

# Introdução à Robótica

<http://www.coep.ufrj.br/gscar>



1/5

## Propriedade $\dot{\theta}^T(\dot{M} - 2C)\dot{\theta}$

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 11 de agosto de 2018



Voltar

Fechar

O Modelo dinâmico de um manipulador rígido de  $n$  juntas é dado por:

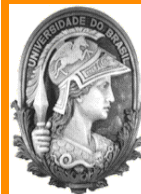
$$\underbrace{M(\theta)\ddot{\theta} + \dot{M}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_1(\theta)\dot{\theta} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_n(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}}_{C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}} + G(\theta) = \tau$$

Podendo escrever a equação dinâmica do manipulador em forma compacta como:

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) = \tau$$

onde

- ângulo da juntas:  $\theta \in \mathbb{R}^n$
- torque:  $\tau \in \mathbb{R}^n$
- matriz de inércia do Manipulador:  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- matriz das forças centrípetas/Coriolis:  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- vetor de gravidade:  $G \in \mathbb{R}^n$



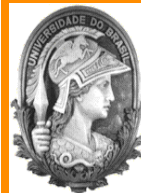
# Propriedades do Modelo Dinâmico

1.  $M(\theta) = M^T(\theta) > 0$ , i.e.  $x^T M(\theta)x > 0$  Positiva Definida
2. Para  $\dot{M} - 2C = N(\theta, \dot{\theta})$  tem-se

$$\dot{\theta}^T N(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = 0$$

Para uma escolha particular de  $C(\theta, \dot{\theta})$  tem-se que  $x^T N(\theta, \dot{\theta})x = 0$  para todo  $x$ , i.e.,  $N = -N^T$ .

Esta propriedade é útil no projeto de controladores via teoria de Lyapunov, principalmente porque ela implica na passividade do sistema de  $\tau \mapsto \dot{\theta}$ .



## Prova da propriedade $\dot{\theta}^T (\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) - 2C(\theta, \dot{\theta})) \dot{\theta} = 0$

Considerando que:

$$\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial M}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i = \sum_{i=1}^n M_i(\theta) \dot{\theta}_i$$

que implica que

$$\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) z = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i M_i(\theta) z = \overbrace{[M_1 z \cdots M_n z]}^{M_D(\theta, z)} \dot{\theta} = M_D(\theta, z) \dot{\theta}$$

Pela definição de  $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$  e  $M_D$  tem-se que:

$$C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = \dot{M}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} - \frac{1}{2} M_D^T(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}$$

conseqüentemente como  $\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) z = M_D(\theta, z) \dot{\theta}$  tem-se

$$C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = M_D(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} - \frac{1}{2} M_D^T(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = \underbrace{[M_D(\theta, \dot{\theta}) - \frac{1}{2} M_D^T(\theta, \dot{\theta})]}_{C(\theta, \dot{\theta})} \dot{\theta}$$



Por tanto tem-se que

$$C(\theta, \dot{\theta}) = M_D(\theta, \dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta, \dot{\theta})$$

Está escolha de  $C(\theta, \dot{\theta})$  não é única (vide Símbolos de Chrisoffels no Livro do Sciavicco e Siciliano).

Então pode-se considerar o termo  $\dot{\theta}^T (\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) - 2C(\theta, \dot{\theta})) \dot{\theta}$  em função de  $M_D$ , isto é:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^T (\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) - 2C(\theta, \dot{\theta})) \dot{\theta} &= \dot{\theta}^T \left[ M_D(\theta, \dot{\theta}) - 2 \left( M_D(\theta, \dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta, \dot{\theta}) \right) \right] \dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}^T [M_D - 2 M_D + M_D^T] \dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}^T [M_D^T - M_D] \dot{\theta}\end{aligned}$$

Dado que a matriz  $S = M_D^T - M_D$  é antisimétrica, i.e.  $S^T = -S$ , e portanto  $x^T S x = 0$ , tem-se que

$$\dot{\theta}^T (\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) - 2C(\theta, \dot{\theta})) \dot{\theta} = 0$$

