Удавиченко Игорь Романович, 315 Вар-т 3

(6) $\exists\, y = (y_1, y_2, \ldots)$

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i y_{i+2} = \langle A^* y, x\rangle \Rightarrow A^* y = (\alpha_1 y_3,\ \alpha_2 y_4,\ \ldots,\ \alpha_i y_{i+2}, \ldots)$$

(5) возьмём произв. $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt < \infty \Rightarrow \int_n^{+\infty} f^2(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и

и $\int_{-\infty}^{-n} f^2(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\int_{-\infty}^{-n} f(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $f(t) \to 0$ $t \to \pm\infty$

Тогда $\forall g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ $\langle g(\cdot), f_n(\cdot)\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_n(t)dt = \int_n^{n+1} g(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к.

$g(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при $t \in [n, n+1]$

$\Downarrow$

$f_n(\cdot) \xrightarrow{сл.} \Theta$

Покажем, что нет сильной сходимости:

$$\|f_n(\cdot) - \Theta(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(t)dt = \int_n^{n+1} 1\cdot dt = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$ $\Rightarrow$ сильной сх. нет

(4) $f(x) = \int_0^1 x(t)\, \mathrm{sign}(t - 0.5)\,dt$, $x(\cdot) \in L_2[0,1]$

$f(x)$ линеен в силу линейности интеграла.

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - 1/2)dt\right| \overset{НКБ}{\leq} \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}\cdot\sqrt{\int_{1/2}^1 1\cdot dt} = \|x(\cdot)\|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|f(x(\cdot))|}{\|x(\cdot)\|} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Покажем, что оценка достигается:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1/2 \\ \sqrt{2}, & t \geq 1/2 \end{cases};\quad \|x(\cdot)\|^2 = \int_0^1 x^2(t)dt = \int_{1/2}^1 2\,dt = 1$$

$$f(x(\cdot)) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - 1/2)dt = \int_{1/2}^1 \sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\|x(\cdot)\|$$ $\Rightarrow f$ — лин. огр. ф-л $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ — лин. непрер. ф-л и $\|f\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) ~~Тро~~ $f(x)$ линейн, т.к. линейн интеграл

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}\left(t-\tfrac{1}{2}\right)dt\right| \overset{К-Б}{\le} \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}\cdot\sqrt{\int_0^1 1dt} = \|x(\cdot)\| \Rightarrow \|f\| \le 1 \Rightarrow f - \text{огр} \Rightarrow f - \text{непр.}$$

Покажем, что $\|f\| = 1$

$x(t) = \mathrm{sign}(t - 1/2)$, тогда $\int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t-\frac{1}{2})dt = \int_0^1 1dt = 1$; $\|x(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^1 (\mathrm{sign}(t-1/2))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 1dt} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\| = 1$

(1) Проверим аксиомы нормы:

1) $|x(a)| + \sup|x'(t)| \ge 0$ — выполнено

$]$ $|x(a)| + \sup|x'(t)| = 0$. Тогда $x(a) = 0$. На 1-ом участке непрерывности $|x'(t)| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на всём участке $x(t) = 0$, продолжая в том же духе получим, что $x(t) \equiv 0$ на $[a,b]$

2) $\|\alpha x(\cdot)\| = |\alpha|\,\|x(\cdot)\|$:

$$|\alpha x(a)| + \sup|(\alpha x(t))'| = |\alpha|\cdot|x(a)| + \sup\left[|\alpha|\cdot|x'(t)|\right] = |\alpha|\left(|x(a)| + \sup|x'(t)|\right)$$

3) $\|x(\cdot)+y(\cdot)\| \le \|x(\cdot)\| + \|y(\cdot)\|$

$$|x(a)+y(a)| + \sup|x'(t)+y'(t)| \le |x(a)| + |y(a)| + \sup\left[|x'(t)| + |y'(t)|\right] \le$$

$$\le |x(a)| + \sup|x'(t)| + |y(a)| + \sup|y'(t)|$$

$\Downarrow$

Это будет нормой

(2) $Ax(t) = t^{\alpha}x(t^{\beta})$

$A(x+y) = t^{\alpha}x(t^{\beta}) + t^{\alpha}y(t^{\beta})$

$A(kx) = k t^{\alpha} x(t^{\beta})$

$\Rightarrow A$ — линейно $\forall \alpha, \beta$, $\beta \ne 0$

$$\|Ax\|^2 = \int_0^1 t^{2\alpha}x^2(t^{\beta})dt = \begin{Bmatrix} \tau = t^{\beta} \\ t = \tau^{1/\beta} \\ dt = \frac{1}{\beta}\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}d\tau \end{Bmatrix} = \int_0^1 \tau^{\frac{2\alpha}{\beta}}\cdot x^2(\tau)\cdot\frac{1}{\beta}\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}d\tau = \int_0^1 x^2(\tau)\cdot\frac{1}{\beta}\tau^{\frac{1+2\alpha-\beta}{\beta}}d\tau \le$$

$$\le \|x(\cdot)\|^2\cdot\int_0^1 \frac{1}{\beta}\tau^{\frac{1+2\alpha-\beta}{\beta}}d\tau = \|x\|^2\frac{1}{1+2\alpha}\tau^{\frac{1+2\alpha}{\beta}}\Big|_0^1 \text{ — огр. при } \frac{1+2\alpha}{\beta} > 0$$

Ответ: при $\frac{1+2\alpha}{\beta} > 0$

$$\leq \|x(\cdot)\|^2 \cdot \underset{t}{\operatorname{esssup}} \left[\frac{1}{\beta} \tau^{\frac{1+2\alpha-\beta}{\beta}} \right]$$ — воспользовались нер-вом Гёльдера

огр при $\frac{1+2\alpha-\beta}{\beta} \geq 0$

③ $Ax = x'' + \lambda$

$\exists y \in C[0,1]$, тогда $A^{-1}y$ — решение ДУ:

$$\begin{cases} x'' + \lambda = y \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$ решаем однородное

1) $\lambda < 0 \Rightarrow x = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t}$

2) $\lambda = 0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$

3) $\lambda > 0 \Rightarrow x = C_1 \sin\sqrt{\lambda} t + C_2 \cos\sqrt{\lambda} t$

метод вариации постоянных

C_1