theta} = 0$$