(19.4б) $Ax(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)\, x(s)\,ds$

Будем решать ур-ие $Ax(t) = \lambda x(t)$

$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t \Rightarrow$

$\Rightarrow Ax(t) = \cos t \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s) x(s)\,ds - \sin t \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos} \sin s \; x(s)\,ds = \lambda x(t)$

Будем искать решение в виде $x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$

Тогда $\begin{cases} \alpha\pi = \lambda\alpha \\ \beta\pi = -\lambda\beta \end{cases}$ т.к. $Ax(t) = \pi\alpha\cos t - \pi\beta\sin t = \lambda(\alpha\cos t + \beta\sin t) = x(t)$

$\Downarrow$

решение (тогда 2 случая): $\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = -\pi$; с. в-р $x(t) = \cancel{\cos t}\sin t$

$\beta = 0 \Rightarrow \lambda = \pi \Rightarrow$ с.в. $x(t) = \cos t$

И ещё случай: $\lambda = 0 \Rightarrow$ ~~$x(t) \equiv const$ ; $x(t) = 1$ — с.в.~~

$x(t) \in (\alpha\cos t + \beta\sin t)^{\perp}$

(19.5)

а) $Ax(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \Rightarrow$

ДУ: $x'' = \lambda x$

$\lambda > 0 \Rightarrow x(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}t}$ — не удов. к.у. $\Rightarrow \lambda \leq 0$

Тогда из курса урматов

а) $\lambda = -k^2$; $x(t) = \sin kx$

б) $\lambda = -k^2$; $x(t) = \cos kx$; $\lambda = 0$; $x(t) \equiv const$

в) $\lambda = -4k^2$; $x(t) = \cos 2kt$ или $\sin 2kt$

$k \in \mathbb{N}$ везде

19.13 1) $\bar{X}$ – конечномерно. Тогда непрерывность $\Leftrightarrow$ вполне непрерывность $\Rightarrow$ ответ да

2) $\exists\, \bar{X}$ – $\infty$-мерно.

Пусть $R_\lambda$ – вполне непрерывен. Тогда образ ~~всякого~~ замкнутого шара будет предкомпактен.

Но из принципа Банаха об открытости ~~тогда~~ образом открытого шара будет открытое мн-во $\Rightarrow$ содержит шар $\Rightarrow$ не предкомпактно – ?!

Ответ: $\Leftrightarrow \dim \bar{X} < \infty$

19.14 $Ax(t) = t x(t)$

$\|A\| = 1 \Rightarrow \sigma(A) \subseteq [-1, 1]$.

$(A - \lambda I) x(t) = y(t)$

$(t - \lambda) x(t) = y(t) \Rightarrow x(t) = \dfrac{y(t)}{t - \lambda}$

при $\lambda \in [-1, 0)$ $(A - \lambda I)$ непрерывно обратим $\Rightarrow [-1, 0)$ – регулярные точки.

Покажем, что ни одно $\lambda$ у тебя не является с.з.

Тогда $tx(t) \equiv \lambda x(t) \Rightarrow x(t) \equiv 0$

9.18 $$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

$\|A\| = 1 \Rightarrow \sigma(A) \subseteq [-1,1]$.

$(A-\lambda I)x = y$

$$\int_0^t x(\tau)d\tau - \lambda x(t) = y \quad \Big| \frac{d}{dt} \Rightarrow \int_0^t x(\tau)d\tau = \lambda x(t) + y(t) =: z(t)$$

~~$x(t) - \lambda x'(t) = y'$~~

$x(t) = z'(t)$ с другой стороны $x(t) = \dfrac{z(t)}{\lambda} - \dfrac{y(t)}{\lambda}$

$$z' = \frac{z(t)}{\lambda} - \frac{y(t)}{\lambda} \quad ; z(0) = 0$$

Тогда $$z(t) = \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(t-\tau)} \frac{y(\tau)}{\lambda} d\tau \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{1/\lambda(t-\tau)} y(\tau)d\tau - \frac{y(t)}{\lambda}$$

при $\lambda \in [-1,1] \setminus \{0\}$ оператор непрерывно обратим. Но т.к. спектр непр. оператора не пуст, то $\lambda = 0 \in \sigma(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{0\}$

резольвента ~~$R_\lambda(A)y(t)$~~ $$R_\lambda(A)y = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{1/\lambda(t-\tau)} y(\tau)d\tau - \frac{y(t)}{\lambda}.$$