Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 04.05.20 (49-ый день карантина)

“Спектр линейного оператора”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать параграф 24 (стр. 254 – 261) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

Пусть X – банахово пространство (вообще говоря, комплексное), а $A : X \to X$ – линейный оператор. Число λ называется регулярной точкой оператора A, если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Множество всех регулярных точек – резольвентное множество оператора – $\rho(A)$. Для любого $\lambda \in \rho(A)$ оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ – резольвента оператора A. Дополнение регулярного множества $\sigma(A) = \mathbb{R}\backslash\rho(A)$ – спектр оператора A.

Теорема 1. *Множество $\rho(A)$ открыто в $\mathbb{C}$.*

Теорема 2. *Пусть A – непрерывный линейный оператор. Тогда $\forall\lambda \in \mathbb{C}$: $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.*

Теорема 3. *Пусть A – непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве X. Тогда существует конечный предел*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|,$$

который называется спектральным радиусом оператора A. Если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема 4. *Если A – непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве X, то $\sigma(A)$ – непустое множество.*

Теорема 5. *Пусть A – непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве X. Тогда если $r_\sigma(A) < 1$, то оператор $I - A$ непрерывно обратим, причем $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$, и рад сходится абсолютно. Если же $r_\sigma(A) > 1$, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ расходится.*

Точки спектра $\sigma(A)$ классифицируются следующим образом:

- $\ker(A-\lambda I) \neq \{0\} \Rightarrow$ такие λ относятся к точечному спектру (собственные значения);
- $\exists(A - \lambda I)^{-1}$, определенный на некотором множестве Y, плотном в X, но этот оператор не является непрерывным $\Rightarrow$ такие λ относятся к непрерывному спектру;
- $\exists(A - \lambda I)^{-1}$, определенный на некотором множестве Y, не плотном в X $\Rightarrow$ такие λ относятся к остаточному спектру.

Замечание. Иногда используется другая классификация, которую мы не рассматриваем.

Задача 1 (ТПС, 19.4a). *В пространстве* $C[-\pi, \pi]$ *найти собственные значения и собственные векторы оператора*

$$A(x(t)) = x(-t).$$

Решение: Рассмотрим уравнение $A(x(t)) = \lambda x(t) \Rightarrow x(-t) \equiv \lambda x(t)$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$. Такое возможно либо если $x(t) \equiv 0$, либо если $\lambda^2 = 1$. Следовательно, может быть два собственных значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует функция $x(t)$: $x(t) = x(-t)$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$. Т.е. собственные функции – это все непрерывные четные функции.

Собственному значению $\lambda_2 = -1$ соответствует функция $x(t)$: $x(t) = -x(-t)$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$. Т.е. собственные функции – это все непрерывные нечетные функции.

Задача 2 (ТПС, 19.16). *В пространстве* $C[0, 1]$ *рассмотрим оператор* $A(x(t)) = x(0) + tx(1)$. *Найти* $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

Решение: Сначала изучим точечный спектр оператора:

$$(A - \lambda I)(x(t)) = x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = 0, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow$$

При $\lambda = 0$ это соотношение будет выполнено при любой непрерывной функции $x(t)$ такой, что $x(0) = x(1) = 0$.

При $\lambda \neq 0$ $x(t) = \frac{x(0)+tx(1)}{\lambda}$ – линейная, вида $at+b$. Подставляем в уравнение: $b+t(a+b) = \lambda(at + b) \Rightarrow \lambda = 1$, $b = 0$, $\forall a$.

Итак, точечный спектр содержит два значения: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

Теперь попробуем найти резольвенту при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Для этого надо решить уравнение

$$x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = y(t)$$

относительно $x(t) \in C[0, 1]$ при заданной функции $y(t) \in C[0, 1]$. Подставляя в это уравнение $t = 0$, получаем: $x(0)(1-\lambda) = y(0)$, то есть $x(0) = \frac{y(0)}{1-\lambda}$. Теперь подставим $t = 1$: $x(0)+x(1)(1-\lambda) = y(1)$, то есть

$$x(1) = \frac{y(1) - x(0)}{1 - \lambda} = \frac{y(1)(1 - \lambda) - y(0)}{(1 - \lambda)^2}.$$

Теперь легко получить итоговое выражение для функции $x(t)$:

$$x(t) = R_\lambda(A)(y(t)) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{y(0)}{1 - \lambda} + t\frac{y(1)(1 - \lambda) - y(0)}{(1 - \lambda)^2} - y(t)\right).$$

При $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ полученная функция $x(t)$ непрерывна на $[0, 1]$. Резольвента определена при любых $y(\cdot) \in C[0, 1]$. Резольвента является ограниченным линейным оператором:

$$\|x(\cdot)\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{|1 - \lambda|} + \frac{1}{(1 - \lambda)^2} + 1\right)\|y(\cdot)\|_{C[0,1]}.$$

Следовательно, непрерывного или остаточного спектра нет.

Задача 3 (ТПС, 19.23). *Пусть* $A, B \in \mathcal{X}$. *Доказать, что ненулевые элементы* $\sigma(AB)$ *и* $\sigma(BA)$ *совпадают.*

Решение: Ранее, при изучении обратных операторов, нами было доказано "волшебное" тождество

$$(I - \tilde{B}A)^{-1} = I + \tilde{B}(I - A\tilde{B})^{-1}A,$$

справедливое в том случае, если определен хотя бы один из обратных операторов. Пусть теперь $\tilde{B} = \lambda^{-1}B$. Тогда

$$-\lambda(BA - \lambda I)^{-1} = I - B(AB - \lambda I)^{-1}A.$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$ непрерывный оператор $(AB - \lambda I)^{-1}$ существует тогда, и только тогда, когда существует непрерывный оператор $(BA - \lambda I)^{-1}$.

Домашнее задание: № 19.4б, 19.5, 19.13, 19.14, 19.18.