Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«TEX-анье теоремки»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель этого безобразия
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Формула Остроградского-Гаусса

Пусть D — односвязная область в E^3 (т. е. для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой C можно указать ориентированную кусочно-гладкую поверхность G, расположенную в D, для которой C является границей). Пусть $S = \partial D$ — граница этой области, удовлетворяющая условиям:

1. Поверхность S — кусочно-гладкая двусторонняя полная ограниченная замкнутая и без особых точек.

2. Прямоугольную декартову систему координат (далее ПДСК) можно выбрать так, что для каждой из осей координат любая прямая, параллельная этой оси, будет пересекать поверхность S не более чем в двух точках.

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (формула Остроградского-Гаусса)**.** *Пусть $\vec{a}$ — векторное поле, дифференцируемое в области D, удовлетворяющей условиям 1 и 2, и такое что производная по любому направлению непрерывна в $D \cup \partial D = \overline{D}$. Тогда справедлива формула*

$$\underbrace{\iiint\limits_{\overline{D}} \vec{a}\, dv}_{\substack{\text{интеграл от}\\ \text{дивергенции}}} = \underbrace{\oiint\limits_{\partial D} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \; ds}_{\substack{\text{поток поля}\\ \text{через}\\ \text{поверхность}}} . \tag{1}$$

Коротко: интеграл от дивергенции равен потоку.

Доказательство. Все входящие в формулу (1) функции непрерывны, поэтому интегралы в обеих частях равенства существуют.

Заметим, что формула (1) инвариантна относительно выбора ПДСК, так как инвариантно все, что входит в эту формулу. Поэтому достаточно доказать теорему для какой-то одной ПДСК. Выберем ПДСК так, чтобы выполнялось условие 2.

Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)^T$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$. Тогда, учитывая, что

$$\cos\alpha\, ds = dydz, \quad \cos\beta\, ds = dzdx, \quad \cos\gamma\, ds = dxdy,$$

получим

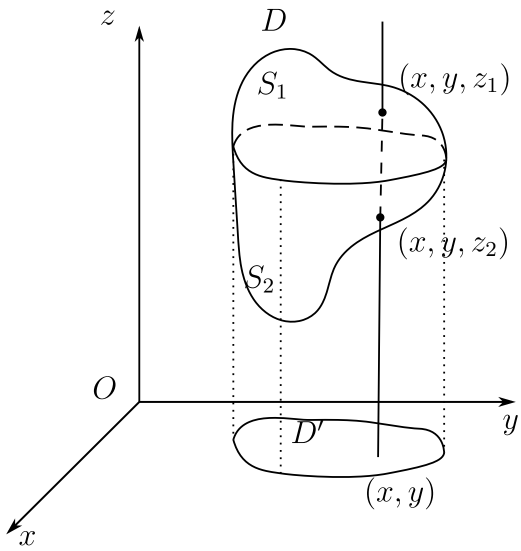

Рис. 1: К доказательству теоремы.

$$\iiint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$
$$= \oiint\limits_{\partial D} \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \big)\, ds =$$
$$= \oiint\limits_{\partial D} \big(P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy \big). \quad (1')$$

Теперь покажем, что

$$I = \iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial R}{\partial x}\, dxdydz = \oiint\limits_{\partial D} R\, dxdy,$$

для остальных двух пар интегралов показывается аналогично. Обозначим через D' проекцию области D на плоскость Oxy. Через граничные точки D' проведем прямые, параллельные оси Oz. Каждая из этих прямых пересекается с ∂D ровно в одной точке. Множество всех таких точек разделяет ∂D на 2 части, которые мы обозначим через S_1 и S_2 (см. рис. 1). Если мы проведем прямую из внутренности D', параллельную Oz, то она пересечет поверхность в 2 точках: $\big(x, y, z_1(x, y)\big) \in S_1$ и

$\big(x, y, z_2(x, y)\big) \in S_2$, причем $z_1(x, y) \geqslant z_2(x, y)$. Так как граница области кусочно-гладкая, то $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — кусочно-гладкие функции в D'. По формуле сведения тройного интеграла к повторному получаем:

$$I = \iint\limits_{D'} \left[\int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dz \right] dxdy = \iint\limits_{D'} R\big(x, y, z_1(x, y)\big)\, dxdy -$$

$$- \iint\limits_{D'} R\big(x, y, z_2(x, y)\big) = \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\, dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\, dxdy = \oiint\limits_{S} R(x, y, z)\, ds.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $S = S_1 \cup S_2$ и соотношением

$$- \iint\limits_{D'} R\big(x, y, z_2(x, y)\big) = \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{S_2} R \cos\gamma\, ds,$$

справедливым в силу того, что внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности S_2 образует тупой угол с осью Oz, поэтому $\cos\gamma < 0$.

■