Introdução à Robótica

Movimento de um Corpo Rígido

Fernando Lizarralde

PEE-COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro, 20 de junho de 2018

Mecânica de Corpo Rígido

Movimento de uma Partícula

No espaço Euclidiano o movimento de uma partícula é descrito pela posição da partícula a cada instante com respeito a um sistema de coordenadas inercial (Fixo).

A trajetória de uma partícula é representada por:

$$p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Corpo Rígido

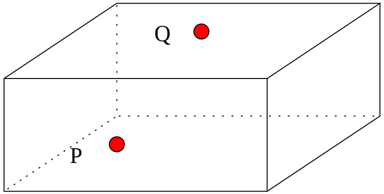
Em Robótica o interesse é por corpos rígidos, e.g. elos de um manipulador.

Corpo Rígido: é um conjunto de partículas no qual a distância entre qualquer duas delas permanece constante, mesmo que o corpo tenha qualquer movimento e/ou forças sejam aplicadas nele.

Num corpo rígido a seguinte igualdade é verificada

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = cte \qquad \forall t$$

onde $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ definem as posições de duas partículas do corpo rígido.



O movimento rígido é composto de translações e rotações.

Considerando um objeto descrito por $O \subset \mathbb{R}^3$, o movimento rígido deste objeto pode ser representado por uma familia de mapeamentos:

$$g(t) : o \mapsto \mathbb{R}^3 \quad , \qquad o \in O$$

onde g descreve o movimento das partículas do corpo em função do tempo, e relativas a um sistema de coordenadas fixo.

Considerando a transformação rígida $g : O \mapsto \mathbb{R}^3$, e dado dois pontos $p, q \in O$, a transformação rígida do vetor $\vec{v} = p - q$ é dada por:

$$g_*(\vec{v}) = g(p) - g(q)$$

não alterando a norma de $\vec{v}$.

Voltar
Fechar

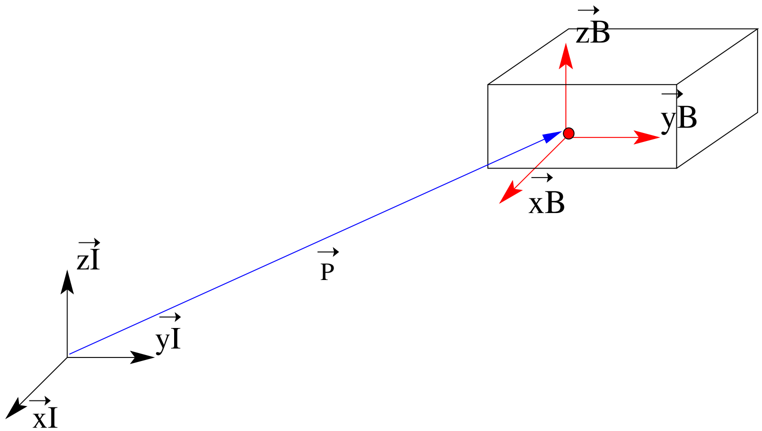
Transformação de Corpo Rígido

O mapeamento $g : O \mapsto \mathbb{R}^3$ é uma transformação de corpo rígido se satisfaz

1. $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|, \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}$
2. $g_*(\vec{v} \times \vec{w}) = g_*(\vec{v}) \times g_*(\vec{w}), \qquad \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$
3. $g_*(\vec{v}) \cdot g_*(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$

Configuração de um Corpo Rígido

Para definir a configuração de um corpo rígido, escolhe-se um ponto qualquer do corpo rígido, e nele é fixado um sistema de coordenadas.



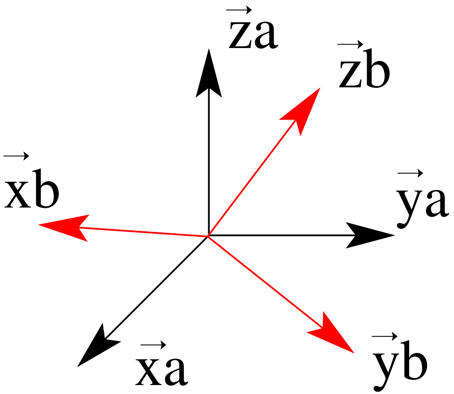
- Posição do corpo rígido: $\vec{p}$
- Orientação: a relação entre $\bar{E}_B = [\vec{x}_B \; \vec{y}_B \; \vec{z}_B]$ e $\bar{E}_I = [\vec{x}_I \; \vec{y}_I \; \vec{z}_I]$

Orientação de um Corpo Rígido

Considere 2 sistemas de coordenadas $\bar{E}_a = [\vec{x}_a\ \vec{y}_a\ \vec{z}_a]$ e $\bar{E}_b = [\vec{x}_b\ \vec{y}_b\ \vec{z}_b]$.

$\bar{E}_a$: sistema de coordenadas inercial;

$\bar{E}_b$: sistema de coordenadas do corpo.



Sendo x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} as coordenadas de $\vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b$ (que definem $\bar{E}_b$) no sistema de coordenadas $\bar{E}_a$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
x_{ab} &= \bar{E}_a^* \, \vec{x}_b & \Longrightarrow & \quad \vec{x}_b = \bar{E}_a \, x_{ab} \\
y_{ab} &= \bar{E}_a^* \, \vec{y}_b & \Longrightarrow & \quad \vec{y}_b = \bar{E}_a \, y_{ab} \\
z_{ab} &= \bar{E}_a^* \, \vec{z}_b & \Longrightarrow & \quad \vec{z}_b = \bar{E}_a \, z_{ab}
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos escrever

$$
\bar{E}_b = [\underbrace{\bar{E}_a x_{ab}}_{\vec{x}_b} \quad \underbrace{\bar{E}_a y_{ab}}_{\vec{y}_b} \quad \underbrace{\bar{E}_a z_{ab}}_{\vec{z}_b}] = \bar{E}_a \underbrace{[x_{ab} \quad y_{ab} \quad z_{ab}]}_{R_{ab}} = \bar{E}_a R_{ab}
$$

R_{ab} é chamada de matriz de rotação, orientação ou atitude

$$
\boxed{R_{ab} = [x_{ab} \quad y_{ab} \quad z_{ab}] = \bar{E}_a^* \bar{E}_b}
$$

onde $x_{ab} \in \mathbb{R}^3$, $y_{ab} \in \mathbb{R}^3$, $z_{ab} \in \mathbb{R}^3$ são as coordenadas das componentes do sistema de coordenadas $\bar{E}_b$ (i.e. $\vec{x}_b \, , \vec{y}_b \, , \vec{z}_b$) no sistema de coordenadas $\bar{E}_a$.

Mais especificamente

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} \vec{x}_a \cdot \\ \vec{y}_a \cdot \\ \vec{z}_a \cdot \end{bmatrix} [\vec{x}_b \ \vec{y}_b \ \vec{z}_b] = \begin{bmatrix} (\vec{x}_a \cdot \vec{x}_b) & (\vec{x}_a \cdot \vec{y}_b) & (\vec{x}_a \cdot \vec{z}_b) \\ (\vec{y}_a \cdot \vec{x}_b) & (\vec{y}_a \cdot \vec{y}_b) & (\vec{y}_a \cdot \vec{z}_b) \\ (\vec{z}_a \cdot \vec{x}_b) & (\vec{z}_a \cdot \vec{y}_b) & (\vec{z}_a \cdot \vec{z}_b) \end{bmatrix}$$

Dado que $\vec{x}_a \cdot \vec{x}_b = \cos(\phi_{11})$, onde ϕ_{11} é o ângulo entre $\vec{x}_a$ e $\vec{x}_b$.
E assim para cada um dos elementos de R_{ab}. Tem-se que R_{ab} também é chamada Matriz dos Cossenos Diretores:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} (\vec{x}_a \cdot \vec{x}_b) & \cdot & \cdot \\ (\vec{y}_a \cdot \vec{x}_b) & \cdot & \cdot \\ \underbrace{(\vec{z}_a \cdot \vec{x}_b)}_{\text{cosseno diretor}} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz de Rotação

Dada a matriz de rotação $R = [r_1 \ r_2 \ r_3]$ com $r_i \in \mathbb{R}^3$, tem-se que

1. $r_i \cdot r_j = \left[\begin{array}{ll} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{array} \right.$
2. $R^T R = R R^T = I_{3\times 3}$
3. $\det(R) = 1$ (pela convenção da mão direita)
4. Se λ for um autovalor de R, então $|\lambda| = 1$

Exercício: Provar que as colunas de R tem módulo unitário e são mutuamente perpendiculares.

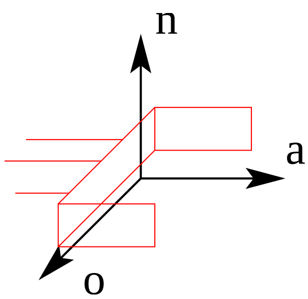
Exercício: Provar as propriedades (3) e (4). (Dica: considerar que $det(R) = r_1^T \ (r_2 \times r_3)$ e que $\|x\| = \|Rx\|$).

O conjunto de todas as matrizes $\mathbb{R}^{3\times 3}$ com as propiedades acima é chamado de Grupo Especial Ortonormal de dimensão 3:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times 3} : R^T R = I \text{ e } \det(R) = 1\}$$

$SO(3) \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ é um grupo com respeito à operação de multiplicação de matrizes (i.e. satisfaz propiedades de fecho, identidade, inversa, associatividade).

Observação: Em robótica $R = [n \; o \; a]$



- a: approach $\qquad$ o: ortogonal $\qquad$ n: normal

Teorema

Os autovalores de uma matriz ortogonal própria $R \in \mathbb{R}^{3\times3}$ estão todos no círculo unitário centrado na origem do plano complexo.

Prova: Pela definição de autovalor e autovetor tem-se

$$R\,v = \lambda\,v$$

onde λ é o autovalor e v o autovetor de R.
Dado que R não é necessariamente simétrica, λ pode ser complexo.
Tem-se também a equação adjunta:

$$v^*\;R^* = \bar{\lambda}\,v^*$$

onde $\bar{\lambda}$ é o complexo conjugado de λ, e $*$ é o conjugado transposto.
Então multiplicando as equações anteriores tem-se

$$v^* R^* R v = \lambda\bar{\lambda}\,v^* v$$

Dado que $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem-se que $R^* = R^T$, e como $R^T R = I$:

$$v^* R^* R v = v^* R^T R v = v^* v = \lambda \bar{\lambda} v^* v = |\lambda|^2 v^* v$$

Então, por comparação conclue-se que:

$$|\lambda|^2 = 1$$

Além disto, como R é uma matriz real, se λ for complexo tem que aparecer em pares complexos conjugados.

Algumas Propriedades Adicionais

Seja $R \in SO(3)$ e $v, w \in \mathbb{R}^3$

1. $R\,(v \times w) = (Rv) \times (Rw)$
2. $R\,(w \times R^T) = (Rw)\times$, i.e., $R\hat{w}R^T = \widehat{Rw}$
3. Rotações são transformações de corpo rígido,

   i.e. satisfazem (1), $\|Rq - Rp\| = \|q - p\|$ e $(Rv) \cdot (Rw) = v \cdot w$

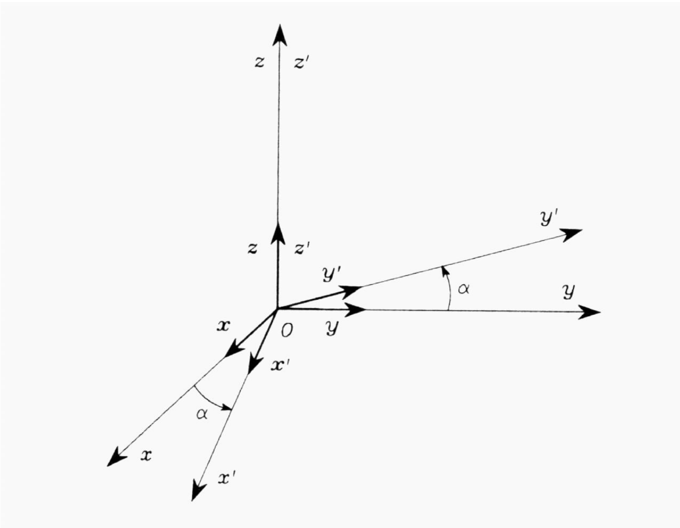
Lembre que

$$w\times = \hat{w} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \hat{w} = -\hat{w}^T!!$$

Rotações Elementares

São rotações ao redor dos eixos dos sistemas de coordenadas (positivo em sentido anti-horário).

Suponha que o sistema de coordenadas $\bar{E} = [\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}]$ é rotacionado α radianos ao redor do eixo $\vec{z}$, obtendo-se como resultado $[\vec{x}'\ \vec{y}'\ \vec{z}']$



Tem-se que as coordenadas de $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ no sistema de coordenadas $[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}]$ são dadas por

$$x' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y' = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tendo portanto

$$R_z(\alpha) = [x' \quad y' \quad z'] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma é possível obter rotações elementares ao redor $\vec{y}$ e $\vec{x}$:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}; \quad R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que

$$R_k(-\phi) = R_k^T(\phi)$$

Interpretações da Matriz de Rotação

Pode ser atribuída a seguinte interpretação à matriz de rotação:

A matriz R descreve a rotação ao redor de um eixo, necessária para alinhar os eixos do sistema de coordenadas inercial com os eixos do sistema de coordenadas do corpo.

Representação de um vetor

Considere um vetor $\vec{p}$ com coordenadas

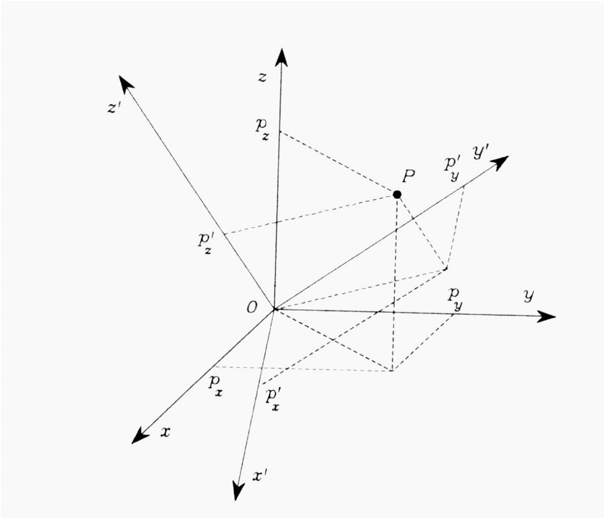
$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \text{ no sistema de coordenadas } \bar{E} = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$$

$$p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \text{ no sistema de coordenadas } \bar{E}' = [\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}']$$

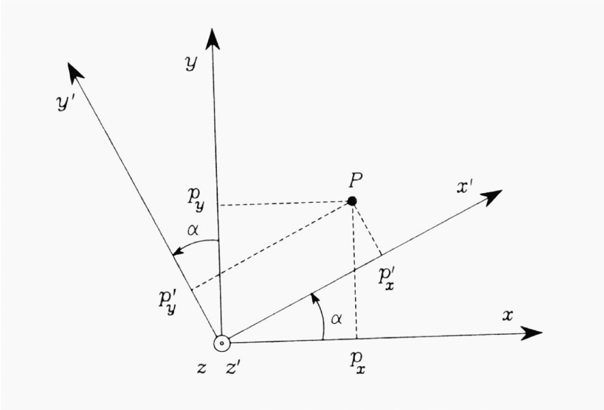
Temos que $\vec{p} = \bar{E}\ p = \bar{E}'\ p' \Longrightarrow p = \bar{E}^{*}\bar{E}'\ p' = R\ p'$, portanto

$$\boxed{p = R\ p'}$$

Então a matriz R representa a transformação de coordenadas do vetor $\vec{p}$ em $\bar{E}'$ nas coordenadas do vetor em $\bar{E}$.



Exemplo: Considere 2 sistemas de coordenadas, com origem comum e mutuamente rotacionados um ângulo α ao redor do eixo z.



Considerando as coordenadas do vetor $\vec{p}$ em $\bar{E}$ e $\bar{E}'$, tem-se

$$
\begin{aligned}
p_x &= p'_x \ \cos(\alpha) - p'_y \ \sin(\alpha) \\
p_y &= p'_x \ \sin(\alpha) + p'_y \ \cos(\alpha) \\
p_z &= p'_z
\end{aligned}
$$

Definindo portanto a rotação elementar ao redor o eixo z:

$$p = R_z(\alpha) \ p'$$

Rotação de um vetor

A matriz de rotação pode ser também interpretada como um operador de rotação de vetores ao redor de um eixo no espaço.

Permitindo a rotação de um vetor por um ângulo θ ao redor de um eixo arbitrário $\vec{\omega}$.

Então considerando as coordenadas p_1 do vetor $\vec{p}_1$ em $\bar{E}$, o novo vetor $\vec{p}$ com coordenadas p é dado por

$$\vec{p} = \mathcal{R}\, \vec{p}_1$$

onde $\mathcal{R}$ é operador de rotação. Desta forma, considerando que $p_1 = \bar{E}^* \vec{p}_1$ e $p = \bar{E}^* \vec{p}$ tem-se

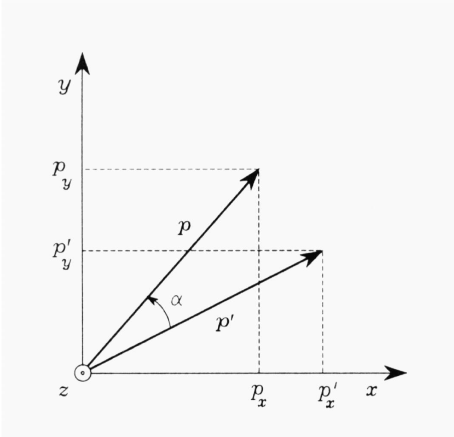
$$p = \bar{E}^*\, \mathcal{R}\, \bar{E}\, p_1 = R\, p_1$$

onde R é a representação do operador de rotação no sistema de coordenadas $\bar{E}$ (c.f. Algebra e Geometria Vetorial).

Devido à ortonormalidade temos que

$$\|p\|^2 = p^T\, p = p_1^T\, R^T R\, p_1 = p_1^T\, p_1 = \|p_1\|^2$$

Exemplo: Considere que o vetor p é obtido de rotacionar p' um ângulo α ao redor do eixo z.



tem-se $(\cos(\alpha+\beta) = c\alpha c\beta - s\alpha s\beta; \sin(\alpha+\beta) = s\alpha c\beta + c\alpha s\beta)$

$$
\begin{aligned}
p_x &= p'_x \cos(\alpha) - p'_y \sin(\alpha) \\
p_y &= p'_x \sin(\alpha) + p'_y \cos(\alpha) \\
p_z &= p'_z
\end{aligned}
$$

que corresponde a uma rotação elementar ao redor o eixo z:

$$p = R_z(\alpha)\, p'$$

A matriz de rotação R_{12} tem 3 interpretações geométricas equivalentes:

1. representa a orientação do sistema de coordenadas $\bar{E}_2$ com respeito a $\bar{E}_1$. As colunas são os cossenos diretores dos eixos do sistema de coordenadas $\bar{E}_2$ com respeito a $\bar{E}_1$.
2. representa a transformação das coordenadas de um vetor representado em $\bar{E}_2$ para as coordenadas deste vetor representado em $\bar{E}_1$ (supondo sistema com origens comuns).
3. representa a operação de rotação de um vetor p_2 para um vetor p_1 no sistema de coordenadas $\bar{E}_1$, i.e. $p_1 = R_{12}p_2$.

Em particular se $R_{12} = \bar{E}_1^* \bar{E}_2$:

1. R_{12} é a representação da orientação de $\bar{E}_2$ com respeito a $\bar{E}_1$
2. R_{12} muda a representação do vetor $\vec{v}$ de $\bar{E}_2$ para $\bar{E}_1$
3. R_{12} é o operador que rotaciona $\bar{E}_1$ para $\bar{E}_2$

Esta última interpretação pode não ser natural. No entanto considerando que $R_{12} = \bar{E}_1^* \bar{E}_2$ e definindo o operador de rotação $\mathcal{R}_{12}$ relacionado com R_{12}, tem-se que o operador de rotação $\mathcal{R}_{12}$ é dado por (slide 20 de Algebra e Geometria Vetorial):

$$\mathcal{R}_{12} = \bar{E}_1 R_{12} \bar{E}_1^*$$

substituindo $R_{12} = \bar{E}_1^* \bar{E}_2$ tem-se

$$\mathcal{R}_{12} = \bar{E}_1 \underbrace{\bar{E}_1^* \bar{E}_2}_{R_{12}} \bar{E}_1^* = \bar{E}_2 \bar{E}_1^*$$

Consequentemente, tem-se

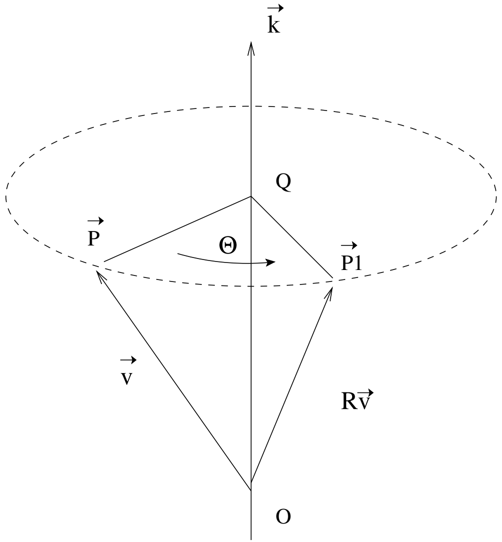
$$\mathcal{R}_{12} \bar{E}_1 = \bar{E}_2 \underbrace{\bar{E}_1^* \bar{E}_1}_{\mathcal{I}} = \bar{E}_2$$

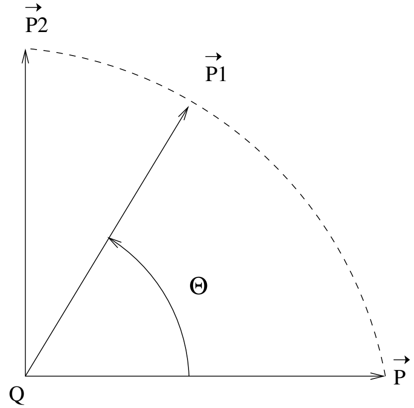
Desta forma $\mathcal{R}_{12}$ é o operador que rotaciona $\bar{E}_1$ para $\bar{E}_2$.
Exemplo: Considera a rotação elementar $R_z(\theta)$ e o vetor $x = [1\ 0\ 0]^T$, tem-se então que $R_z(\theta)\ x = [\cos(\theta)\ \ \sin(\theta)\ \ 0]^T$; que representa o vetor x rotacionado ao redor de z por um ângulo θ.

Operador de Rotação

Considere o operador $\mathcal{R} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ que realiza a rotação ao redor de um vetor unitário $\vec{k}$ ($\|\vec{k}\| = 1$) por um ângulo θ.

O vetor resultante desta operação $\vec{v}_1 = \mathcal{R}\, \vec{v}$ é mostrado na figura:





$$\vec{p} = \vec{v}_\perp \qquad \vec{p}_1 = (\mathcal{R}\vec{v})_\perp = (\vec{v}_1)_\perp$$

Voltar
Fechar

Deseja-se então calcular o operador $\mathcal{R}$ em termos de $\vec{k}$ e θ.

Para isto, o vetor $\vec{v}_1 = \mathcal{R}\ \vec{v}$ pode ser decomposto em forma ortogonal ao vetor $\vec{k}$:

$$\mathcal{R}\ \vec{v} = (\mathcal{R}\ \vec{v})_\| + (\mathcal{R}\ \vec{v})_\perp$$

onde

$$(\mathcal{R}\vec{v})_\| = (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\ \vec{k} = (\vec{k}\cdot\vec{v})\ \vec{k} = (\vec{k}\vec{k}\cdot)\ \vec{v}$$

Por outro lado, $(\mathcal{R}\vec{v})_\perp$ pode ser decomposto nas direções $(\vec{k}\times\vec{v})$ e $\vec{v}_\perp = (\mathcal{I}-\vec{k}\vec{k}\cdot)\ \vec{v}$:

$$(\mathcal{R}\vec{v})_\perp = r\sin(\theta)\frac{\vec{k}\times\vec{v}}{\|\vec{k}\times\vec{v}\|} + r\cos(\theta)\frac{\vec{v}_\perp}{\|\vec{v}_\perp\|}$$

onde r é o raio da base do cone da figura.

O raio é dado pela norma da projeção ortogonal $\vec{v}_\perp$ de $\vec{v}$ com respeito a $\vec{k}$:

$$r = \|\vec{v}_\perp\| = \left\|(\mathcal{I}-\vec{k}\vec{k}\cdot)\ \vec{v}\right\| = \left\|\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{v})\right\| = \left\|\vec{k}\times\vec{v}\right\|$$

Dado que $(\vec{k}\times)^2 = \vec{k}\vec{k}\cdot - \mathcal{I}$ e por $\vec{k}$ ser ortogonal a $\vec{k}\times\vec{v}$.

Sendo portanto,

$$(\mathcal{R}\vec{v})_\perp = [\sin(\theta)(\vec{k}\times) - \cos(\theta)(\vec{k}\times(\vec{k}\times))]\ \vec{v}$$

Desta forma, combinando $(\mathcal{R}\vec{v})_\parallel$ e $(\mathcal{R}\vec{v})_\perp$, tem-se que o operador rotação é dado por:

$$\mathcal{R}\vec{v} = (\mathcal{R}\vec{v})_\parallel + (\mathcal{R}\vec{v})_\perp = [(\vec{k}\vec{k}\cdot) + \sin(\theta)(\vec{k}\times) - \cos(\theta)(\vec{k}\times(\vec{k}\times))]\ \vec{v}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (\vec{k}\vec{k}\cdot) + \sin(\theta)(\vec{k}\times) - \cos(\theta)(\vec{k}\times)(\vec{k}\times) \\ &= \mathcal{I} + \sin(\theta)(\vec{k}\times) + (1-\cos(\theta))(\vec{k}\times)^2 \end{aligned}$$

onde foi considerado que $\vec{k}\vec{k}\cdot = (\vec{k}\times)^2 + \mathcal{I}$.

O operador $\mathcal{R}$ pode ser representado num sistema de coordenadas $\bar{E}$. Em $\bar{E}$ a rotação é dada por

$$R = \bar{E}^*\mathcal{R}\bar{E} = \bar{E}^*[\mathcal{I} + \sin(\theta)(\vec{k}\times) + (1-\cos(\theta))(\vec{k}\times)^2]\bar{E}$$

Distribuindo $\bar{E}$ dentro do parêntese tem-se

$$R = \underbrace{\bar{E}^*\bar{E}}_{I} + \sin(\theta)\bar{E}^*(\vec{k} \times \bar{E}) + (1 - \cos(\theta))\bar{E}^*(\vec{k}\times)(\vec{k} \times \bar{E})$$

Levando em conta que $\bar{E}^*(\vec{k} \times \bar{E}) = (\bar{E}^*\vec{k})\times$ tem-se que:

$$\begin{aligned} R &= I + \sin(\theta)(\bar{E}^*\vec{k}) \times +(1 - \cos(\theta))(\bar{E}^*\vec{k}) \times (\bar{E}^*(\vec{k} \times \bar{E})) \\ &= I + \sin(\theta)(\bar{E}^*\vec{k}) \times +(1 - \cos(\theta))(\bar{E}^*\vec{k}) \times (\bar{E}^*\vec{k})\times \end{aligned}$$

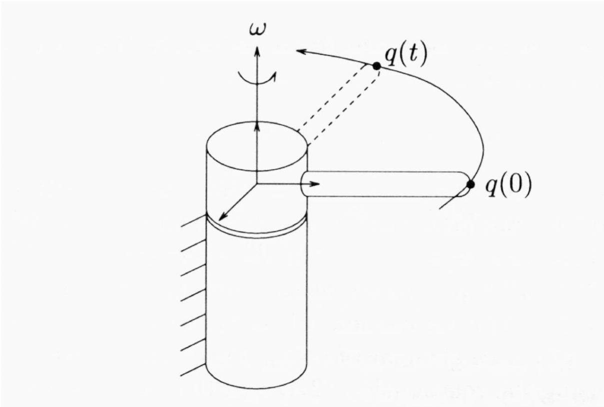
Considerando que a representação de $\vec{k}$ em $\bar{E}$ é dada por $k = \bar{E}^*\vec{k}$, tem-se que:

$$\boxed{R = I + \sin(\theta)\ \hat{k} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{k}^2}$$

Voltar
Fechar

Coordenadas Exponenciais de Rotação

Considere uma rotação ao redor de um eixo $\vec{w}$



Se rotacionamos, com velocidade unitária, o ponto q ao redor de $\vec{w}$, tem-se

$$\dot{q}(t) = \omega(t) \times q(t) = \hat{\omega}\; q(t)$$

Dado que este sistema é semelhante ao sistema linear $\dot{x} = Ax$ com solução $x(t) = e^{At}x(0)$ tem-se que

$$q(t) = e^{\hat{\omega}t}\; q(0)$$

onde

$$e^{\hat{\omega}t} = I + \hat{\omega}\; t + \frac{1}{2!}\,\hat{\omega}^2\; t^2 + \frac{1}{3!}\,\hat{\omega}^3\; t^3 \cdots$$

Considerando uma rotação de θ unidades de tempo tem-se uma rotação elementar ao redor de ω, i.e.,

$$R_\omega(\theta) = e^{\hat{\omega}\theta}$$

A matriz antisimétrica $\hat{\omega}$ tem as seguintes propriedades:

1. $\hat{\omega}^3 = -\left\|\omega\right\|^2 \hat{\omega}$
2. Se $\|w\| = 1$ tem-se, para $k = 1, 2, \cdots,$

   $$\hat{w}^{4k} = -\hat{w}^2, \quad \hat{w}^{4k-1} = -\hat{w}, \quad \hat{w}^{4k-2} = \hat{w}^2, \quad \hat{w}^{4k-3} = \hat{w}.$$

Voltar
Fechar

Portanto, para $\|\omega\| = 1$, tem-se

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)\hat{\omega} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)\hat{\omega}^2$$

podendo ser escrita em forma compacta através da Fórmula de Rodrigues (M.O. Rogrigues 1840)

$$\boxed{R_\omega(\theta) = e^{\hat{\omega}\theta} = I + \sin(\theta)\ \hat{\omega} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{\omega}^2}$$

Proposição 1:

Exponenciais de matrizes antisimétricas são ortogonais.

Dado $\hat{w} = -\hat{w}^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ temos que $e^{\hat{w}\theta} \in SO(3)$.

Prova: $e^{\hat{w}\theta} \in SO(3)$ tem que verificar $R^T R = I$ e $det(R) = 1$.

$$\left(e^{\hat{w}\theta}\right)^{-1} = e^{-\hat{w}\theta} = e^{\hat{w}^T\theta} = \left(e^{\hat{w}\theta}\right)^T$$

Exercício: $det(e^{\hat{w}\theta}) = 1$?

Proposição 2:

Dado $R \in SO(3)$, existe $\omega \in \mathbb{R}^3$ ($\|\omega\| = 1$) e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $R = e^{\hat{w}\theta}$.

(A exponencial de matrizes antisimétricas é *"surjective"* em $SO(3)$).

Prova: Considere R descrita por

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Voltar
Fechar

por outro lado

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \sin(\theta)\ \hat{\omega} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{\omega}^2$$

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \begin{bmatrix} w_1^2 v\theta + c\theta & w_1 w_2 v\theta - w_3 s\theta & w_1 w_3 v\theta + w_2 s\theta \\ w_1 w_2 v\theta + w_3 s\theta & w_2^2 v\theta + c\theta & w_2 w_3 v\theta - w_1 s\theta \\ w_1 w_3 v\theta - w_2 s\theta & w_2 w_3 v\theta + w_1 s\theta & w_3^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

onde $v\theta = 1 - \cos(\theta)$, $s\theta = \sin(\theta)$, $c\theta = \cos(\theta)$ e $\omega = [w_1\ w_2\ w_3]^T$
Comparando o traço de R com o traço de $e^{\hat{w}\theta}$, i.e.,

$$tr(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} \qquad ; \qquad tr(e^{\hat{w}\theta}) = 1 + 2\cos(\theta)$$

Tem-se que eles são iguais se:

$$\boxed{\theta = \arccos\left[\frac{tr(R) - 1}{2}\right]}$$

Tendo que $tr(R) = \sum \lambda_i$, e como os autovalores de R satisfazem $|\lambda| = 1$ e $det(R) = 1$, segue que $-1 \leq tr(R) \leq 3$.
Isto implica que existe θ sendo que $\theta \pm 2\pi n$ e $-\theta \pm 2\pi n$ também podem ser escolhidos.

Agora considerando os termos fora da diagonal:

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2\; w_1 \;\sin(\theta) \\ r_{13} - r_{31} &= 2\; w_2 \;\sin(\theta) \\ r_{21} - r_{12} &= 2\; w_3 \;\sin(\theta) \end{aligned}$$

para $\theta \neq 0$ tem-se que

$$\omega = \frac{1}{2\sin(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin(\theta)} \mathrm{vect}(R); \qquad \mathrm{vect}(R) = (R - R^T)^\vee$$

equivalentemente

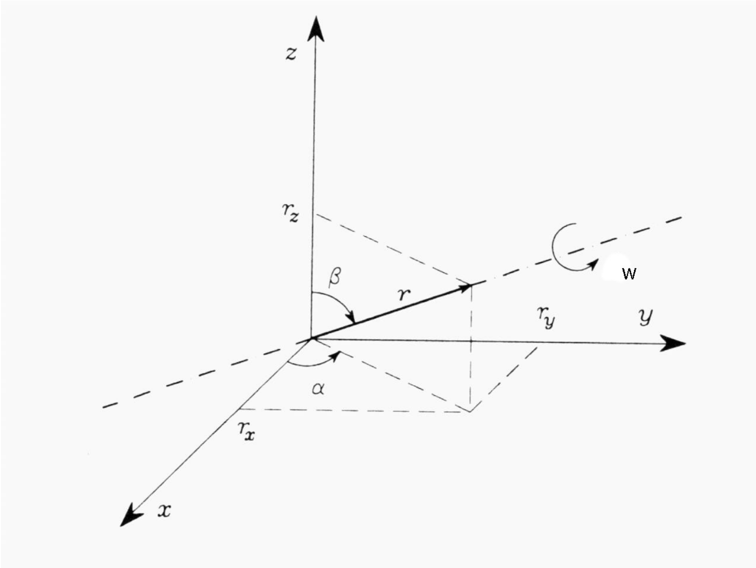
$$\boxed{\hat{\omega} = \frac{1}{2\sin(\theta)} \;\left(R - R^T\right)}$$

Exemplo: Se $R = I$ implica $tr(R) = 3$ e portanto $\theta = 0$ com ω é arbitrário.
Caso $tr(R) = -1$ tem-se $\theta = \pi$. neste caso ω pode ser calculada diretamente da Formula de Rodrigues $R = I + 2\hat{\omega}^2$.
Se $R \neq I$ existem $2\ \omega$ diferentes e $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $R = e^{\hat{\omega}\theta}$.

Teorema de Rotação de Euler (1776)

Teorema 1: O movimento de corpo rígido ao redor de um ponto $\mathcal{O}$ deixa fixo um conjunto de pontos pertencentes à linha $\mathcal{L}$ que passa por $\mathcal{O}$ e é paralela ao autovetor $\vec{v}$ de R associado ao autovalor $+1$.

Teorema de Rotação de Euler: Qualquer orientação $R \in SO(3)$ é equivalente a uma rotação ao redor de um eixo fixo $\omega \in \mathbb{R}^3$ por um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$.


z
r_z
β
r
w
r_y
y
α
r_x
x

Composição de Matrizes de Rotação

Considere os sistemas de coordenadas $\bar{E}_0, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ e o vetor $\vec{p}$ com coordenadas p_0, p_1, p_2 nos diferentes sistemas.

Considerando R_{ji} a matriz de rotação do sistema de coordenadas i com respeito ao sistema de coordenadas j temos $R_{ji} = (R_{ij})^{-1} = (R_{ij})^T$ e

$$p_1 = R_{12}\ p_2 \qquad p_0 = R_{01}\ p_1 \qquad p_0 = R_{02}\ p_2$$

então compondo temos

$$p_0 = R_{01}\ p_1 = R_{01}R_{12}\ p_2 \Longrightarrow \boxed{R_{02} = R_{01}R_{12}}$$

A rotação R_{02} pode ser considerada como sendo obtida através dos seguintes passos:

1. Considere um sistema de coordenadas alinhado com $\bar{E}_0$
2. Rotacionar este sistema de coordenadas segundo R_{01} de forma a se alinhar com $\bar{E}_1$
3. Rotacionar o sistema de coordenadas (agora alinhado com $\bar{E}_1$) segundo R_{12} para se alinhar com $\bar{E}_2$

Note que todas as rotações são segundo o último sistema de coordenadas chamado de Sistema de Coordenadas CORRENTE (ou sistema de coordenadas do corpo)
Numa forma mais geral

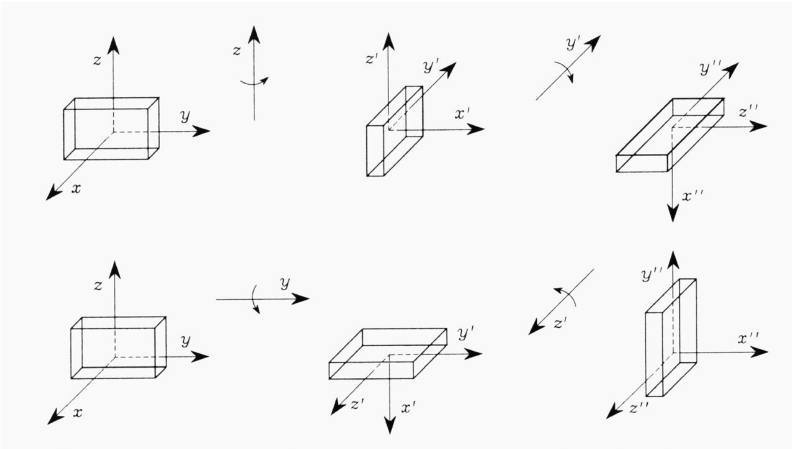
$$\boxed{R_{0n} = R_{01}R_{12}\cdots R_{n-1,n}}$$

Exemplo 1: Rotacionar um ângulo θ ao redor z e ϕ ao redor de y.

$$R = R_z(\theta)R_y(\phi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & -s\theta & s\phi c\theta \\ s\theta c\phi & c\theta & s\theta s\phi \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Rotacionar um ângulo ϕ ao redor de y e θ ao redor z.

$$R = R_y(\phi)R_z(\theta) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & -c\phi s\theta & s\phi \\ s\theta & c\theta & 0 \\ -s\phi c\theta & s\phi s\theta & c\phi \end{bmatrix}$$



Composição de Rotações com respeito a frames fixos

Neste caso a composição correta é através da pré-multiplicação de matrizes, i.e.,

$$\bar{R}_{02} = \bar{R}_{12}\ R_{01}$$

onde $\bar{R}$ indica uma rotação ao redor de um eixo fixo.

Exemplo: Suponha que R representa uma rotação de um ângulo ϕ ao redor y_0 e seguida de uma ângulo θ ao redor de z_0, e p_0, p_1, p_2 são as representações do vetor $\vec{p}$ nos diferentes sistemas de coordenadas. Tem-se que

$$p_0 = R_{y0}(\phi)\ p_1$$

No entanto, como a segunda rotação é ao redor de z_0, $R_{z0}(\theta)$.
De fato, temos que utilizar $p_1 = R_{z1}(\theta)\ p_2$, de forma que considerando a relação de operadores (no caso rotação) em diferentes sistemas de coordenadas (vide slides 27 de Algebra) tem-se

$$R_{z1}(\theta) = R_{01}^T\ R_{z0}(\theta)\ R_{01} = R_{y0}^T(\phi)\ R_{z0}(\theta)\ R_{y0}(\phi)$$

então realizando a composição tem-se

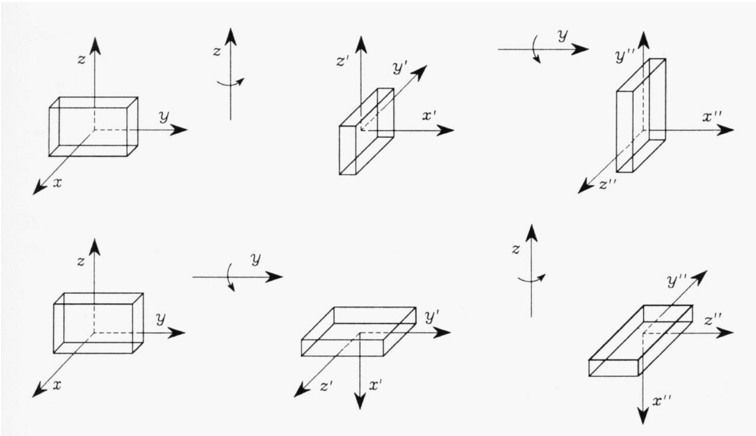
$$p_0 = R_{y0}(\phi)\ \overbrace{R_{y0}^T(\phi)R_{z0}(\theta)R_{y0}(\phi)\ p_2}^{p_1} = \overbrace{R_{z0}(\theta)R_{y0}(\phi)}^{R_{02}}\ p_2$$

Exemplo 1: Rotacionar um ângulo θ ao redor z_0 e ϕ ao redor de y_0.

$$R = R_y(\phi)R_z(\theta)$$

Exemplo 2: Rotacionar um ângulo ϕ ao redor de y_0 e θ ao redor z_0.

$$R = R_z(\theta)R_y(\phi)$$



Resumo

Dadas duas rotações R_{01} e R_{12}:

1. Considerando rotações ao redor do sistema de coordenadas corrente

$$R_{02} = R_{01}\ R_{12} \qquad \text{pós-multiplicação}$$

2. Considerando rotações ao redor do sistema de coordenadas fixos

$$R_{02} = R_{12}\ R_{01} \qquad \text{pré-multiplicação}$$

Uma observação importante é que as matrizes não comutam em geral.

Outras representações da orientação

Dada $R \in SO(3)$ temos que são necessários 9 parâmetros e 6 restrições.

Considerando em $R = [x \; y \; z]$ que $z = x \times y$ podemos reduzir o problema a 6 parâmetros e 5 restrições.

Do ponto de vista de controle é interessante reduzir o número de parâmetros e restrições. Desta forma aparecem as seguintes representações da orientação:

Representação Exponencial

Como vimos, $R = e^{\hat{\omega}\theta}$, portanto uma possível representação é $\{\omega, \theta\}$, onde $\omega \in \mathbb{R}^3$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Portanto, tem-se 4 parâmetros e uma restrição ($\|\omega\| = 1$).

No entanto esta representação é singular em $\theta = 0$, dado que

$$R = I + \sin(\theta)\ \hat{\omega} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{\omega}^2$$

$$R^T = I - \sin(\theta)\ \hat{\omega} + (1 - \cos(\theta))\ \hat{\omega}^2$$

onde

$$\theta = \arccos\left[\frac{tr(R) - 1}{2}\right]; \qquad \hat{\omega} = \frac{1}{2\sin(\theta)}[R - R^T]$$

Parâmetros de Rodrigues/Gibbs/Cayley-Rodrigues

Uma outra parametrização é dada por:

$$\rho = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \omega; \qquad \rho \in \mathbb{R}^3$$

onde

$$R = \frac{(1-\rho^2)I + 2(\rho\rho^T + \hat{\rho})}{1+\rho^2}; \qquad \rho^2 = \|\rho\|^2 = \tan^2(\theta/2)$$

por outro lado tem-se

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1+tr(R)}[R - R^T]$$

que é singular para $\theta = \pi$. Porque? .

Voltar
Fechar

Parâmetros de Cayley-Rodrigues Modificados

$$\sigma = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\omega; \qquad \rho \in \mathbb{R}^3$$

onde

$$R = I + 4\,\frac{1-\sigma^2}{(1+\sigma^2)^2}\,\hat{\sigma} + \frac{8}{(1+\sigma^2)^2}\,\hat{\sigma}^2; \qquad \sigma^2 = \|\sigma\|^2 = \tan^2(\theta/4)$$

e $\sigma(R)$?.

Parâmetros de Cayley

$$R = (I - \hat{a})(I + \hat{a})^{-1}; \qquad a \in \mathbb{R}^3$$

e $a(R)$?.

Quaternions

Representação de 4 parâmetros com boas características computacionais e sem singularidades (Hamilton, 1843).

O Quaternion é definido por:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_v \end{bmatrix}; \qquad q_0 = \cos(\theta/2) \in \mathbb{R} \qquad q_v = \sin(\theta/2)\omega \in \mathbb{R}^3$$

onde $\|q\| = 1$ é a única restrição.

Tem-se que

$$R = (2q_0^2 - 1)\ I + 2\ (q_v q_v^T + q_0 \hat{q}_v)$$

e a inversa é dada por:

$$q_0 = \frac{1}{2}(1 + tr(R))^{1/2} \qquad \hat{q}_v = \frac{1}{4q_0}[R - R^T]$$

Dado que $tr(R) \in \leq [-1, 3]$, para $tr(R) = -1$, $q_0 = 0$ e q_v é calculada de $R = -I + 2q_v q_v^T$. (Klump, J. Spacecraft, 12/1976). Portanto a representação é livre de singularidades.

A composição dos quaternions q e p é definida por

$$q \cdot p = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - q_v^T p_v \\ q_0 p_v + p_0 q_v + q_v \times p_v \end{bmatrix}$$

Possui as propriedades associativas e distributiva. NÃO É comutativa. Além disto o quaternion tem as seguintes propriedades:

$$q^{-1} = \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_v \end{bmatrix}; \qquad \text{tal que} \qquad q \cdot q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O quaternion pode ser considerado como uma generalização do número complexo (sob o círculo unitário)

$$q_0 + q_{v1} i + q_{v2} j + q_{v3} k$$

$i^2 = j^2 = k^2 = i.j.k = -1;\ i.j = -j.i = k;\ j.k = -k.j = i;\ k.i = -i.k = j$

O conjunto Q é um espaço vetorial sob os reais e forma um grupo com respeito à multiplicação definida acima.

Exercício: Determine $R = (2q_0^2 - 1)\ I + 2\ (q_v q_v^T + q_0 \hat{q}_v)$.

Dica: Considere

- a fórmula de Rodrigues,
- $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$,
- $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$
- $\hat{\omega}^2 = \omega\omega^T - I$.

Exercício: Determine se as representações de Cayley-Rodrigues (ρ) e Cayley-Rodrigues modificado (σ) podem ser exprimidas em função do Quaternion:

$$\rho = \frac{q_v}{q_0}; \qquad \sigma = \frac{q}{1+q_0}$$

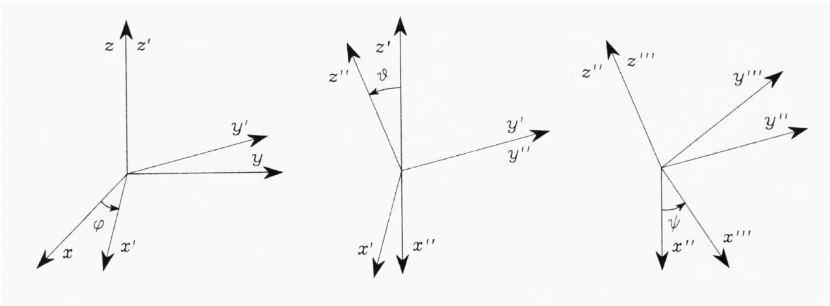
σ também o conhecida como projeção estereográfica.

Representações Mínimas

Ângulos de Euler (ZYZ)

Decompõe a matriz de rotação em 3 rotações elementares ao redor do sistema de coordenadas do corpo, i.e.

1. ϕ ao redor $\vec{z}_b$
2. θ ao redor $\vec{y}_b$
3. ψ ao redor $\vec{z}_b$



Voltar

Fechar

Desta forma,

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\phi s\theta \\ \cdot & \cdot & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Se $r_{13} \neq 0$ e $r_{23} \neq 0$ temos

$$\phi = atan2(r_{23}, r_{13})$$

também teremos

$$\theta = atan2(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33})$$

sendo que o sinal $+\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [0, \pi)$ (o sinal $-\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [-\pi, 0)$).
Também teremos

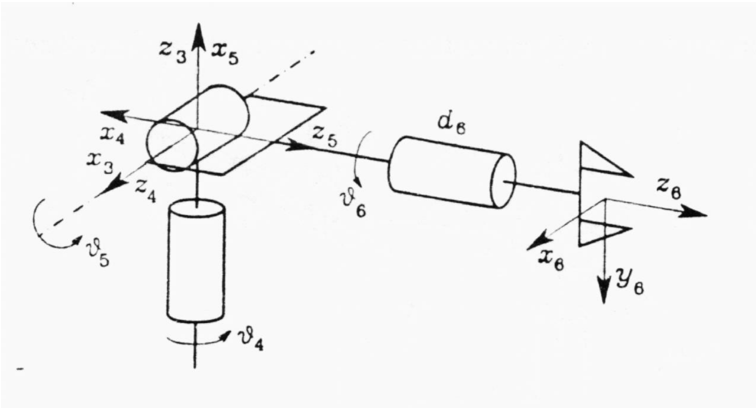
$$\psi = atan2(r_{32}, -r_{31})$$

No caso de $r_{13} = r_{23} = 0$ implica que $s\theta = 0$ e portanto somente é possível determinar $\phi + \psi$ para $\theta = 0, \pm\pi, \cdots$.

Outra solução (considerando $-\sqrt{\cdot}$):

$$\begin{aligned} \phi &= atan2(-r_{23}, -r_{13}) \\ \theta &= atan2(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi &= atan2(-r_{32}, r_{31}) \end{aligned}$$

Exemplo: Punho esférico.

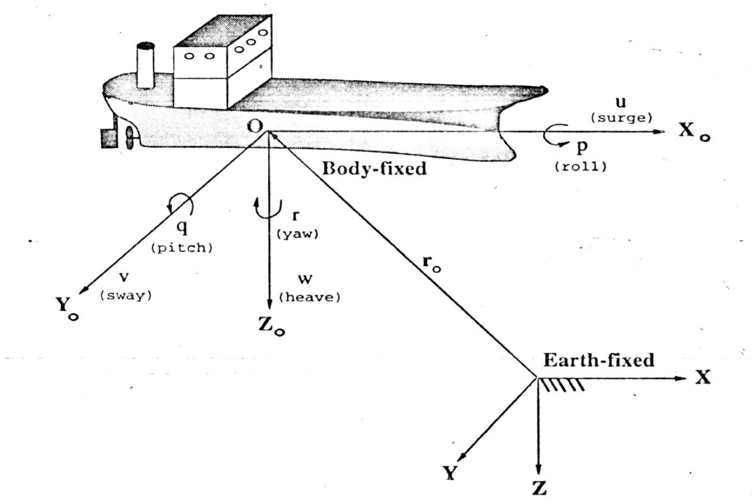


Voltar
Fechar

Roll-Pitch-Yaw (Jogo-Arfagem-Rumo)

Decompõe a matriz de rotação em 3 rotações elementares ao redor do sistema de coordenadas do inercial, i.e.

1. ψ ao redor $\vec{x}_i$ (roll - jogo)
2. θ ao redor $\vec{y}_i$ (pitch - arfagem)
3. ϕ ao redor $\vec{z}_i$ (yaw - rumo)



Voltar

Fechar

Desta forma,

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & \cdot & \cdot \\ s\phi c\theta & \cdot & \cdot \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Se $r_{11} \neq 0$ e $r_{21} \neq 0$ temos

$$\phi = atan2(r_{21}, r_{11})$$

também teremos

$$\theta = atan2(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$$

sendo que o sinal $+\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$ (o sinal $-\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [\pi/2, 3/2\pi)$).
Também teremos

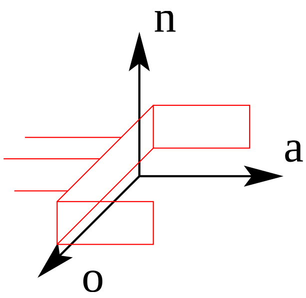
$$\psi = atan2(r_{32}, r_{33})$$

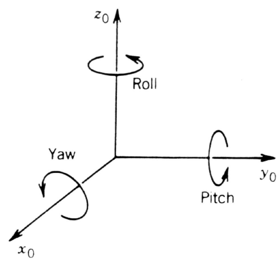
No caso de $r_{11} = r_{21} = 0$ implica que $c\theta = 0$ e portanto é possível determinar $\phi + \psi$ para $\theta = \pm\pi/2, \cdots$.

Outra solução (considerando $-\sqrt{\cdot}$):

$$\begin{aligned}
\phi &= atan2(-r_{21}, -r_{11}) \\
\theta &= atan2(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\
\psi &= atan2(-r_{32}, -r_{33})
\end{aligned}$$

Nota: Em alguns livros os ângulos RPY são definidos do ponto de vista da robótica, onde a orientação do efetuador e definida:

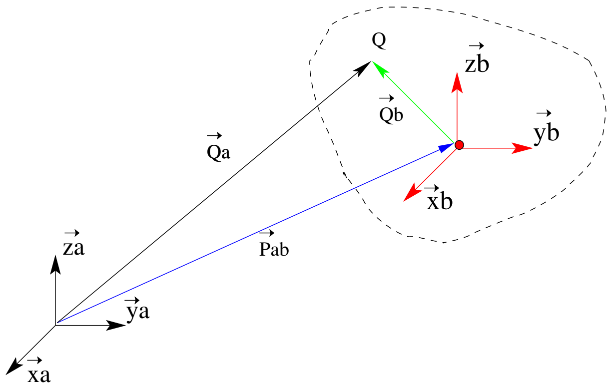




Neste caso o roll é definido como uma rotação ao redor de z e o yaw como uma rotação ao redor de x.

Configuração de um Corpo Rígido

A posição e orientação de um corpo rígido é dada por $(\vec{p}_{ab}, R_{ab})$



Na figura aparecem também em destaque, os vetores $\vec{q}_a$ e $\vec{q}_b$. As coordenadas destes vetores em $\bar{E}_a$ e $\bar{E}_b$ são q_a e q_b, respectivamente.

Tem-se que a relação entre estes vetores em função da configuração do corpo rígido é dado por:

$$\vec{q}_a = \vec{p}_{ab} + \vec{q}_b$$

Representado este vetores em $\bar{E}_a$, através da pre-multiplicação por $\bar{E}_a^*$, tem-se:

$$q_a = \bar{E}_a^* \, \vec{q}_a = \bar{E}_a^* \, \vec{p}_{ab} + \bar{E}_a^* \, \vec{q}_b$$

$$q_a = p_{ab} + \underbrace{\bar{E}_a^* \bar{E}_b}_{R_{ab}} \, \underbrace{\bar{E}_b^* \vec{q}_b}_{q_b}$$

Tendo então:

$$q_a = p_{ab} + R_{ab} \, q_b$$

e sua inversa é dada por

$$q_b = -R_{ab}^T \, p_{ab} + R_{ab}^T \, q_a = -R_{ba} \, p_{ab} + R_{ba} \, q_a$$

Transformações Homogêneas

Uma forma mais compacta de representar a configuração de um corpo rígido é mediante a utilização de transformações homogêneas.

A equação de q_a pode ser escrita em forma compacta como:

$$\begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então, definindo

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

temos que

$$\bar{q}_a = T_{ab}\, \bar{q}_b$$

T_{ab} : Transformação Homogênea.

A transformação inversa é dada por:

$$\bar{q}_b = T_{ab}^{-1}\bar{q}_a; \qquad T_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{ba} & -R_{ba}p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que $T^T \neq T^{-1}$.

A identidade é dada por $T = I_{4\times 4}$.

A composição é dada por:

$$\bar{p}_0 = T_{01}\, T_{12}\, \cdots T_{n-1,n}\, \bar{p}_n$$

onde $T_{i-1,i}$ é a transformação homogênea relacionada com a descrição de um ponto no sistema de coordenadas i com respeito ao sistema de coordenadas $i-1$.

$\{p_{ab}, R_{ab}\} \in SE(3) = \mathbb{R}^3 + SO(3)$, Grupo Especial Euclidiano de ordem 3.

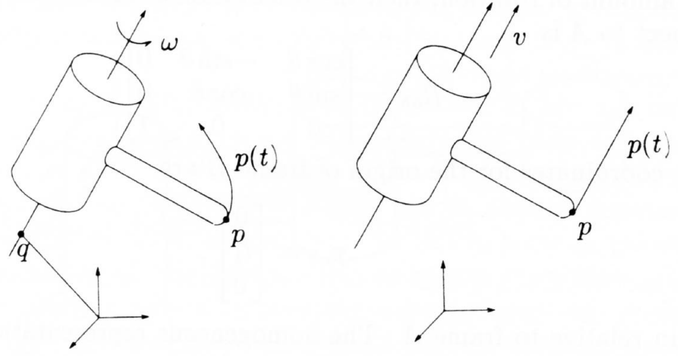
Coordenadas Exponenciais

Enfoque do livro Murray, Li e Sastry:

$$\begin{bmatrix} p_a \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{g_{ab}} \begin{bmatrix} p_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $R \in SO(3)$ tem-se que $R = e^{\hat{\omega}\theta}$, e para $g \in SE(3)$?

Considerando $\zeta = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$, onde $\omega, v \in \mathbb{R}^3$ e $\|\omega\| = 1$,



(a) (b)

Voltar
Fechar

Define-se então

$$\hat{\zeta} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo portanto que

$$e^{\hat{\zeta}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega}v + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

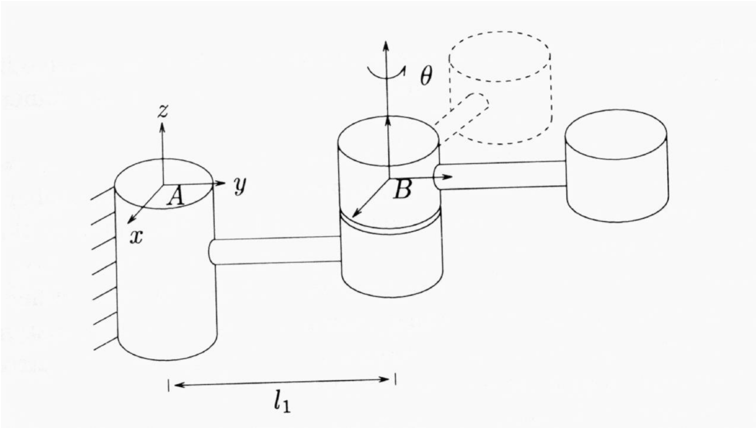
Em particular se $\omega = 0$ tem-se que:

$$e^{\hat{\zeta}\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se provar que dado $R \in SO(3), p \in \mathbb{R}^3$ existem ω, θ, v.

Exemplo

Considere o manipulador planar de 2 elos.



Temos que a transformação homogênea que descreve a configuração do sistema de coordenadas B com respeito ao A é dada por

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$