Introdução à Robótica

http://www.coep.ufrj.br/gscar

Dinâmica de um Manipulador

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 11 de agosto de 2018

Dinâmica de um Manipulador

Estuda o movimento de um sistema robótico levando em consideração as forças que produzem o movimento:

- Formulação de Lagrange (Análise e Projeto de Controladores)
- Formulação de Newton-Euler (Simulação e implementação)

Energia Cinética

- Partícula:

$$K = \frac{1}{2}\, m \left\| v \right\|^2$$

- Corpo Rígido:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (\vec{v} \cdot \vec{v})\; dm$$

onde $\mathcal{M}$ é a região no espaço ocupado pelo corpo rígido.

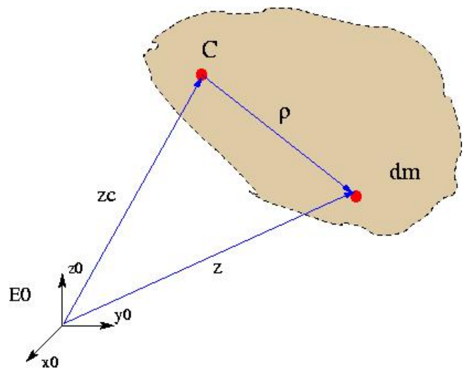
Sendo μ a densidade de massa do corpo (não necessariamente constante) tem-se que

$$dm = \mu\; dV$$

- O trabalho W_{12} realizado para levar um corpo de uma posição 1 a uma outra posição 2, é igual à diferença da energia cinética em ambos pontos ($W_{12} = K_2 - K_1$).

Centro de Massa de um Corpo Rígido

Define-se o centro de massa de um corpo rígido como o ponto (C) tal que a sua posição $\vec{z}_c$ satisfaça



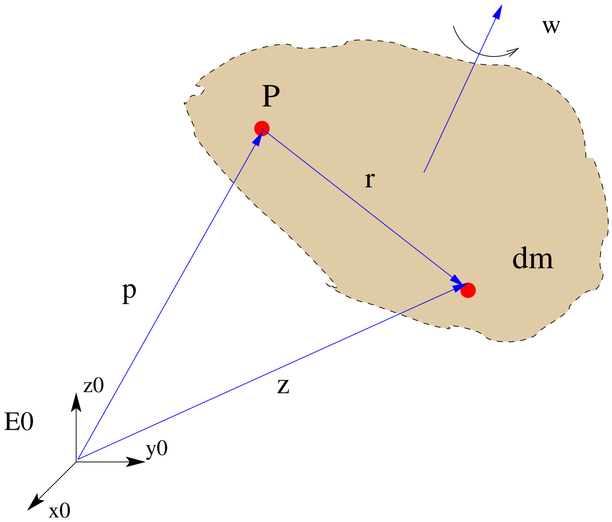
$$\int_{\mathcal{M}} (\vec{z} - \vec{z}_c)\; dm = \int_{\mathcal{M}} \vec{\rho}\; dm = 0$$

ou, considerando que $m = \int_{\mathcal{M}} \; dm$,

$$\vec{z}_c = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{M}} \vec{z}\; dm$$

Energia Cinética de um Corpo Rígido

Considere um ponto fixo P do corpo rígido e seu vetor de posição $\vec{p}$.



Seja

$$\vec{z} = \vec{p} + \vec{r},$$

então

$$\vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt^0} = \frac{d\vec{p}}{dt^0} + \frac{d\vec{r}}{dt^0} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

A energia cinética é dada por ($m = \int_{\mathcal{M}} dm$):

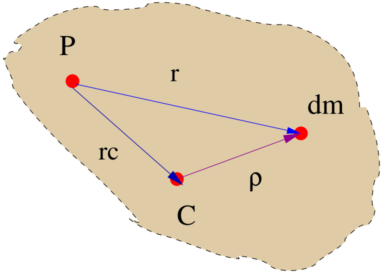
$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} (\vec{v}\cdot\vec{v})\; dm \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} ((\vec{v}_P + \vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{v}_P + \vec{\omega}\times\vec{r}))\; dm \\
&= \frac{1}{2}(\vec{v}_P\cdot\vec{v}_P)\int_{\mathcal{M}} dm + \vec{v}_P\cdot\vec{\omega}\times\int_{\mathcal{M}} \vec{r}\; dm - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{r}\times\vec{\omega})\; dm
\end{aligned}
$$

Note que $(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot = \vec{\omega}\cdot\vec{r}\times = -\vec{r}\cdot\vec{\omega}\times$, tem-se

$$
K = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}_P\right\|^2 + \vec{v}_P\cdot\vec{\omega}\times\int_{\mathcal{M}} \vec{r}\; dm - \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\int_{\mathcal{M}} (\vec{r}\times(\vec{r}\times))\; dm\;\vec{\omega}
$$

Para a primeira integral, considerando que $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{\rho}$ tem-se

$$\int_{\mathcal{M}} \vec{r}\, dm = \int_{\mathcal{M}} (\vec{r}_c + \vec{\rho})\, dm = m\, \vec{r}_c + \underbrace{\int_{\mathcal{M}} \vec{\rho}\, dm}_{=0}$$



Para a segunda integral é considerado o Tensor de Inércia do Corpo com respeito a P I^P dado por

$$I^P = \int_{\mathcal{M}} (\|\vec{r}\|^2 \mathcal{I} - \vec{r}\vec{r}\cdot)\, dm$$

onde foi levando em conta a igualdade $\vec{r} \times (\vec{r}\times) = \vec{r}\vec{r}\cdot - \|\vec{r}\|^2 \mathcal{I}$.

Com isto, a energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2} m \left\| \vec{v}_P \right\|^2 + \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \times (m\vec{r}_c) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I^P \vec{\omega}$$

Em forma matricial, K pode ser exprimida como:

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{v}_p \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & -m\vec{r}_c \times \\ m\vec{r}_c \times & I^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_p \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

Caso P esteja no centro de massa, i.e. $P = C$ e $\vec{r}_c = 0$ tem-se

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{v}_c \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & 0 \\ 0 & I^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_c \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

onde $I^c = \int_{\mathcal{M}} (\|\vec{\rho}\|^2 \mathcal{I} - \vec{\rho}\vec{\rho}\cdot)\, dm$ é o tensor de inércia com respeito a C.

Observação: caso I^P seja representada num sistema de coordenadas fixo ao corpo, ela será constante.

Voltar
Fechar

Propriedades da Matriz de Inércia

1. Teorema de Eixo Paralelo (transformação do ponto de referência no corpo):

$$I^P = I^c - m\left(\vec{r}_c\vec{r}_c\cdot - \|\vec{r}_c\|^2\mathcal{I}\right)$$

2. Transformação entre sistemas de coordenadas:

$$(I^P)_a = R_{0a}^T\,(I^P)_0\,R_{0a}$$

   onde $R_{0a} \in SO(3)$.

3. Positividade:

   Se o volume e a densidade do corpo não forem nulas, então

$$I^P = (I^P)^T > 0$$

4. Eixos e Momentos Principais de Inércia:

Dado que $I^P > 0$, existe R_{0b} (autovetores de I^P) tal que:

$$(I^P)_b = R_{0b}^T \, (I^P)_0 \, R_{0b}$$

onde $(I^P)_b = diag\{I_1, I_2, I_3\}$.

Os $I_i > 0$ são chamados de Momentos Principais de Inércia e as colunas de R_{0b} são chamados de Eixos Principais.

5. Variação de $(I^P)_0$:

$$\frac{d(I^P)_0}{dt} = \frac{d(R_{0b}^T \, (I^P)_b \, R_{0b})}{dt} = \hat{\omega} \, (I^P)_0 - (I^P)_0 \, \hat{\omega}$$

Voltar
Fechar

Exemplo de cálculo da matriz de inércia

A matriz de inércia com relação a centro de massa de um corpo rígido é dada por:

$$I^c = \int_{\mathcal{M}} \left(\|\vec{\rho}\|^2 \mathcal{I} - \vec{\rho}\vec{\rho}\cdot \right) dm$$

Então calculando I^c no sistema de coordenadas do centro de massa e considerando que $(\vec{\rho})_c = [x,\ y,\ z]^T$, tem-se que:

$$(I^c)_c = \int_{\mathcal{M}} \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} dm$$

Considerando um corpo rígido de densidade μ constante tem-se

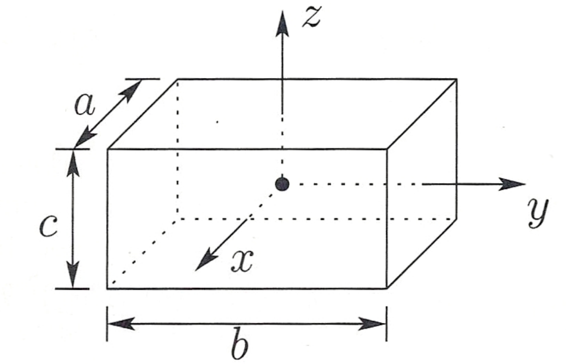
$$m = \mu\, V$$

onde V é o volume do corpo.

Portanto

$$(I^c)_c = \mu \int_{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} I^c_{xx} & I^c_{xy} & I^c_{xz} \\ I^c_{yx} & I^c_{yy} & I^c_{yz} \\ I^c_{zx} & I^c_{zy} & I^c_{zz} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, considerando uma barra retangular homogênea:



de massa m, comprimento $l = a$, largura $w = b$ e altura $h = c$, tem-se

$$\mu = \frac{m}{lwh}$$

Portanto

$$(I^c)_c = \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dx\, dy\, dz$$

Neste caso, dado que o corpo é simétrico $I^c_{xy} = I^c_{xz} = I^c_{yz} = 0$.
Além disto, podemos calcular I^c_{xx} como:

$$I^c_{xx} = \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2)\; dx\; dy\; dz$$

$$I^c_{xx} = \frac{m}{lwh} \frac{1}{12} (lw^3 h + lwh^3) = \frac{m}{12} (w^2 + h^2)$$

Então repetindo os cálculos para I^c_{yy} e I^c_{zz} tem-se:

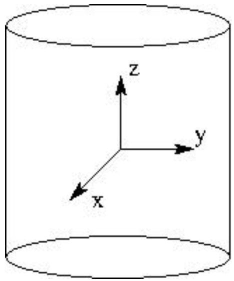
$$(I^c)_c = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} w^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 + w^2 \end{bmatrix}$$

A matriz de inércia com relação a outro ponto P pode ser calculada através da seguinte relação:

$$I^P = I^c - m\left(\vec{r}_c\vec{r}_c \cdot - \|\vec{r}_c\|^2 \mathcal{I}\right)$$

onde $\vec{r}_c$ é o vetor entre os pontos P e c.

Exemplo 2: Cilindro circular de altura h e raio r:



$$(I^c)_c = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} 3\,r^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\,r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6\,r^2 \end{bmatrix}$$

Dinâmica de um Corpo Rígido

A dinâmica de um corpo rígido pode ser derivada da lei de Newton. Considerando uma força F e um torque τ_c aplicados no centro de massa C de um corpo rígido, tem-se que a equação de movimento translacional é dada em função do momento linear por:

$$F = \frac{d}{dt}(mv_c)$$

Por outro lado, o movimento rotacional é dado em função do momento angular por:

$$\tau_c = \frac{d}{dt}((I^c)_0 \ \omega)$$

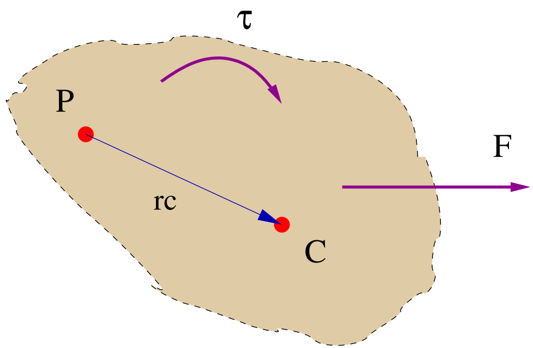
onde m é a massa do corpo rígido e I^c é a matriz de inércia do corpo com respeito a C.

Note que $(I^c)_c = R_{0c}^T \ (I^c)_0 \ R_{0c}$ é constante.

Em forma matricial as equações anteriores podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & I^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \times I^c\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \tau_c \end{bmatrix}$$

Considere agora que uma força $\vec{F}$ e um torque $\vec{\tau}_p$ são aplicados no ponto P.



Levando em consideração:

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ -r_c\times & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -r_c\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ \omega \end{bmatrix}$$

Diferenciado a velocidade chegasse à seguinte relação de aceleração:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -r_c\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_p \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \times (\omega \times r_c) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em termos de translação e rotação tem-se a Equação de Newton-Euler:

$$\begin{bmatrix} mI & -mr_c\times \\ mr_c\times & I^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_p \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\omega \times (\omega \times r_c) \\ \omega \times I^P\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \tau_P \end{bmatrix}$$

Formulação de Lagrange

Esta formulação é baseada no Lagrangiano de um sistema mecânico:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ define o espaço das juntas e

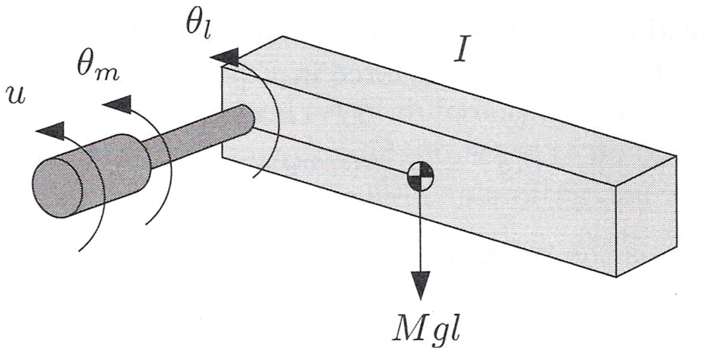
- $K(\theta, \dot{\theta})$: Energia Cinética
- $P(\theta)$: Energia Potencial (de um campo de força conservativo)

As equações de movimento do sistema satisfazem a equação de Lagrange (também chamada de equação de Euler-Lagrange ou Lagrange-Euler):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau$$

onde τ são os torques (forças) aplicados nas juntas (em geral θ e τ são as coordenadas e forças generalizadas - Murray, Li, Sastry, Cap. 6.2.1).

Exemplo: Considere um motor DC acionando uma carga



onde $\theta_l = 0$ é a posição vertical para abaixo.

Existindo um redução K_r entre o motor e a carga, i.e. $\theta_m = K_r \theta_l$.

A energia cinética e potencial do sistema é dada por:

$$K = \frac{1}{2}\left(I_2\, \dot{\theta}_l^2 + I_m\, K_r^2\, \dot{\theta}_l^2\right)$$

$$P = Mlg\,(1 - \cos(\theta_l))$$

Sendo o Lagrangiano definido por $L = K - P$. Com isto para obter a

Voltar

Fechar

equação de Lagrange temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_l} = -Mgl\sin(\theta_l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_l} = I_2\dot{\theta}_l + I_m K_r^2 \dot{\theta}_l$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_l}\right) = \left(I_2 + I_m K_r^2\right)\ddot{\theta}_l$$

Considerando o sistema sem atrito teremos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_l} = \left(I_2 + I_m K_r^2\right)\ddot{\theta}_l + Mgl\ \sin(\theta_l) = \tau$$

Desta forma a dinâmica do sistema é dada por:

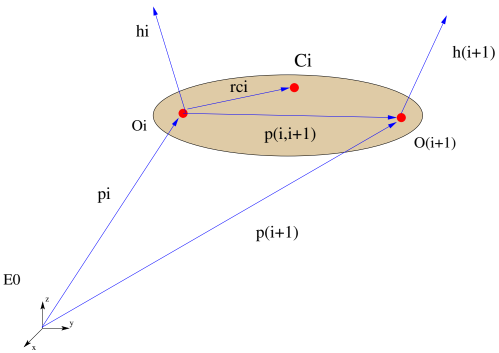
$$\left(I_2 + I_m K_r^2\right)\ddot{\theta}_l + Mgl\ \sin(\theta_l) = \tau$$

Dinâmica de Manipuladores Robóticos

Neste caso temos que a energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \left\|\vec{v}_i^c\right\|^2 + \vec{\omega}_i \cdot I_i^c \, \vec{\omega}_i\right)$$

- m_i: massa do elo i
- I_i^c: inércia com respeito ao centro de massa (C) do elo i
- $\vec{v}_i^c$ e $\vec{\omega}_i$: velocidades linear e angular do C do elo i



Em forma matricial dada por:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \vec{v}_i^c \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_i\mathcal{I} & 0 \\ 0 & I_i^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_i^c \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix}$$

E exprimida em função do sistema de coordenadas i:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m_i\mathcal{I} & -m_i\vec{r}_{ci}\times \\ m_i\vec{r}_{ci}\times & I_i^i \end{bmatrix}}_{\bar{M}_i} \begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix}$$

onde

- $\vec{r}_{ci}$ é a posição do centro de massa C_i com respeito ao sistema de coordenadas i,
- $I_i^i = I_i^c - m_i(\vec{r}_{ci}\vec{r}_{ci}\cdot - \|\vec{r}_{ci}\|^2\mathcal{I})$ é a Inércia do elo i com respeito ao sistema de coordenadas i.

Considerando que $\{\vec{\omega}_i, \vec{v}_i\}$ estão relacionadas com $\dot{\theta}$ através do Jacobiano parcial $J_i(\theta)$ (para juntas de revolução):

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{1i} & \cdots & \vec{h}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{h}_1 & \cdots & \vec{h}_{i-1} & \vec{h}_i & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_i(\theta)} \dot{\theta}$$

tem-se que K é dada por (considerando que $J\dot{\theta} \cdot \bar{M}V = \dot{\theta} \cdot J^* \bar{M}V$):

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}^T \; J_i^*(\theta) \; \bar{M}_i \; J_i(\theta) \; \dot{\theta}$$

$$K = \frac{1}{2} \, \dot{\theta}^T \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} J_i^*(\theta) \; \bar{M}_i \; J_i(\theta) \right]}_{M(\theta)} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \, \dot{\theta}^T \; M(\theta) \; \dot{\theta}$$

A matriz $M(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é independente do sistema de coordenadas.

Por outro lado, a energia potencial, produto de um campo de forças conservativo (o trabalho ao longo de qualquer caminho depende somente dos extremos do caminho e não da forma) é dada por:

$$P = -\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{g} \cdot \vec{p}_{0i}^{c} = g(\theta)$$

onde $\vec{g}$ é o vetor de gravidade e $\vec{p}_{0i}^{c}$ é a posição do centro de massa C do elo i com respeito a $\bar{E}_0$:

$$\vec{p}_{0i}^{c} = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{12} + \cdots + \vec{p}_{i-1,i} + \vec{p}_{i}^{c}$$

Então o Lagrangiano do Manipulador é dado por:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\, \dot{\theta}^T M(\theta)\, \dot{\theta} - g(\theta)$$

Para obter a equação de Lagrange temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M(\theta)\, \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = M(\theta)\, \ddot{\theta} + \dot{M}(\theta, \dot{\theta})\, \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}\, \dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta}\right) - \underbrace{\nabla_\theta g(\theta)}_{G(\theta)}$$

Considerando $M_i(\theta) = \partial M / \partial \theta_i$ temos que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \frac{\partial M}{\partial \theta_1}\dot{\theta} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \frac{\partial M}{\partial \theta_n}\dot{\theta} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_1(\theta)\dot{\theta} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_n(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Desta forma, a equação de Lagrange é dada por:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + \underbrace{\dot{M}(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_1(\theta)\dot{\theta} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_n(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}}_{C(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta}} + G(\theta) = \tau$$

Podendo escrever a equação dinâmica do manipulador em forma compacta como:

$$\boxed{M(\theta)\ \ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) = \tau}$$

onde

- ângulo da juntas: $\theta \in \mathbb{R}^n$
- torque: $\tau \in \mathbb{R}^n$
- matriz de inércia do Manipulador: $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- matriz das forças centrípetas/Coriolis: $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- vetor de gravidade: $G \in \mathbb{R}^n$

Observação

No modelo dinâmico anterior, $C(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta}$ é determinado unicamente.

No entanto, existem varias matrizes $C(\theta,\dot{\theta})$ que satisfazem esta relação.

Uma forma para a matriz $C(\theta,\dot{\theta})$ é dada por:

$$C(\theta,\dot{\theta}) = M_D(\theta,\dot{\theta}) - \frac{1}{2}\, M_D^T(\theta,\dot{\theta})$$

onde

$$M_D(\theta,z) = [M_1 z \cdots M_n z]\,; \qquad z \in \mathbb{R}^n, \quad M_i = \frac{\partial M}{\partial \theta_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Está escolha de $C(\theta,\dot{\theta})$ não é única (vide Símbolos de Chrisroffels no Livro do Sciavicco e Siciliano).

Propriedades do Modelo Dinâmico

Propriedade 1: $M(\theta) = M^T(\theta) > 0$, i.e. $x^T M(\theta) x > 0$ Positiva Definida

Propriedade 2: Para $\dot{M} - 2C = N(\theta, \dot{\theta})$ tem-se

$$\dot{\theta}^T \; N(\theta, \dot{\theta}) \; \dot{\theta} = 0$$

Para uma escolha particular de $C(\theta, \dot{\theta})$ tem-se que $x^T N(\theta, \dot{\theta}) x = 0$ para todo x, i.e., $N = -N^T$.

Esta propriedade é útil no projeto de controladores via teoria de Lyapunov, principalmente porque ela implica na passividade do sistema de $\tau \mapsto \dot{\theta}$.

Considere uma função de energia do tipo:

$$2V = \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}$$

para o caso planar sem gravidade $(G(\theta) = 0)$ tem-se que a derivada

Voltar
Fechar

de V considerando o modelo dinâmico do manipulador é dada por:

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\dot{\theta}$$

Dado que $M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} = \tau$ tem-se

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T[\tau - C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta}] + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}^T\tau + \frac{1}{2}\underbrace{\dot{\theta}^T [\dot{M}(\theta) - 2C(\theta,\dot{\theta})]\ \dot{\theta}}_{=0}$$

Conseqüentemente,

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T\tau \qquad \text{Potência injetada no sistema}$$

Portanto o sistema é passivo no sentido que a energia dele é conservada.

Do ponto de vista de controle, a idéia é projetar um controle τ que dissipe energia, e.g.,

$$\tau = -K_d\ \dot{\theta}$$

Propriedade 3: Linearidade em parâmetros:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau = Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})P$$

onde $P \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros e $Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é o vetor regressor.

Exemplo: Considere um pêndulo acionado por um motor DC. O modelo foi calculado como:

$$\underbrace{J}_{M(\theta)}\ddot{\theta} + \underbrace{mgl\sin(\theta)}_{G(\theta)} = \tau$$

onde J é a inércia equivalente do pêndulo, m é a massa do pêndulo, l o comprimento e g a gravidade. Neste caso $C(\theta,\dot{\theta}) = 0$.

Neste caso é fácil observar que podemos escrever o modelo como:

$$[\ddot{\theta} \quad \sin(\theta)]\begin{bmatrix} J \\ mgl \end{bmatrix} = \tau$$

Definindo o vetor regresso e o vetor de parâmetros como:

$$Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}) = [\ddot{\theta} \qquad \sin(\theta)]; \qquad P = \begin{bmatrix} J \\ mgl \end{bmatrix}$$

Exemplo: Identificação de parâmetros.

Considere que são realizada m medidas da resposta do sistema, tendo então:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}} P \Longrightarrow T = \mathcal{Y}P$$

Portanto um forma de obter uma estimativa de P é através de mínimos quadrados:

$$P = (\mathcal{Y}^T\mathcal{Y})^{-1}\mathcal{Y}^T T$$

Modelo Dinâmico mais Completo

No modelo dinâmico do manipulador podem ser considerados os efeitos do atrito F e das forças externas f_{ext} aplicadas no efetuador.

$$M(\theta)\ \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + F(\theta)\dot{\theta} + G(\theta) = \tau - J^T(\theta)\ f_{ext}$$

Eventualmente podem ser adicionados efeitos hidrodinâmico no caso de sistemas robóticos submarinos (drag: $D\dot{\theta}\left|\dot{\theta}\right|$) ou dinâmica dos atuadores:

$$\dot{\tau} = A\tau + Bu$$

No caso de motores com reduções, tem-se que a Inércia do elo i com respeito ao sistema de coordenadas i é dada por:

$$I_i^i = I_i^c - m_i(\vec{r}_{ci}\vec{r}_{ci}\cdot - \|\vec{r}_{ci}\|^2 \mathcal{I}) + I_{mi}N_i^2\vec{h}_i\vec{h}_i\cdot$$

onde N_i é a relação de transmissão, $\vec{h}_i$ é o eixo de rotação da junta i e I_{mi} é a inércia do motor i.

Dinâmica inversa e direta

Dinâmica Inversa: Dado $\theta, \dot{\theta}$ e $\ddot{\theta} \longrightarrow \tau$

Utilizada para controle (linearização por realimentação):

$$\tau = M(\theta)v + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + g(\theta)$$

Dinâmica Direta: Dado τ, θ e $\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{\theta}$

Utilizada para simulação do sistema:

$$\ddot{\theta} = -M^{-1}(\theta)[C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) - \tau]$$

Resumo: Equações Dinâmica de um manipulador

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{n} J_i^*(\theta)\bar{M}_i J_i(\theta)$$

onde

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} m_i\mathcal{I} & -m_i\vec{r}_{ci}\times \\ m_i\vec{r}_{ci}\times & I_i^c - m_i(\vec{r}_{ci}\vec{r}_{ci}\cdot - \|\vec{r}_{ci}\|^2\mathcal{I}) \end{bmatrix}$$

$$J_i(\theta) = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{1i} & \cdots & \vec{h}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{h}_1 & \cdots & \vec{h}_{i-1} & \vec{h}_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de Coriolis/centrípeta

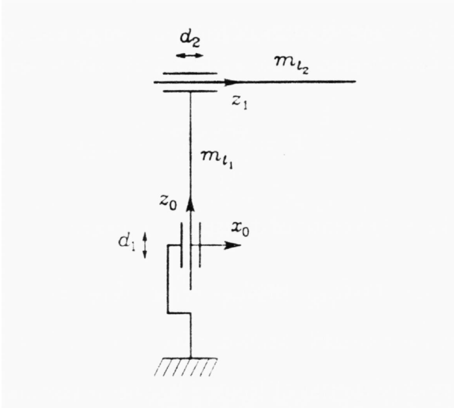
$$C(\theta,\dot{\theta}) = M_D(\theta,\dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta,\dot{\theta})]$$

onde

$$M_D(\theta,\dot{\theta}) = \left[M_1\dot{\theta}\cdots M_n\dot{\theta}\right] \qquad M_i = \frac{\partial M}{\partial \theta_i}$$

A gravidade é dada por $G(\theta) = \nabla_\theta g(\theta)$ onde $g(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{g}\cdot\vec{p}_{0i}^{\,c}$

Exemplo: Calcular o modelo dinâmico do manipulador cartesiano planar:



Neste caso m_{l1}, m_{l2} são as massas dos elos 1 e 2. As coordenadas generalizadas são: $\theta = [d_1 \; d_2]^T$.

Tem-se

$$\vec{p}_{01} = \vec{r}_{c1} = d_1 \vec{z}_0 \qquad \vec{p}_{12} = \vec{r}_{c2} = d_2 \vec{z}_1$$

Os jacobianos parciais são dados por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & \vec{z}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então como $M(\theta) = J_1^* \bar{M}_1 J_1 + J_2^* \bar{M}_2 J_2$ calculando cada termo:

$$J_1^* \bar{M}_1 J_1 = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \cdot & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \mathcal{I} & -m_1 \vec{r}_{c1} \times \\ m_1 \vec{r}_{c1} \times & I_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma podemos calcular $J_2^* \bar{M}_2 J_2$:

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \cdot & 0 \\ \vec{z}_1 \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \mathcal{I} & -m_2 \vec{r}_{c2} \times \\ m_2 \vec{r}_{c2} \times & I_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & \vec{z}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \cdot & 0 \\ \vec{z}_1 \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \vec{z}_0 & m_2 \vec{z}_1 \\ m_2 \vec{r}_{c2} \times \vec{z}_0 & m_2 \vec{r}_{c2} \times \vec{z}_1 \end{bmatrix}$$

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 \\ m_2 \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

Considerando que $\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 = 0$, somando $J_1^* \bar{M}_1 J_1$ com $J_2^* \bar{M}_2 J_2$ tem-se:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m2 \end{bmatrix}$$

Desta forma $M_D(\theta, \dot{\theta}) = [M_1\dot{\theta},\ M_2\dot{\theta}]$ é dada por:

$$M_D(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} = [M_D(\theta, \dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta, \dot{\theta})]\dot{\theta}$ tem-se:

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, $G(\theta)$ é calculado a partir de $g(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \vec{p}_{0i}^{\,c}$

$$g(\theta) = -m_1 \vec{g} \cdot \vec{p}_{01}^{\,c} - m_2 \vec{g} \cdot \vec{p}_{02}^{\,c} = -m_1 \vec{g} \cdot \vec{r}_{c1} - m_2 \vec{g} \cdot (\vec{p}_{01} + \vec{r}_{c2})$$

considerando que $\vec{g} = -g\vec{z}_0, \vec{r}_{c1} = \vec{p}_{01} = d_1\vec{z}_0, \vec{r}_{c2} = d_2\vec{z}_1$, tem-se

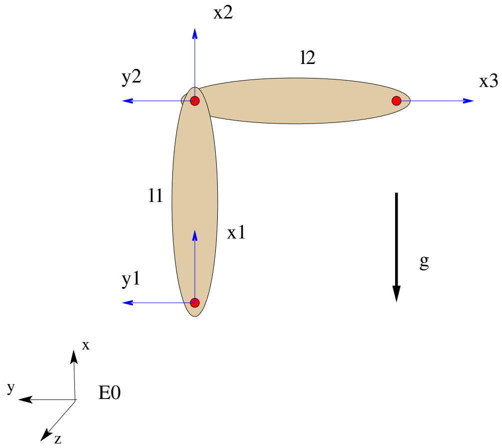
$$g(\theta) = m_1 g\ d_1\ (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) + m_2 g\ d_1\ (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0) - m_2 g\ d_2\ (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1)$$

$$g(\theta) = (m_1 + m_2)\ g\ d_1$$

O vetor das forças gravitacionais é dada por: $G = [(m_1 + m_2)\ g,\ 0]^T$.

Exemplo: Dinâmica de um manipulador planar 2R

Agora considere o manipulador 2R da figura:



então tem-se

$$\vec{p}_{12} = l_1 \vec{x}_1 \qquad \vec{p}_{23} = -l_2 \vec{y}_2$$

e a distância ao centros de massas de cada elo:

$$\vec{r}_{c1} = r_1 \vec{x}_1 \qquad \vec{r}_{c2} = -r_2 \vec{y}_2$$

Os jacobianos parciais são dados por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vec{z}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} & 0 \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

Então como $M(\theta) = J_1^* \bar{M}_1 J_1 + J_2^* \bar{M}_2 J_2$ calculando cada termo:

$$J_1^* \bar{M}_1 J_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vec{z}_1 \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \mathcal{I} & -m_1 \vec{r}_{c1} \times \\ m_1 \vec{r}_{c1} \times & I_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vec{z}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \cdot I_1^1 \vec{z}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Levando em consideração que $\vec{r}_{c1} \cdot \vec{z}_1 = 0$ e $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1 = 1$ tem-se:

$$\vec{z}_1 \cdot I_1^1 \vec{z}_1 = \vec{z}_1 \cdot [I_1^c - m_1(\vec{r}_{c1}\vec{r}_{c1} \cdot - \|\vec{r}_{c1}\|^2 \mathcal{I})]\vec{z}_1 = \underbrace{\vec{z}_1 \cdot I_1^c \vec{z}_1}_{I_{1zz}^c} + m_1 \|\vec{r}_{c1}\|^2$$

Da mesma forma podemos calcular $J_2^* \bar{M}_2 J_2$:

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} \cdot & \vec{z}_1 \cdot \\ 0 & \vec{z}_2 \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \mathcal{I} & -m_2 \vec{r}_{c2} \times \\ m_2 \vec{r}_{c2} \times & I_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} & 0 \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} \cdot & \vec{z}_1 \cdot \\ 0 & \vec{z}_2 \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) - m_2 \vec{r}_{c2} \times \vec{z}_1 & -m_2 \vec{r}_{c2} \times \vec{z}_2 \\ m_2 \vec{r}_{c2} \times (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) + I_2^2 \vec{z}_1 & I_2^2 \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} A & \cdot \\ \vec{z}_2 \cdot (m_2 \vec{r}_{c2} \times (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) + I_2^2 \vec{z}_1) & \vec{z}_2 \cdot I_2^2 \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$A = m_2 (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) \cdot [(\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) - (\vec{r}_{c2} \times \vec{z}_1)] + \vec{z}_1 \cdot [m_2 \vec{r}_{c2} \times (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) + I_2^2 \vec{z}_1]$$

Considerando que $\vec{r}_{c2} \cdot \vec{z}_2 = 0$, $\vec{p}_{12} \cdot \vec{z}_1 = 0$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1 = 1$ e $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 1$, e

$$\vec{z}_2 \cdot I_2^2 \vec{z}_2 = \underbrace{\vec{z}_2 \cdot I_2^c \vec{z}_2}_{I_{2zz}^c} + m_2 \left\| \vec{r}_{c2} \right\|^2 = \vec{z}_1 \cdot I_2^2 \vec{z}_1 = \vec{z}_1 \cdot I_2^2 \vec{z}_2$$

Além disto tem-se que: $\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} = l_1 \vec{y}_1$, $\vec{r}_{c2} \times \vec{y}_1 = r_2 \sin(\theta_2) \vec{z}_1$, $\vec{r}_{c2} \times \vec{z}_1 = -r_2 \vec{x}_2$, $\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = \sin(\theta_2)$.

Somando $J_1^*\bar{M}_1 J_1$ com $J_2^*\bar{M}_2 J_2$ tem-se:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} I_{1zz}^c + m_1 r_1^2 + I_{2z}^c + m_2 r_2^2 + 2m_2 r_2 l_1 s\theta_2 + m_2 l_1^2 & \cdot \\ I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 + m_2 r_2 l_1 s\theta_2 & I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 \end{bmatrix}$$

Desta forma $M_D(\theta,\dot{\theta}) = [M_1\dot{\theta},\ M_2\dot{\theta}]$ é dada por:

$$M_D(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 r_2 l_1 c\theta_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 & m_2 r_2 l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Calculando $C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} = [M_D(\theta,\dot{\theta}) - \frac{1}{2}M_D^T(\theta,\dot{\theta})]\dot{\theta}$ tem-se:

$$C(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 r_2 l_1 c\theta_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -\frac{1}{2}m_2 r_2 l_1 c\theta_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \frac{1}{2}m_2 r_2 l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, $G(\theta)$ é calculado a partir de $g(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{g}\cdot\vec{p}^{\,c}_{0i}$

$$g(\theta) = -m_1\vec{g}\cdot\vec{p}^{\,c}_{01} - m_2\vec{g}\cdot\vec{p}^{\,c}_{02} = -m_1\vec{g}\cdot\vec{r}_{c1} - m_2\vec{g}\cdot(\vec{p}_{12}+\vec{r}_{c2})$$

considerando que $\vec{g}=-g\vec{x}_0, \vec{r}_{c1}=r_1\vec{x}_1, \vec{p}_{12}=l_1\vec{x}_1, \vec{r}_{c2}=-r_1\vec{y}_2$, tem-se

$$g(\theta) = m_1r_1g\,(\vec{x}_0\cdot\vec{x}_1) + m_2l_1g\,(\vec{x}_0\cdot\vec{x}_1) - m_2r_2g\,(\vec{x}_0\cdot\vec{y}_2)$$

então considerando $\vec{x}_0\cdot\vec{x}_1 = \cos(\theta_1)$ e $\vec{x}_0\cdot\vec{y}_2 = -\sin(\theta_1+\theta_2)$:

$$g(\theta) = m_1r_1g\cos(\theta_1) + m_2l_1g\cos(\theta_1) + m_2r_2g\sin(\theta_1+\theta_2)$$

Podendo calcular $G(\theta) = \nabla_\theta g(\theta)$ como

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} -m_1r_1g\sin(\theta_1) - m_2l_1g\sin(\theta_1) + m_2r_2g\cos(\theta_1+\theta_2) \\ m_2r_2g\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Exemplo: Linearidade em certos parâmetros:

Definindo os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= I^c_{1zz} + m_1 r_1^2 + I^c_{2z} + m_2 r_2^2 + m_2 l_1^2 \\
\pi_2 &= m_2 r_2 l_1 \\
\pi_3 &= I^c_{2zz} + m_2 r_2^2 \\
\pi_4 &= m_2 r_1 g + m_2 l_1 g \\
\pi_5 &= m_2 r_2 g
\end{aligned}$$

pode-se escrever:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \pi_1 + 2\pi_2 \sin(\theta_2) & \pi_3 + \pi_2 \sin(\theta_2) \\ \pi_3 + \pi_2 \sin(\theta_2) & \pi_3 \end{bmatrix}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & \pi_2 \cos(\theta_2)\ (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -\frac{1}{2}\pi_2 \cos(\theta_2)\ (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \frac{1}{2}\pi_2 \cos(\theta_2)\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} -\pi_4 \sin(\theta_1) + \pi_5 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \pi_5 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Com isto podemos definir a matriz regressora Y e o vetor de parâmetros Π:

$$\Pi^T = [\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4,\ \pi_5]$$

e

$$Y^T(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & 0 \\ s\theta_2\ (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + c\theta_2\ (2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) & s\theta_2\ \ddot{\theta}_1 - c\theta_2\ \dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ g\cos(\theta_1) & 0 \\ g\cos(\theta_1+\theta_2) & g\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

tendo

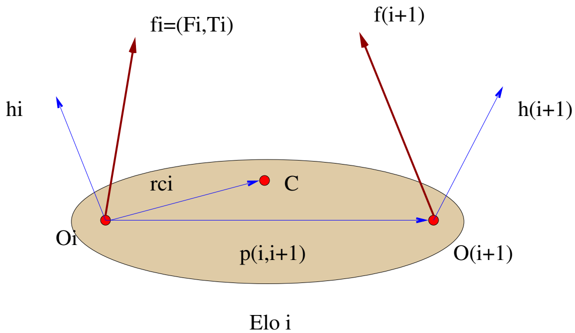
$$Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})\ \Pi = \tau$$

Formulação de Newton-Euler

Na formulação de Newton-Euler, em lugar de considerar o sistema completo como no caso do enfoque Lagrangiano, é considerado o balanço de força e torques em cada elo.

Este enfoque leva a uma solução do tipo recursiva, propagando velocidades, acelerações e forças de elo em elo.

Para isto considere o i-ésimo elo:



$\{\vec{F}_i\ \vec{T}_i\}$: força e torque aplicadas pelo elo $i-1$ no elo i no frame i.

Considerando um convenção de Denavit-Hartenberg Modificada, a propagação de velocidades e acelerações é dada por (juntas de revolução):

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega}_i &= \vec{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \ \vec{h}_i \\
\vec{v}_i &= \vec{v}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i}
\end{aligned}
$$

Colocando em forma matricial tem-se:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix}}_{V_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{i-1,i}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}}_{\Phi_{i,i-1}} \begin{bmatrix} \vec{v}_{i-1} \\ \vec{\omega}_{i-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{h}_i \end{bmatrix}}_{H_i} \dot{\theta}_i
$$

tendo que a propagação da velocidade pode ser escrita:

$$
V_i = \Phi_{i,i-1} \ V_{i-1} + H_i \ \dot{\theta}_i
$$

Por outro lado, a aceleração é dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\omega}_i}{dt^0} &= \frac{d\vec{\omega}_{i-1}}{dt^0} + \ddot{\theta}_i \ \vec{h}_i + \vec{\omega}_{i-1} \times \dot{\theta}_i \vec{h}_i \\
\frac{d\vec{v}_i}{dt^0} &= \frac{d\vec{v}_{i-1}}{dt^0} + \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i}) + \frac{d\vec{\omega}_{i-1}}{dt^0} \times \vec{p}_{i-1,i}
\end{aligned}
$$

Em forma matricial tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}_i}{dt^0} \\ \frac{d\vec{\omega}_i}{dt^0} \end{bmatrix}}_{\alpha_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{i-1,i}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}}_{\Phi_{i,i-1}} \begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}_{i-1}}{dt^0} \\ \frac{d\vec{\omega}_{i-1}}{dt^0} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{h}_i \end{bmatrix}}_{H_i} \ddot{\theta}_i + \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i}) \\ \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{\omega}_i \end{bmatrix}}_{a_i}$$

Desta forma a propagação de aceleração é dado por:

$$\alpha_i = \Phi_{i,i-1}\ \alpha_{i-1} + H_i\ \ddot{\theta}_i + a_i$$

Desta forma as equações cinemáticas do algoritmo são dadas por:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\ V_i + H_{i+1}\ \dot{\theta}_{i+1} \\ \alpha_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\ \alpha_i + H_{i+1}\ \ddot{\theta}_{i+1} + a_{i+1} \end{aligned}$$

Então dados $\underline{V_0 \text{ e } \alpha_0}$ obtemos $\underline{V_i \text{ e } \alpha_i}$ para $i = 1, \cdots, n$.

Se o manipulador é montado numa base fixa, tem-se que $V_0 = \alpha_0 = 0$. No caso de uma base móvel, deverá ser considerada a velocidade e aceleração da mesma.

No caso de juntas prismáticas dado que:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_i &= \vec{\omega}_{i-1}\\ \vec{v}_i &= \vec{v}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i} + \dot{\theta}_i\ \vec{h}_i\end{aligned}$$

Tem-se que a forma matricial:

$$\begin{aligned}V_i &= \Phi_{i,i-1}\ V_{i-1} + H_i\ \dot{\theta}_i\\ \alpha_i &= \Phi_{i,i-1}\ \alpha_{i-1} + H_i\ \ddot{\theta}_i + a_i\end{aligned}$$

onde

$$H_i = \begin{bmatrix} \vec{h}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$a_i = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltar
Fechar

As equações dinâmicas do algoritmo no centro de massa do elo i são dadas por:

$$\begin{bmatrix} m_i\mathcal{I} & 0 \\ 0 & I_i^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}_i^c}{dt^0} \\ \frac{d\vec{\omega}_i}{dt^0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_i \times I_i^c\vec{\omega}_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ -\vec{r}_{ci}\times & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{T}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ (\vec{p}_{i,i+1}-\vec{r}_{ci})\times & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{F}_{i+1} \\ \vec{T}_{i+1} \end{bmatrix}$$

onde

- m_i é a massa do elo i;
- $\vec{r}_{ci}$ é o vetor entre o sistema de coordenadas i e o centro de massa do elo i;
- I_i^c é a inércia do elo i com respeito ao seu centro de massa.

As equações dinâmicas podem ser levadas para o sistema de coordenadas i considerando:

$$I_i^i = I_i^c - m_i(\vec{r}_{ci}\vec{r}_{ci} \cdot - \left\|\vec{r}_{ci}\right\|^2 \mathcal{I})$$

onde I_i^i é a inércia do elo i com respeito ao sistema de coordenadas i; e a seguinte relação de acelerações:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}_i^c}{dt^0} \\ \frac{\vec{\omega}_i}{dt^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{r}_{ci}\times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}_i}{dt^0} \\ \frac{d\vec{\omega}_i}{dt^0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ci}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, as equações dinâmicas no sistema de coordenadas i são dadas por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_i\mathcal{I} & -m_i\vec{r}_{ci}\times \\ m_i\vec{r}_{ci}\times & I_i^i \end{bmatrix}}_{M_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}_i}{dt^0} \\ \frac{d\vec{\omega}_i}{dt^0} \end{bmatrix}}_{\alpha_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_i\vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ci}) \\ \vec{\omega}_i \times I_i^i\vec{\omega}_i \end{bmatrix}}_{b_i} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{T}_i \end{bmatrix}}_{f_i} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ \vec{p}_{i,i+1}\times & \mathcal{I} \end{bmatrix}}_{\Phi^*_{i+1,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{F}_{i+1} \\ \vec{T}_{i+1} \end{bmatrix}}_{f_{i+1}}$$

O torque ou força nas juntas é dado por

$$\tau_i = \left[\begin{array}{ll} \vec{h}_i \cdot \vec{T}_i & \text{para juntas de revolução} \\ \vec{h}_i \cdot \vec{F}_i & \text{para juntas prismáticas} \end{array} \right. = H_i^* \; f_i$$

Em forma compacta:

$$\begin{aligned} f_i &= \Phi^*_{i+1,i} \; f_{i+1} + M_i \; \alpha_i + b_i \\ \tau_i &= H_i^* \; f_i \end{aligned}$$

Então dado $f_{n+1} = f_{ext}$ sendo a força/torque aplicado no efetuador, pode-se calcular f_i, τ_i para $i = n, \cdots, 1$.

Sistema completo

$$\begin{aligned}
V_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\, V_i + H_{i+1}\, \dot{\theta}_{i+1} \\
\alpha_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\, \alpha_i + H_{i+1}\, \ddot{\theta}_{i+1} + a_{i+1} \\
f_i &= \Phi^*_{i+1,i}\, f_{i+1} + M_i\, \alpha_i + b_i \\
\tau_i &= H_i^*\, f_i \\
V_0 = \alpha_0 &= 0; \\
f_{n+1} &= f_{ext}
\end{aligned}$$

O efeito da força da gravidade (uniforme) no manipulador pode ser considerada aplicando uma pseudo-aceleração no sistema de coordenadas da base, i.e.,

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} \vec{g} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo em sistemas de coordenadas

O sistema é dado por

$$\begin{aligned}
(V_{i+1})_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\ (V_i)_i + H_{i+1}\ \dot{\theta}_{i+1} \\
(\alpha_{i+1})_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\ (\alpha_i)_i + H_{i+1}\ \ddot{\theta}_{i+1} + a_{i+1} \\
(f_i)_i &= \Phi_{i+1,i}^T\ (f_{i+1})_{i+1} + M_i\ \alpha_i + b_i \\
\tau_i &= H_i^T\ (f_i)_i
\end{aligned}$$

Definindo $r_{ci} = (\vec{r}_{ci})_i$ e $\omega_i = (\vec{\omega}_i)_i$ as matrizes são dadas por:

$$\Phi_{i+1,i} = \begin{bmatrix} R_{i+1,i} & -R_{i+1,i}\widehat{(\vec{p}_{i,i+1})_i} \\ 0 & R_{i+1,i} \end{bmatrix} \quad M_i = \begin{bmatrix} m_i I & -m_i \hat{r}_{ci} \\ m_i \hat{r}_{ci} & (I_i^i)_i \end{bmatrix}$$

e

$$b_i = \begin{bmatrix} m_i\ \hat{\omega}_i^2\ r_{ci} \\ \hat{\omega}_i\ (I_i^i)_i\ \omega_i \end{bmatrix};$$

Dependendo se a junta for de revolução o prismática tem-se:

Junta de Revolução

$$H_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\vec{h}_{i+1})_{i+1} \end{bmatrix}; \quad R_{i,i+1} = e^{\hat{h}_{i+1}\theta_{i+1}};$$

$$a_{i+1} = \begin{bmatrix} R_{i+1,i}\ \hat{\omega}_{i-1}^2\ (\vec{p}_{i,i+1})_i \\ \widehat{R_{i+1,i}\omega_i}\ \omega_{i+1} \end{bmatrix}$$

Junta Prismática

$$H_{i+1} = \begin{bmatrix} (\vec{h}_{i+1})_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R_{i,i+1} = I; \quad a_{i+1} = \begin{bmatrix} R_{i+1,i}\ \hat{\omega}_{i-1}^2\ (\vec{p}_{i,i+1})_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dinâmica Inversa de ordem n

O algoritmo de Newton-Euler Recursivo foi proposto inicialmente por: Luh, Walker e Paul em 1980 ("On-line computational scheme for mechanical manipulators," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 102, pp. 6976, 1980).

A dinâmica inversa consiste em: dados $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, f_{ext} \longrightarrow \tau$.

Para isto, são necessárias duas varreduras:

1. Dados V_0 e α_0, calcular V_i e α_i $(i = 1, \cdots, n)$ utilizando a equação cinemática. Salvando os valores de V_i e α_i.
2. Dado f_{ext}, calcular f_i e τ_i propagando a equação dinâmica. Salvando f_i e τ_i.

Calcular a dinâmica utilizando o enfoque Lagrangiano recai num algoritmo de ordem n^4.

Utilizando a formulação de Newton-Euler o algoritmo é de ordem n (!!).

Tabela Comparativa:

Método	Multiplicações	Somas	Multiplicações $n = 6$	Somas $n = 6$
Lagrangiano	$16n^4 + 36n^3$ $+43n^2 + 18n$ -128	$25n^4 + 22n^3$ $+65n^2 + 14n$ -96	66271	51548
NE Recursivo	$150n - 48$	$131n - 48$	852	738
Kane			646	394
NE Rec Simpli.			224	174

Relação com a formulação de Lagrange

Considerando as equações cinemáticas e dinâmicas do algoritmo:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\, V_i + H_{i+1}\, \dot{\theta}_{i+1} \\ \alpha_{i+1} &= \Phi_{i+1,i}\, \alpha_i + H_{i+1}\, \ddot{\theta}_{i+1} + a_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i &= \Phi^*_{i+1,i}\, f_{i+1} + M_i\, \alpha_i + b_i \\ \tau_i &= H_i^*\, f_i \end{aligned}$$

aplicando elas recursivamente tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Phi_{10}\, \alpha_0 + H_1\, \ddot{\theta}_1 + a_1 \\ \alpha_2 &= \Phi_{21}\, \alpha_1 + H_2\, \ddot{\theta}_2 + a_2 \\ &= \underbrace{\Phi_{21}\Phi_{10}}_{\Phi_{20}}\, \alpha_0 + \Phi_{21}\, (H_1\, \ddot{\theta}_1 + a_1) + H_2\, \ddot{\theta}_2 + a_2 \end{aligned}$$

Generalizando

$$\alpha_i = \Phi_{i0}\, \alpha_0 + \sum_{k=1}^{i} \Phi_{ik}(H_k\, \ddot{\theta}_k + a_k)$$

Por outro lado olhando para a propagação de forças:

$$
\begin{aligned}
f_n &= \Phi^*_{n+1,n}\; f_{n+1} + M_n\; \alpha_n + b_n \\
f_{n-1} &= \Phi^*_{n,n-1}\; f_n + M_{n-1}\; \alpha_{n-1} + b_{n-1} \\
f_{n-1} &= \underbrace{\Phi^*_{n,n-1}\Phi^*_{n+1,n}}_{\Phi^*_{n+1,n-1}}\; f_{n+1} + \Phi^*_{n,n-1}\;(M_n\; \alpha_n + b_n) + M_{n-1}\; \alpha_{n-1} + b_{n-1}
\end{aligned}
$$

Generalizando:

$$
f_i = \Phi^*_{n+1,i}\; f_{ext} + \sum_{k=n}^{i} \Phi^*_{ki}\;(M_k\; \alpha_k + b_k)
$$

Tendo-se então

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &= \Phi_{i0}\; \alpha_0 + \sum_{k=1}^{i} \Phi_{ik}\;(H_k\; \ddot{\theta}_k + a_k) \\
f_i &= \Phi^*_{n+1,i}\; f_{ext} + \sum_{k=n}^{i} \Phi^*_{ki}\;(M_k\; \alpha_k + b_k)
\end{aligned}
$$

Definindo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \Phi_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Phi^*_{n+1,n} \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_n \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \cdot & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & M_n \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned} \alpha &= \Phi E \ \alpha_0 + \Phi \ [H \ \ddot{\theta} + a] \\ f &= \Phi^* B \ f_{ext} + \Phi^* \ [M \ \alpha + b] \\ \tau &= H^* \ f \end{aligned}$$

Então substituindo f em τ

$$\tau = H^*\Phi^*B\ f_{ext} + H^*\Phi^*\ [M\ \alpha + b]$$

Substituindo α na equação acima:

$$\tau = H^*\Phi^*B\ f_{ext} + H^*\Phi^*\ [M\ (\Phi E\ \alpha_0 + \Phi\ [H\ \ddot{\theta} + a]) + b]$$

e conseqüentemente

$$\tau = \underbrace{H^*\Phi^*M\Phi H}_{M(\theta)}\ \ddot{\theta} + \underbrace{H^*\Phi^*(M\Phi a + b)}_{C(\theta,\dot{\theta})\ \dot{\theta}} + \underbrace{H^*\Phi^*M\Phi E\ \alpha_0}_{G(\theta)} + \underbrace{H^*\Phi^*B}_{J^*(\theta)}\ f_{ext}$$

Voltar

Fechar

Aplicações

1. Linearização por realimentação:

   Dados $f_{ext} = 0,\ \alpha_0,\ \theta,\ \dot{\theta},\ \ddot{\theta} = v \longrightarrow \tau$.

   Com isto

   $$\tau = M\ v + C\ \dot{\theta} + G \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = v$$

2. Cálculo de $G(\theta)$: $f_{ext} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \tau = G(\theta)$

3. Cálculo de $J^T v$: $f_{ext} = v$, $\alpha_0 = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \tau = J^T\ v$

4. Cálculo de $J(\theta)\ q$: $\alpha_0 = \ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = q$.

   Na 1a varredura $V_{n+1} = J(\theta)\ q$

5. Cálculo de $\dot{J}(\theta)q$: $\alpha_0 = \ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = q$.

   Na 1a varredura $\alpha_{n+1} = \dot{J}(\theta)\ q$

Dinâmica direta de ordem n

Problema: Dado τ, θ e $\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{\theta}$

Por Lagrange poderia ser utilizado:

$$\ddot{\theta} = -M^{-1}(\theta)\ [C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) - \tau - J^T(\theta)\ f_{ext}]$$

No entanto calcular M^{-1} é uma operação de ordem n^3.

Ela pode ser computada com um esforço de ordem n utilizando NE.

Algoritmo

Passo 1: varredura de $i = 0, \cdots, n$; calculando

$V_{i+1} = \Phi_{i+1,i}\ V_i + H_{i+1}\ \dot{\theta}_{i+1}$, e armazenando a_i e b_i.

Passo 2: varredura de $i = n, \cdots, 0$.

Primeiro considera-se a propagação da força.

Escreve-se f_i em termos de α_i:

$$\begin{aligned} f_i &= \Phi^*_{i+1,i}\ f_{i+1} + M_i\ \alpha_i + b_i \\ &= \Phi^*_{i+1,i}\ (\Phi^*_{i+2,i+1}\ f_{i+2} + M_{i+1}\ \alpha_{i+1} + b_{i+1}) + M_i\ \alpha_i + b_i \end{aligned}$$

Agora pode ser considerada a propagação da aceleração $\alpha_{i+1} = \Phi_{i+1,i}\ \alpha_i + H_{i+1}\ \ddot{\theta}_{i+1} + a_{i+1}$:

$$\begin{aligned} f_i = \Phi^*_{i+2,i}\ f_{i+2} &+ (\Phi^*_{i+1,i} M_{i+1} \Phi_{i+1,i} + M_i)\ \alpha_i + \Phi^*_{i+1,i} M_{i+1} H_{i+1}\ \ddot{\theta}_{i+1} \\ &+ \Phi^*_{i+1,i}\ (M_{i+1}\ a_{i+1} + b_{i+1}) + b_i \end{aligned}$$

Em geral pode-se considerar a seguinte relação entre f_i e α_i:

$$f_i = P_i \, \alpha_i + \beta_i$$

onde P_i é a inercia do corpo articulado e β_i somente depende das velocidades.

Os termos P_i e β_i pode ser calculados em forma iterativa dado que

$$P_i = g_p(P_{i+1}); \qquad \beta_i = g_\beta(P_{i+1}, \beta_{i+1})$$

A condição de contorno é dada por:

$$f_n = \underbrace{M_n}_{P_n} \alpha_n + \underbrace{b_n + \Phi^*_{n+1,n} \, f_{ext}}_{\beta_n}$$

Passo 3: varredura de $i = 0, \cdots, n$; calculando $\ddot{\theta}_i$.

Considerando:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= H^*_{i+1} \, f_{i+1} \\ &= H^*_{i+1} \, (P_{i+1} \, \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) \\ &= H^*_{i+1} \, (P_{i+1} \, (\Phi_{i+1,i} \, \alpha_i + H_{i+1} \, \ddot{\theta}_{i+1} + a_{i+1}) + \beta_{i+1}) \end{aligned}$$

Re-organizando os termo tem-se:

$$\tau_{i+1} = H^*_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}\, \ddot{\theta}_{i+1} + H^*_{i+1} P_{i+1} \Phi_{i+1,i}\, \alpha_i + H^*_{i+1} (P_{i+1}\, a_{i+1} + \beta_{i+1})$$

Podendo calcular agora $\ddot{\theta}_{i+1}$:

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \frac{\tau_{i+1} - H^T_{i+1} P_{i+1} \Phi_{i+1,i}\, \alpha_i - H^T_{i+1}\, (P_{i+1} a_i + \beta_{i+1})}{H^T_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}}$$

sendo que

$$\alpha_i = \Phi_{i,i-1}\, \alpha_{i-1} + H_i\, \ddot{\theta}_i + a_i$$

com condições de contorno $V_0 = 0;\ \alpha_0 = [\vec{g},\ 0]^T$.

Modelo Dinâmico no espaço operacional

O modelo dinâmico no espaço das juntas é dado por:

$$M(\theta)\ \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\ \dot{\theta} + G(\theta) = \tau$$

Podemos obter um modelo no espaço operacional utilizando a relação cinemática:

$$\dot{x} = J(\theta)\ \dot{\theta} \qquad \ddot{x} = J(\theta)\ \ddot{\theta} + \dot{J}\ \dot{\theta}$$

Deixando $\ddot{\theta}$ em função de $\ddot{x}$:

$$\ddot{\theta} = J^{-1}\ [\ddot{x} - \dot{J}\ \dot{\theta}]$$

multiplicando por $M(\theta)$ tem-se:

$$M\ \ddot{\theta} = M J^{-1}\ [\ddot{x} - \dot{J}\ \dot{\theta}]$$

pode-se chegar à seguinte relação:

$$\boxed{\bar{M}\ \ddot{x} + \bar{C}\ \dot{x} + \bar{G}(x) = f}$$

onde

$$\bar{M} = (JM^{-1}J^T)^{-1}; \quad \bar{C}\dot{x} = \bar{M}JM^{-1}C\dot{\theta} - \bar{M}\dot{J}\dot{\theta}; \quad \bar{G} = \bar{M}JM^{-1}G$$

e

$$f = J^{-T}\tau$$

onde f, expressa em coordenadas mínimas (pose), é a força generalizada (forças/torques) aplicada ao efetuador equivalente aos torques aplicados nas juntas.

Observação 1: A equivalência é no sentido de que tal força generalizada geraria o mesmo movimento do manipulador que os torques do vetor τ aplicados às juntas.

Observação 2: Note-se que devemos ter o Jacobiano analítico J, pois x são coordenadas de representação no espaço operacional (pose).

O modelo dinâmico no espaço operacional conserva as seguintes propriedades:

- Simetria: $\bar{M} = \bar{M}^T > 0$
- Passividade: $\dot{x}^T(\dot{\bar{M}} - 2\bar{C})\dot{x} = 0$
- Linearidade em certos parâmetros.

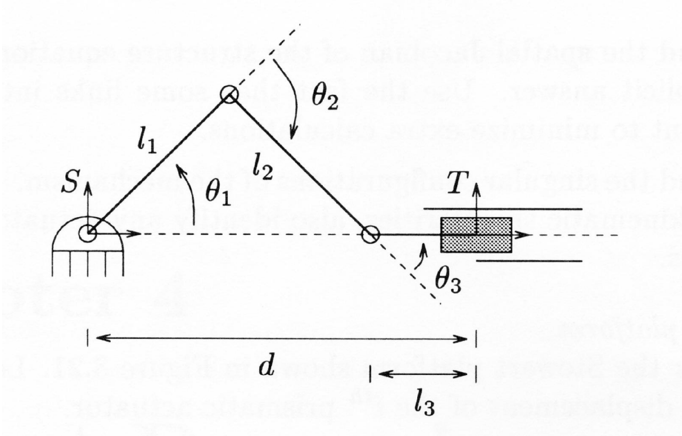
A equação

$$\bar{M}\ddot{x} + \bar{C}\dot{x} + \bar{G}(x) = f$$

permite calcular a dinâmica inversa, i.e. dados $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, calcular $f(t)$, sem maiores dificuldades desde que o jacobiano J seja não singular.

Cadeia cinemática fechada: Dinâmica

Considere o seguinte sistema:



As restrições cinemáticas são, $\phi(\theta) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\theta_T &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \\
y_T &= l_1 \, \sin(\theta_1) + l_2 \, \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \, \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0
\end{aligned}
$$

Diferenciado, obtém-se as restrições de velocidade:

$$v_T = \begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{\theta}_T \end{bmatrix} = J(\theta)\ \dot{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\dot{x}_T}_{v_c}$$

Desde uma perspectiva de força, considerando a carga como parte do braço, tem-se:

$$f_{Tx} = 0 \qquad \Longrightarrow A^T f_T = 0$$

onde $f_T = [f_{Tx},\ f_{Ty},\ \tau_T]^T$.

Considerando a carga separada, então f_{Tx} produz o movimento:

$$m_c\ \ddot{x}_T = f_{Tx} = A^T f_T$$

onde m_c é a massa da carga.

Modelo dinâmico Completo

O modelo dinâmico do manipulador pode ser determinada pela formulação de Lagrange ou Newton-Euler.

O modelo dinâmico completo de um mecanismo com restrições é dado por:

$$
\begin{aligned}
M(\theta)\,\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\,\dot{\theta} + G(\theta) &= \tau - J^T(\theta)\,f_T \\
A^T f_T &= 0 \\
J(\theta)\,\dot{\theta} &= A\,v_c \\
J(\theta)\,\ddot{\theta} + \dot{J}(\theta)\,\dot{\theta} &= A\,\alpha_c + \dot{A} v_c
\end{aligned}
$$

Se a carga é considerada em forma separada, então $A^T f_T = 0$ tem que ser substituída por:

$$M_c\,\alpha_c + B_c\,v_c + G_c = A^T f_T$$

Para simulação podemos resolver α_c e f_T simultaneamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & JM^{-1}J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_c \\ f_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ JM^{-1}(-C\dot{\theta} - G) - \dot{A}v_c + \dot{J}\dot{\theta} + JM^{-1}\tau \end{bmatrix}$$

se $JM^{-1}J^T$ for inversível.

Então,

1. Por integração, podem ser calculados os estados x_c e v_c, que podem ser combinados com as restrições para resolver θ e $\dot{\theta}$ utilizando a cinemática inversa.
2. Para um dado τ, o lado direito da equação diferencial pode ser calculado para determinar α_c.
3. A força da restrição f_T pode ser calculada com base em θ, $\dot{\theta}$ e τ.

Se a carga for considerada em forma separada, a equação dinâmica é dada por:

$$\begin{bmatrix} M_c & -A^T \\ A & JM^{-1}J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_c \\ f_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_c v_c - G_c \\ JM^{-1}(-C\dot{\theta} - G) - \dot{A}v_c + \dot{J}\dot{\theta} + JM^{-1}\tau \end{bmatrix}$$

De novo, o lado direito somente depende de θ, $\dot{\theta}$ e τ, desta forma, a equação pode ser utilizada para propagar x_c e v_c e calcular f_T.