Introdução à Robótica

http://www.coep.ufrj.br/gscar

Controle Cinemático

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 1 de agosto de 2018

Controle Cinemático

Considera-se o problema de controle cinemático de um manipulador robótico.

Considera-se que a dinâmica do manipulador pode ser desprezada.

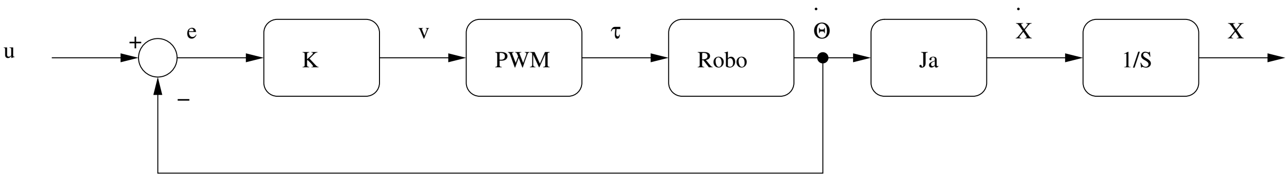
Esta hipótese é aceitável para manipuladores que apresentam:

- elevados fatores de redução nas engrenagens (gear ratio)
- quando baixas velocidades são utilizadas durante a realização de tarefas.
- existe uma malha de controle de velocidade de alto desempenho para cada junta

Considere o sistema dado pela cinemática diferencial:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(\theta)\ \dot{\theta}$$

Então, considerando que a maioria dos manipuladores geralmente possuem uma malha de controle de velocidade em nível de juntas:



para uma entrada $u = \dot{\theta}_d$ e um controle de alto ganho, *i.e.*, $K \to \infty$, tem-se que $e \to 0$ e conseqüentemente

$$u \approx \dot{\theta}$$

Portanto, o movimento do manipulador pode ser descrito por

$$\dot{\theta}_i = u_i \,, \quad i = 1, \cdots, n \,,$$

onde u_i é um sinal de controle de velocidade aplicado ao motor da *i*-ésima junta.

Então, o sistema de controle pode ser considerado como:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \approx J(\theta)\; u$$

Problema de Regulação

O objetivo de controle é determinar $u(t)$ que leve a configuração do manipulador $\{p(t), R(t)\}$ para uma configuração desejada $\{p_d, R_d\}$.

Para isto tem que ser definida uma métrica do erro.

Para a posição podemos utilizar a norma Euclidiana:

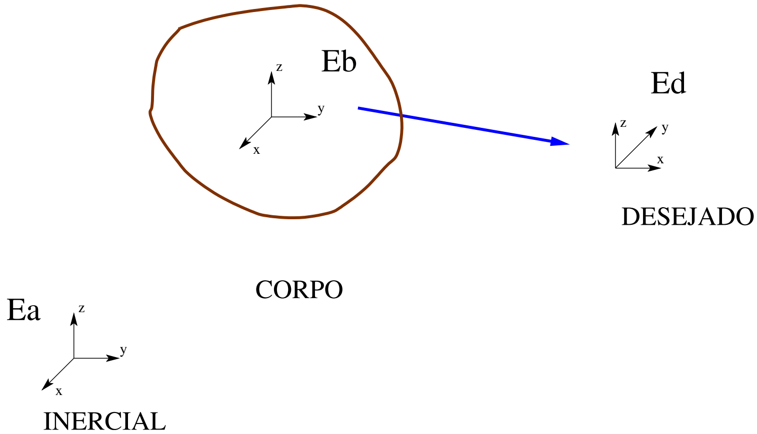
$$e_p = \frac{1}{2} \|p - p_d\|^2 , \qquad \dot{e}_p = (p - p_d)^T \dot{p} = e_p^T \, \dot{p}$$

E para a orientação $R \in SO(3)$?

Erro de Orientação

Para abordar o problema de controle de atitude de um corpo rígido temos que reconsiderar a definição do erro de orientação.

Considere



$$R_{ab} = \bar{E}_a^* \ \bar{E}_b \quad \text{e} \quad R_{ad} = \bar{E}_a^* \ \bar{E}_d$$

Objetivo de Controle: $\bar{E}_B \longrightarrow \bar{E}_D$.

Voltar
Fechar

Não é aconselhável utilizar $e = R_{ab} - R_{ad}$ dado que $e \notin SO(3)$ perdendo todas as propriedades deste grupo $(SO(3))$.

O erro de orientação pode ser representado por uma matriz de erro de orientação $R_e \in SO(3)$, que pode ser definida de acordo com os seguintes enfoques:

1. Enfoque Inercial:

$$e_1 = R_{ab}\, R_{ad}^T = \bar{E}_a^* \bar{E}_b\, \bar{E}_d^* \bar{E}_a$$

   Neste caso $e_1 = I \Rightarrow \bar{E}_b = \bar{E}_d$.

2. Enfoque do Corpo:

$$e_2 = R_{ad}^T\, R_{ab} = \bar{E}_d^* \underbrace{\bar{E}_a\, \bar{E}_a^*}_{I} \bar{E}_b = R_{db} = R_{bd}^T$$

   Neste caso $e_2 = I \Rightarrow R_{db} = I \Rightarrow \bar{E}_b = \bar{E}_d$.

Voltar
Fechar

Do ponto de vista de controle, considerando $R_{ad} = cte$ (problema de regulação) a equação do dinâmica do erro é dada por:

1. Enfoque Inercial:

$$\dot{e}_1 = \dot{R}_{ab}\, R_{ad}^T = \omega_a \times \underbrace{R_{ab} R_{ad}^T}_{e_1} = \omega_a \times e_1$$

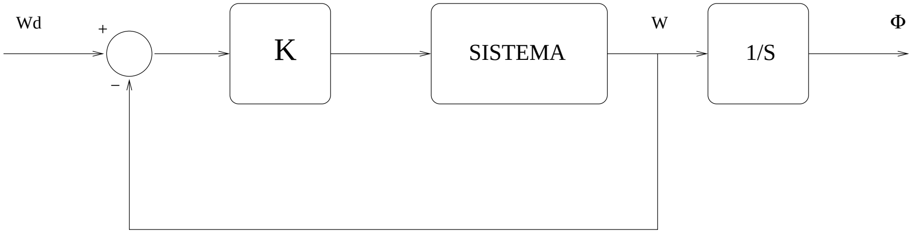
2. Enfoque do Corpo:

$$\dot{e}_2 = R_{ad}^T \dot{R}_{ab} = R_{ad}^T\, \omega_a \times R_{ab} = \underbrace{R_{ad}^T R_{ab}}_{e_2} \underbrace{R_{ab}^T \omega_a \times R_{ab}}_{(R_{ab}^T \omega_a)\times} = e_2\, \omega_b \times$$

Para outras definições de erro de orientação no contexto de controle vide "The Attitude Control Problem", J.T. Wen and K. Kreutz-Delgado, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 36, No 10, pp. 1148-1162, October 1991.

Controle de Atitude de um Corpo

Considere um grau de liberdade de um corpo rígido



Neste caso, se o ganho $K \to \infty$ tem-se que $\omega_d \approx \omega$ portanto podemos considerar ω_d sendo o sinal de controle do sistema, i.e. $u = \omega_d$.
Desta forma o sistema de controle tem a seguinte forma

$$\dot{R} = \omega \times R \approx \omega_d \times R = u \times R$$

ou se for utilizada uma representação ϕ da orientação R tem-se

$$\dot{\phi} = J_R(\phi)\ \omega \approx J_R(\phi)\ \omega_d = J_R(\phi)\ u$$

Voltar
Fechar

Considerando uma representação mínima da orientação $\phi(t) \in \mathbb{R}^3$, tem-se que $J_R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, e o objetivo de controle é dado por:

$$\phi(t) \to \phi_d(t) \qquad e = \phi_d - \phi \to 0 \text{ para } t \to \infty$$

Com isto, a dinâmica do erro é dada por:

$$\dot{e} = \dot{\phi}_d - J_R(\phi)\, u$$

Desde que, J_R seja não singular, uma lei de controle dada por:

$$u = (J_R(\phi))^{-1}\, \bar{u}$$

lineariza o sistema do erro, i.e.,

$$\dot{e} = \dot{\phi}_d - \bar{u}$$

sendo que $\bar{u}$ pode ser escolhido como proporcional + feedforward:

$$\bar{u} = \dot{\phi}_d + K\,(\phi_d - \phi) = \dot{\phi}_d + K\, e$$

O sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{e} + Ke = 0$$

Para $K > 0$ o sistema será exponencialmente estável,

$$e(t) = e^{-Kt}\, e(0)$$

Nota: para uma outra representação da orientação, e.g. quaternions, o Jacobiando da representação não é quadrado. Com isto uma otra estratégia de controle tem que ser utilizada. (vide Projeto No 2).

Controle Cinemático de Manipuladores

O sistema de controle é dado por

$$\dot{x} = J_a(\theta)\ \dot{\theta} = J_a(\theta)\ u$$

O objetivo de controle é dado por:

$$x \to x_d(t) \qquad e = x_d - x \to 0 \text{ para } t \to \infty$$

Com isto, a dinâmica do erro é dada por:

$$\dot{e} = \dot{x}_d - J_a(\theta)\ u$$

Considerando $J_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, uma lei de controle dada por:

$$u = J_a(\theta)^{-1}\ \bar{u}$$

lineariza o sistema, i.e.,

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \bar{u}$$

sendo que $\bar{u}$ pode ser escolhida como:

$$\bar{u} = \dot{x}_d + K\,(x_d - x)$$

O sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{e} + Ke = 0$$

Para $K > 0$ o sistema será exponencialmente estável,

$$e(t) = e^{-Kt}\,e(0)$$

Obsservação: A velocidade desejada $\dot{x}_d$ é necessária no caso de seguimento de trajetórias, para evitar a existência de um erro de estado estacionário. No caso de $\dot{x}_d$ não ser disponível, ao invés de um controle proporcional, poderiam ser utilizadas leis de controle do tipo PI ou PID.

Controle de manipuladores redundantes

Neste caso o número de juntas n é maior que o número de graus de liberdade da tarefa m, portanto

$$\dot{x} = J(\theta)\ \dot{\theta}; \qquad J(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Pode-se utilizar a pseudo-inversa de J,

$$J^{\dagger} = J^T (J J^T)^{-1} \qquad J J^{\dagger} = I$$

onde o posto de J é igual ao posto de $J J^T$.
Uma lei de controle que leva $x \rightarrow x_d$ é dada por

$$u = J^{\dagger}(\theta)\ [\dot{x}_d + K\ (x_d - x)]$$

Em malha fechada o erro $e = x_d - x$ é governado por

$$\dot{e} + K\ e = 0$$

então para $K > 0$ o sistema é estável.

Observando que $(I - J^{\dagger}J)$ expande o espaço nulo de J, i.e.,

$$J\,(I - J^{\dagger}J) = (J - \underbrace{JJ^{\dagger}}_{I}J) = 0$$

pode-se propor a seguinte lei de controle:

$$u = J^{\dagger}(\theta)\,[\dot{x}_d + K\,(x_d - x)] + (I - J^{\dagger}J)\,\mu$$

A equação do erro continuá sendo

$$\dot{e} + Ke = 0$$

A variável μ é um grau de liberdade adicional do controlador que pode ser utilizado para maximizar uma função objetivo $w(\theta) > 0$:

$$\mu = K_0 \left(\frac{\partial w(\theta)}{\partial \theta}\right)^T$$

A função $w(\theta)$ pode ser escolhida de diferentes formas:

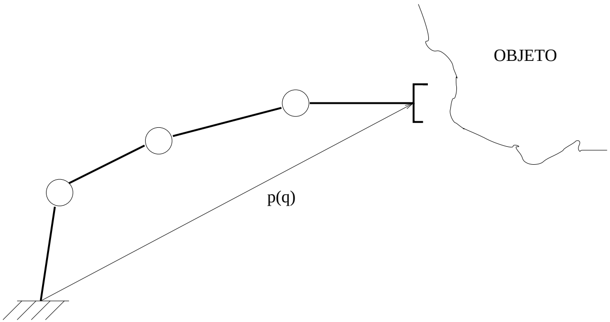
1. Manipulabilidade: $w(\theta) = \sqrt{det(JJ^T)}$
2. Limites das Juntas: $\theta_{im} \leq \theta_i \leq \theta_{iM}$,

$$w(\theta) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta_i - \bar{\theta}_i}{\theta_{iM} - \theta_{im}}\right)^2$$

   onde $\bar{\theta}_i$ é a média entre θ_{iM} e θ_{im}.

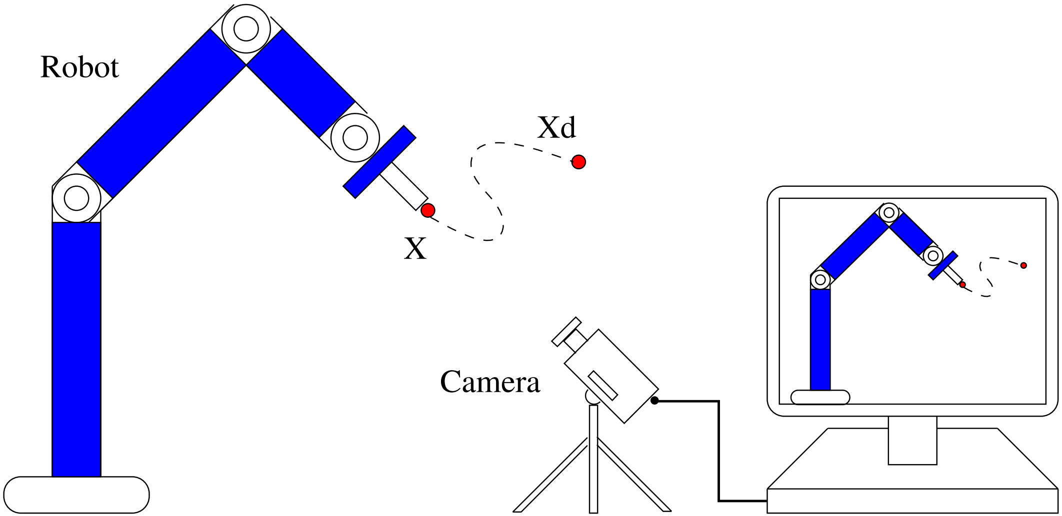
3. Distância a obstáculos:

$$w(\theta) = \max \|p(\theta) - O\|$$

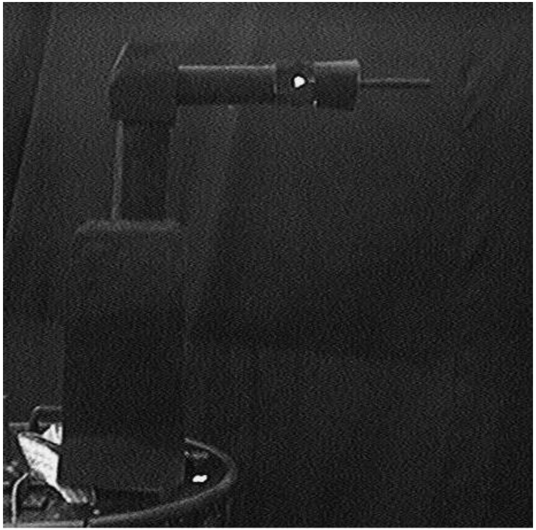


Servo-Visão Robótica

Considera-se o problema de controle cinemático de seguir uma trajetória desejada no espaço da imagem:



Setup experimental:



A configuração do efetuador $x \in \mathbb{R}^m$ é definida pela cinemática direta

$$x = k(\theta)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de ângulo das juntas.

Considerando manipuladores planares não redundantes, i.e., $m = n = 2$; a velocidade do efetuador em função da velocidade das juntas é dada por

$$\dot{x} = J(\theta)\ \dot{\theta}$$

onde $J(\theta) = \frac{\partial k(\theta)}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é o Jacobiano do manipulador.

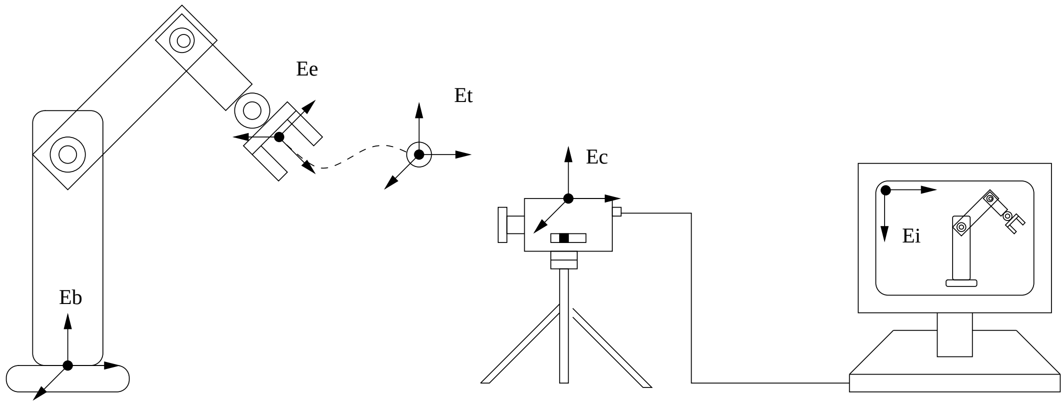
Considerando $\dot{\theta}_i$ como o sinal de controle u_i $(i = 1, 2)$, tem-se o seguinte sistema de controle

$$\dot{x} = J(\theta)\ u$$

Uma lei de controle cartesiana v pode ser transformada para um sinal de controle de juntas utilizando:

$$u = J^{-1}(\theta)\ v$$

Sistemas de Coordenadas em Servovisão



onde as seguintes letras indicam referência

- b à base do manipulador.
- e ao efetuador do robô.
- c à câmera.
- i à imagem.
- t ao alvo.

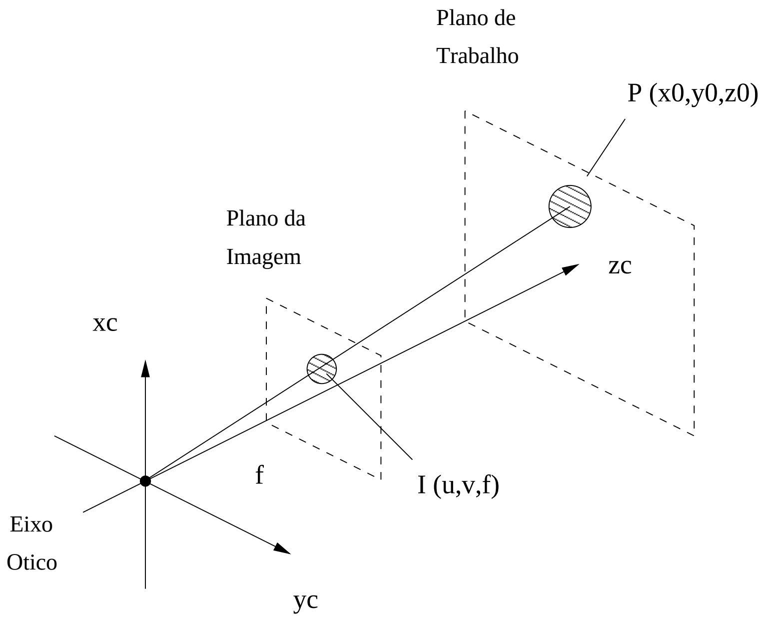
Visão Computacional

Para utilizar servo-visão é necessário entender os aspectos geométricos do processo de formação da imagem.

Uma câmera contém lentes que formam uma projeção 2D da cena no plano da imagem onde o sensor está localizado.

Utilizando o modelo de projeção perspectiva (outras opções são projeção ortográfica escalada e projeção ajustada), e considerando o sistema de coordenadas da câmera $\bar{E}_c = [\vec{x}_c \; \vec{y}_c \; \vec{z}_c]$, assume-se que

- O eixo z_c do sistema de coordenadas da câmera é perpendicular ao plano da imagem (ao longo do eixo ótico), e a origem está localizada a uma distância f atrás do plano da imagem, onde $f > 0$ é a distância focal da lente da câmera.



Dado que a origem da câmera, os pontos I e P são colineares é válida a seguinte relação:

$$k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{f}{z_0} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

No entanto (u, v) são coordenadas físicas (e.g., em metros) e tem que ser transformadas em coordenadas da tela (em pixels).

Em geral a origem da tela se encontra num vêrtice e não no centro. Além disto existem fatores de escala da câmera α_1 e α_2 em (pixels/m).

Com isto as coordenadas (x_{c1}, x_{c2}) (pixels) na tela são definidas como:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{f}{z_0} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Por outro lado, as coordenadas (x_0, y_0, z_0) do ponto P no plano de trabalho são expressas no sistema de coordenadas da câmera, e deverão ser transformadas para o sistema de coordenadas inercial.

No caso planar tem-se:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + p_{bc}$$

onde ϕ é o ângulo de rotação da câmera em torno do eixo ótico e p_{bc} é a posição da câmera com respeito à base do manipulador.

Consequentemente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} (x - p_{bc})$$

Portanto, a relação entre as coordenadas do ponto P na câmera e no sistema inercial é dada por:

$$x_c = \frac{f}{z_0} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} (x - p_{bc}) + \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \end{bmatrix}$$

Desta forma, a transformação câmera/espaço de trabalho é dada por:

$$x_c = K_p\, x + x_{c0}$$

onde

$$K_p = \frac{f}{z_0}\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

e

$$x_{c0} = \frac{f}{z_0}\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} p_{bc} + \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \end{bmatrix}$$

x_c : posição do efetuador no sistema de coordenadas da imagem.

x_{c0} : offset da posição do frame da camera com respeito à do robô.

K_p : orientação e escalamento da câmera com respeito ao robô.

ϕ: ângulo de orientação da câmera com respeito ao frame do robô.

f: distância focal da câmera.

z_0: profundidade do plano da imagem ao plnao de trabalho do robô.

$\alpha_i > 0$: fatores de escala (pixels/m).

Controle por servo-visão

Neste caso, será considerado que a posição do efetuador é medida utilizando uma câmera CCD fixa monocular com o eixo ótico perpendicular ao espaço de trabalho do robô.

A transformação câmera/espaço de trabalho é dada por:

$$x_c = K_p\, x + x_{c0}$$

$$K_p = \frac{f}{z_0} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

x_c : posição do efetuador no sistema de coordenadas da imagem.

x_{c0} : offset da posição do frame da camera com respeito à do robô.

K_p : orientação e escalamento da câmera com respeito ao robô.

ϕ: ângulo de orientação da câmera com respeito ao frame do robô.

f: distância focal da câmera.

z_0: profundidade do plano da imagem ao plnao de trabalho do robô.

$\alpha_i > 0$: fatores de escala (pixels/m).

No sistema de coordenada da câmera a cinemática diferencial é dada por:

$$\dot{x}_c = K_p \, \dot{x}$$

onde $x^T = [x_1 \quad x_2]$.

Considere que $x_{cd} \in \mathbb{R}^2$ é a trajetória desejada do efetuador no plano da câmera. Uma lei de controle cartesiano pode ser projetada para que $x_c \to x_{cd}$, i.e. $e_{cd} \to 0$.

A equação dinâmica de e_{cd} é dada por:

$$\dot{e}_{cd} = \dot{x}_{cd} - \dot{x}_c = \dot{x}_{cd} - K_p \, \dot{x} = \dot{x}_{cd} - K_p \, J(\theta) \, u$$

isto é

$$\dot{e}_{cd} = \dot{x}_{cd} - K_p \, J(\theta) \, u$$

onde $J_v = K_p J(\theta)$ é chamado de Jacobiano da Imagem.

Tem-se então que com uma lei de controle dada por:

$$u = (K_p J(\theta))^{-1} \left[\dot{x}_{cd} + K \ (x_{cd} - x_c)\right]$$

O sistema em malha fechado é dado por:

$$\dot{e}_{cd} + K \ e_{cd} = 0$$

para $K > 0$ tem-se que os sistema é exponencialmente estável,

$$e_{cd}(t) = e^{-Kt} \ e_{cd}(0)$$