Controle de Manipuladores

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 11 de agosto de 2018

Controle de Movimento de Robôs

PROBLEMA: Determinar as forças generalizadas a serem desenvolvidas pelos atuadores das juntas como em funções do tempo de modo que uma tarefa desejada seja executada, satisfazendo especificações de transitório e de regime permanente.

Um exemplo simples é posicionar o manipulador numa postura desejada a partir de uma condição inicial genérica.

Casos principais:

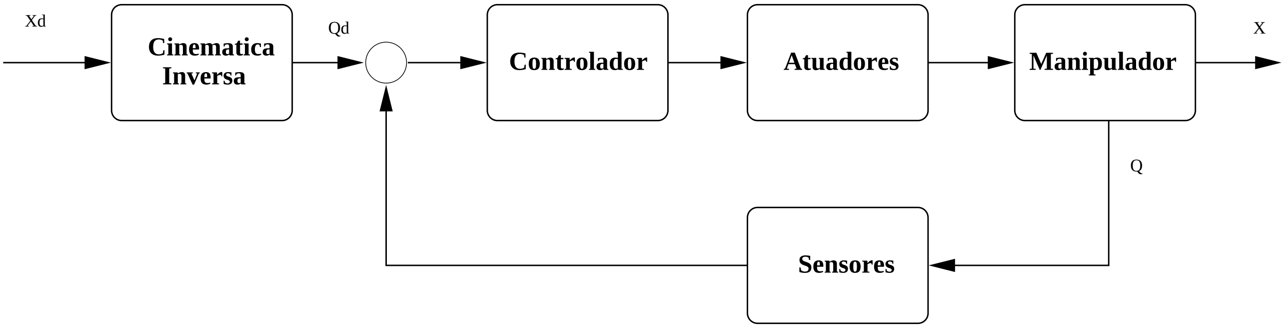
- movimento livre no espaço
- movimento com restrições/interação com forças do ambiente (contato)

Técnicas de controle para movimento livre

- Controle Cinemático (já foi abordado)
- Controle no espaço de juntas
  - Controle descentralizado
  - Controle centralizado
- Controle no espaço operacional (cartesiano)

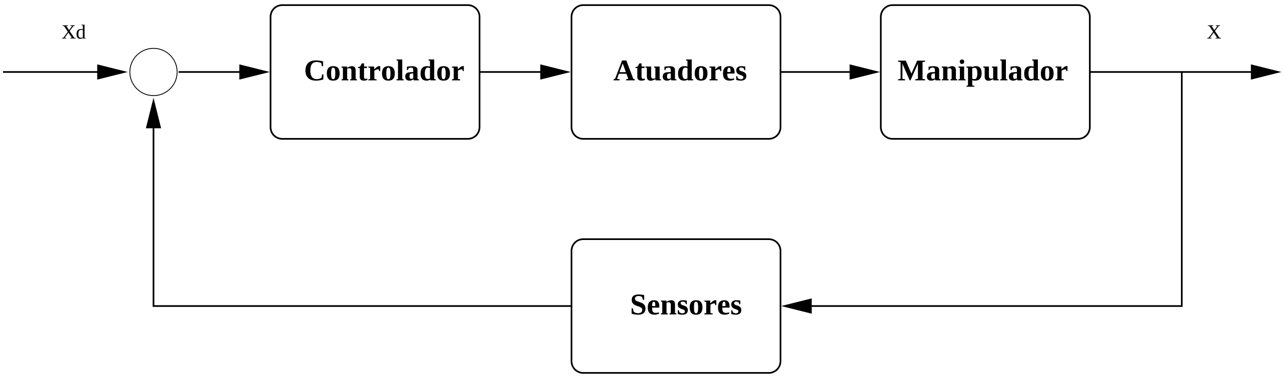
  (preparatória para o caso de movimento com restrições de força)

Esquema de controle 1



- Etapas do projeto: a trajetória de referência no espaço das juntas é calculada através da cinemática inversa utilizando a trajetória desejada no espaço operacional.
- Dificuldade: O posicionamento é indireto e sensível a incertezas do modelo cinemático, folgas de engrenagem, elasticidade...

Esquema de controle 2



- Vantagem: agir diretamente no Espaço Operacional.
- Desvantagem: As coordenadas cartesianas são em geral calculadas e portanto sensíveis a incertezas do modelo.
- Dificuldade: medir a posição no Espaço Espaço. Uma solução: visão...

Controle de Manipuladores

Considerando o modelo dinâmico de um manipulador:

$$M(\theta)\ \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) = \tau$$

o objetivo de controle é determinar τ tal que $\theta(t) \to \theta_d(t)$.

$\theta_d(t)$: trajetória desejada do manipulador no espaço de juntas.

$\theta_d(t)$: posteriormente serão apresentadas diferentes forma de gerar a trajetória desejada, que é chamado problema de planejamento de trajetória.

Controle Descentralizado

Utilizado quando existem grandes taxas de transmissão dos motores e velocidades baixas. Neste caso o sistema poderá ser escrito como:

$$\ddot{\theta}_m(t) = u_m(t) + d(t)$$

Este sistema (linear) é obtido ao considerar motores com reduções:

$$\theta_m = K_r\,\theta; \qquad \tau_m = K_r^{-1}\,\tau$$

Em geral $K_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonal. Quando $K_r >> 1$ podem ser utilizando motores de pequeno torque.
Além disto, considerando que $M(\theta)$ é exprimida como:

$$M(\theta) = \bar{M} + \Delta M(\theta)$$

onde $\bar{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz positiva, diagonal e constante, i.e. $\bar{M} = diag(\bar{m}_1, \cdots, \bar{m}_n) > 0$, $\bar{m}_i \in \mathbb{R}$.

Então considerando o modelo dinâmico do manipulador tem-se

$$\begin{aligned}
\tau_m &= K_r^{-1}\,\tau = K_r^{-1}\left[(\bar{M}+\Delta M)\,\ddot{\theta}+C\,\dot{\theta}+G\right] \\
&= K_r^{-1}\left[(\bar{M}+\Delta M)\,K_r^{-1}\,\ddot{\theta}_m+C\,K_r^{-1}\,\dot{\theta}_m+G\right] \\
&= K_r^{-1}\bar{M}K_r^{-1}\,\ddot{\theta}_m+K_r^{-1}\Delta M K_r^{-1}\,\ddot{\theta}_m+K_r^{-1}C K_r^{-1}\,\dot{\theta}_m+K_r^{-1}\,G
\end{aligned}$$

Então, o modelo dinâmico de um manipulador pode ser escrito como:

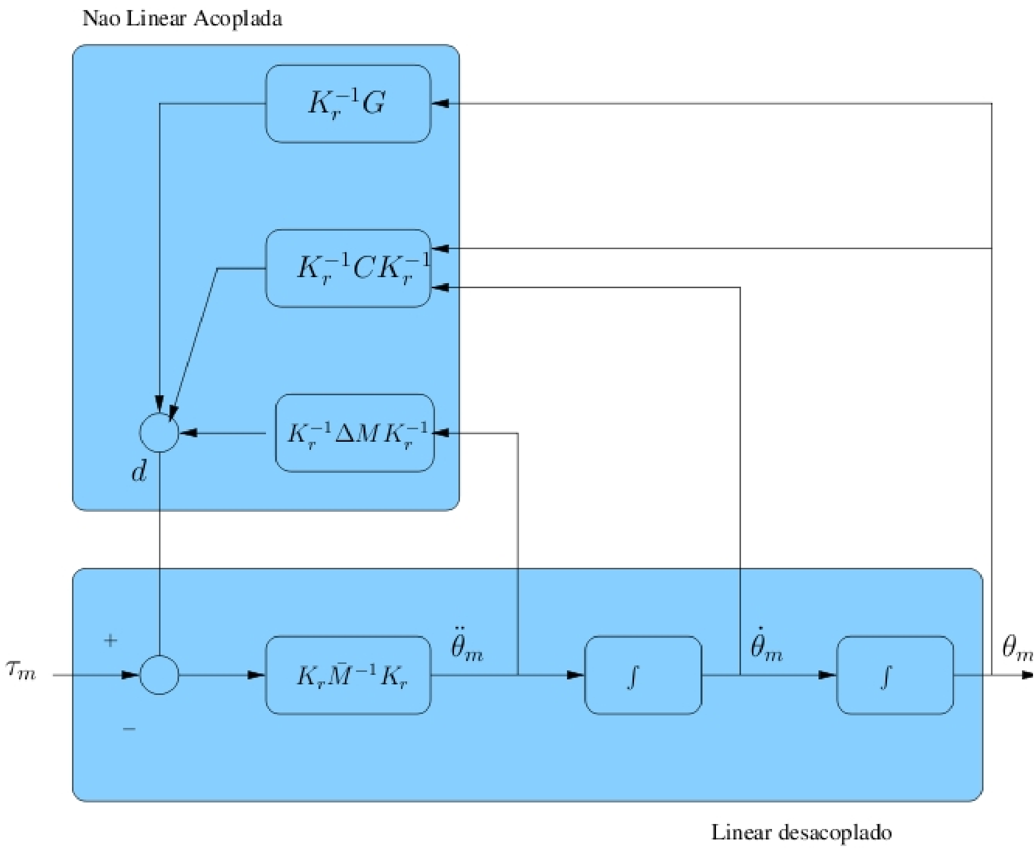
$$\tau_m = M_e\,\ddot{\theta}_m + d$$

onde

$$M_e = K_r^{-1}\bar{M}K_r^{-1};$$

e

$$d = K_r^{-1}\Delta M K_r^{-1}\,\ddot{\theta}_m+K_r^{-1}C K_r^{-1}\,\dot{\theta}_m+K_r^{-1}\,G$$



Para $K_r >> 1$ e velocidades baixas d é desprezível.

No caso de $d \approx 0$, o sistema pode ser controlado em forma descentralizada.

Dado que M_e é diagonal, o sistema é representando por um conjunto de n duplo integradores desacoplados.

Para $K_r >> 1$ e velocidades baixas, o sinal d pode ser considerado como uma pequena perturbação.

Desta forma uma lei de controle pode ser definida utilizando controle clássico: controladores PD, PID, P-PI, *Lead-Lag*.

Além disto, se a velocidade e aceleração desejada das juntas, $\dot{\theta}_d(t)$ e $\ddot{\theta}_d(t)$, são também conhecidas, pode ser adicionado ao sinal de controle um termo feedforward (FF) com esta informação.

Alguns exemplos de tais leis de controle são dados a seguir:

PD: $$\tau_m = K_p\,(\theta_d - \theta_m) - K_d\,\dot{\theta}_m$$

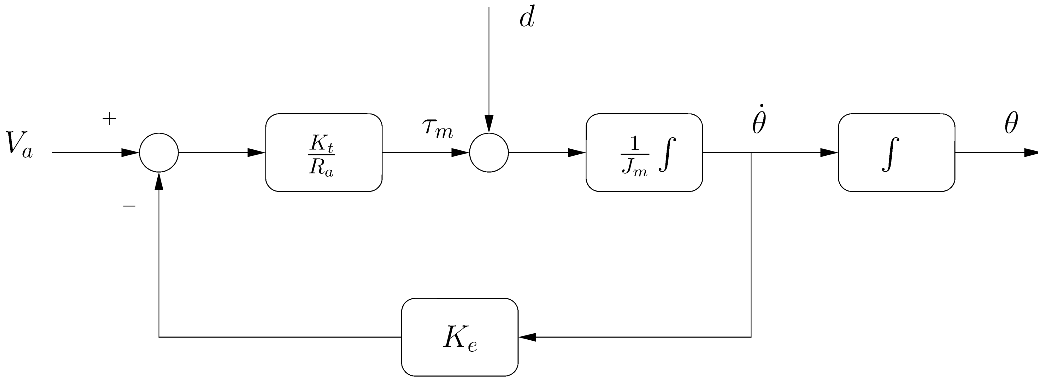
PID: $$\tau_m = K_p\,(\theta_d - \theta_m) - K_d\,\dot{\theta}_m + K_i \int (\theta_d - \theta_m)\,dt$$

P-PI: $$\tau_m = K_d\,e_2 + K_i \int e_2\,dt;$$

$$e_2 = K_p\,(\theta_d - \theta_m) - \dot{\theta}_m$$

PD + FF: $$\tau_m = K_p\,(\theta_d - \theta_m) - K_d\,\dot{\theta}_m + K_1\,\dot{\theta}_d + K_2\,\ddot{\theta}_d$$

No caso de manipuladores robóticos acionados com motores DC, o modelo deste tipo de motores pode ser incluído no projeto de controle passando o sistema a ser controlado por tensão V_a.



onde considerou-se que $L_a/R_a \approx 0$ e J_m: inércia do motor $+M_{ei}$.
O projeto de controle é realizado utilizando técnicas de controle clássico considerando o seguinte sistema:

$$\theta_m = \frac{1}{s\ (T_m s + 1)} \left[k_m\ V_a + \frac{T_m}{J_m}\ d \right]; \qquad T_m = \frac{R_a J_m}{k_v k_t},\ \ k_m = \frac{1}{k_v}$$

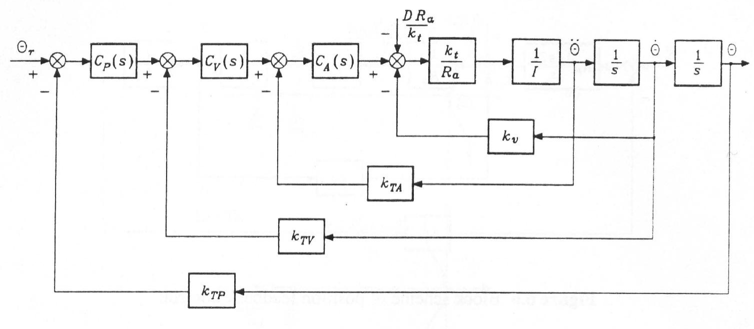
Voltar
Fechar

Controle Independente de Juntas

O projeto de controle deve levar em consideração uma rejeição efetiva da perturbação $d(t)$, que pode ser obtida considerando:

1. Um ganho proporcional alto antes da perturbação,
2. Uma ação integral para eliminar erro de estado estacionário.

Um esquema geral considera 3 malhas: posição, velocidade e aceleração

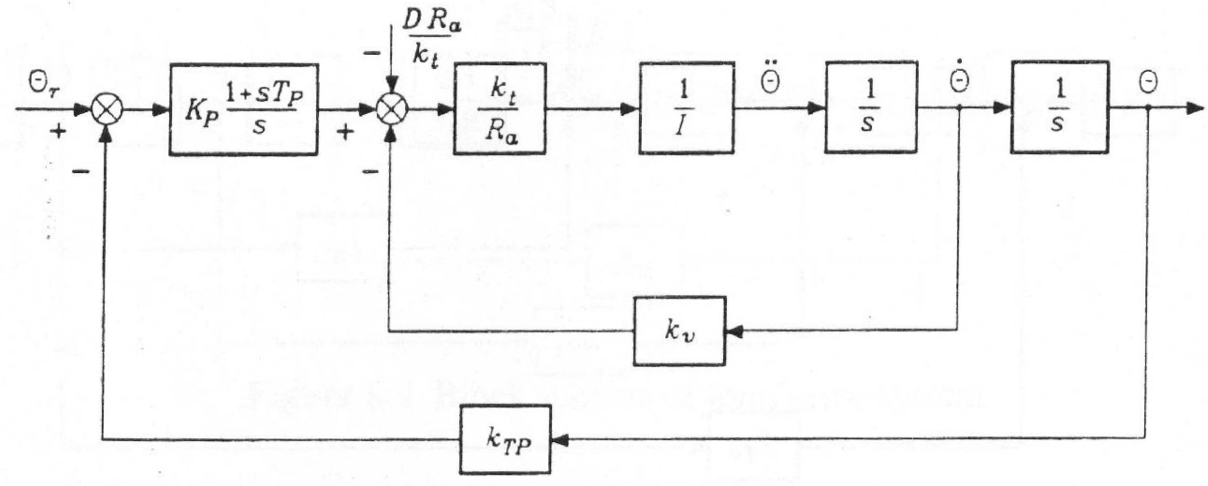


Dependendo das malhas ativas podem definidos diferentes esquemas:

Controle por Realimentação de Posição

Considera-se: $C_p(s) = K_p \, \frac{T_p s+1}{s}$ (controle PI)

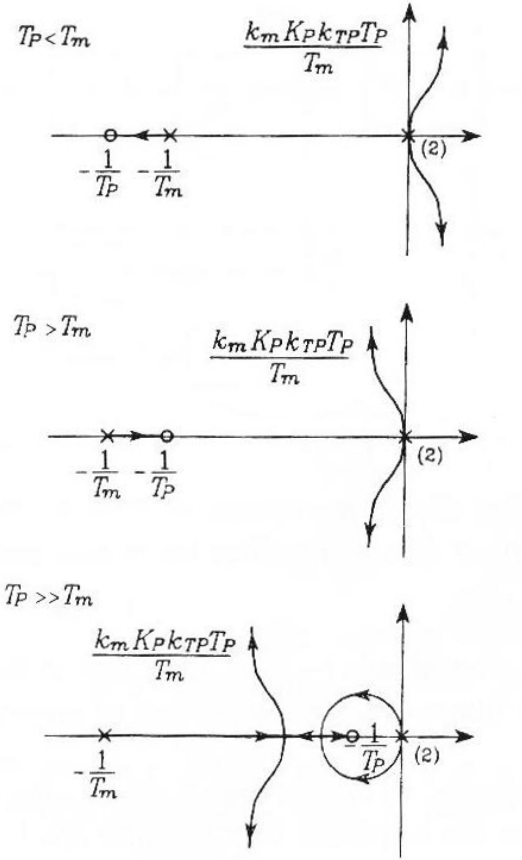
com $C_v(s) = C_a(s) = 1, \quad K_{TV} = K_{TA} = 0.$



A função de transferência de malha aberta para $k_{TP} = 1$ é dada por:

$$P(s) = \frac{k_m K_P \, (T_P \; s + 1)}{s^2 \; (T_m \; s + 1)}$$

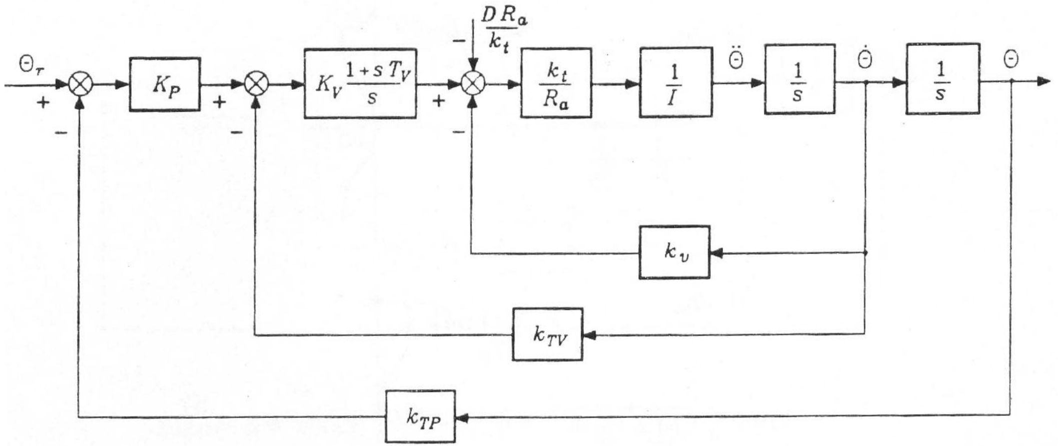
Dependendo da alocação do zero do controlador ($s = -1/T_p$) tem-se os seguintes lugares das raízes:



Realimentação de Posição e Velocidade

Considera-se: $C_p(s) = K_p$, $C_v(s) = K_v \, \frac{T_v s+1}{s}$ Controle P-PI

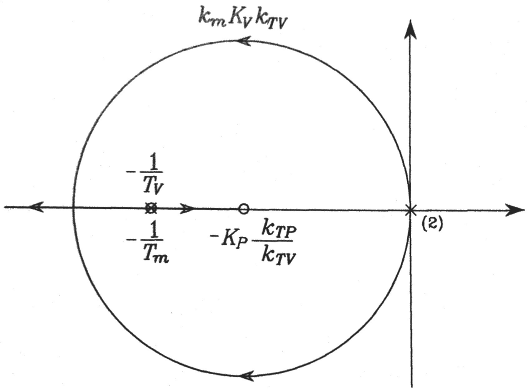
com $C_a(s) = 1$, $K_{TA} = 0$.



Reduzindo a malha de velocidade a uma malha de posição, a função de transferência de malha aberta para $k_{TP} = k_{TV} = 1$ é dada por:

$$P(s) = K_p K_v \, k_m \, \frac{(T_v \; s+1) \; (\frac{1}{K_p} \; s+1)}{s^2 \; (T_m \; s+1)}$$

Escolhendo $T_v = T_m$, o pólo do motor é cancelado, e o lugar da raízes pode ser determinado em função do ganho $k_m K_v$.



Com K_p pode-se determinar a alocação do zero e conseqüentemente confinar os pólos da malha fechada numa região do plano complexo.

A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_p}\ s + \frac{1}{k_m K_p K_v}\ s^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{w_n}\ s + \frac{1}{w_n^2}\ s^2}$$

Voltar
Fechar

Desta forma, dados w_n e ζ, pode-se determinar os ganhos do controlador:

$$K_v = \frac{2\zeta w_n}{k_m}$$
$$K_p K_v = \frac{w_n^2}{k_m}$$

Por outro lado, a função de transferência da perturbação é dada por

$$\frac{\Theta_m(s)}{D(s)} = -\frac{\frac{s \ R_a}{k_t K_p K_v \ (1+sT_m)}}{1 + \frac{1}{K_p} \ s + \frac{1}{k_m K_p K_v} \ s^2}$$

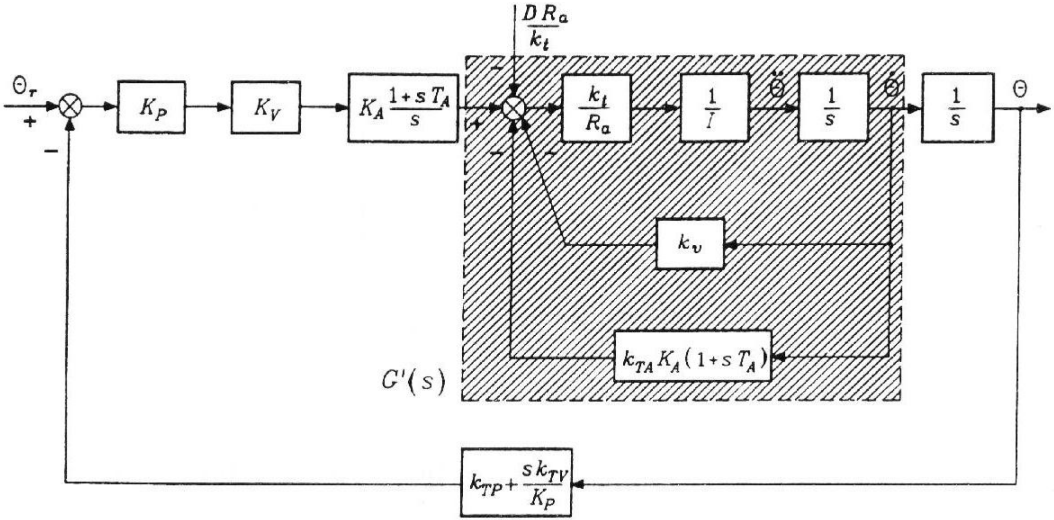
onde pode ser visto que a perturbação é atenuada por um fator de $K_p K_v$ que é determinado anteriormente.

O zero em $s = 0$ permite rejeitar perturbações tipo degrau, entanto que a dinâmica desta malha é governada pela constante de tempo

$$T_R = \max\left\{T_m, \frac{1}{\zeta\omega_n}\right\}$$

Realimentação de Posição, Velocidade e Aceleração

Considera-se: $C_p(s) = K_p$, $C_v(s) = K_v$, $C_a(s) = K_a \, \frac{T_a s+1}{s}$.



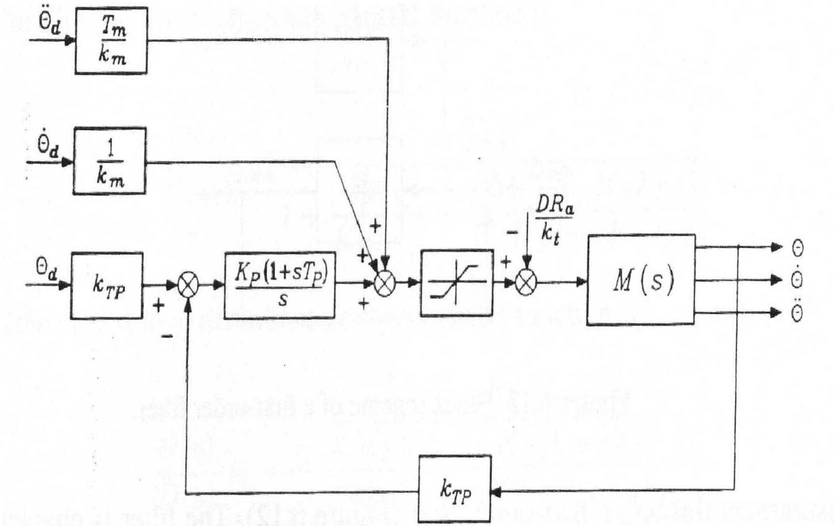
Ver análise no livro Siciliano et. al.

Em particular a dificuldade deste esquema é a medição da aceleração.

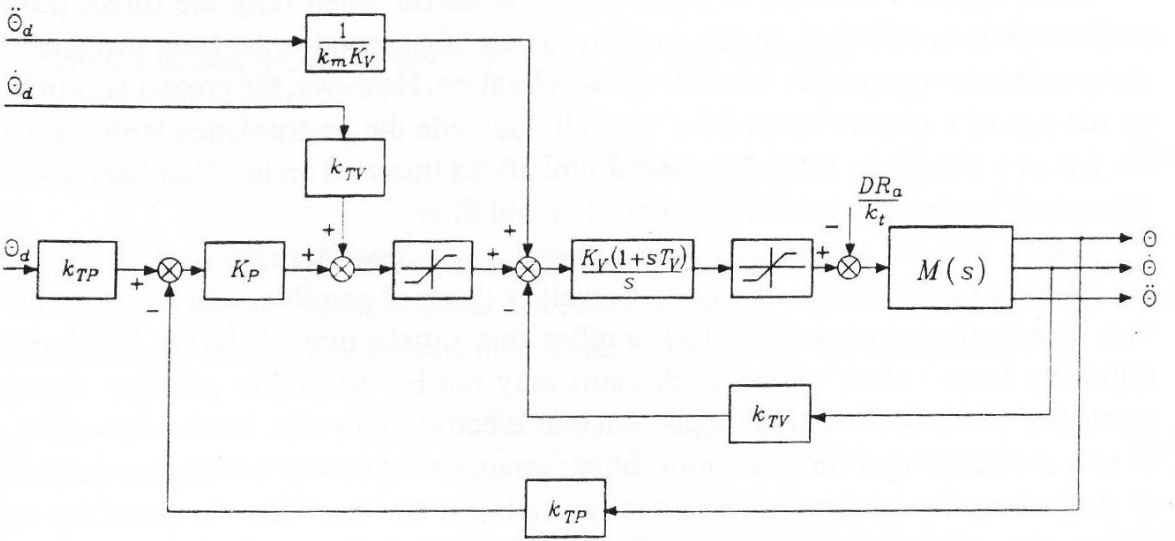
Controle Indep. de Juntas + feedforward

Quando é desejado seguir trajetórias com velocidades/acelerações altas, é necessário adicionar feedforward para garantir o desempenho.

Realimentação de Posição + Feedforward

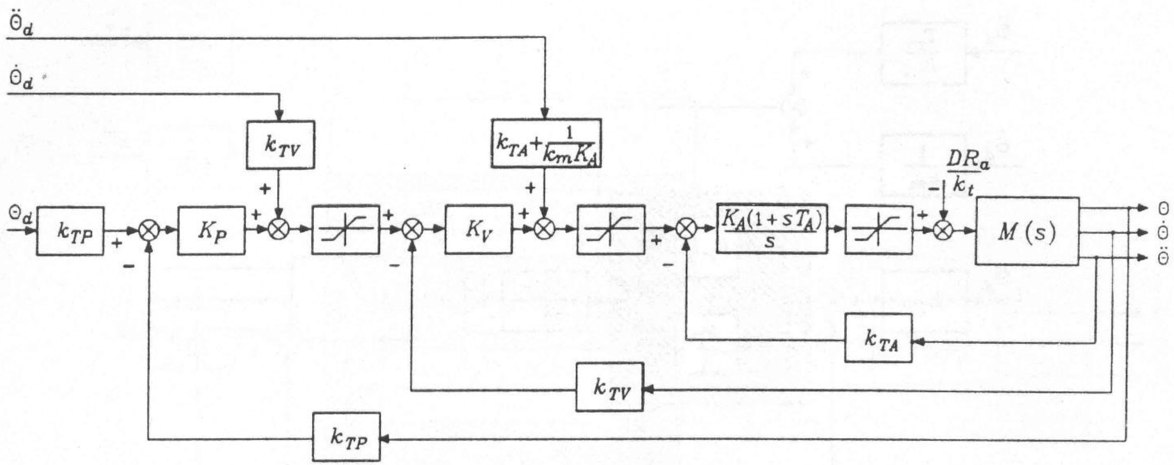


Realimentação de Posição e Velocidade + Feedforward



Voltar
Fechar

Realimentação de Posição, Velocidade e Aceleração + FF



Controle Centralizado

Controle PD + compensação da gravidade

Hipóteses: problema de regulação e conhecimento de $G(\theta)$.

O objetivo de controle é projetar τ tal que $\tilde{\theta} = \theta_d - \theta \to 0$ com $t \to \infty$.

Projeto por Lyapunov:

$$2V = \dot{\theta}^T M(\theta)\,\dot{\theta} + \tilde{\theta}^T K_p\,\tilde{\theta} > 0; \qquad K_p = K_p^T > 0$$

Diferenciando com respeito ao tempo ao longo das soluções de $M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + G = \tau$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{\theta}^T M(\theta)\, \ddot{\theta} + \frac{1}{2}\, \dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\, \dot{\theta} - \dot{\theta}^T K_p\, \tilde{\theta} \\
&= \dot{\theta}^T [\tau - C\dot{\theta} - G] + \frac{1}{2}\, \dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\, \dot{\theta} - \dot{\theta}^T K_p\, \tilde{\theta} \\
&= \dot{\theta}^T [\tau - K_p\, \tilde{\theta} - G] + \frac{1}{2}\, \underbrace{\dot{\theta}^T\, [\dot{M}(\theta) - 2C]\, \dot{\theta}}_{=0}
\end{aligned}
$$

Com $N = \dot{M} - 2C$ satisfazendo $\dot{\theta}^T N \dot{\theta} = 0$, para

$$
\tau = K_p\, \tilde{\theta} - K_d\, \dot{\theta} + G(\theta)
$$

tem-se

$$
\dot{V} = -\dot{\theta}^T K_d\, \dot{\theta} \leq 0
$$

Pelo princípio de Lasalle pode-se provar que o sistema é assintoticamente globalmente estável, i.e. $\tilde{\theta} \to 0$ com $t \to \infty$.

Controle PD + Torque Computado (Linearização Global)

Hipóteses: problema de seguimento de trajetórias, conhecimento total de M, C, G e $\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d$.

Cancelando a não linearidades com

$$\tau = M(\theta)\ [\ddot{\theta}_d + u] + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta)$$

obtém-se o sistema em malha fechada ($\tilde{\theta} = \theta_d - \theta$):

$$\ddot{\tilde{\theta}} = u$$

então com a lei de controle:

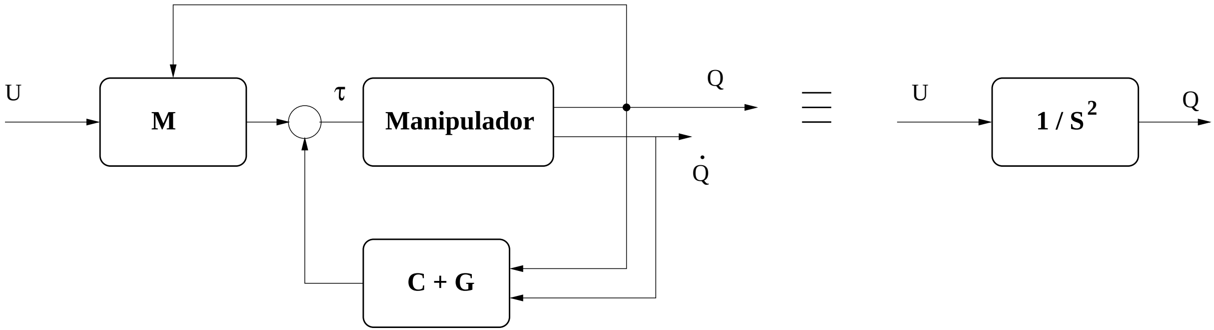
$$u = K_p\, \tilde{\theta} + K_d\, \dot{\tilde{\theta}}$$

temos que o erro do sistema é dado por:

$$\ddot{\tilde{\theta}} + K_d\, \dot{\tilde{\theta}} + K_p\, \tilde{\theta} = 0$$

Então para $K_p > 0$ e $K_d > 0$, tem-se que o sistema é globalmente exponencialmente estável.

Torque Computado = Linearização por Realimentação



PD + Torque Computado: conhecimento parcial

Hipóteses: problema de seguimento de trajetórias, conhecimento $\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d$ e conhecimento parcial de M, C, G.

O controlador pode no máximo pode cancelar aproximadamente as não linearidades através dos valores nominais $\hat{M}(\theta), \hat{C}(\theta, \dot{\theta}), \hat{G}(\theta)$ (indicados com o acento circunflexo) de $M(\theta), C(\theta, \dot{\theta}), G(\theta)$.

Desta forma o sinal de controle é dado por:

$$\tau = \hat{M}(\theta)\ u + \hat{n}(\theta, \dot{\theta}); \qquad \hat{n}(\theta, \dot{\theta}) = \hat{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \hat{G}(\theta)$$

e o sistema em malha fechado resultante é dado por:

$$M\ \ddot{\theta} + n = \hat{M}\ u + \hat{n}$$

Com a invertibilidade de M, tem-se (com $\tilde{n} = \hat{n} - n$)

$$\ddot{\theta} = u + (M^{-1}\hat{M} - I)\ u + M^{-1}\tilde{n} = u + \eta$$

onde

$$\eta = (M^{-1}\hat{M} - I)\ u + M^{-1}\ \tilde{n}$$

Assim ficamos com apenas:

$$\ddot{\tilde{\theta}} = u + \eta(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \Delta M, \Delta C, \Delta G)$$

Assim as opções de controle (u) são: PID, Estrutura variável, H_∞, etc.

Controle baseado em passividade

É sabido que o manipulador é passivo de $\tau \mapsto \dot{\theta}$.

Desta forma, em vez de utilizar uma lei de controle que lineariza o sistema, Slotine e Li propõem uma lei de controle que preserva a passividade do sistema com respeito a uma variável s (i.e., passivo de $\tau \mapsto s$), função dos erros de seguimento $\tilde{\theta} = \theta - \theta_d$.

Então considerando o modelo dinâmico do manipulador

$$M(\theta)\,\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\,\dot{\theta} + G(\theta) = Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\,\Pi = \tau$$

Definindo

$$s = \dot{\tilde{\theta}} + \Lambda\, \tilde{\theta}; \qquad \Lambda = \Lambda^T > 0$$

e uma velocidade de referência auxiliar:

$$\dot{\theta}_r = \dot{\theta}_d - \Lambda\, \tilde{\theta}$$

tem-se que

$$s = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r \qquad \dot{s} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_r \qquad \ddot{\theta}_r = \ddot{\theta}_d - \Lambda\dot{\tilde{\theta}}$$

Desta forma, re-escrevendo o modelo dinâmico em função de s tem-se

$$M(\theta)\, \dot{s} + C(\theta, \dot{\theta})\, s = \tau - M(\theta)\, \ddot{\theta}_r - C(\theta, \dot{\theta})\, \dot{\theta}_r - G(\theta))$$

Devido à propriedade de linearidade paramétrica tem-se que

$$M(\theta)\, \ddot{\theta}_r + C(\theta, \dot{\theta})\, \dot{\theta}_r + G(\theta) = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\, \Pi$$

a equação dinâmica do manipulador pode ser escrita como:

$$M(\theta)\, \dot{s} + C(\theta, \dot{\theta})\, s = \tau - Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\, \Pi$$

Supondo que o vetor de parâmetros Π é completamente conhecido, e com a escolha de uma lei de controle

$$\tau = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \Pi - K_d\ s; \qquad K_d = K_d^T > 0$$

tem-se que o sistema em malha fechada é dado por

$$M(\theta)\ \dot{s} + (C(\theta, \dot{\theta}) + K_d)\ s = 0$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio $s = 0$ pode ser provada via Lyapunov, propondo a candidata a função de Lyapunov:

$$2V = s^T M s$$

Derivando com respeito ao tempo tem-se:

$$\dot{V} = s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s = s^T[-K_d s - C s] + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s$$

considerando uma dada representação de $C(\theta, \dot{\theta})$ tem-se

$$\dot{V} = -s^T K_d s \underbrace{-s^T C s + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s}_{=0}$$

e portanto

$$\dot{V} = -s^T K_d s < 0$$

o que pelo teorema de Lyapunov implica que $s \to 0$ com $t \to \infty$.

Dado que a relação entre $\tilde{\theta}$ e s é dada por uma função de transferência estritamente própria e estável,

$$\tilde{\theta} = H(p)\ s; \qquad H(p) = \frac{1}{p + \Lambda}$$

onde p e o operador diferencial, tem-se que $\tilde{\theta}$ também tende para zero com $t \to \infty$.

A estabilidade de Lyapunov pode também ser rigorosamente demonstrada utilizando a função $2V = s^T M s + \beta\ \tilde{\theta}^T K \tilde{\theta}$.

Controle Robusto

Considere agora o caso mais realista em que os parâmetros Π do manipulador são apenas conhecidos nominalmente, i.e., tem se conhecimento dos parâmetros nominais Π^0 com

$$\Pi = \Pi^0 + \tilde{\Pi}$$

onde é conhecido um limite superior ρ para $\tilde{\Pi}$, $\|\tilde{\Pi}\| \leq \rho$.
Uma lei de controle robusta à incertezas paramétricas, baseada em estrutura variável, é dada por:

$$\tau = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \Pi^0 - K\ sgn(s)$$

onde $K \in \mathbb{R}, K > 0$.

A estabilidade do sistema pode ser provada utilizando a mesma função de Lyapunov do caso anterior ($2V = s^T M s$), sendo que a sua derivada é dada por

$$\dot{V} = s^T[\tau - Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \Pi] = -s^T Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \tilde{\Pi} - s^T K\ sgn(s)$$

sendo que $\dot{V}$ satisfaz a seguinte condição:

$$\dot{V} \leq \|s\| \left\| Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\tilde{\Pi} \right\| - K \|s\|$$

então, se $K \geq \left\| Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\tilde{\Pi} \right\| + \eta$, onde η é uma constante estritamente positiva, a seguinte condição é satisfeita:

$$\dot{V} \leq -\eta \|s\| < 0$$

A desigualdade acima é conhecida como condição de escorregamento na teoria de estrutura variável, pela qual a superfície $s = 0$ é atingida em tempo finito, e uma vez nela as trajetórias do sistema permanecem na superfície, e portanto $\tilde{\theta}$ tende para zero exponencialmente.

Uma outra opção para realizar um controle robusto é a utilização de uma lei de controle a estrutura variável baseada em Vetor Unitário (*Unit Vector*):

$$\tau = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r) \left[\Pi^0 - \rho \, \frac{Y^T s}{\|Y^T s\|} \right]$$

Controle Adaptativo

Aqui será apresentada uma versão adaptativa do esquema de controle baseado em passividade. Neste caso o problema pode ser solucionado sem nenhum conhecimento *a priori* dos parâmetros do manipulador.

O problema de controle adaptativo considera o projeto de uma lei de controle para os torques e uma lei de estimação para os parâmetros desconhecidos , tal que $\tilde{\theta} \to 0$.

Para isto define-se o erro de estimação de parâmetros $\tilde{\Pi} = \hat{\Pi} - \Pi$, onde Π é o vetor constante de parâmetros desconhecidos e $\hat{\Pi}$ é o vetor de parâmetros estimado.

Dado o modelo dinâmico de um manipulador:

$$M(\theta)\ \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) = Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\ \Pi = \tau$$

suponha que não existe conhecimento dos parâmetros Π, então levando em conta que:

$$M(\theta)\ \ddot{\theta}_r + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta}_r + G(\theta) = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \Pi$$

A lei de controle pode ser colocada como $(K_d = K_d^T > 0)$:

$$\tau = \hat{M}\ \ddot{\theta}_r + \hat{C}\ \dot{\theta}_r + \hat{G} - K_d\ s = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \hat{\Pi} - K_d\ s$$

onde $\hat{M}, \hat{C}, \hat{G}, \hat{\Pi}$ é alguma estimação dos parâmetros do manipulador. Considerando que $\hat{\Pi}(t)$ vai ser estimada on-line, podemos fazer um projeto por Lyapunov.

Desta forma o sistema em malha fechada é dado por

$$M(\theta)\ \dot{s} + (C(\theta, \dot{\theta}) + K_d)\ s = Y(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_r, \ddot{\theta}_r)\ \tilde{\Pi}$$

onde $\tilde{\Pi} = \hat{\Pi} - \Pi$ é o erro paramétrico.

Propondo uma candidata a função de Lyapunov:

$$2V = s^T M s + \tilde{\Pi}^T \Gamma \, \tilde{\Pi}; \qquad \Gamma = \Gamma^T > 0$$

e diferenciando no tempo, tem-se

$$\dot{V} = s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} \, s^T \dot{M} s + \tilde{\Pi}^T \Gamma \, \dot{\tilde{\Pi}}$$

considerando o sistema em malha fechada e a propriedade $x^T(\dot{M} - 2C)x = 0$, tem-se:

$$\dot{V} = s^T [Y\tilde{\Pi} - K_d s] + \tilde{\Pi}^T \Gamma \dot{\tilde{\Pi}} = s^T Y \tilde{\Pi} - s^T K_d s + \tilde{\Pi}^T \Gamma \dot{\tilde{\Pi}}$$

Re-arranjando $\dot{V}$ podemos intuir uma lei de adaptação para $\hat{\Pi}$:

$$\dot{V} = -s^T K_d s + \tilde{\Pi}^T Y^T s + \tilde{\Pi}^T \Gamma \dot{\tilde{\Pi}} = -s^T K_d s + \tilde{\Pi}^T [Y^T s + \Gamma \dot{\tilde{\Pi}}]$$

Pode se observar que definindo apropriadamente a lei de adaptação para $\hat{\Pi}$, o último termo é cancelado:

$$\dot{\tilde{\Pi}} = -\Gamma^{-1} Y^T s$$

Com esta lei de adaptação tem-se que:

$$\dot{V} = -s^T K_d s \leq 0$$

Portanto para provar a estabilidade do sistema tem que ser aplicado o lema de Barbalat, com o que prova-se que $s \to 0$ para $t \to \infty$, podendo estender a conclusão para $\tilde{\theta}$.

Controle no Espaço Operacional

Dado que o modelo no espaço operacional:

$$\bar{M}\ \ddot{x} + \bar{C}\ \dot{x} + \bar{G} = f$$

tem todas as propriedades do modelo no espaço das juntas, todos os controles projetados anteriormente podem ser facilmente implementados no espaço operacional.

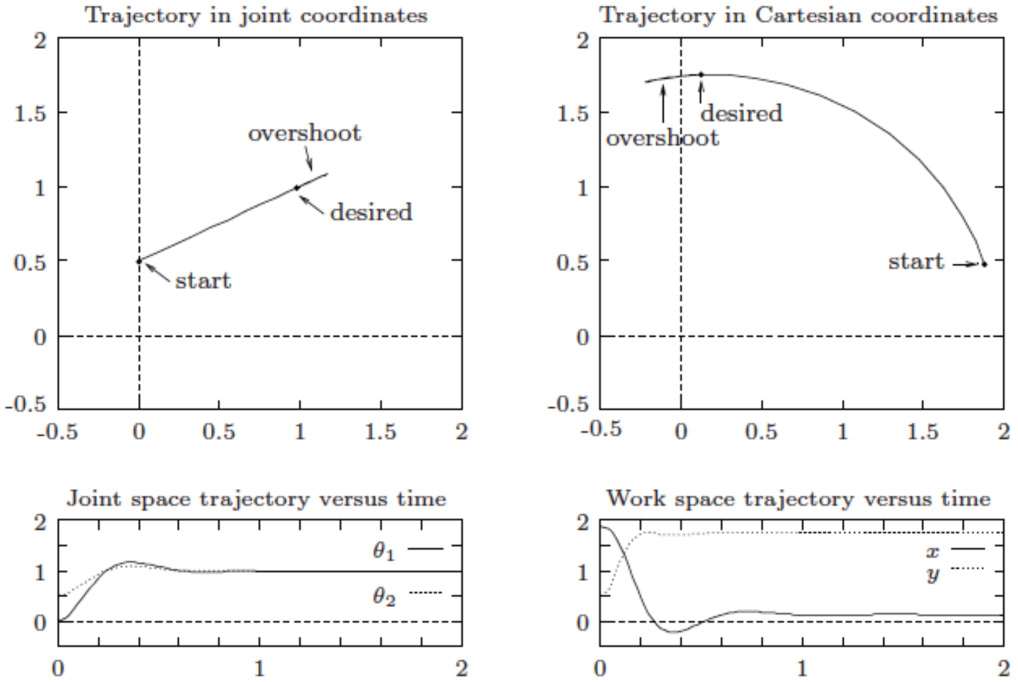
Comparison of joint space and workspace controllers

To illustrate some of the differences between implementing a controller in joint space versus workspace, we consider the control of a planar two degree of freedom robot.

We take as our workspace variables the xy position of the end-effector.

First it is considered the step response of a computed torque control law written in joint coordinates:

$$\tau = M(\theta)\ [K_p\ \tilde{\theta} + K_d\ \dot{\tilde{\theta}}] + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta)$$



Note that the trajectory of the end-effector, shown on the right, follows a curved path.

The time response of the joint trajectories is a classical linear response for an underdamped mechanical system.

Now it is considered the step response of a computed torque control law written in workspace coordinates:

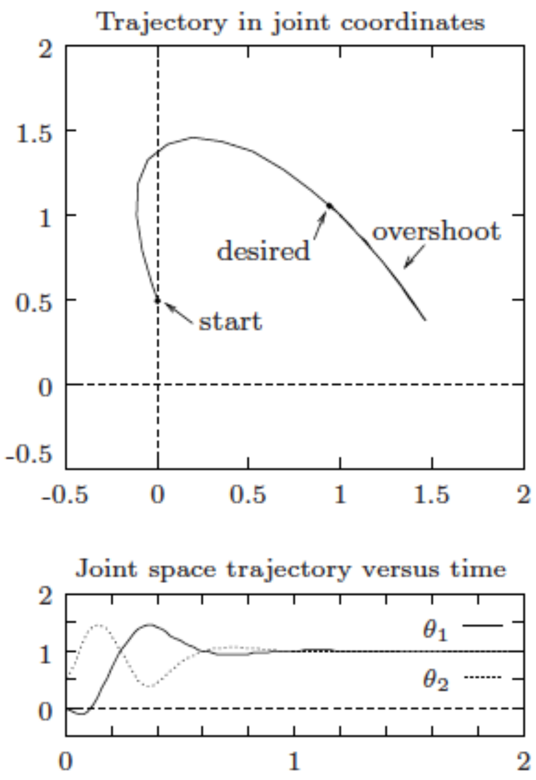
$$f = \bar{M}(x)\ [K_p\ \tilde{x} + K_d\ \dot{\tilde{x}}] + \bar{C}(x, \dot{x})\ \dot{x} + \bar{G}(x)$$

with

$$\bar{M} = (J M^{-1} J^T)^{-1}; \quad \bar{C}\dot{x} = \bar{M} J M^{-1} C \dot{\theta} - \bar{M} \dot{J} \dot{\theta}; \quad \bar{G} = \bar{M} J M^{-1} G$$

and

$$\tau = J^T(\theta)\ f$$



Now the trajectory of the end-effector, including the overshoot, follows a straight line in the workspace and a curved line in the joint space.