

Introdução à Robótica

<http://www.coep.ufrj.br/gscar>



1/51

Manipuladores com Restrições

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 8 de agosto de 2018



Voltar

Fechar



Mecanismos com Restrições

Considere uma cadeia cinemática com n juntas ($\theta \in \mathbb{R}^n$).
Suponha que os movimentos da cadeia estão **restritos** por:

$$\phi(\theta) = 0; \quad \phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$$

Então o mecanismo tem $(n - k)$ DOF (**efetivos**).
Desta forma, somente é necessário **atuar** $(n - k)$ juntas.

Exemplos

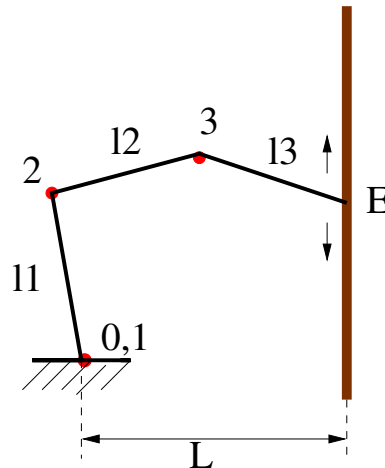
- Manipuladores simples com restrições no efetuador
- Manipuladores paralelos
- Manipuladores múltiplos carregando objetos (incluindo mãos robóticas)
- Robôs móveis

[Voltar](#)[Fechar](#)

Metodologia Geral

- Abrir a malha
- Propagar a cinemática ao longo dos ramos
- Adicionar restrições (independentes)

Exemplo 1: Manipulador Planar 3R com o efetuador restrito a se movimentar numa linha (2 DOF)



Cinemática direta:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{0E} &= \vec{p}_{01} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{23} + \vec{p}_{3E} = \vec{0} + l_1 \vec{x}_1 + l_2 \vec{x}_2 + l_3 \vec{x}_3 \\ R_{0E} &= e^{\hat{z}\theta_1} e^{\hat{z}\theta_2} e^{\hat{z}\theta_3} = e^{\hat{z}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \rightarrow \theta_E = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3\end{aligned}$$

Restrição: $\vec{x} \cdot \vec{p}_{0E} = L$. No sistema de coordenada da base:

$$x^T (l_1 e^{\hat{z}\theta_1} x + l_2 e^{\hat{z}(\theta_1+\theta_2)} x + l_3 e^{\hat{z}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} x) = L$$

onde $x^T = [1, 0, 0]$ e $z^T = [0, 0, 1]$. Isto é

$$l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = L$$

Graus de liberdade:

DOF efetivos = # DOF sem restrição - # restrições = 3 - 1 = 2

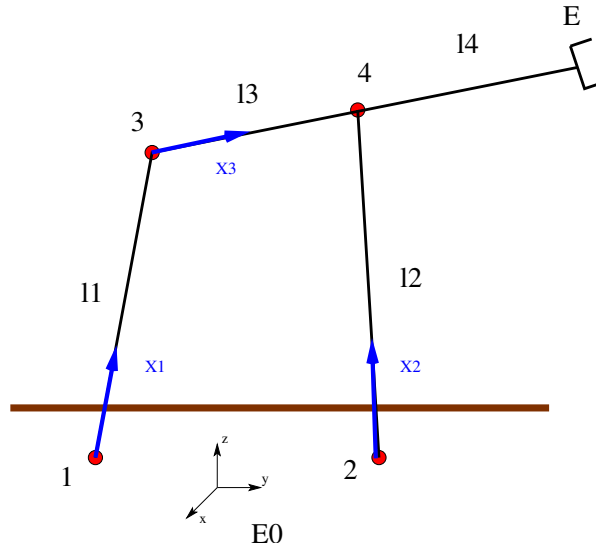
Adicionado uma outra restrição:

$$\theta_E = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$$

tem-se: DOF efetivos = 3 - 2 = 1.



Exemplo 2: 4-bar Linkage (1 DOF)



Pode-se chegar de 1 a 4 por dois caminhos:

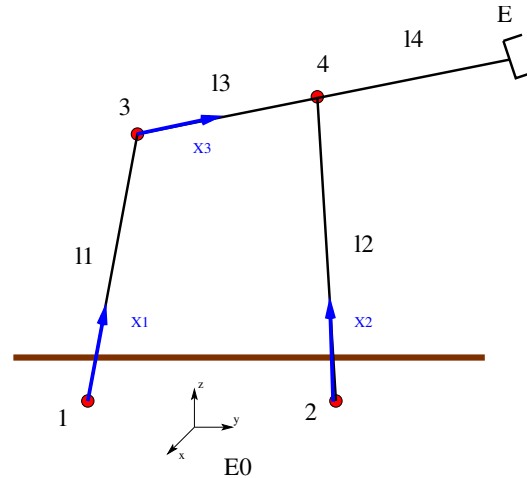
$$\vec{p}_{14} = \vec{p}_{13} + \vec{p}_{34} = \vec{p}_{12} + \vec{p}_{24} \implies 2 \text{ Restrições}$$

Então o número de DOF do mecanismo é:

$$\text{DOF efetivos} = 3 \text{ DOF} - 2 \text{ restrições} = 1$$

Somente seria necessário atuar uma junta.





Resolvendo a restrição em \bar{E}_0 (\bar{E}_0 coincide com \bar{E}_1 para $\theta_1 = 0$):

$$p_{14} = l_1 e^{\hat{z}\theta_1} x + l_3 e^{\hat{z}(\theta_1+\theta_3)} x = p_{12} + l_2 e^{\hat{z}\theta_2} x$$

A **cinemática direta** deste mecanismo é dada por:

$$\theta_E = \theta_1 + \theta_3$$

$$= \theta_2 + \theta_4$$

$$p_{1E} = l_1 e^{\hat{z}\theta_1} x + (l_3 + l_4) e^{\hat{z}(\theta_1+\theta_3)} x$$

$$= p_{12} + l_2 e^{\hat{z}\theta_2} x + l_4 e^{\hat{z}(\theta_2+\theta_4)} x$$



Voltar

Fechar



Fórmula de Gruebler

Considere um mecanismo planar. Seja:

- N : # de elos
- g : # de juntas
- f_i : # de DOF da junta i
- u_i : # de restrições da junta i (note que no caso planar $u_i + f_i = 3$)

Então tem-se que:

- # total de DOF: $3 N$
- # total de restrições independentes: $\sum_{i=1}^g u_i = 3 g - \sum_{i=1}^g f_i$

Portanto o número efetivo F de DOF do mecanismo é:

$$F = 3 (N - g) + \sum_{i=1}^g f_i$$

Exemplo 1: Manipulador 3R planar

1. Sem manter orientação: $N = 3$, $g = 4$, $f = \{1, 1, 1, 2\}$. Então

$$F = 3(3 - 4) + 5 = 2$$

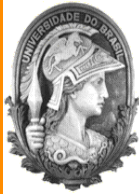
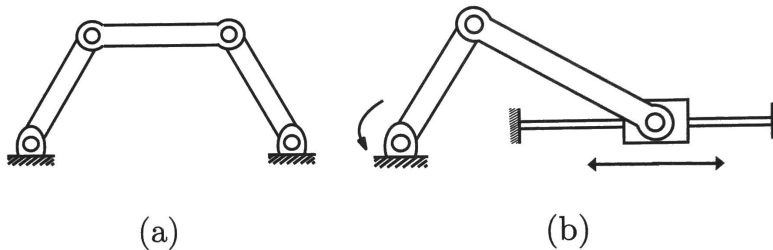
2. Mantendo orientação: $N = 3$, $g = 4$, $f = \{1, 1, 1, 1\}$. Então

$$F = 3(3 - 4) + 4 = 1$$

Exemplo 2: 4-bar-linkage

$N = 3$, $g = 4$, $f = \{1, 1, 1, 1\}$. Então

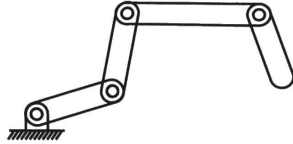
$$F = 3(3 - 4) + 4 = 1$$



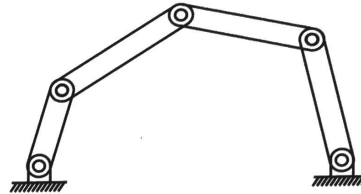
Exemplo 3: mecanismos planares clássicos - kR manipulator, Stephenson six-bar linkage, Watt six-bar linkage



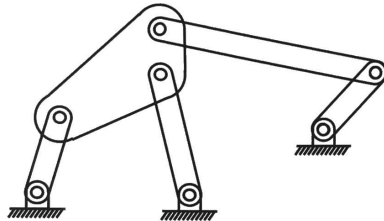
9/51



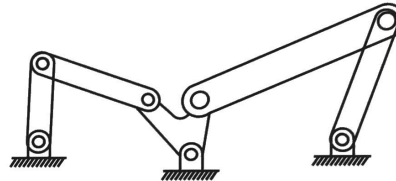
(a)



(b)



(c)



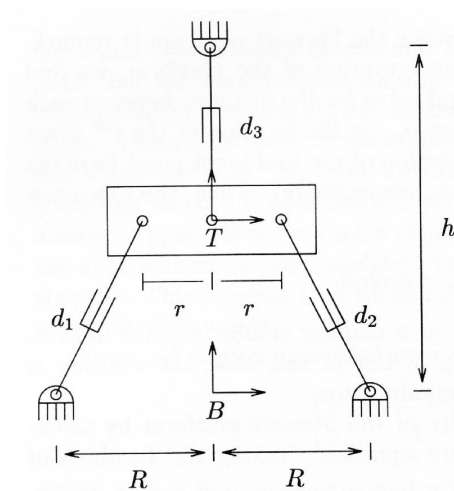
(d)



Voltar

Fechar

Exemplo 4: Plataforma (Stewart) planar com 3 pernas.



$N = 7$, $g = 9$, $f_i = 1$ ($\forall i$). Então

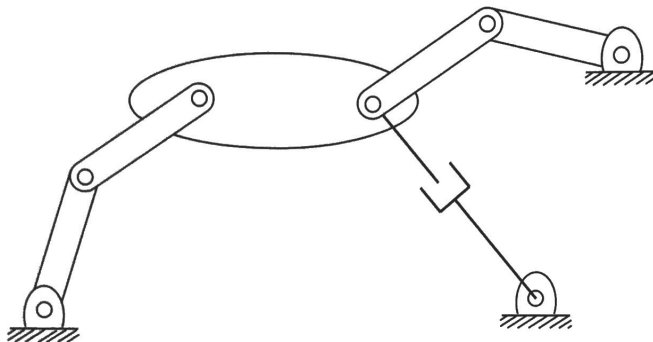
$$F = 3(7 - 9) + 9 = 3$$



10/51

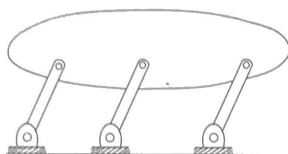


Exemplo 5: Plataforma planar com 2 juntas sobrepostas.

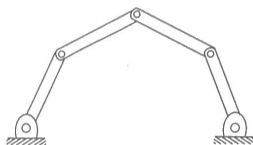


11/51

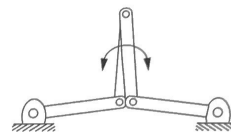
Exemplo 5: restrições redundantes e singularidades



(a)



(b)



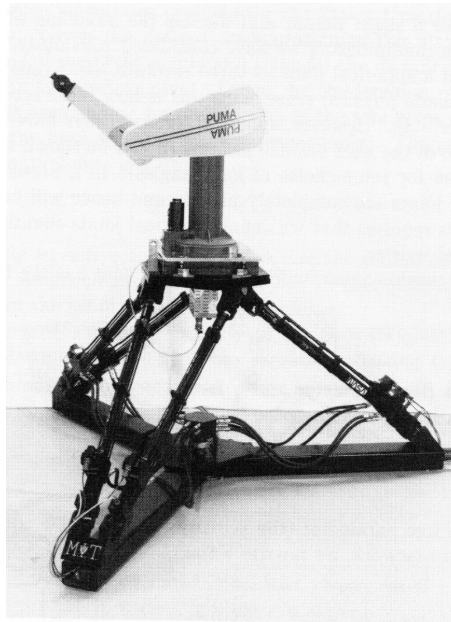
Nestes casos a fórmula de Grubler dá um lower bound dos DOFs da estrutura.



Para **mecanismos espaciais** (corpos com translações e rotações no espaço Cartesiano), tem-se que a **fórmula de Gruebler** é dada por:

$$F = 6 (N - g) + \sum_{i=1}^g f_i$$

Exemplo 4: Plataforma de Stewart.

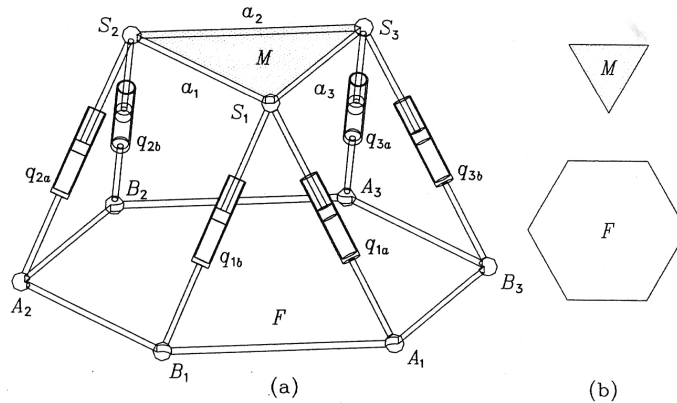


12/51



Voltar

Fechar



Tem 6 pernas e uma plataforma. Cada perna tem 2 elos (totalizando 12); uma junta prismática (totalizando 6); e 2 esféricas (totalizando 12). Então

$$N = 12 + 1 = 13$$

$$g = 6 + 12 = 18$$

$$f = \{ \underbrace{1, \dots, 1}_{6 \text{ prismáticas}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{12 \text{ esféricas}} \}$$

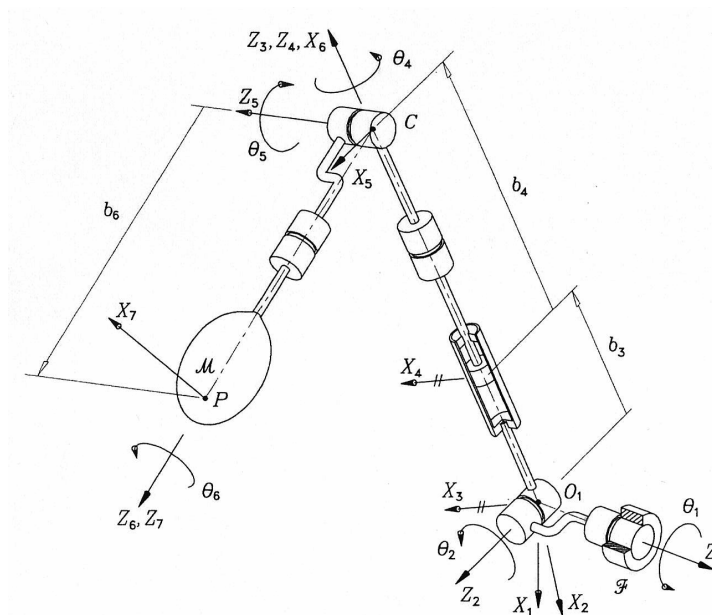


Pela fórmula de Gruebler, o # de DOF do mecanismo é dado por:

$$F = 6 (13 - 18) + (6 + 12 \times 3) = 12$$

Com isto teria-se um mecanismo com mais DOF que os necessários, que para ser **totalmente controlado** precisaria de 12 atuadores.

Pode-se reduzir o grau de mobilidade de algumas juntas esféricas.



14/51

Não permitindo, nas juntas esféricas da base, a rotação ao redor do eixo do elo, i.e. $\vec{\omega}_i \cdot \vec{z}_i = 0$.

Com isto, os graus de liberdade de cada junta é dada por:

$$f = \{ \underbrace{1, \dots, 1}_{6 \text{ prismáticas}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{6 \text{ esféricas}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{6 \text{ esféricas}} \}$$

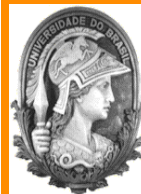
Desta forma, pela fórmula de Gruebler tem-se

$$F = 6 (13 - 18) + (6 + 6 \times 3 + 6 \times 2) = 6$$

Com isto o mecanismo tem 6 DOF, o que implica na necessidade de utilizar 6 atuadores que são colocados nas juntas prismáticas.

TABLE 8.6. DH Parameters of the leg of Fig. 8.8

i	a_i	b_i	α_i
1	0	0	90°
2	0	0	90°
3	0	b_3	0°
4	0	b_4 (const)	90°
5	0	0	90°
6	0	b_6 (const)	0°





Controle Cinemático

Considerando que a restrição é dada por

$$\phi(\theta) = 0; \quad \text{com } \phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$$

Diferenciando as k restrições tem-se:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dot{\theta} = 0 \implies J_c(\theta) \dot{\theta} = 0,$$

onde $J_c \in \mathbb{R}^{k \times n}$ é chamado de **Jacobiano da restrição**.

Por outro lado, a **cinemática direta** do manipulador $x = f(\theta)$ (configuração do efetuador no espaço operacional), pode ser diferenciada para obter a **cinemática diferencial**:

$$\dot{x} = J_m(\theta) \dot{\theta}$$

onde $J_m \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é o **jacobiano do manipulador** ($n \geq m$).





Se o sistema robótico tem d DOF (calculado pela Fórmula de Gruebler), considera-se aqui que são d juntas. Não será considerado o caso de sistemas **sub-atuados** ou **redundantemente atuados**.

Particionando o vetor de juntas θ em d juntas ativa (θ_a) e $(n-d)$ juntas passivas (θ_p):

$$\theta = [\theta_a^T, \theta_p^T]^T$$

A cinemática diferencial do sistema robótico pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{ca} \dot{\theta}_a + J_{cp} \dot{\theta}_p &= 0 \\ \dot{x} &= J_{ma} \dot{\theta}_a + J_{mp} \dot{\theta}_p \end{aligned}$$

Se J_{cp} for inversível (quadrada, i.e. número de restrições = número de juntas passivas), pode-se resolver para $\dot{\theta}_p$,

$$\dot{\theta}_p = -J_{cp}^{-1} J_{ca} \dot{\theta}_a$$

Caso o número de juntas passivas seja maior que o número de restrições, deverá ser utilizada a pseudo-inversa J_{cp}^\dagger .



Então a cinemática diferencial total (da velocidade das juntas ativas para a velocidade da tarefa) é dada por:

$$\dot{x} = \underbrace{(J_{ma} - J_{mp} J_{cp}^{-1} J_{ca})}_J \dot{\theta}_a = J(\theta_a) \dot{\theta}_a$$

No caso de J ser inversível, o problema de controle é similar ao controle cinemático de um manipulador simples.





Singularidades

Mecanismos paralelos apresentam diferentes tipos de singularidades. Quando J_{cp} perde posto, existem movimento interno de juntas, ainda quando as juntas ativas estão travadas.

Perspectiva Dual: certas forças espaciais na tarefa não podem ser resistidas pelas juntas ativas. Este tipo de singularidade é chamada de **Singularidade Instável** ou **Singularidade do Atuador**.

Mecanismos paralelos também podem ter singularidade por perda de manipulabilidade (como mecanismos series), por exemplo. singularidades de fronteira.

Neste caso J_{cp} é inversível mas J perde posto.

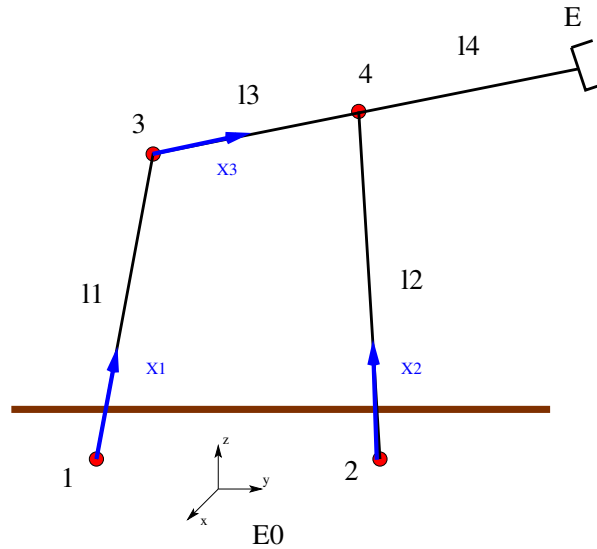




20/51

Manipuladores Paralelos

Exemplo: 4-bar linkage



4-bar Linkage: Cinemática

A rotação é definida por (1 restrição):

$$R = e^{\hat{z}\theta_E} = e^{\hat{z}\theta_1} e^{\hat{z}\theta_3} = e^{\hat{z}\theta_2} e^{\hat{z}\theta_4} \implies \theta_E = \theta_1 + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4$$

e a posição (2 restrições):

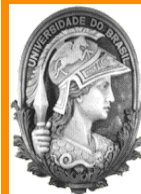
$$p_{14} = e^{\hat{z}\theta_1} (p_{13} + e^{\hat{z}\theta_3} p_{34}) = p_{12} + e^{\hat{z}\theta_2} p_{24}$$

As duas equações acima são conhecidas como **Equações de Estrutura**.

Cinemática Inversa: dada R (equivalentemente $\theta_E = \theta_1 + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4$) e p_{1E} calcular $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Cinemática Direta: Supondo que θ_i seja a junta ativa, então dado o ângulo de junta θ_i calcular (p_{1E}, θ_E) .

Tipicamente, a cinemática inversa é fácil (dado que cada ramo é simples), mas a cinemática direta é difícil (equações com restrições).



4-bar Linkage: Cinemática Direta

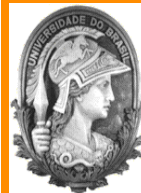
Suponha que θ_2 seja a junta ativa. Então dado θ_2 calcular $\theta_1, \theta_3, \theta_4$.

Da restrição de posição tem-se

$$\begin{aligned} p_{14} &= \underbrace{p_{12} + e^{\hat{z}\theta_2} l_2 x}_{\text{conhecido}} = e^{\hat{z}\theta_1} l_1 x + e^{\hat{z}(\theta_1+\theta_3)} l_3 x \\ &= e^{\hat{z}\theta_1} [l_1 x + e^{\hat{z}\theta_3} l_3 x] \end{aligned}$$

Solução:

1. $\underbrace{\|p_{12} + e^{\hat{z}\theta_2} l_2 x\|}_{\text{conhecido}} = \|l_1 x + e^{\hat{z}\theta_3} l_3 x\| \Rightarrow \text{Subproblema 3} \Rightarrow \theta_3$
2. $\underbrace{p_{12} + e^{\hat{z}\theta_2} l_2 x}_{\text{conhecido}} = e^{\hat{z}\theta_1} \underbrace{[l_1 x + e^{\hat{z}\theta_3} l_3 x]}_{\text{conhecido}} \Rightarrow \text{Subproblema 1} \Rightarrow \theta_1$
3. $\theta_1 + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4 \implies \theta_4 = \theta_1 + \theta_3 - \theta_2$



4-bar Linkage: Jacobiano

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_E \\ \vec{\omega}_E \end{bmatrix}}_{V_E} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{z} \times \vec{p}_{2E} & \vec{z} \times \vec{p}_{4E} \\ \vec{z} & \vec{z} \end{bmatrix}}_{J_A} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}_A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{z} \times \vec{p}_{1E} & \vec{z} \times \vec{p}_{3E} \\ \vec{z} & \vec{z} \end{bmatrix}}_{J_B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}_B}$$

e conseqüentemente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}}_A V_E \implies J(\theta) \dot{\theta} = A V_E$$

Considerando o aniquilador \tilde{A} tal que $\tilde{A}A = 0$, e a pseudo-inversa A^\dagger tal que $A^\dagger A = I$, pode-se escrever a cinemática diferencial como:

$$\overbrace{\tilde{A} J(\theta)}^{\equiv J_c} \dot{\theta} = 0 \implies J_c(\theta) \dot{\theta} = 0 \quad \text{onde } J_c = \tilde{A} J$$

$$V_E = \overbrace{A^\dagger J(\theta)}^{\equiv J_m} \dot{\theta} \implies V_E = J_m(\theta) \dot{\theta} \quad \text{onde } J_m = A^\dagger J$$



Considerando a junta ativa $\dot{\theta}_2$ podemos aplicar o controle cinemático apresentado anteriormente.



24/51



Voltar

Fechar



Manipuladores Múltiplos

Quando m manipuladores seguram um objeto, existem malhas cinemáticas, mas não existem juntas passivas.

Neste caso:

$$V_i = J_i(\theta_i) \dot{\theta}_i = \Phi_{ic} V_c; \quad \Phi_{ic} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \vec{p}_{ic} \times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

onde V_c é a velocidade do objeto; para o i -ésimo manipulador: J_i é o jacobiano, V_i a velocidade do efetuador e θ_i o ângulo de juntas.

Empilhando as variáveis de todos os manipuladores tem-se:

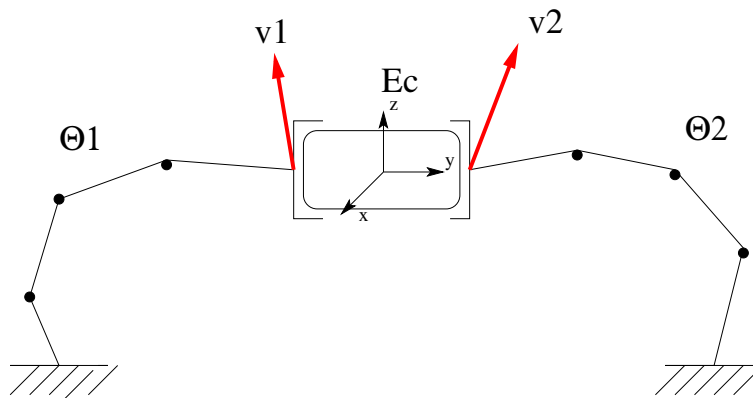
$$V = J(\theta) \dot{\theta} = \Phi V_c; \quad \Phi \in \mathbb{R}^{6m \times 6}$$

Considerando $\tilde{\Phi}$ sendo o aniquilador de Φ , i.e., $\tilde{\Phi}\Phi = 0$, tem-se

$$\tilde{\Phi} V = \tilde{\Phi} J(\theta) \dot{\theta} = 0 \quad \implies \quad \dot{\theta} \in \mathcal{N}(\tilde{\Phi}J)$$



Exemplo: dois manipuladores carregando um objeto



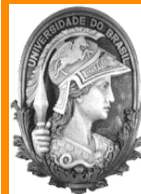
A cinemática diferencial de cada manipulador é dada por:

$$V_1 = J_1(\theta_1) \dot{\theta}_1$$

$$V_2 = J_2(\theta_2) \dot{\theta}_2$$

Ou em forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}} \implies V = J(\theta) \dot{\theta}$$



Por outro lado, a velocidade do objeto em função da velocidade dos efetuadores dos manipuladores é dada por:

$$V_c = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\vec{p}_{1c} \times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}}_{\Phi_{1c}^{-1}} V_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & -p_{2c} \times \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}}_{\Phi_{2c}^{-1}} V_2$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1c} \\ \Phi_{2c} \end{bmatrix} V_c = \Phi V_c \quad \Rightarrow \quad V = \Phi V_c$$

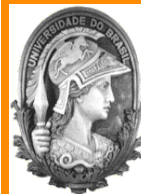
Desta forma, a cinemática diferencial do sistema é dada por:

$$J(\theta) \dot{\theta} = \Phi V_c$$

O sistema de controle fica definido como:

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta) \Phi u$$

onde u é o sinal de controle que pode ser escolhido de forma a satisfazer um dado índice de desempenho na realização da tarefa.



Caso geral

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1c} \\ \vdots \\ \Phi_{mc} \end{bmatrix} V_c$$

$$V = J(\theta) \dot{\theta} = \Phi V_c \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = J^{-1}(\theta) \Phi u$$

O aniquilador de Φ é dado por:

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{1c}^{-1} & -\Phi_{2c}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{1c}^{-1} & 0 & -\Phi_{3c}^{-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \Phi_{1c}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & -\Phi_{mc}^{-1} \end{bmatrix}$$

ou

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{1c}^{-1} & -\Phi_{2c}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi_{2c}^{-1} & -\Phi_{3c}^{-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Phi_{m-1c}^{-1} & -\Phi_{mc}^{-1} \end{bmatrix}$$





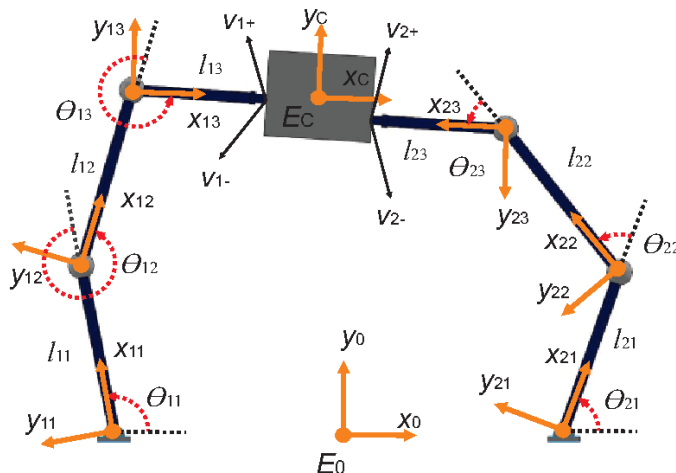
Cooperating Manipulators

- In general, cooperating robots correspond to over-actuated systems or redundant systems, where the effective degrees of freedom are higher than those strictly required to perform a given task ($n_e > n_t$).
- This capacity increases the dexterity of the mechanism, and can be used to:
 - avoid joint limits,
 - avoid singularities
 - avoid workspace obstacles
 - minimize the energy consumption and joint torques
 - optimize a performance index (*e.g.*, manipulability).



Two Arms carrying a load

Consider a mechanism constituted by a closed kinematic chain, where all joints are active, and considers a continuous contact of the end-effector with the manipulated object.



Forward kinematics

The forward kinematics map for a redundant robotic system composed by two cooperating robots can be described by means of the posture of the frame attached to the manipulated object \bar{E}_c with respect to the base frame \bar{E}_0 , determined for each manipulator that belongs to the robotic system.

The structure equations are given respectively by

$$\begin{aligned} p_c &= \underbrace{p_{01} + p_{1c}}_{\text{robot 1}} = \underbrace{p_{02} + p_{2c}}_{\text{robot 2}} , \\ \phi_c &= \underbrace{\phi_{01} + \phi_{1c}}_{\text{robot 1}} = \underbrace{\phi_{02} + \phi_{2c}}_{\text{robot 2}} , \end{aligned}$$

$p_{0i}, \phi_{0i} \in \mathbb{R}^3$: position/orientation vector of the end-effector frame of the i -th manipulator \bar{E}_i with respect to the base frame \bar{E}_0 .

$p_{ic}, \phi_{ic} \in \mathbb{R}^3$: position/orientation vector of the manipulated object frame \bar{E}_c with respect to the end-effector frame of the i -th arm \bar{E}_i .



- The structure equations introduce kinematic constraints on the system, due to the continuous contact of the robots with the manipulated object.
- In contrast with parallel mechanism, the number of constraints is not equal to the number of passive joints of the robots.
- Indeed, for the mechanism presented in Figure, the passive joints are associated to the contact points between the manipulators and the object (Caccavale, F. and Uchiyama, M. (2008). Cooperative manipulators, in Springer Handbook of Robotics).



Differential kinematics

Considering the open chain, the end-effector velocity v_i^+ of the i -th manipulator is related with the velocities of the joints θ_i by

$$v_i^+ = J_i(\theta_i) \dot{\theta}_i,$$

where J_i is the Jacobian of the i -th manipulator, obtained as a function of the joint angles θ_i .

Now, we consider v_c the velocity of the frame \bar{E}_c fixed on the manipulated object. The object velocity v_i^- at the contact points is related with v_c by means of

$$v_i^- = A_i v_c, \quad A_i = \begin{bmatrix} I & p_{ic} \times \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where A_i is the adjoint transformation which relates the velocities of the object frame \bar{E}_c and the end-effector frame of the i -th manipulator \bar{E}_{E_i} .



33/51



Voltar

Fechar

The relative velocity of the each contact point can be parameterized by a velocity vector w_i by using:

$$v_i^- = v_i^+ + H_i^T w_i ,$$

where the columns of the matrix H_i^T represent the directions for free motion at the contact points.

The Jacobian can be rewritten in a more conventional way stacking the Jacobians for each open kinematic chain as

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}}_J \dot{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}}_{v^+} ,$$

or equivalently

$$J \dot{\theta} = v^+ .$$



Thus, the differential kinematics relations can be rewritten as

$$v^+ + H^T w = v^-, \quad v^- = A v_c,$$

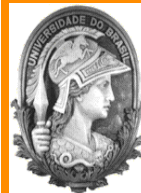
where $w = [w_1^T \ w_2^T]^T$, $H = [H_1^T \ H_2^T]^T$ and $A^T = [A_1^T \ A_2^T]$ has full rank.

The definition $\dot{\theta}_p = w$ and $\dot{\theta}_a = \dot{\theta}$ allow us to represent the system in a more general form,

$$\underbrace{\tilde{A} \begin{bmatrix} J & H^T \end{bmatrix}}_{J_c} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = 0,$$

$$\underbrace{A^\dagger \begin{bmatrix} J & H^T \end{bmatrix}}_{J_m} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = v_c,$$

where \tilde{A} is the annihilating matrix such that, $\tilde{A} A = 0$, and A^\dagger is the pseudo-inverse of matrix A such that $A^\dagger A = I$. A possible choice for \tilde{A} and A^\dagger is given by $\tilde{A} = [A_2 \quad -A_1]$ and $A^\dagger = [A_1^{-1} \ 0]$.



Note that, by using J_c and J_m , the differential kinematics equation of the object is given by

$$v_c = \bar{J} \dot{\theta}_a$$

where

$$\bar{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

is given by

$$\bar{J} = J_{ma} - J_{mp} J_{cp}^{-1} J_{ca}$$



36/51



Voltar

Fechar

Selection matrices

- The kinematic constraints of the robotic system due to the contact points are properly represented by means of a selection matrix H .
- This matrix acts as a filter that accepts or rejects components of motion at the contact point.
- Considering the example for the planar case with compliant grippers not allowing translational and rotational motions of the manipulated object, which implies that $H=0$.
- For a multiple robot system without grippers, contact points with friction can be considered.
- In this case that only angular motions between the end-effector and the object are allowed, the selection matrix H is given by

$$H = [0 \ 0 \ 1]^T$$

- Some other types of contacts and selection matrix H can be considered.



37/51



Voltar

Fechar



Restrições holonômicas/não-holonômicas

Restrição Holonômica: $h(x) = 0$

$$\text{Então } h(x) = 0 \longrightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x) \dot{x} = 0$$

$$\text{Considerando a cinemática do mecanismo } \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} J(\theta)}_{\tilde{A}(\theta)} \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta} = A(\theta) u$$

onde $A(\theta)$ expande $\mathcal{N}(\tilde{A})$, i.e. $\tilde{A}A = 0$.

Restrição Não-Holonômica: $c(x) \dot{x} = 0$

Esta restrição não é integrável, i.e. **não existe** restrição equivalente $h(x) = 0$.





Não é trivial verificar se $c(x) \dot{x}$ é integrável. Em geral são necessárias ferramentas de **Geometria Diferencial**.

Uma outra forma de verificar se $c(x)\dot{x} = \sum c_j(x)\dot{x}_j$ é integrável é através da existência de um fator integrante $\alpha(x)$ tal que:

$$\alpha(x) c_j(x) = \frac{\partial h}{\partial x_j}; \quad j = 1, \dots, n$$

Então levando em consideração que $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$ a restrição é integrável se existe $\alpha(x)$ talque

$$\frac{\partial(\alpha(x) c_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\alpha(x) c_i)}{\partial x_j}$$

Considerando a cinemática do mecanismo $\underbrace{c(k(\theta)) J(\theta)}_{\tilde{A}(\theta)} \dot{\theta} = 0$

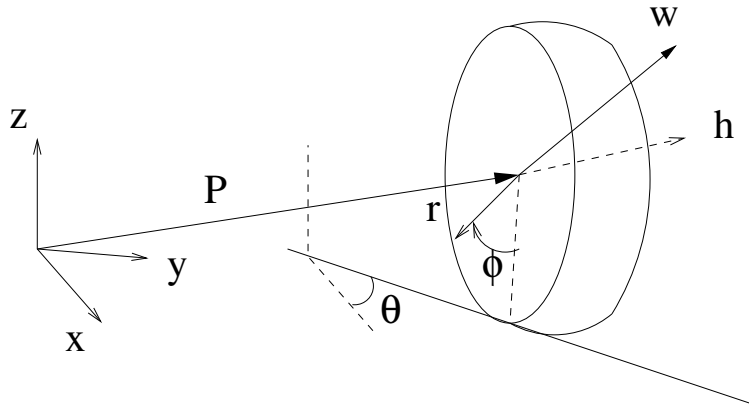
Então o problema de controle é colocado como $\dot{\theta} = A(\theta) u$.





Robôs Móveis com Rodas

Considere uma roda que não cai, comumente chamado de **uniciclo**.



Este sistema possui as seguintes restrições:

- Restrição Planar: $\vec{p} \cdot \vec{z} = r$, (r : raio da roda)
- Restrição de não tilt: $\vec{h} \cdot \vec{z} = 0$
- Restrição (velocidade) de não escorregamento: $\vec{\omega} \times (r\vec{z}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$



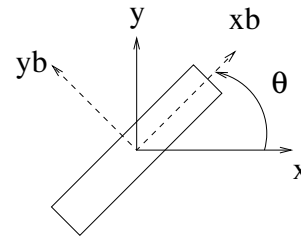
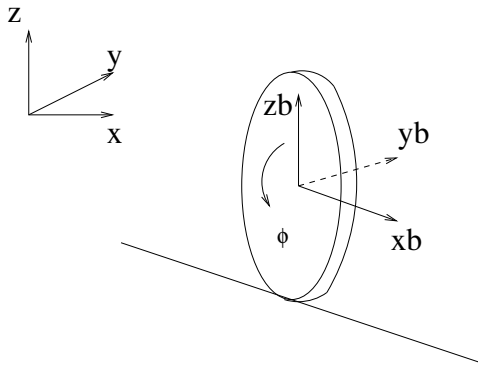


As duas primeiras restrições, embora possam ser escritas em termos de velocidade, são integráveis (**restrições holonômicas**).

A terceira restrição é não integrável (**restrição não holonômica**).

Voltando ao unicyclo, tem-se que as restrições podem ser representadas no sistema inercial, onde $p = [p_x, p_y, p_z]$, $(\vec{h})_0 = R y$, então

- **Restrição Planar:** $p^T z = p_z = r$
- **Restrição de não tilt:** $z^T R y = 0$
- **Restrição de não escorregamento:** $\dot{p} = r \hat{\omega} z$



Dado que o unicyclo não tem ângulo de tilt, uma parametrização de R é dada por $R = e^{\hat{z}\theta} e^{\hat{y}\phi}$.



A velocidade angular após as duas rotações é dada por:

$$\omega = z \dot{\theta} + e^{\hat{z}\theta} y \dot{\phi} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \dot{\phi} \\ \cos(\theta) \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Desta forma, a restrição de não escorregamento é re-escrita como:

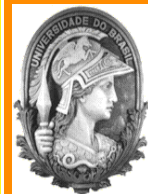
$$\dot{p} = r \hat{\omega} z = r \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \cos(\theta) \dot{\phi} \\ \cdot & 0 & \sin(\theta) \dot{\phi} \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma tem-se

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

Ou sem levar em consideração as variáveis não relevantes:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{bmatrix} \dot{\phi}$$



Controle cinemático do uniciclo

A cinemática diferencial é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & 0 \\ r \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

As variáveis $\{\dot{\phi}, \dot{\theta}\}$ podem ser consideradas sinais de controle onde o objetivo é levar $\{p_x, p_y, \theta\}$ para uma posição e orientação desejada.

Note que somente tem 2 entradas para controlar 3 estados, e que o sistema não tem termo de **drift** (como Ax em sistemas lineares).

Desta forma o sistema linearizado é sempre **não controlável localmente**.

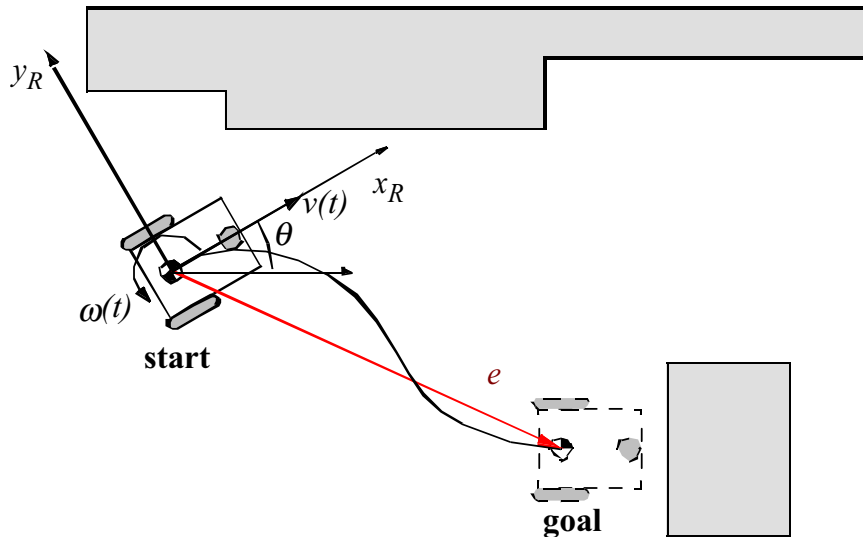
Possíveis enfoques para lidar com sistemas não holonômicos:

- Remover as restrições não holonômicas, e.g. rodas omnidirecionais.
- Controlar primeiro (p_x, p_y) , depois mudar a orientação no lugar.
- Aplicar controle ótimo, controle não linear, geometria diferencial, etc.



Motion Control (kinematic control)

- The objective of a kinematic controller is to follow a trajectory described by its position and/or velocity profiles as function of time.



- Motion control is not straight forward because mobile robots are nonholonomic systems.



- Most controllers are not considering the dynamics of the system. The kinematic model is given by:

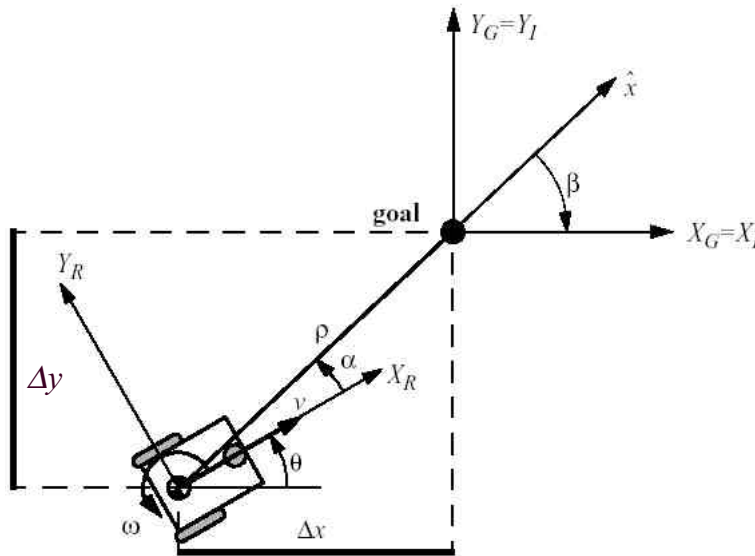
$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

where $v = r\dot{\phi}$ is the unicycle linear velocity and $\omega = \dot{\theta}$ is the unicycle angular velocity.



Motion Control based on polar coordinates

Let α denote the angle between the x axis of the robots reference frame and the vector connecting the center of the axle of the wheels with the final position:



Coordinates transformation into polar coordinates with its origin at goal



position:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = -\theta + \text{atan2}(y, x)$$

$$\beta = -\theta - \alpha$$

System description, in the new polar coordinates:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ \frac{\sin(\alpha)}{\rho} & -1 \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}; \quad \text{for } I_1 \in (-\pi/2, \pi/2]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\rho} & 1 \\ \frac{\sin(\alpha)}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}; \quad \text{for } I_2 \in (-\pi, -\pi/2] \cup (\pi/2, \pi]$$



47/51



Voltar

Fechar

Kinematic Position Control: Remarks

- The coordinates transformation is not defined at $x = y = 0$; as in such a point the determinant of the Jacobian matrix of the transformation is not defined, i.e. it is unbounded
- For $\alpha \in I_1$ the forward direction of the robot points toward the goal, for $\alpha \in I_2$ it is the backward direction.
- By properly defining the forward direction of the robot at its initial configuration, it is always possible to have $\alpha \in I_2$ at $t = 0$. However this does not mean that α remains in I_1 for all time t .



48/51



Voltar

Fechar

Kinematic Position Control: The Control Law

- It can be shown, that with

$$\begin{aligned}v &= k_\rho \rho \\ \omega &= k_\alpha \alpha + k_\beta \beta\end{aligned}$$

the closed-loop system given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos(\alpha) \\ k_\rho \sin(\alpha) - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ -k_\rho \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

will drive the robot to $(\rho, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$.

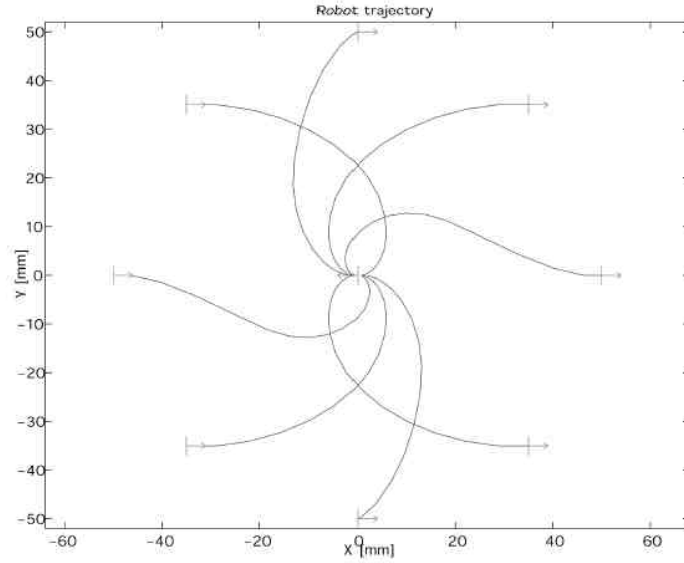
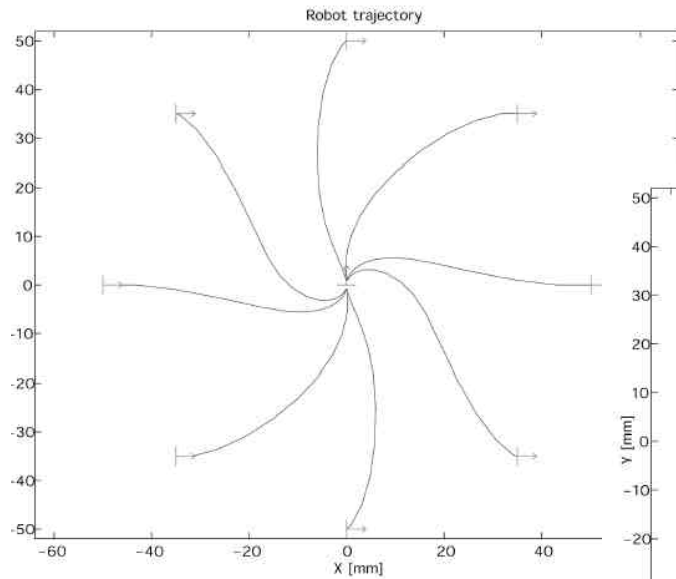
- The control signal v has always constant sign,
 - the direction of movement is kept positive or negative during movement
 - parking maneuver is performed always in the most natural way and without ever inverting its motion.



Simulation Results



50/51



Voltar

Fechar

Kinematic Position Control: Stability Issue

- It can further be shown, that the closed loop control system is locally exponentially stable if

$$k_\rho > 0, \quad k_\beta < 0, \quad k_\alpha - k_\rho > 0$$

- Proof:

for small $x \rightarrow \cos(x) = 1, \sin(x) = x$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_\rho & 0 & 0 \\ 0 & (k_\rho - k_\alpha) & -k_\beta \\ 0 & -k_\rho & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

and the characteristic polynomial of the matrix A of all roots

$$(\lambda + k_\rho)(\lambda^2 + \lambda(k_\alpha - k_\rho) - k_\rho k_\beta)$$

have negative real parts.

