Introdução à Robótica

http://www.coep.ufrj.br/gscar

Cinemática Diferencial

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 3 de agosto de 2018

Cinemática Diferencial

Como observamos na solução da cinemática inversa utilizando um método iterativo, o Jacobiano da cinemática direta de um manipulador torna possível a linearização do problema.

O Jacobiano do manipulador estabelece a relação entre as velocidades das juntas $\dot{\theta}$ e a velocidade linear e angular do efetuador.

O Jacobiano do manipulador é uma das relações mais importantes para a análise e controle do movimento de um robô manipulador:

- Planejamento e execução de trajetórias suaves
- Determinação de singularidades
- Cálculo das equações dinâmicas de movimento
- Transformação de forças e torques do efetuador para as juntas

Jacobiano Geométrico

Considere a transformação homogênea que representa a configuração do efetuador com relação à base do manipulador:

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} R(\theta) & p(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então a idéia é relacionar a velocidade das juntas com a velocidade linear e angular do efetuador:

$$\dot{\theta} \longrightarrow \begin{array}{l} \dot{p} \text{ velocidade linear do efetuador} \\ \omega \text{ velocidade angular do efetuador} \end{array}$$

Este mapeamento é descrito pelo Jacobiano geométrico do manipulador:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= J_p(\theta)\,\dot{\theta} \\ \omega &= J_o(\theta)\,\dot{\theta} \end{aligned}$$

onde $J_p \in \mathbb{R}^{3\times n}$ é o jacobiano de posição e $J_o \in \mathbb{R}^{3\times n}$ é o jacobiano de orientação.

Desta forma temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(\theta)\ \dot{\theta}$$

onde

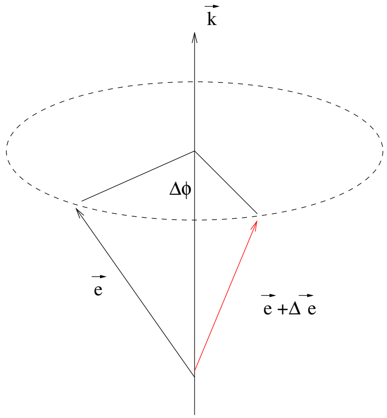
$$J(\theta) = \begin{bmatrix} J_p(\theta) \\ J_o(\theta) \end{bmatrix}$$

Para um melhor entendimento da cinemática diferencial é necessário o estudo do conceito de velocidade linear e angular de um corpo rígido.

Velocidade de um Corpo Rígido

Diferenciação de um vetor

Considere a rotação do vetor $\vec{e}$ ao redor do vetor $\vec{k}$ fixo no sistema de coordenadas $\bar{E}_a$.



Então tem-se (c.f. figura):

$$\vec{e} + \Delta\vec{e} = e^{\Delta\phi\ \vec{k}\times}\ \vec{e}$$

Voltar
Fechar

Pela fórmula de Rodrigues

$$\vec{e} + \Delta\vec{e} = \left[\mathcal{I} + \sin(\Delta\phi)\ \vec{k}\times + (1-\cos(\Delta\phi))\ \vec{k}\times\vec{k}\times\right]\vec{e}$$

Considerando $\Delta\phi \to 0$ então $\sin(\Delta\phi) \approx \Delta\phi$ e $\cos(\Delta\phi) \approx 1$, tendo

$$\vec{e} + \Delta\vec{e} = \vec{e} + \Delta\phi\ (\vec{k}\times\vec{e})$$

Conseqüentemente

$$\Delta\vec{e} = \Delta\phi\ (\vec{k}\times\vec{e}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta\vec{e}}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\ (\vec{k}\times\vec{e})$$

Para $\Delta t \to 0$, tem-se

$$\frac{d\vec{e}}{dt^a} = \dot{\phi}\ \vec{k}\times\vec{e}$$

Definindo $\qquad \vec{\omega}_a = \dot{\phi}\ \vec{k}$

a velocidade angular do vetor $\vec{e}$ no sistema de coordenadas $\bar{E}_a$:

$$\frac{d\vec{e}}{dt^a} = \vec{\omega}_a \times \vec{e}$$

Diferenciação de um Sistema de Coordenadas

Considere os sistemas de coordenadas $\bar{E}_a = [\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a]$ e $\bar{E}_b = [\vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b]$. A derivada de $\bar{E}_b$ considerando $\bar{E}_a$ fixo, é dada por:

$$\frac{d\bar{E}_b}{dt^a} = \vec{\omega}_{ab} \times \bar{E}_b$$

Derivada da Matriz de Rotação

Considere a matriz de rotação $R_{ab} = \bar{E}_a^* \bar{E}_b$. Derivando com respeito ao tempo tem-se:

$$\frac{dR_{ab}}{dt} = \underbrace{\frac{d\bar{E}_a^*}{dt^a}}_{0} \bar{E}_b + \bar{E}_a^* \frac{d\bar{E}_b}{dt^a} = \bar{E}_a^* \left(\vec{\omega}_{ab} \times \bar{E}_b\right) = \underbrace{\bar{E}_a^* \vec{\omega}_{ab}}_{(\vec{\omega}_{ab})_a} \times \bar{E}_a^* \bar{E}_b$$

Portanto

$$\dot{R}_{ab} = (\vec{\omega}_{ab})_a \times R_{ab}$$

ou simplesmente

$$\dot{R} = \omega \times R = \hat{\omega} R$$

Note que $\vec{\omega}_{ab} = -\vec{\omega}_{ba}$.

Na literatura aeroespacial: $\dot{R}_{ba} = (\vec{\omega}_{ba})_b \times R_{ba} = -(\vec{\omega}_{ab})_b \times R_{ba}$ ou simplesmente $\dot{R} = -\hat{\omega} R$.

Exemplo: Considere uma rotação elementar ao redor do eixo z, i.e., $R_z(\alpha)$. Se o ângulo α for função do tempo, calculando a derivada no tempo de $R_z(\alpha(t)$ pode-se determinar $\hat{\omega} = \dot{R}R^T$:

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin(\alpha) & -\dot{\alpha}\cos(\alpha) & 0 \\ \dot{\alpha}\cos(\alpha) & -\dot{\alpha}\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Que de fato exprime a velocidade angular do sistema de coordenadas ao redor do eixo z.

Representação Exponencial: cálculo de $\dot{R}$

Considere a representação exponencial da orientação

$$R_{ab} = e^{\theta k \times} = e^{\theta \hat{k}}$$

Suponha que k é fixo em $\bar{E}_a$.
Então, diferenciando R_{ab} tem-se

$$\dot{R}_{ab} = \dot{\theta}\hat{k}\ e^{\theta \hat{k}} = \widehat{\dot{\theta}k}\ R_{ab}$$

Então define-se

$$(\vec{\omega}_{ab})_a = \dot{\theta} k$$

e desta forma tem-se,

$$\dot{R}_{ab} = \widehat{(\vec{\omega}_{ab})_a}\ R_{ab}$$

onde $(\vec{\omega}_{ab})_a =$ velocidade angular do sistema de coordenadas $\bar{E}_b$ com respeito a $\bar{E}_a$, representada em $\bar{E}_a$.

Diferenciação de vetores

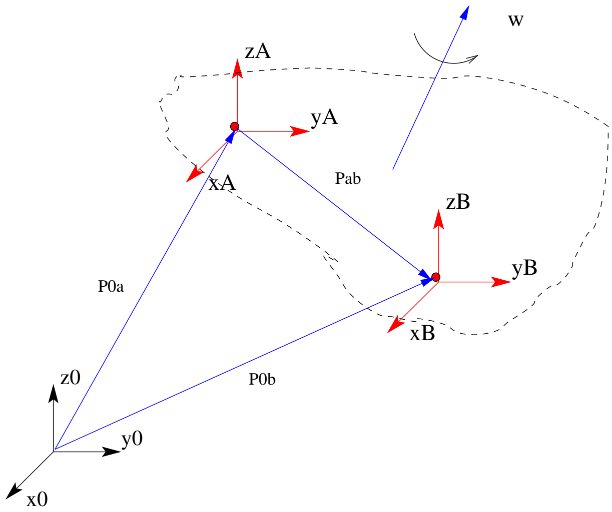
Considere a representação de um vetor $\vec{v}(t)$ nos sistemas de coordenadas $\bar{E}_a$ e $\bar{E}_b$, relacionados através de $v_a(t) = R_{ab}(t)\ v_b(t)$. Então

$$\begin{aligned} \dot{v}_a &= \frac{dR_{ab}v_b}{dt} \\ &= \dot{R}_{ab}\ v_b + R_{ab}\ \dot{v}_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_a &= (\vec{\omega}_{ab})_a \times R_{ab}v_b + R_{ab}\ \dot{v}_b \\ &= (\vec{\omega}_{ab})_a \times v_a + R_{ab}\ \dot{v}_b \end{aligned}$$

Relação de velocidade em diferentes frames

Considere 2 sistemas de coordenadas $\bar{E}_a$ e $\bar{E}_b$ solidários a um mesmo corpo rígido:



Entâo tem-se que

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_b = \vec{\omega};$$

onde $\vec{\omega}_a$ e $\vec{\omega}_b$ são as velocidades angulares relativas ao sistema de coordenadas fixo $\bar{E}_0$.

Por outro lado, a velocidade linear $\vec{v}_b$ é obtida derivando $\vec{p}_{0b} = \vec{p}_{0a} + \vec{p}_{ab}$ no sistema de coordenadas fixo $\bar{E}_0$:

$$\vec{v}_b = \frac{d\vec{p}_{0b}}{dt^0} = \frac{d\vec{p}_{0a}}{dt^0} + \frac{d\vec{p}_{ab}}{dt^0} = \vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \vec{p}_{ab}$$

Nesta situação pode-se definir a velocidade angular e linear do corpo rígido numa forma matricial e livre do sistema de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_b \\ \vec{\omega}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{ab}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_a \\ \vec{\omega}_a \end{bmatrix}$$

$\mathcal{I}$: operador identidade.

Da mesma forma podemos obter a relação acima representada num dado sistema de coordenadas. Considerando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (\vec{p}_{ab})_a &= R_{ab}\ (\vec{p}_{ab})_b \\ (\vec{v}_a)_a &= R_{ab}\ (\vec{v}_a)_b \\ (\vec{\omega}_a)_a &= R_{ab}\ (\vec{\omega}_a)_b \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas pode-se obter

$$\begin{bmatrix} (\vec{v}_b)_b \\ (\vec{\omega}_b)_b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ab}^T & -R_{ab}^T \widehat{(\vec{p}_{ab})_a} \\ 0 & R_{ab}^T \end{bmatrix}}_{\Phi_{ba}=Ad_{T_{ba}}} \begin{bmatrix} (\vec{v}_a)_a \\ (\vec{\omega}_a)_a \end{bmatrix}$$

onde $\Phi_{ab} = Ad_{T_{ab}}$ é chamada a transformação adjunta da transformação homogênea

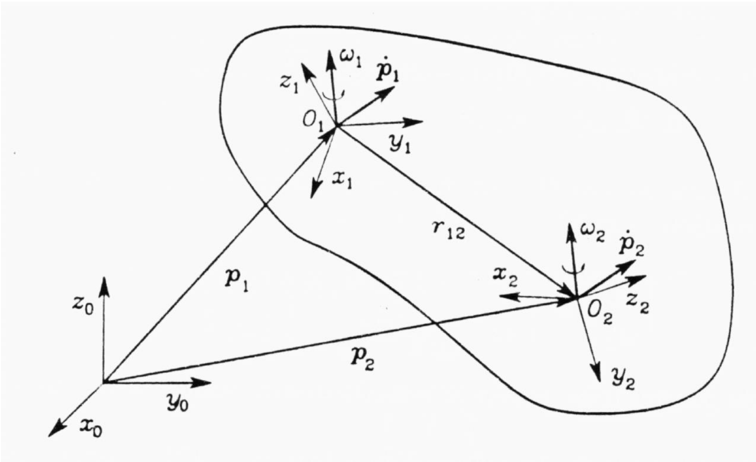
$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & (\vec{p}_{ab})_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação adjunta tem as seguintes propriedades:

- $\Phi_{aa} = I$
- $\Phi_{ba} = \Phi_{ab}^{-1}$
- $\Phi_{ac} = \Phi_{ab}\Phi_{bc}$

Dualidade Força/Velocidade

Considere a velocidade linear e angular de um corpo rígido em diferentes sistemas de coordenadas.



Neste caso, se consideramos a força (f) e torque (τ) aplicado no corpo rígido, representados nos 2 sistemas de coordenadas, a potência é a mesma naqueles 2 pontos.

Desta forma, como a potência é mantida, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{\tau}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{\omega}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_2 \\ \vec{\tau}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{\omega}_2 \end{bmatrix}$$

Então considerando a relação de velocidade entre diferentes sistemas de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{12}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{\omega}_1 \end{bmatrix}$$

a definição de operador adjunto ($F_2 \cdot \Phi V_1 = \Phi^* F_2 \cdot V_1$), e a relação $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, chegasse à seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{\tau}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ \vec{p}_{12}\times & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f}_2 \\ \vec{\tau}_2 \end{bmatrix}$$

A relação de forças/torques no sistema de coordenada 1 e 2 é dada por:

$$\begin{bmatrix} (\vec{f}_1)_1 \\ (\vec{\tau}_1)_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widehat{(\vec{p}_{12})_1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{f}_2)_1 \\ (\vec{\tau}_2)_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{12} & 0 \\ \widehat{(\vec{p}_{12})_1} R_{12} & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{f}_2)_2 \\ (\vec{\tau}_2)_2 \end{bmatrix}$$

Resumo: cinemática dif. de corpo rígido

Diferenciação de um Vetor

Vetor $\vec{k}$ fixo no sistema de coordenadas $\bar{E}_0$.
$\vec{\omega}_0 = \dot{\phi}\vec{k}$ é a velocidade angular do vetor $\vec{e}$ em $\bar{E}_0$:

$$\frac{d\vec{e}}{dt^0} = \vec{\omega}_0 \times \vec{e}$$

Diferenciação de um Sistema de Coordenadas

A derivada de $\bar{E}_a$ com respeito a $\bar{E}_0$ fixo:

$$\frac{d\bar{E}_a}{dt^0} = \vec{\omega}_{0a} \times \bar{E}_a$$

Derivada da Matriz de Rotação

$R_{ab} = \bar{E}_a^* \bar{E}_b$.

$$\dot{R}_{ab} = (\vec{\omega}_{ab})_a \times R_{ab}$$

ou simplesmente

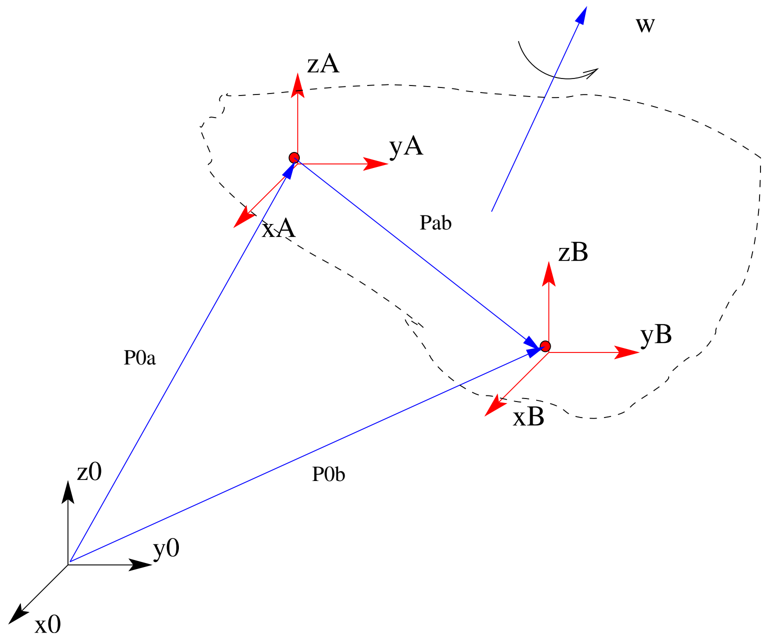
$$\dot{R} = \omega \times R = \hat{\omega} R$$

Diferenciação de vetores

Considere o vetor $v_a = R_{ab} v_b$:

$$\dot{v}_a = (\vec{\omega}_{ab})_a \times v_a + R_{ab} \dot{v}_b$$

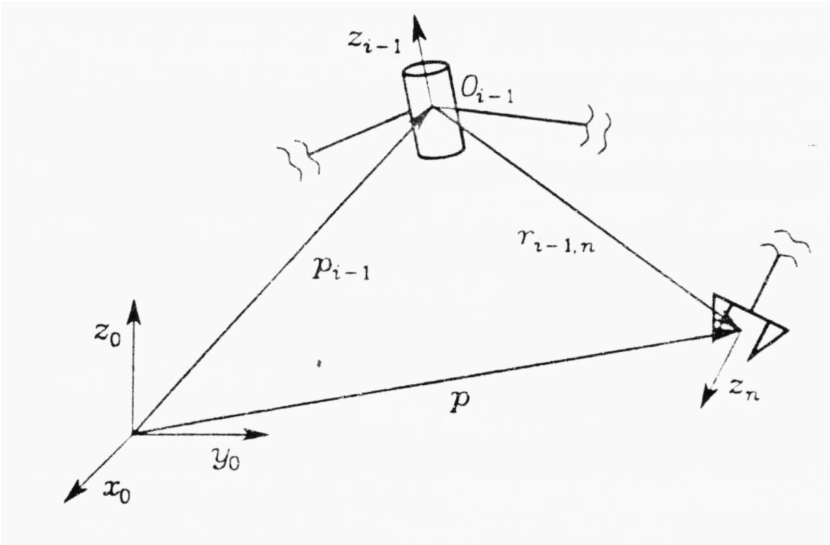
Outras relações



$$\begin{bmatrix} \vec{v}_b \\ \vec{\omega}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{ab}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_a \\ \vec{\omega}_a \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \vec{f}_a \\ \vec{\tau}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ \vec{p}_{ab}\times & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f}_b \\ \vec{\tau}_b \end{bmatrix}$$

Cinemática diferencial do manipulador

No manipulador da figura a junta i é uma junta de revolução. Além disto, considere que as demais juntas estão congeladas, i.e., a única junta que esta movimentando-se é a junta i.



Para ficar independente da convenção de DH (standard ou modificada), o vetor $\vec{h}_i$ fica sendo o eixo de rotação da junta i e $\vec{p}_{in} = \vec{r}_{i-1,n}$.

Por outro lado, os elos i até n definem um corpo rígido.

Neste corpo rígido, a velocidade em $\bar{E}_{i-1}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \vec{v}'_{i-1} \\ \vec{\omega}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{h}_i \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \qquad \text{junta de revolução}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \vec{v}'_{i-1} \\ \vec{\omega}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \qquad \text{junta prismática}$$

A velocidade em $\bar{E}_n$ (solidário ao último elo) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{in}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}'_{i-1} \\ \vec{\omega}_{i-1} \end{bmatrix};$$

Consequentemente, se a junta i for de revolução tem-se:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \times \vec{p}_{in} \\ \vec{h}_i \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \qquad \text{junta de revolução}$$

ou se a junta i for prismática

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \qquad \text{junta prismática}$$

Jacobiano Geométrico

Considerando que o Jacobiano pode ser particionado por:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix} = J_n\, \dot{\theta} = \begin{bmatrix} J_{p1} & \cdots & J_{pn} \\ J_{o1} & \cdots & J_{on} \end{bmatrix} \dot{\theta} = \begin{bmatrix} J_{p1} \\ J_{o1} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \cdots + \begin{bmatrix} J_{pn} \\ J_{on} \end{bmatrix} \dot{\theta}_n$$

a velocidade linear ($\vec{v}_n$) e angular ($\vec{\omega}_n$) é uma combinação linear de:

- $J_{pi}\, \dot{\theta}_i =$ Contribuição da junta i na velocidade linear do efetuador;
- $J_{oi}\, \dot{\theta}_i =$ Contribuição da junta i na velocidade angular do efetuador.

Então cada coluna do Jacobiano é composta por:

$$\begin{bmatrix} J_{pi} \\ J_{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Prismática}$$

ou

$$\begin{bmatrix} J_{pi} \\ J_{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \times \vec{p}_{in} \\ \vec{h}_i \end{bmatrix} \quad \text{Revolução}$$

Considerando todas as contribuições

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix} = J_n(\theta)\ \dot{\theta}$$

adicionalmente, considerando juntas de revolução tem-se:

$$J_n(\theta) = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{1n} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{2n} & \cdots & \vec{h}_n \times \vec{p}_{nn} \\ \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \cdots & \vec{h}_n \end{bmatrix}$$

Para fins de computação, o Jacobiano deve ser exprimido num sistema de coordenadas. Por exemplo na base $\bar{E}_0$:

$$\begin{bmatrix} (\vec{v}_n)_0 \\ (\vec{\omega}_n)_0 \end{bmatrix} = (J_n)_0\ \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \widehat{(\vec{h}_1)}_0(\vec{p}_{1n})_0 & \widehat{(\vec{h}_2)}_0(\vec{p}_{2n})_0 & \cdots & \widehat{(\vec{h}_n)}_0(\vec{p}_{nn})_0 \\ (\vec{h}_1)_0 & (\vec{h}_2)_0 & \cdots & (\vec{h}_n)_0 \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

As quantidades $(\vec{h}_i)_0$, $(\vec{p}_{in})_0$ podem ser obtidas da cinemática direta do manipulador, e.g.

$$(\vec{p}_{in})_0 = R_{0i}\ (\vec{p}_{i,i+1})_i + \cdots + R_{0,n-1}\ (\vec{p}_{n-1,n})_{n-1}$$

Por exemplo, para DH Standard tem-se que $\vec{z}_i = \vec{h}_{i+1}$.
Tem-se também que $\vec{p}_{in} = \vec{p}_{0n} - \vec{p}_{0i}$.
Este vetores representados em $\bar{E}_0$ podem ser obtidos da tranformação homogênea T_{0i}:

- $(\vec{z}_i)_0$ é a terceira coluna de R_{0i}
- $(\vec{p}_{0n})_0$ é a quarta coluna da transformação homogênea T_{0n}
- $(\vec{p}_{0i})_0$ é a quarta coluna da transformação homogênea T_{0i}

Note que o Jacobiano do manipulador depende do sistema de coordenadas onde a velocidade do efetuador é representada.
Desta forma a relação entre o Jacobiano representado em $\bar{E}_0$ e $\bar{E}_n$ é dada por:

$$(J_n)_n = \begin{bmatrix} R_{0n}^T & 0 \\ 0 & R_{0n}^T \end{bmatrix} (J_n)_0$$

O Jacobiano também pode ser obtido em outro sistema de coordenadas, solidário ao elo n.
Considerando

$$\vec{p}_{0E} = \vec{p}_{0n} + \vec{p}_{nE}$$

tem-se as seguintes relações de velocidades

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \vec{p}_{nE}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_E \\ \vec{\omega}_E \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \vec{v}_E \\ \vec{\omega}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{nE}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix}$$

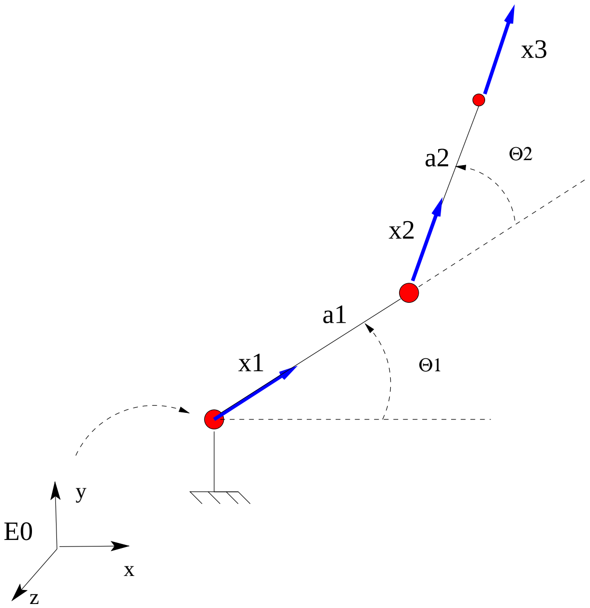
Então o jacobiano no ponto E, J_E, em função de J_n é dado por:

$$J_E = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{nE}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} J_n$$

Exemplo: Manipulador planar 2R

O jacobiano deste manipulador é dado por:

$$(J_3)_0 = \begin{bmatrix} (\vec{h}_1)_0 \times (\vec{p}_{13})_0 & (\vec{h}_2)_0 \times (\vec{p}_{23})_0 \\ (\vec{h}_1)_0 & (\vec{h}_2)_0 \end{bmatrix}$$



Voltar
Fechar

Por ser um manipulador planar tem-se que:

$$(\vec{h}_1)_0 = (\vec{h}_2)_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$R_{01} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad R_{12} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$\vec{p}_{13} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2$$

e no sistema de coordenadas da base:

$$\begin{aligned} (\vec{p}_{13})_0 &= a_1(\vec{x}_1)_0 + a_2(\vec{x}_2)_0 = a_1R_{01}(\vec{x}_1)_1 + a_2R_{01}R_{12}(\vec{x}_2)_2 \\ &= \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\vec{p}_{23} = a_2\vec{x}_2$$

e no sistema de coordenadas da base:

$$(\vec{p}_{23})_0 = a_2(\vec{x}_2)_0 = a_2R_{01}R_{12}(\vec{x}_2)_2 = \begin{bmatrix} a_2c_{12} \\ a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando

$$(\vec{h}_1)_0 \times (\vec{p}_{13})_0 = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad (\vec{h}_2)_0 \times (\vec{p}_{23})_0 = \begin{bmatrix} -a_2s_{12} \\ a_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem-se que o jacobiano é dado por:

$$(J_3)_0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O Jacobiano no plano é dado por:

$$(J_{p3})_0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Voltar
Fechar

Cálculo Recursivo do Jacobiano

Em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{i-1,i}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_{i-1} \\ \vec{\omega}_{i-1} \end{bmatrix} + H_i \, \dot{\theta}_i$$

onde

- para junta de revolução $H_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{h}_i \end{bmatrix}$
- para junta prismática $H_i = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \\ 0 \end{bmatrix}$

Representando nos respectivos sistemas de coordenadas tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\vec{v}_i)_i \\ (\vec{\omega}_i)_i \end{bmatrix}}_{V_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,i-1} & -R_{i,i-1}\widehat{(\vec{p}_{i-1,i})_i} \\ 0 & R_{i,i-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_{i,i-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} (\vec{v}_{i-1})_{i-1} \\ (\vec{\omega}_{i-1})_{i-1} \end{bmatrix}}_{V_{i-1}} + (H_i)_i \; \dot{\theta}_i$$

onde

- para junta de revolução $(H_i)_i = \begin{bmatrix} 0 \\ (\vec{h}_i)_i \end{bmatrix}$
- para junta prismática $(H_i)_i = \begin{bmatrix} (\vec{h}_i)_i \\ 0 \end{bmatrix}$

ou numa forma mais compacta:

$$V_i = \Phi_{i,i-1} V_{i-1} + H_i \; \dot{\theta}_i$$

Voltar
Fechar

Operador Adjunto

Definido por:

$$\Phi_{i,i-1} = \left[\begin{array}{cc} R_{i,i-1} & -R_{i,i-1}\widehat{(\vec{p}_{i-1,i})_i} \\ 0 & R_{i,i-1} \end{array} \right]$$

satisfaz as propriedades de grupo:

$$\Phi_{ii} = I; \qquad \Phi_{ij} = \Phi_{ji}^{-1}; \qquad \Phi_{ij}\Phi_{jk} = \Phi_{ik}$$

Similar a um sistema linear discreto:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \qquad \Phi_{k+1,k} = A_k, \quad \Phi_{ij} = A_{i-1}A_{i-2}\cdots A_j$$

Cálculo do Jacobiano

Definindo:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \Phi_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_n \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} I & \cdots & \cdots & 0 \\ -\Phi_{21} & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & -\Phi_{n,n-1} & I \end{bmatrix} V = E\ V_o + H\ \dot{\theta}$$

Desta forma, V (a velocidade de todos os elos) pode ser calculada como:

$$V = \Phi \left(E V_0 + H \dot{\theta} \right)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \cdot & \Phi_{nn} \end{bmatrix}$$

Então definindo

$$E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}$$

tem-se que a velocidade do elo n é dada por:

$$V_n = E_n^T \Phi \left(E V_0 + H \dot{\theta} \right)$$

então se a base é fixa, i.e. $V_0 = 0$ então:

$$(J_n)_n = E_n^T \Phi H \qquad \text{e} \qquad (J_n)_0 = \begin{bmatrix} R_{0n} & 0 \\ 0 & R_{0n} \end{bmatrix} E_n^T \Phi H$$

Singularidade do Manipulador

Considerando

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = J(\theta)\ \dot{\theta}$$

Uma singularidade acontece quando o Jacobiano perde posto.

Posto de J:

- $\#$ de colunas linearmente independentes de J;
- $\#$ de direções independentes em $SE(3)$ nas quais o efetuador pode-se movimentar.

J é singular se:

- J perde posto ($\mathcal{R}(J)$ reduz de dimensão);
- J ganha DOF adicionais em self-motion ($\mathcal{N}(J)$ ganha dimensão).

A singularidade pode ser produto de:

- Mobilidade reduzida em algumas direções
- Infinitas soluções da cinemática inversa
- Numa vizinhança pequenas velocidades do efetuador causam grande velocidades nas juntas

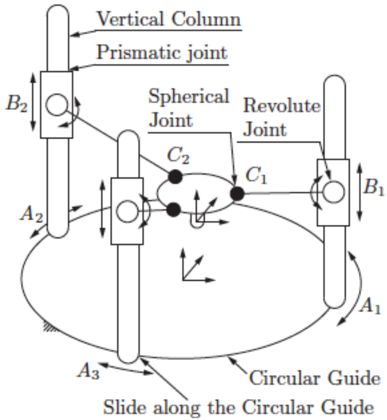
Uma possível classificação é:

- Singularidade de Fronteira: devido a se encontrar na fronteira do workspace
- Singularidade internas: quando 2 ou mais eixos estão alinhados

O conhecimento das SINGULARIDADES do Jacobiano do Manipulador é MUITO IMPORTANTE!

Exemplo do Eclipse:

Nos anos 2000 o lab do Frank Park na Seoul National University desenvolveu um robô paralelo para prototipagem rápida, chamado de Eclipse:



Singularidade: foram procuradas em forma númerica fazendo uma barredura em todas as configurações possíveis.

Testes experimentais do protótipo: o sistema atingiu uma singularidade que não tinha sido notada numericamente!!

Comunidade de robótica: grande esforço para estudar o problema.

Manipulador com Desacoplamento Cinemático

Considere um manipulador de 6DOF com um punho esférico. A posição do punho não varia com os ângulos das 3 últimas juntas.

Desta forma, a velocidade linear e angular do punho é dada por

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_p \\ \vec{\omega}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix}$$

onde θ_b é o vetor de ângulos das 3 primeiras juntas, e θ_p é o vetor de ângulos das 3 últimas juntas que compõem o punho esférico.

$J_{12} = 0$: dado que as juntas do punho não contribuem em $\vec{v}_p$.

Mais especificamente, considerando que $p_p = p_4 = p_5 = p_6$:

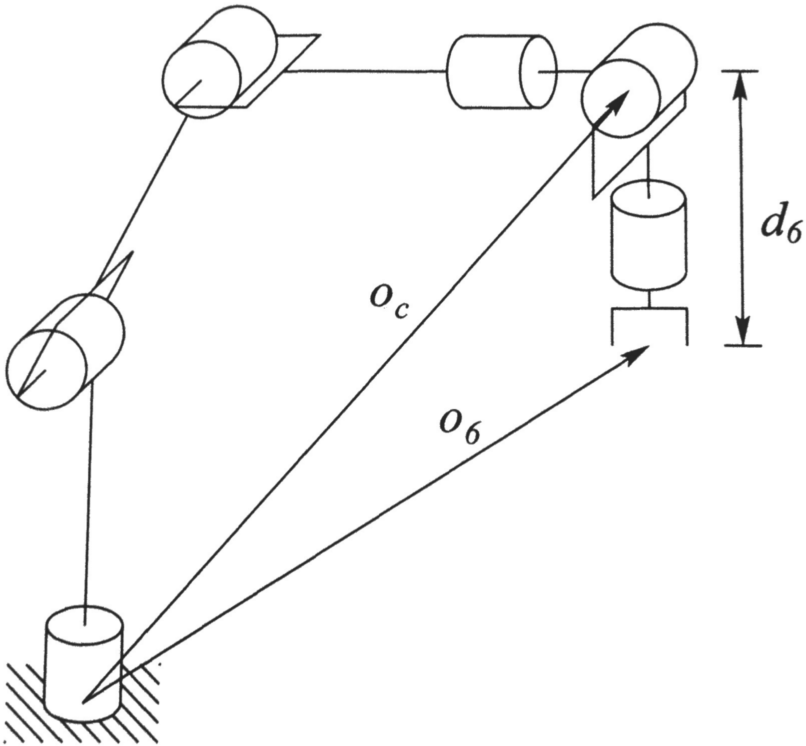
$$\begin{bmatrix} \vec{v}_p \\ \vec{\omega}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{1p} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{2p} & \vec{h}_3 \times \vec{p}_{3p} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \vec{h}_3 & \vec{h}_4 & \vec{h}_5 & \vec{h}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix}$$

Desta forma, dado que $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem-se:

$$det(J) = det(J_{11})\ det(J_{22})$$

Voltar
Fechar

Manipulador Antropomorfico 6R

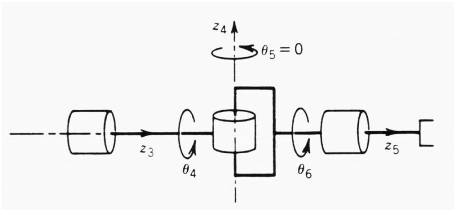


Singularidade do Punho

Neste caso

$$J_{22} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{h}_4 & \vec{h}_5 & \vec{h}_6 \end{array} \right]$$

J_{22} é singular $(det(J_{22}) = 0)$ quando $\vec{h}_4$ e $\vec{h}_6$ são colineares, que acontece quando $\theta_5 = 0, \pm\pi$.



Singularidade do Braço

Neste caso, dado que $p_p = p_4 = p_5 = p_6$

$$J_{11} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{14} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{24} & \vec{h}_3 \times \vec{p}_{34} \end{array} \right]$$

Notando que $\vec{p}_{12}$ é colinear com $\vec{h}_1$; $\vec{h}_2 \parallel \vec{h}_3$; e fazendo (c2=c2-c3), tem-se

$$J_{11} \sim \left[\begin{array}{ccc} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{24} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{23} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{34} \end{array} \right]$$

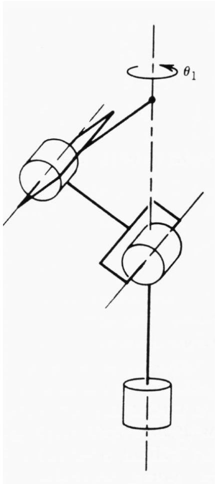
Então, em

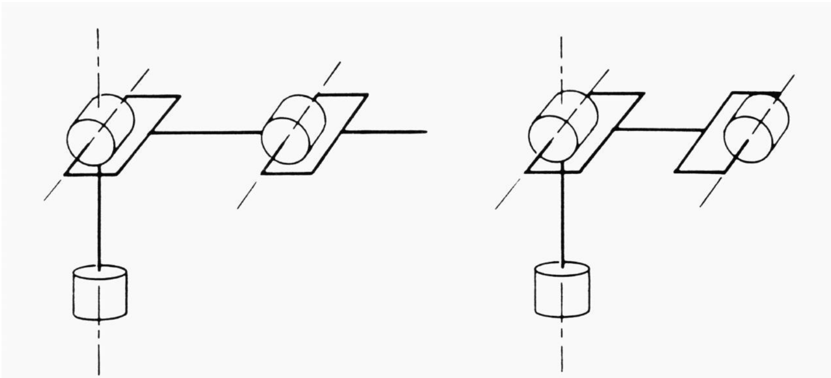
$$J_{11} \sim \left[\begin{array}{ccc} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{24} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{23} & \vec{h}_2 \times \vec{p}_{34} \end{array} \right]$$

podem ser observadas 2 situações onde é perdido o posto:

1. $\vec{h}_1$ e $\vec{p}_{24}$ colineares

2. $\vec{p}_{23}$ e $\vec{p}_{34}$ colineares





p

Voltar
Fechar

Este resultado pode ser validado numéricamente calculando o jacobiano

$$h_1 = z; \quad h_2 = h_3 = -y; \quad R_{12} = e^{\hat{h}_2\theta_2}; \quad R_{23} = e^{\hat{h}_3\theta_3}$$

$$p_{01} = 0; \quad p_{12} = a_1 z; \quad p_{23} = a_2 x; \quad p_{34} = a_3 z$$

Representando o Jacobiano em $\bar{E}_2$

$$(J_{11})_2 \sim \left[\; R_{12}^T(\vec{h}_1)_1 \times ((\vec{p}_{23})_2 + R_{23}(\vec{p}_{34})_3) \;\; (\vec{h}_2)_2 \times (\vec{p}_{23})_2 \;\; (\vec{h}_2)_2 \times R_{23}(\vec{p}_{34})_3 \; \right]$$

$$(J_{11})_2 \sim \left[\; \widehat{e^{\hat{y}\theta_2} z} \; (a_2 x + a_3 e^{-\hat{y}\theta_3} z) \;\; -a_2 \hat{y} x \;\; -a_3 \hat{y} e^{-\hat{y}\theta_3} z \; \right]$$

$$(J_{11})_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3\cos(\theta_3) \\ a_2\cos(\theta_2) - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3\sin(\theta_3) \end{bmatrix}$$

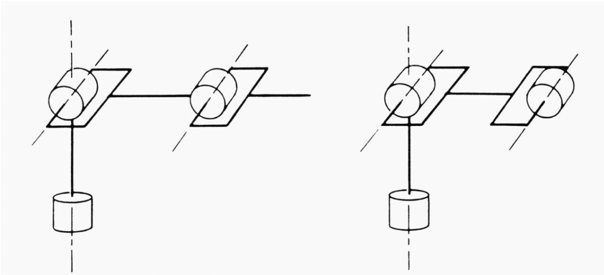
O determinante é dado por:

$$det(J_{11}) = -a_2 a_3 \cos(\theta_3) \; (a_2\cos(\theta_2) - a_3\sin(\theta_2+\theta_3))$$

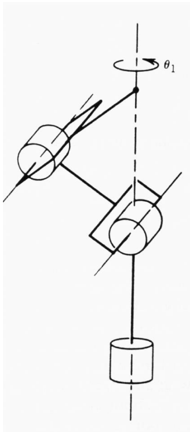
Voltar
Fechar

Existem 2 casos onde J_{11} é singular

1. $c_3 = 0 \Longrightarrow \theta_3 = \pm\pi/2$ (Esticado)



2. $a_2c_2 - a_3s_{23} \Longrightarrow p_x = p_y = 0$ (No topo da cabeça)



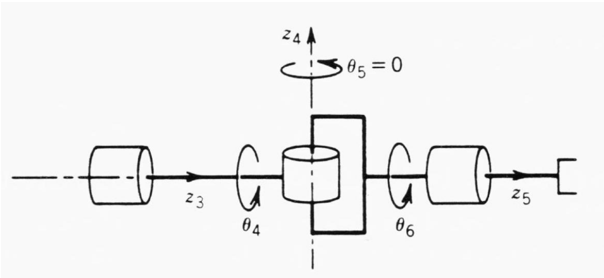
Singularidade Genéricas: 6 DOF e juntas de revolução

1. Duas juntas colineares

   Considerando $\vec{z}_i = \pm\vec{z}_j$ (paralelas ou colineares) e operando colunas (col2 = col1 - col2) tem-se

$$\begin{bmatrix} \vec{z}_i \times \vec{p}_{in} & \vec{z}_j \times \vec{p}_{jn} \\ \vec{z}_i & \vec{z}_j \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \vec{z}_i \times \vec{p}_{in} & \vec{z}_i \times \vec{p}_{ij} \\ \vec{z}_i & 0 \end{bmatrix}$$

   Perdendo posto e sendo consequentemente linearmente dependentes quando $\vec{p}_{ij} \times \vec{z}_i = 0$, que implica que as juntas são colineares.



Voltar
Fechar

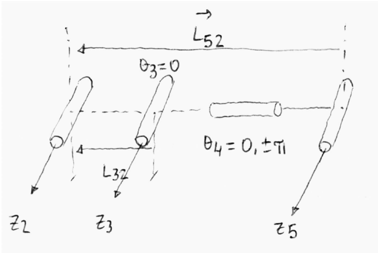
2. Três juntas paralelas coplanares

Neste caso,

$$\vec{z}_i = \pm\vec{z}_j = \pm\vec{z}_k \qquad \text{(paralelas)}$$

e existe um plano comum que contém $\vec{z}_i, \vec{z}_j, \vec{z}_k$ e consequentemente $\vec{z}_i, \vec{p}_{ij}, \vec{p}_{ik}$.

Isto é, existe $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{z}_i = 0; \quad \vec{n}\cdot\vec{p}_{ij} = 0; \quad \vec{n}\cdot\vec{p}_{ik} = 0.$



Operando colunas

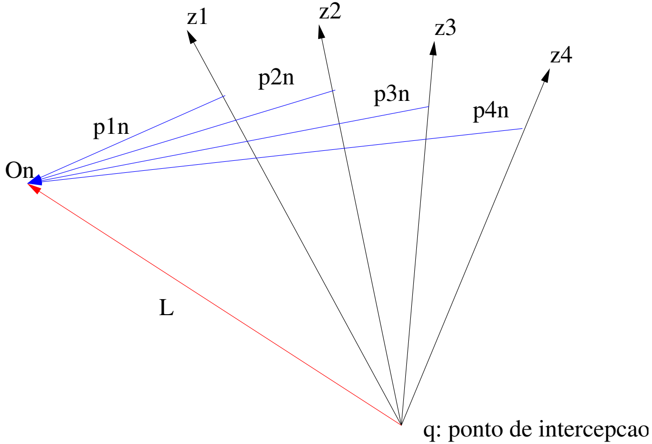
$$\begin{bmatrix} \vec{z}_i\times\vec{p}_{in} & \vec{z}_j\times\vec{p}_{jn} & \vec{z}_k\times\vec{p}_{kn} \\ \vec{z}_i & \vec{z}_j & \vec{z}_k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \vec{z}_i\times\vec{p}_{in} & \vec{z}_i\times\vec{p}_{ij} & \vec{z}_i\times\vec{p}_{ik} \\ \vec{z}_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $(\vec{z}_i, \vec{p}_{ij}, \vec{p}_{ik})$ são coplanares, as duas últimas colunas são linearmente dependentes.

3. Quatro juntas interceptando num ponto

Existe $\vec{L}$ tal que $\vec{z}_i \times (\vec{p}_{in} - \vec{L}) = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4.$

Implica que $\vec{z}_i \times \vec{p}_{in} = \vec{z}_i \times \vec{L}$



Operando colunas

$$\begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{p}_{1n} & \vec{z}_2 \times \vec{p}_{2n} & \vec{z}_3 \times \vec{p}_{3n} & \vec{z}_4 \times \vec{p}_{4n} \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 & \vec{z}_3 & \vec{z}_4 \end{bmatrix}$$

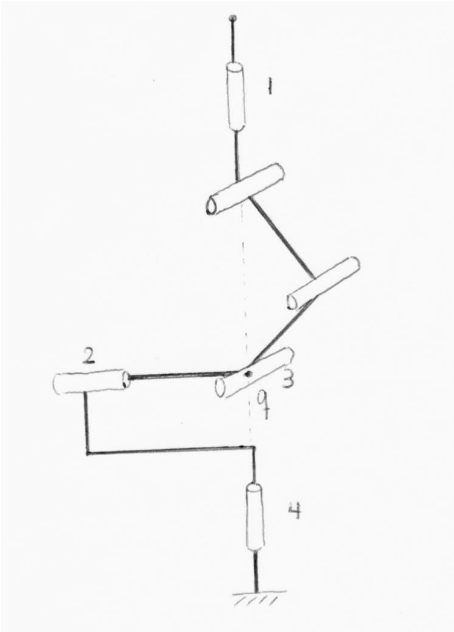
$$\sim \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{L} & \vec{z}_2 \times \vec{L} & \vec{z}_3 \times \vec{L} & \vec{z}_4 \times \vec{L} \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 & \vec{z}_3 & \vec{z}_4 \end{bmatrix}$$

Voltar
Fechar

Pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} \mathcal{I} & \vec{L}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$ obtém-se $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 & \vec{z}_3 & \vec{z}_4 \end{bmatrix}$.

Que tem Posto máximo $=$ 3.

Exemplo: Inverse Elbow



4. Três juntas coplanares interceptando num ponto

Com os mesmos argumentos anteriores pode ser obtido que o Jacobiano é similar a:

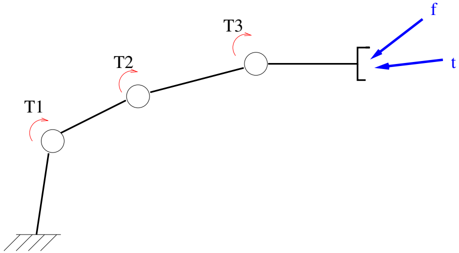
$$\begin{bmatrix} \vec{z}_i \times \vec{p}_{in} & \vec{z}_j \times \vec{p}_{jn} & \vec{z}_k \times \vec{p}_{kn} \\ \vec{z}_i & \vec{z}_j & \vec{z}_k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \vec{z}_i \times \vec{L} & \vec{z}_j \times \vec{L} & \vec{z}_k \times \vec{L} \\ \vec{z}_i & \vec{z}_j & \vec{z}_k \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} \mathcal{I} & \vec{L}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$ obtém-se $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vec{z}_i & \vec{z}_j & \vec{z}_k \end{bmatrix}$.

Dado que $\vec{z}_i, \vec{z}_j, \vec{z}_k$ são coplanares, o máximo posto é 2.

Dualidade Força/Velocidade

Considerando um manipulador



tem-se que a velocidade do efetuador, a F/Ts aplicados ao efetuador e os torques aplicados nas juntas são dados por:

$$\vec{V}_n = \begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix}; \qquad \vec{F}_n = \begin{bmatrix} \vec{f}_n \\ \vec{t}_n \end{bmatrix}; \qquad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

Pela conservação da potência tem-se que:

$$\tau \cdot \dot{\theta} = \vec{F}_n \cdot \vec{V}_n = \vec{F}_n \cdot J(\theta)\ \dot{\theta}$$

Pela definição de operador adjunto, $\vec{F}_n \cdot J\dot{\theta} = J^* \vec{F}_n \cdot \dot{\theta}$, tem-se que

$$\tau \cdot \dot{\theta} = J^*(\theta)\vec{F}_n \cdot \dot{\theta}$$

Portanto, por comparação tem-se

$$\tau = J^*(\theta)\ \vec{F}_n$$

Conseqüentemente numa dado sistema de coordenadas, e.g. $\bar{E}_0$, tem-se

$$\tau = J_0^T(\theta)\ (\vec{F}_n)_0$$

onde J_0 é o jacobiano do manipulador representado nos sistema de coordenadas $\bar{E}_0$.

Esta equação relaciona as F/Ts aplicadas no efetuador com o torque aplicado nas juntas.

Manipuladores Redundantes

Um manipulador é redundante se:

$$\# \text{ de grau de mobilidade} > \# \text{ DOF da tarefa}$$

- Cinemática direta e Jacobiano: igual não redundantes
- Singularidades: perda de posto do Jacobiano
- Cinemática Inversa: sempre $\exists$ uma familia de soluções.

Exemplos:

- Manipulador planar com 4 juntas e tarefa de 3 DOF (posição e orientação)
- Manipulador planar com 3 juntas e tarefa de 2 DOF (posição)
- Braço de 7 juntas e tarefa em $SE(3)$.

Manipulabilidade

A manipulabilidade é uma medida da distância que uma dada configuração esta da singularidade do Jacobiano do Manipulador $J(\theta)$.

No caso de manipuladores redundantes, $J(\theta)$ não é uma matriz quadrada. A decomposição por valores singulares SVD é uma forma de generalizar os conceito de autovalores e autovetores.

No caso de manipuladores redundante $J(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $n > m$. Os valores singulares de J são definido a partir dos autovalores e autovetores da matriz quadrada (simetrica) JJ^T, i.e.,

$$JJ^T \, u_i = \lambda_i \, u_i$$

de forma que os valores singulares de J são definidos como:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Então compondo os autovetores u_i na matriz $U = [u_1 \cdots u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, tem-se

$$J J^T\ U = U\ \Sigma_m^2; \qquad \Sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix}$$

onde $\sigma_m \leq \sigma_i \leq \sigma_1$; e U satisfaz $U U^T = I_m$.

Considerando $V_m = J^T\ U\ \Sigma_m^{-1}$ tem-se que $J\ V_m = U\ \Sigma_m$.

Pode-se então definir:

$$V = [v_1 \cdots v_n] = [V_m\ V_{n-m}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

onde V_{n-m} satisfaz $J\ V_{n-m} = 0$, sendo V uma matriz ortogonal ($V^T V = I_n$). De fato, V são os autovetores de $J^T J$.

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} U\ [\Sigma_m\ 0] \begin{bmatrix} V_m^T \\ V_{n-m}^T \end{bmatrix} &= U\ \Sigma_m V_m^T \\ &= U\ \Sigma_m (J^T\ U\ \Sigma_m^{-1})^T = U\ \Sigma_m \Sigma_m^{-1} U^T J = J \end{aligned}$$

Chegasse então à decomposição SVD dada por:

$$J = U \; \Sigma \; V^T;$$

com

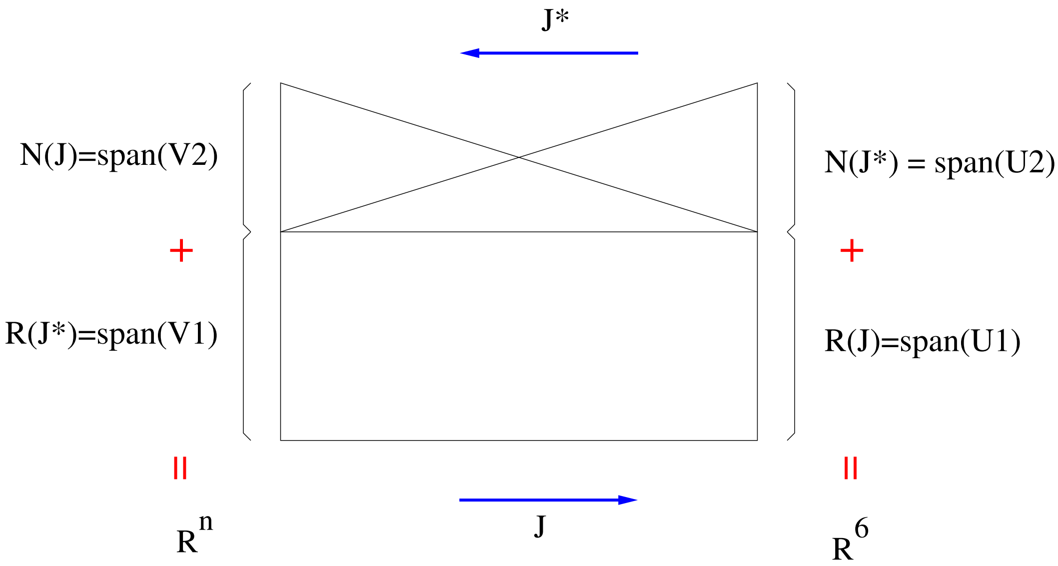
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} = [\Sigma_m \; 0];$$

$$\sigma_m \leq \sigma_i \leq \sigma_1;$$

$$UU^T = I_m;$$

$$V^T V = I_n.$$

Em forma geral, a decomposição SVD deixa em evidência as seguintes relações:



onde

$$J = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

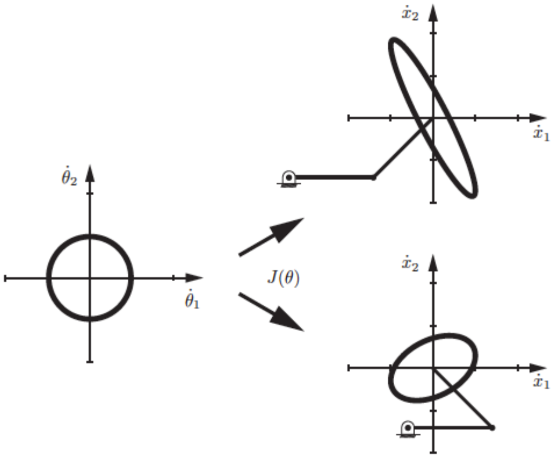
e J^* é a adjunta de J, que no caso de ser uma matriz é a transposta $J^T = V \Sigma U^T$.

Elipsóide de Manipulabilidade

Para ilustrar o conceito de manipulabilidade, considera-se um manipulador planar 2R.

O Jacobiano mapeia as velocidade das juntas $\dot{\theta}$ para a velocidade do efetuador $\dot{x}$, i.e. $\dot{x} = J(\theta)\,\dot{\theta}$

A figura illustra o mapeamento do circulo unitário no espaço $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$ em duas configurações diferentes:

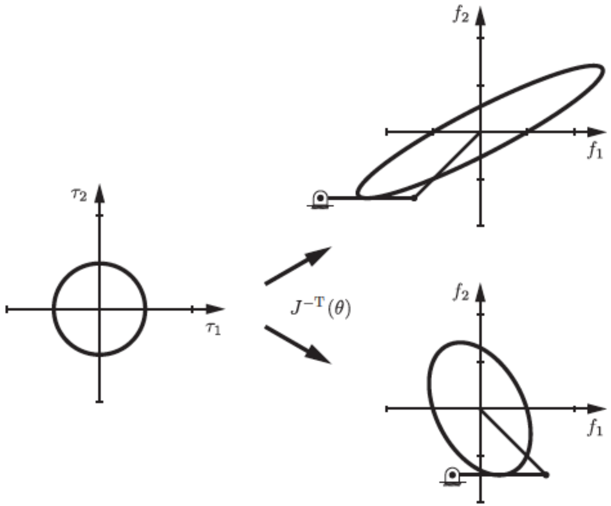


A elipse no espaço $\dot{x}$ é chamada de Elipsoide de Manipulabilidade.

Voltar
Fechar

Por outro lado, considerando a dualidade do Jacobiano, em que os torque das juntas τ é mapeado para a força no efetuador f através de $f = J^{-T}(\theta)\ \tau$.

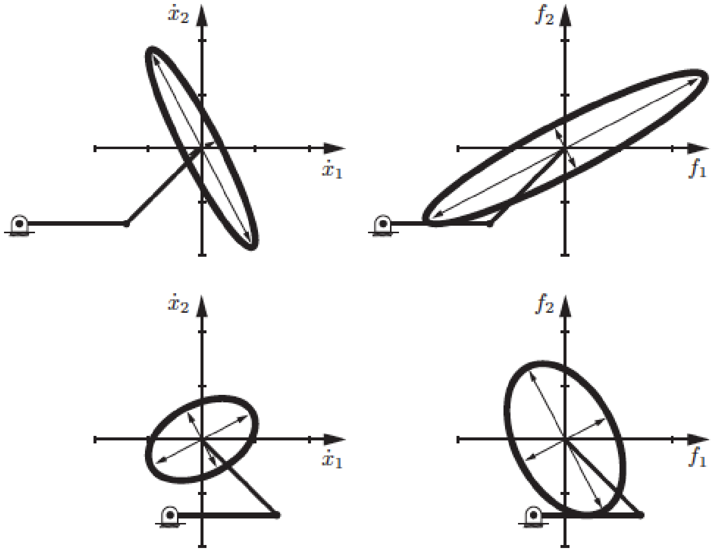
A figura illustra o mapeamento do circulo unitário no espaço $\tau_1 - \tau_2$ em duas configurações diferentes:



A elipse no espaço f é chamada de Elipsoide de Força.

Estudando estes elipsoides pode ser determinadas as configuradores desejadas e a distância à singularidades.

Na figura são comparados os elipsoides de manipulabilidade e de força:



A decomposição SVD é uma ferramente útil para estudar a transformação linear $v = J\ \dot{\theta}$.

Segundo uma interpretação geométrica, J transforma uma esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ definida como $\left\|\dot{\theta}\right\| = 1$ num conjunto de vetores que definem um elipsoide em $\mathbb{R}^m$. Os valores singulares são os comprimentos dos eixos do elipsoide.

De fato tem-se

$$\dot{\theta}^T\dot{\theta} = v^T\ (J^{\dagger})^T J^{\dagger}\ v$$

com $J^{\dagger} = J^T(JJ^T)^{-1}$ sendo a pseudo-inversa a direita, i.e. $JJ^{\dagger} = I$.

Após manipulações algébricas, considerando que $JJ^T = (JJ^T)^T$, obtém-se:

$$\dot{\theta}^T\dot{\theta} = v^T\ (JJ^T)^{-1}\ v = v^T\ (U\Sigma V^T V\Sigma U^T)^{-1}\ v$$

e dado que $U^{-1} = U^T$ tem-se

$$\dot{\theta}^T\dot{\theta} = v^T\ U\ \Sigma_m^{-2}\ U^T\ v$$

Definindo $\bar{v} = U^T v$ tem-se

$$\dot{\theta}^T \dot{\theta} = \bar{v}^T \; \Sigma_m^{-2} \; \bar{v} = 1$$

ou em forma equivalente

$$\sigma_1^{-2} \bar{v}_1^2 + \sigma_2^{-2} \bar{v}_2^2 + \cdots + \sigma_{m-1}^{-2} \bar{v}_{m-1}^2 + \sigma_m^{-2} \bar{v}_m^2 = 1$$

que representa um elipsóide alinhado com os eixos $\bar{v}$.

Dado que U^T é uma matriz de rotação (por ser ortogonal), no espaço v tem-se um elipsóide com os eixos dados pelos vetores $\sigma_i u_i$.

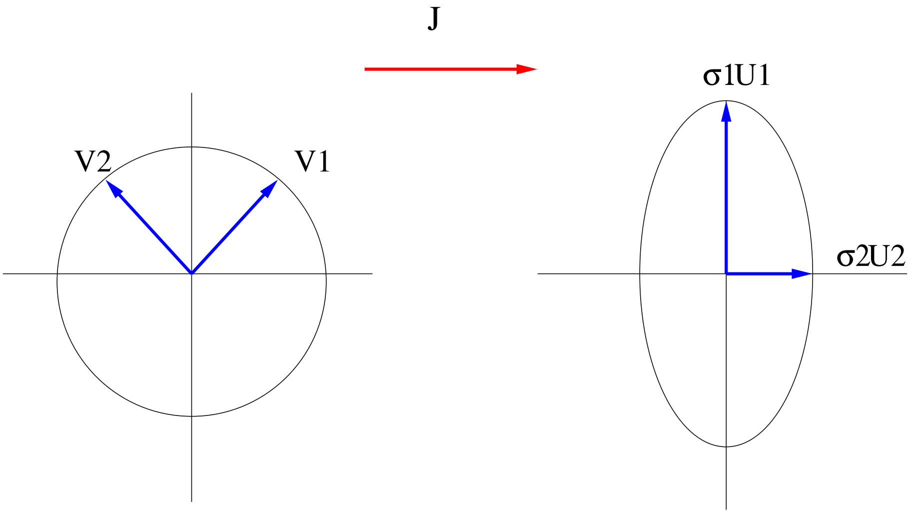
Voltar
Fechar

1. Cinemática ($v = J(\theta)\ \dot{\theta}$)

   Nesta caso considera-se $\left\|\dot{\theta}\right\| = 1$, com isto:

$$\dot{\theta}^T \dot{\theta} = v^T\ U\ \Sigma_m^{-2}\ U^T\ v = 1$$

   definindo um elipsoide com eixos principais $\sigma_1 u_1, \cdots, \sigma_m u_m$:



   u_1: direção preferencial com respeito ao movimento,

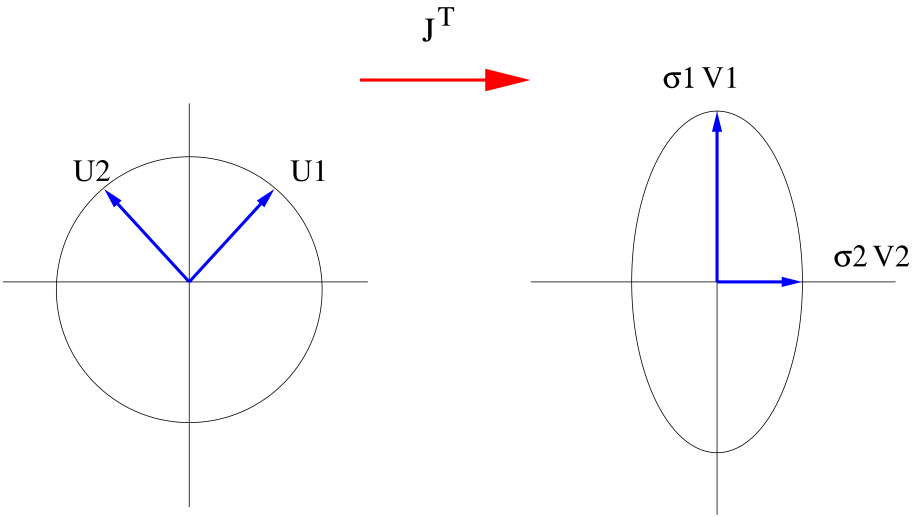
   Melhor caso: $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$.

2. Estática ($\tau = J^T(\theta)\ F$)

Nesta caso considera-se $\|F\| = 1$, com isto:

$$F^T F = \tau^T\ V_m\ \Sigma_m^{-2}\ V_m^T\ \tau = 1$$

definindo um elipsoide com eixos principais $\sigma_1 V_1, \cdots, \sigma_m V_m$:



v_2: direção preferencial do ponto de vista mecânico,

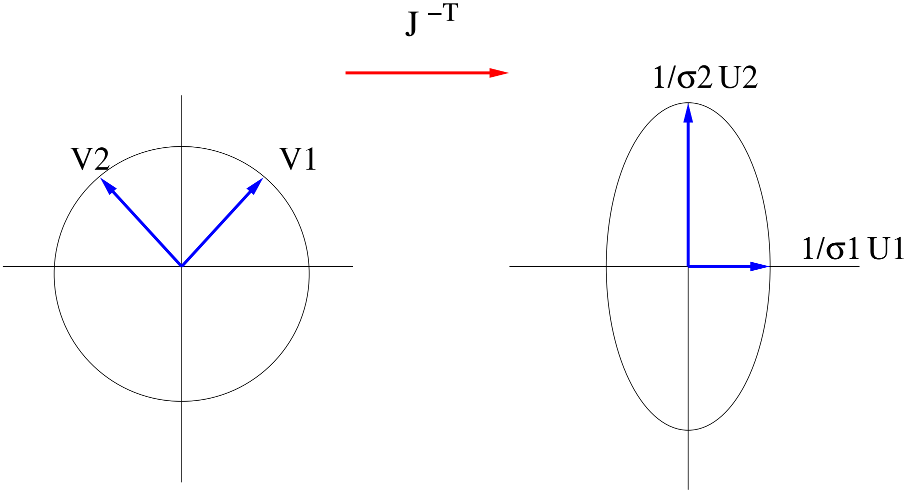
Melhor caso: $\sigma_2 = 0$ que implica J singular.

3. Estática ($\tau = J^T(\theta)\ F$)

Nesta caso considera-se $\|\tau\| = 1$, com isto:

$$\tau^T \tau = F^T\ U\ \Sigma_m^2\ U^T\ F = 1$$

definindo um elipsoide com eixos principais $\sigma_1^{-1} u_1, \cdots, \sigma_m^{-1} u_m$:



v_2: direção preferencial do ponto de vista mecânico,

Melhor caso: $\sigma_2 = 0$ que implica J singular.

Medidas de Manipulabilidade

Considerando $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ as possíveis medidas de manipulabilidade são:

- $$\sqrt{det(JJ^T)} = \sigma_1 \cdots \sigma_n$$

  O problema aqui é que a escolha pode não ser boa se a relação entre o menor e maior valor singular for grande.

- $$\sigma_{min}(J)$$

- Número de condição:

  $$c = \frac{\sigma_{min}(J)}{\sigma_{max}(J)}$$

Manipulabilidade: manipulador não redundante

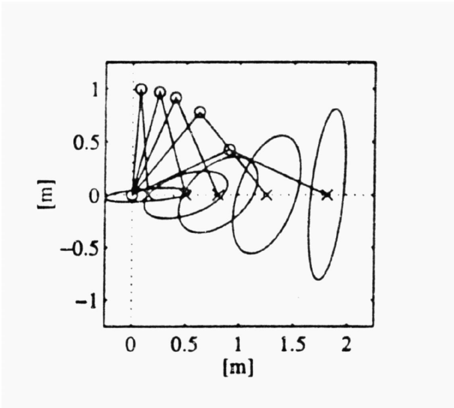
No caso de manipuladores não redundantes, i.e., $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem-se que

$$\sqrt{det(JJ^T)} = |det(J)|$$

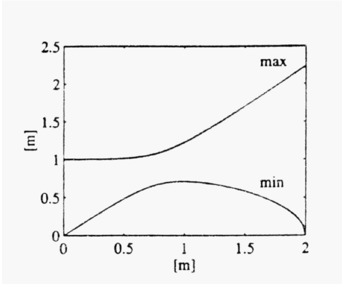
Exemplo: Manipulador de 2 elos.

Manipulabilidade $w(\theta) = \sqrt{det(JJ^T)}$. No caso de $m = n$ tem-se que

$$w(\theta) = |det(J(\theta))| = a_1 a_2 |\sin(\theta_2)|$$



Graficando $\sigma_{min}(J), \sigma_{max}(J)$ em função da posição x:

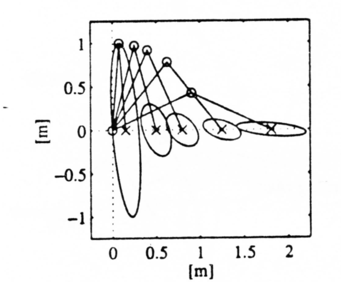


Elipsóide de Manipulabilidade de Força

Considera $\tau^T\tau = 1$ tendo portanto

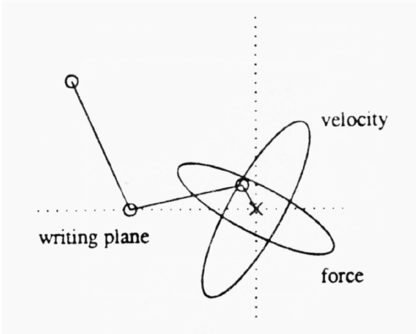
$$\tau^T\tau = f^T\ J(\theta)J^T(\theta)\ f = f^T\ U\ \Sigma_m^2\ U^T\ f = 1$$

definindo um elipsoide com eixos principais $\sigma_1^{-1}U_1, \cdots, \sigma_m^{-1}U_m$:

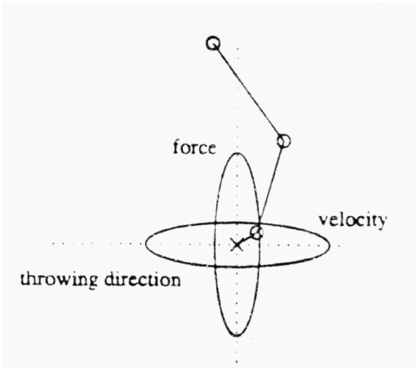


Exemplo: Manipulador planar de 3 elos (braço+antebraço+mão).

1. Escrevendo no plano horizontal



2. Arremessando um peso horizontalmente



Jacobiano Analítico

Considerando que a orientação $R \in SO(3)$ pode ser representada por uma parametrização ϕ (e.g., RPY, quaternions, etc), sendo desta forma a cinemática direta dada

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} = k(\theta)$$

temos que derivando com respeito ao tempo

$$\dot{x} = \frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta}\ \dot{\theta} = J_a(\theta)\ \dot{\theta}$$

onde $J_a(\theta) = \frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta}$.

Note que esta expressão é diferente à do Jacobiano Geométrico: $\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(\theta)\dot{\theta}$. Logo calcularemos uma relação entre $\dot{\phi}$ e ω.

Relação entre Jacobiano Geométrico e Analítico

Tem-se em condições de estabelecer uma relação entre o Jacobiano Geométrico e o Jacobiano Analítico.

Tem-se as seguintes 3 relações:

$$V = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(\theta)\ \dot{\theta}; \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_a(\theta)\ \dot{\theta}; \qquad \dot{\phi} = J_R(\phi)\omega$$

onde $J_r(\phi)$ é o Jacobiano da Representação.

Então pode-se estabelecer que $(v = \dot{p})$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J_R(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T_R(x)\ V$$

e portanto

$$\dot{x} = \underbrace{T_r(x) J(\theta)}_{J_a(\theta)} \dot{\theta}$$

com

$$\boxed{J_a(\theta) = T_R(x)\ J(\theta)}$$

Jacobiano da Representação

Relação entre ω e a derivada da representação da orientação $\dot{\phi}$.

Considere uma representação ϕ da orientação $R \in SO(3)$. É possível estabelecer uma relação

$$\dot{\phi} = J_R(\phi)\ \omega$$

A função $J_R(\phi)$ depende da representação escolhida.

Do ponto de vista físico, o significado de ω é mais intuitivo que $\dot{\phi}$.

Por outro lado, a integral de $\dot{\phi}$ no tempo da como resultado ϕ, mas a integral de ω não tem nenhuma interpretação física.

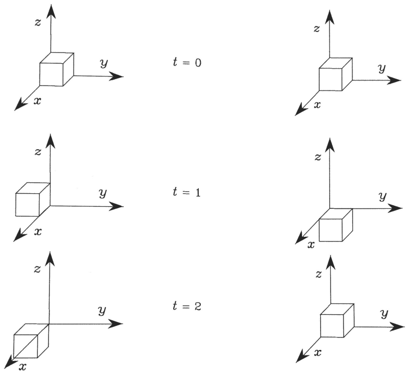
Exemplo: Considere um corpo rígido com orientação conhecida em $t = 0$. Considere os seguinte 2 perfis de velocidade:

1. $\omega = [\pi/2\ 0\ 0]^T$ para $0 \leq t \leq 1$ e $\omega = [0\ \pi/2\ 0]^T$ para $1 \leq t \leq 2$.
2. $\omega = [0\ \pi/2\ 0]^T$ para $0 \leq t \leq 1$ e $\omega = [\pi/2\ 0\ 0]^T$ para $1 \leq t \leq 2$.

A integral de ω dá o mesmo resultado para os 2 casos:

$$\int_0^2 \omega\ dt = [\pi/2\ \pi/2\ 0]^T$$

mas a orientação final do corpo rígido correspondente aos 2 casos, é diferente.



Voltar
Fechar

Representação Exponencial

Neste caso, tem-se que como $R = e^{\theta \hat{k}}$ com $k \in \mathbb{R}^3$ e $\|k\| = 1$, a representação é dada por $\{k, \theta\}$.

Considerando

$$
\begin{aligned}
R &= I + \sin(\theta)\ \hat{k} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{k}^2 \\
&= \cos(\theta)\ I + \sin(\theta)\ \hat{k} + (1 - \cos(\theta))\ k\ k^T
\end{aligned}
$$

e que $\dot{R} = \omega \times R = \hat{\omega} R$ implica que

$$\hat{\omega} = \dot{R}\ R^T$$

calculando $\dot{R}$ da formula de Rodrigues com $\theta(t)$ e $k(t)$, tem-se

$$\hat{\omega} = \dot{\theta}\ \hat{k} + (1 - \cos(\theta))\ \widehat{\hat{k}\ \dot{k}} - \sin(\theta)\ \hat{\dot{k}}$$

e portanto

$$\omega = \dot{\theta}\ k + (1 - \cos(\theta))\ \hat{k}\ \dot{k} - \sin(\theta)\ \dot{k}$$

Em forma matricial

$$\omega = \begin{bmatrix} k & \quad (1-\cos(\theta))\ \hat{k} - \sin(\theta) I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{k} \end{bmatrix}$$

Que representa a relação entre ω e $\{\dot{\theta}, \dot{k}\}$. Note que se k é fixo, então $\omega = \dot{\theta} k$.

Concluindo, a relação entre a derivada da representação e a velocidade angular ω é dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = J_R(\phi)\ \omega,$$

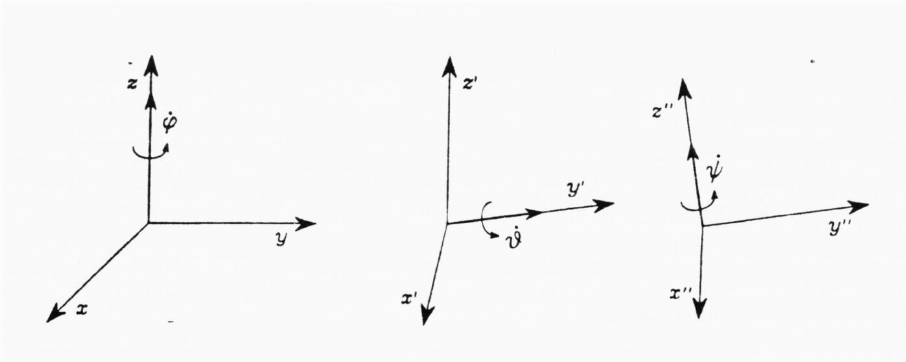
onde

$$J_R(\theta, k) = \begin{bmatrix} k^T \\ -1/2\ [\ \hat{k} + cotg(\theta/2)\ \hat{k}^2\ ] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

O jacobiano é singular para $\theta = 0$.

Representações Mínimas: Ângulos de Euler (ZYZ)

Considerando as rotações dada pelos ângulos de Euler



Rotação ao redor $\vec{z}$:

$$\omega_z = [0\ 0\ 1]^T \dot{\phi};$$

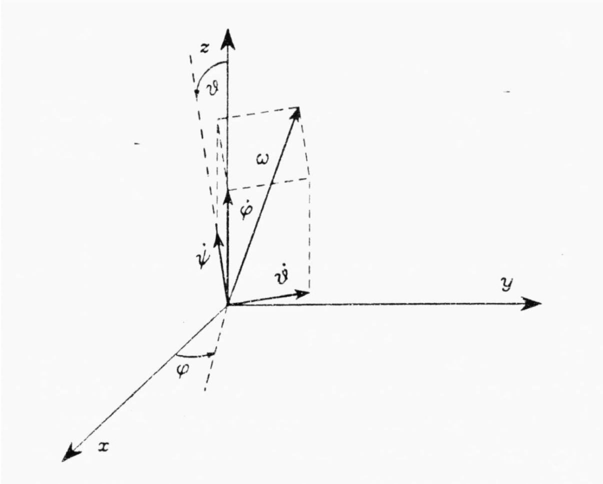
Ápos a rotação $R_z(\phi)$, segue uma rotação ao redor $\vec{y}\,'$:

$$\omega_y = [-s\phi\ c\phi\ 0]^T \dot{\theta}$$

Ápos a rotação $R_z(\phi)R_y(\theta)$, segue uma rotação ao redor $\vec{z}''$:

$$\omega_z = [c\phi s\theta\ s\phi s\theta\ c\theta]^T \dot{\psi}$$

Geometricamente, tem-se



Compondo tem-se

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{1}{s\theta} \begin{bmatrix} -c\phi c\theta & -s\phi c\theta & 1 \\ -s\phi s\theta & c\phi s\theta & 0 \\ c\phi & s\phi & 0 \end{bmatrix}}^{J_R(\phi,\theta,\psi)} \omega$$

O jacobiano é singular para $\theta = 0, \pm\pi$.

Roll-Pitch-Yaw

Considerando os ângulos ψ (roll), θ (pitch) e ϕ (yaw) tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{1}{c\theta} \begin{bmatrix} c\theta & s\psi s\theta & c\psi s\theta \\ 0 & c\psi c\theta & -s\psi c\theta \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}}^{J_R(\psi,\theta,\phi)} \omega$$

O jacobiano é singular para $\theta = \pi/2$.

Representações Mínimas: Generalização

Teorema:

Dados $s \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, e definindo $\mathrm{vect}(A) = (A - A^T)^\vee$, tem-se que:

1. $\frac{d}{dt}tr(A) = tr(\dot{A})$
2. $\frac{d}{dt}\mathrm{vect}(A) = \mathrm{vect}(\dot{A})$
3. $tr(\hat{s}A) = -s^T\ \mathrm{vect}(A)$
4. $tr(A\hat{s}) = -s^T\ \mathrm{vect}(A)$
5. $\mathrm{vect}(\hat{s}A) = [tr(A)I - A]\ s$
6. $\mathrm{vect}(A\hat{s}) = [tr(A)I - A^T]\ s$

Prova: Angeles 2003, Apêndice A: Teoremas A1 e A2.

Representações Mínimas: Generalização

A idéia por trás do desenvolvimento anterior pode ser estendido para uma representação $R(a) = [r_1(a) \ \ r_2(a) \ \ r_3(a)]$ de 3 parâmetros $a = [a_1, \ a_2, \ a_3]^T$.
Levando em consideração a identidade $(\mathrm{vect}(A) = (A - A^T)^\vee)$

$$\mathrm{vect}(\dot{R}) = \mathrm{vect}(\hat{\omega} \ R) = [tr(R)I - R] \ \omega$$

Por outro lado, dado que

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial a}\dot{a} & \frac{\partial r_2}{\partial a}\dot{a} & \frac{\partial r_3}{\partial a}\dot{a} \end{bmatrix}$$

pode-se escrever:

$$\mathrm{vect}(\dot{R}) = G(a) \ \dot{a}, \qquad G(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

então tem-se que se $G(a)$ é não singular:

$$\dot{a} = \underbrace{G^{-1}(a) \ \ [tr(R(a)) \ I - R(a)]}_{J_R(a)} \ \omega$$

Parâmetros de Rodrigues/Gibbs/Cayley-Rodrigues

A parametrização é dada por:

$$\rho = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\ k; \qquad \rho \in \mathbb{R}^3$$

Sendo o Jacobiano dado por:

$$J_R(\rho) = \frac{1}{2}\left(I - \hat{\rho} + \rho\rho^T\right)$$

O jacobiano satisfaz a seguinte propriedade:

$$J_R^T(\rho)(I + \rho\rho^T)^{-1} J_R(\rho) = \frac{1 + \rho^2}{4} I$$

Parâmetros de Cayley-Rodrigues Modificados

A parametrização é dada por:

$$\sigma = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\ k; \qquad \sigma \in \mathbb{R}^3$$

Sendo o Jacobiano dado por:

$$J_R(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma^2}{2}I - \hat{\sigma} + \sigma\sigma^T\right)$$

O jacobiano satisfaz a seguinte propriedade:

$$J_R^T(\sigma)J_R(\sigma) = \left(\frac{1+\sigma^2}{4}\right)^2 I$$

Observação: propriedades de ortonormalidade do jacobiano implicam na passividade do sistema.

Quaternions

O Quaternion é definido por:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_v \end{bmatrix}; \qquad q_0 = \cos(\theta/2) \in \mathbb{R} \qquad q_v = \sin(\theta/2)\ k \in \mathbb{R}^3$$

onde $\|q\| = 1$ é a única restrição, com $R = e^{\theta\hat{k}}$.
O cálculo da derivada de q_0 é direta:

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\ \sin(\theta/2)\ \dot{\theta} = -\frac{1}{2}\ \sin(\theta/2)\ k^T\ \omega = -\frac{1}{2}\ q_v^T\ \omega$$

Adicionalmente o jacobiano é dado por:

$$J_R(q) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I - \hat{q}_v \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\ E(q)$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_v \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\ E(q)\omega$$

Exercício: Provar que $2\dot{q}_v = (q_0 \; I - \hat{q}_v) \; \omega$.

Dica: Observe que $\dot{q}_v = \sin(\theta/2) \; \dot{k} + 1/2 \; \cos(\theta/2) \; \dot{\theta} \; k$ com $\dot{k}$ e $\dot{\theta}$ dados pelo jacobiano da representação exponencial.

Exercício: Provar que $E(q)$ é ortonormal, i.e, $E^T E = I$.

Tem-se também que

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \; \Omega(\omega) \; q; \qquad \Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & \hat{\omega} \end{bmatrix} = -\Omega^T(\omega)$$

então

$$q(t) = e^{\frac{1}{2}\Omega(\omega)t} \; q(0)$$

Representações da Orientação

Tem-se que para $R \in SO(3)$

$$R = e^{\theta\ \hat{k}}$$

com $k \in \mathbb{R}^3$ e $\|k\| = 1$

Representação Eixo/ângulo

A representação é dada por $\{k, \theta\}$.

$$R = I + \sin(\theta)\ \hat{k} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{k}^2$$

$$\theta = \arccos\left[\frac{tr(R) - 1}{2}\right] ; \qquad \hat{k} = \frac{1}{2\sin(\theta)}[R - R^T]$$

$$J_R(\theta, k) = \begin{bmatrix} k^T \\ -1/2\ [\ \hat{k} + cotg(\theta/2)\ \hat{k}^2\ ] \end{bmatrix}$$

Representações Mínimas: Ângulos de Euler (ZYZ)

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\phi s\theta \\ \cdot & \cdot & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi &= atan2(r_{23}, r_{13}) \\ \theta &= atan2(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi &= atan2(r_{32}, -r_{31}) \end{aligned}$$

Considerando as rotações dada pelos ângulos de Euler

$$J_R(\phi, \theta, \psi) = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{bmatrix} -c\phi c\theta & -s\phi c\theta & 1 \\ -s\phi s\theta & c\phi s\theta & 0 \\ c\phi & s\phi & 0 \end{bmatrix}$$

Roll-Pitch-Yaw

Considerando os ângulos ψ (roll), θ (pitch) e ϕ (yaw) tem-se

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & \cdot & \cdot \\ s\phi c\theta & \cdot & \cdot \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi &= atan2(r_{21}, r_{11}) \\ \theta &= atan2(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= atan2(r_{32}, r_{33}) \end{aligned}$$

$$J_R(\psi, \theta, \phi) = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{bmatrix} c\theta & s\psi s\theta & c\psi s\theta \\ 0 & c\psi c\theta & -s\psi c\theta \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

Parâmetros de Rodrigues/Gibbs/Cayley-Rodrigues

$$\rho = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\, k; \qquad \rho \in \mathbb{R}^3$$

$$R = \frac{(1-\rho^2)I + 2(\rho\rho^T + \hat{\rho})}{1+\rho^2}; \qquad \rho^2 = \|\rho\|^2 = \tan^2(\theta/2)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1+tr(R)}[R - R^T]$$

$$J_R(\rho) = \frac{1}{2}\left(I - \hat{\rho} + \rho\rho^T\right)$$

Parâmetros de Cayley-Rodrigues Modificados

$$\sigma = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\, k; \qquad \sigma \in \mathbb{R}^3$$

$$R = I + 4\,\frac{1-\sigma^2}{(1+\sigma^2)^2}\,\hat{\sigma} + \frac{8}{(1+\sigma^2)^2}\,\hat{\sigma}^2; \qquad \sigma^2 = \|\sigma\|^2 = \tan^2(\theta/4)$$

$$J_R(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma^2}{2}I - \hat{\sigma} + \sigma\sigma^T\right)$$

Quaternions

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_v \end{bmatrix}; \qquad q_0 = \cos(\theta/2) \in \mathbb{R} \qquad q_v = \sin(\theta/2)\; k \in \mathbb{R}^3$$

onde $\|q\| = 1$ é a única restrição, com $R = e^{\theta \hat{k}}$.

$$R = (2\; q_0^2 - 1)\; I + 2\; (q_v\; q_v^T + q_0\; \hat{q}_v)$$

$$q_0 = \frac{1}{2}(1 + tr(R))^{1/2} \qquad \hat{q}_v = \frac{1}{4\; q_0}[R - R^T]$$

$$J_R(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I - \hat{q}_v \end{bmatrix}$$