Introdução à Robótica

http://www.coep.ufrj.br/gscar

Enfoque Exponencial à Murray

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 14 de julho de 2018

Coordenadas Exponenciais

Enfoque do livro Murray, Li e Sastry.

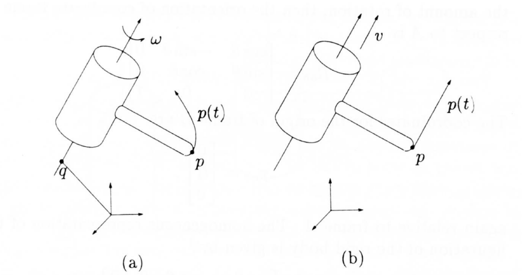
Considere a configuração de um corpo rígido dado pela transformação homogênea g_{ab} dada por:

$$\begin{bmatrix} p_a \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{g_{ab}} \begin{bmatrix} p_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $R \in SO(3)$ tem-se a seguinte parametrização $R = e^{\hat{\omega}\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^3$ e $\|\omega\| = 1$.

E para $g \in SE(3)$?

Considerando $\zeta = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$, onde $\omega, v \in \mathbb{R}^3$ e $\|\omega\| = 1$,



Define-se então

$$\hat{\zeta} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo portanto que

$$e^{\hat{\zeta}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega}v + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se provar que dado $R \in SO(3), p \in \mathbb{R}^3$ existem ω, θ, v.

Em particular se $\omega = 0$ tem-se que:

$$e^{\hat{\zeta}\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Voltar
Fechar

Velocidade Angular

Considere a representação exponencial da orientação

$$R_{ab} = e^{\theta k \times} = e^{\theta \hat{k}}$$

Suponha que k é fixo em $\bar{E}_a$.
Então, diferenciando R_{ab} tem-se

$$\dot{R}_{ab} = \dot{\theta}\hat{k}\ e^{\theta \hat{k}} = \widehat{\dot{\theta} k}\ R_{ab}$$

Então define-se

$$(\vec{\omega}_{ab})_a = \dot{\theta} k$$

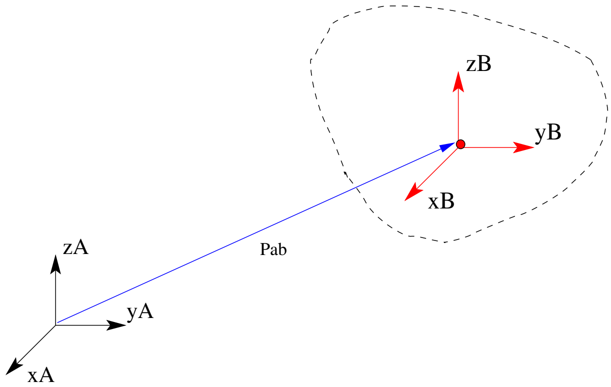
e desta forma tem-se,

$$\dot{R}_{ab} = \widehat{(\vec{\omega}_{ab})_a}\ R_{ab}$$

onde $(\vec{\omega}_{ab})_a =$ velocidade angular do sistema de coordenadas $\bar{E}_b$ com respeito a $\bar{E}_a$, representada em $\bar{E}_a$.

Velocidade de um corpo rígido

Considerando a configuração de um corpo rígido



Descrita pela transformação homogênea:

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & (\vec{p}_{ab})_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sua derivada é dada por ($\dot{p}_{ab} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_{ab})_a$):

$$\dot{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ab} & \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{\omega}_{ab})_a \times R_{ab} & \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo $\dot{T}_{ab}$ em função de T_{ab}:

$$\dot{T}_{ab} = \begin{bmatrix} (\vec{\omega}_{ab})_a \times & \dot{p}_{ab} - (\vec{\omega}_{ab})_a \times (\vec{p}_{ab})_a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ab} & (\vec{p}_{ab})_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{ab}}$$

Definição: $\widehat{(\cdot)}$ - dado $\zeta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$, $v, \omega \in \mathbb{R}^3$, define-se

$$\hat{\zeta} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por analogia com a velocidade angular, é definida a velocidade espacial

$$(V_{ab})_a = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ab} - (\vec{\omega}_{ab})_a \times (\vec{p}_{ab})_a \\ (\vec{\omega}_{ab})_a \end{bmatrix}$$

Então tem-se:

$$\dot{T}_{ab} = \widehat{(V_{ab})_a}\; T_{ab}$$

A parte superior do vetor $(V_{ab})_a$ pode ser re-escrita como:

$$\dot{p}_{ab} - (\vec{\omega}_{ab})_a \times (\vec{p}_{ab})_a = R_{ab}\frac{d}{dt}(R_{ab}^T\ (\vec{p}_{ab})_a) = R_{ab}\frac{d}{dt}(\vec{p}_{ab})_b$$

que representa a derivada de $\vec{p}_{ab}$ em $\bar{E}_b$ com o resultado representado em $\bar{E}_a$ (note que a componente linear de $(V_{ab})_a$ não é a velocidade da origem do sistema de coordenadas do corpo $\bar{E}_b$).

Podemos escrever a velocidade do corpo com relação ao sistema de coordenadas do corpo, da seguinte forma:

$$\dot{T}_{ab} = T_{ab}\,\widehat{(V_{ab})_b}; \qquad (V_{ab})_b = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{p}_{ab} \\ (\vec{\omega}_{ab})_b \end{bmatrix}$$

A parte superior do vetor $(V_{ab})_b$:

$$R_{ab}^T\,\dot{p}_{ab} = R_{ba}\frac{d}{dt}(\vec{p}_{ab})_a$$

é a derivada de $\vec{p}_{ab}$ em $\bar{E}_a$ com o resultado representado em $\bar{E}_b$.

A velocidade espacial e a velocidade do corpo estão relacionadas através de uma tranformação de similaridade:

$$\widehat{(V_{ab})_a} = T_{ab}\ \widehat{(V_{ab})_b}\ T_{ab}^{-1}$$

ou alternativamente $(\hat{p}_{ab} = (\vec{p}_{ab})_a \times)$:

$$(V_{ab})_a = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab}R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{bmatrix}}_{\Phi_{ab}=Ad_{T_{ab}}} (V_{ab})_b$$

onde $Ad_{T_{ab}}$ é chamada de Transformação Adjunta (Operador Adjunto). Note que

$$Ad_{T_{ab}}^{-1} = Ad_{T_{ab}^{-1}} = Ad_{T_{ba}} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T & -R_{ab}^T\hat{p}_{ab} \\ 0 & R_{ab}^T \end{bmatrix}$$

Resumo:

- T_{ab} transformação da configuração de $\bar{E}_b$ para $\bar{E}_a$;
- $Ad_{T_{ab}}$ transformação da velocidade espacial de $\bar{E}_b$ para $\bar{E}_a$.