Обобщение принципа максимума

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \;\; u(t) \in \mathscr{P}(t) \tag{1}$$

Обозначим

$$e = (t_0, x^0, t_1, x^1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

и рассмотрим множество

$$E = \left\{ e \colon \exists u(\cdot) \colon x(t_1, t_0, x^0 | u(\cdot)) = x^1 \right\},$$

т. е. множество всех таких четвёрок (t_0, x^0, t_1, x^1), что систему (1) можно перевести из $x(t_0) = x^0$ в $x(t_1) = x^1$.

Рассмотрим функции

$$\varphi_j \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

задача оптимизации с ограничениями типа «равенство»:

$$\varphi_0(e) \to \inf_{u(\cdot)} \tag{ЗО}$$

при

$$E^0 = \{ e \in E \colon \varphi_1(e) = \ldots = \varphi_k(e) = 0 \}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ *определены* $e^* \in E$ *такие, что* $e^* = (t_0^*, x^{0*}, t_1^*, x^{1*})$ *— решение* (ЗО) $\Rightarrow$ $\exists \bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, $\bar{\lambda} \neq \theta, \lambda_0 \leqslant 0$, $\exists \psi^* \colon [t_0^*, t_1^*] \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}(t, x, \psi, u) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle$, $\mathcal{M}(t, x, \psi) = \sup\limits_{u \in \mathscr{P}} \mathcal{H}(t, x, \psi, u)$*:*

1. *Сопряжённая система*

$$\frac{d\psi^*}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = x^*(t) \\ u = u^*(t) \\ \psi = \psi^*(t)}} \tag{СС}$$

2. *Условие максимума*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \sup_{u \in \mathscr{P}} \mathcal{H}(t, x^*(t), \psi^*(t), u) = \\ = \mathcal{M}(t, x^*(t), \psi^*(t)) \end{aligned} \tag{УМ}$$

3. Условия трансверсальности (!)

$$\begin{aligned} \psi^*(t_1^*) &= \left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial x^1}\right]^T \bar\lambda, \\ \psi^*(t_0^*) &= -\left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial x^0}\right]^T \bar\lambda, \end{aligned} \tag{УТ}$$

$$\mathcal{H}(t_1^*, x^{1*}, \psi^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) = -\left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial t_1}\right]^T \bar\lambda,$$

$$\mathcal{H}(t_0^*, x^{0*}, \psi^*(t_0^*), u^*(t_0^*)) = \left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial t_0}\right]^T \bar\lambda,$$

где $\bar\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)^T$.

4. Если $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in C$, *тогда*

$$\exists \frac{d\mathcal{H}(t, x^*(t), \psi^*(t), u^*(t))}{dt} = \{\text{п.в. } t\} =$$

$$= \frac{d\mathcal{M}(t, x^*(t), \psi^*(t))}{dt} = \left\langle \psi^*(t), \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

Как это связано с нашей формулировкой ПМП?

Условие нетривиальности автоматически выполняется, т. к. из $\bar\lambda \neq 0$ и 3) $\Rightarrow$
$\psi \not\equiv 0 \Rightarrow \psi \neq 0$.

$$\mathscr{L} = \lambda_0\varphi_0(e) + \lambda_1\varphi_1(e) + \ldots + \lambda_k\varphi_k(e) = \left\langle \bar\lambda, \bar\Phi \right\rangle,$$

$$\Delta\mathscr{L} = \left\langle \bar\lambda, \bar\Phi(t_0, x^0, t_1, x^1 + \delta x^1) - \bar\Phi(t_0, x^0, t_1, x^1) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \bar\lambda, \frac{\partial\bar\Phi}{\partial x^1}\Delta x^1 \right\rangle + \bar o(\|\Delta x^1\|) = \left\langle \left[\frac{\partial\bar\Phi}{\partial x^1}\right]^T \bar\lambda, \Delta x^1 \right\rangle + \bar o(\|\Delta x^1\|).$$

Поэтому $\left[\dfrac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial x^1}\right]^T \bar\lambda = \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^1}$. Аналогично,

$$-\left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial x^0}\right]^T \bar\lambda = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^0},$$

$$-\left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial t_1}\right]^T \bar\lambda = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t_1},$$

$$\left[\frac{\partial\bar\Phi(e^*)}{\partial t_0}\right]^T\bar\lambda=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t_0}.$$

Вспомним одну из рассмотренных ранее формулировок: $\hat t_0$ — фикс., t_1 — своб., $x^0\in\mathscr{X}^0$, $x^1\in\mathscr{X}^1$,

$$\mathcal{J}=\int\limits_{t_0}^{t_1}f^0(t,x(t),u(t))dt\to\inf_{u(\cdot)}.$$

$$x^0\in\mathscr{X}^0\Leftrightarrow g^0(x^0)=\begin{bmatrix}g_1^0(x^0)\\ \dots\\ g_{d_0}^0(x^0)\end{bmatrix}=0;$$

$$x^1\in\mathscr{X}^1\Leftrightarrow g^1(x^1)=\begin{bmatrix}g_1^1(x^1)\\ \dots\\ g_{d_1}^0(x^1)\end{bmatrix}=0.$$

Пусть $\bar x=(x_0,x_1,\dots,x_n)^T$.

$$\begin{cases}\dot x_0=f^0(t,x,u),\\ \dot x_1=f^1(t,x,u),\\ \dots\\ \dot x_n=f^n(t,x,u),\\ x_0(t_0)=0,\\ \mathcal{J}=x_0(t_1)\to\inf\limits_{u(\cdot)}.\end{cases}$$

Далее рассмотрим автономный случай.

$$\begin{aligned}&\dot{\bar x}=\bar f(\bar x,u),\quad e=(t_0,\bar x^0,t_1,\bar x^1)\\ &\varphi_0=x_0^1\\ &\varphi_1=t_0-\hat t_0\ \ (=0,\text{ а на } t_1 \text{ ограничений нет})\\ &\varphi_2=x_0^0\ \ (=0)\\ d_0&\begin{cases}\varphi_3=g_1^0(x^0)\ \ (=0)\\ \dots\\ \varphi_{d_0+2}=g_{d_0}^0(x^0)\ \ (=0)\end{cases}\\ d_1&\begin{cases}\varphi_{d_0+3}=g_1^1(x^1)\ \ (=0)\\ \dots\\ \varphi_{d_0+d_1+2}=g_{d_1}^1(x^1)\ \ (=0)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\bar\psi^*:\quad (\text{СС}),\ (\text{УМ});\ \ \mathcal{H}=\psi_0f^0+\langle\psi,f\rangle,$$

$$\bar{\psi}^*(t_1^*) = \begin{bmatrix} \lambda_0, \\ \left(\dfrac{\partial g^1}{\partial x^1}\right)^T \begin{bmatrix} \lambda_{d_0+3} \\ \dots \\ \lambda_{d_0+d_1+2} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\psi_0^*(t_1^*) = \lambda_0,$$

$$\psi_i^*(t_1^*) = \left\langle \frac{\partial g^1}{\partial x_i^1}, \begin{bmatrix} \lambda_{d_0+3} \\ \dots \\ \lambda_{d_0+d_1+2} \end{bmatrix} \right\rangle, i = 1, \dots, n.$$

$$\bar{\psi}^*(t_0^*) = -\begin{bmatrix} \lambda_2, \\ \left(\dfrac{\partial g^0}{\partial x^0}\right)^T \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \dots \\ \lambda_{d_0+2} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

т. е. ...

Здесь

$$\frac{\partial g^0}{\partial x^0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1^0}{\partial x_1^0} & \dots & \dfrac{\partial g_1^0}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{d_0}^0}{\partial x_1^0} & \dots & \dfrac{\partial g_{d_0}^0}{\partial x_n^0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_0 \times n}$$

$\dot{\psi}_0 = 0 \Rightarrow \psi_0 \equiv \mathrm{const} = \lambda_0 = -\lambda_2$ (тут $\lambda_0 \leqslant 0$).

$$\left(\frac{\partial g^0}{\partial x^0}\right)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1^0}{\partial x_1^0} & \dots & \dfrac{\partial g_{d_0}^0}{\partial x_1^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1^0}{\partial x_n^0} & \dots & \dfrac{\partial g_{d_0}^0}{\partial x_n^0} \end{bmatrix};$$

$T_{x^0}\mathscr{X}^0 = \ker \dfrac{\partial g^0}{\partial x^0}, \quad \mathrm{im} \left(\dfrac{\partial g^0}{\partial x^0}\right)^T = \left(\ker \dfrac{\partial g^0}{\partial x^0}\right)^\perp.$

Тем самым, $\psi^*(t_0^*) \perp T_{x^{0*}}\mathscr{X}^0$.

УТ по времени:

$$\mathcal{H}|_{t=t_1^*} = -0 \Rightarrow \left\{\mathcal{M} \equiv \mathrm{const},\ \mathcal{M}|_{t=t_1^*} = 0\right\} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv 0.$$

$$\mathcal{H}|_{t=t_0^*} = \lambda_1 \text{ — лишнее}$$

Пусть теперь $\hat{t}_0$ — фикс., $\hat{t}_1$ — фикс., $\hat{x}^0$ — нач. точка, $\hat{x}^1$ — кон. точка.

Подготовка УТ:

$$\varphi_0 = x_0^1$$
$$\varphi_1 = t_0 - \hat{t}_0$$
$$\varphi_2 = t_1 - \hat{t}_1$$
$$\varphi_3 = x_0^0$$
$$\begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \vdots \\ \varphi_{n+3} \end{bmatrix} = x^0 - \hat{x}^0 \qquad (\varphi_{3+i} = x_i^0 - \hat{x}_i^0, i = 1, \dots, n)$$
$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+4} \\ \vdots \\ \varphi_{2n+3} \end{bmatrix} = x^1 - \hat{x}^1 \qquad (\varphi_{n+3+i} = x_i^1 - \hat{x}_i^1, i = 1, \dots, n)$$

Тогда УТ:

$$\bar{\psi}^*(t_1^*) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_{n+4} \\ \vdots \\ \lambda_{2n+3} \end{bmatrix}, \qquad \bar{\psi}^*(t_0^*) = -\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \vdots \\ \lambda_{n+3} \end{bmatrix}$$

При этом

$$\mathcal{H}|_{t=t_1^*} = -\lambda_2, \qquad \mathcal{H}|_{t=t_0^*} = \lambda_1,$$
$$\psi_0^* \equiv \text{const} = \lambda_0 = -\lambda_3, \quad \mathcal{M} \equiv \text{const}$$

Остальные УТ никакой информации не дают $\Rightarrow$ они нам и не нужны.

Задача со свободным правым концом

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases}$$

t_0, x^0, t_1 — фиксированы,

$$\mathcal{J} = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt + \phi(x(t_1)) \to \inf_{u(\cdot)}$$

Переобозначим: $\hat{x}^0, \hat{t}_0, \hat{t}_1$.

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = x_0^1 + \phi(x^1) \\
&\varphi_1 = t_0 - \hat{t}_0 \\
&\varphi_2 = t_1 - \hat{t}_1 \\
&\varphi_3 = x_0^0 \\
&\varphi_4 = x_1^0 - \hat{x}_1^0 \\
&\dots \\
&\varphi_{n+3} = x_n^0 - \hat{x}_n^0
\end{aligned}$$

ПМП утверждает, что $\exists \bar{\psi}^* \colon [t_0^*, t_1^*] \to \mathbb{R}^{n+1}$:

1. (СС) $\dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\Big|_{\dots}$

2. (УМ)

3. (УТ) $\bar{\psi}^*(t_1^*) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_0 \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix}$

$$\bar{\psi}^*(t_0^*) = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \vdots \\ \lambda_{n+3} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{H}|_{t=t_1^*} = -\lambda_2; \quad \mathcal{H}_{t=t_0^*} = \lambda_1$

Второе у третье условия из (УТ) не дают нам никакой информации. Из первого же следует, что

$$\psi_0^* \equiv \mathrm{const} = \lambda_0 \leqslant 0 \Rightarrow \lambda_0 < 0$$

(иначе нарушится условие нетривиальности $\bar{\lambda} \neq 0$). Возьмём $\lambda_0 = -1$ и перепишем:

3') $\psi_0^* \equiv -1, \qquad \psi^*(t_1^*) = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}.$

Докажем полученную формулировку 1), 2), 3') ПМП для задачи со свободным правым концом.

Доказательство. Пусть $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ — оптимальная пара. $\psi_0^* := -1$;

$$\psi^*(t) := -\frac{\partial \phi(x^*(t_1^*))}{\partial x} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(-\psi_0^* \frac{\partial f^0(x^*(s), u^*(s))}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(s), u^*(s)) \right)^T \psi^*(s) \right) ds$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi^*(t)}{dt} = \dfrac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi^*(t), \\ \psi^*(t_1) = -\dfrac{\partial \psi(x^*(t_1))}{\partial x}. \end{cases}$$

Осталось доказать (УМ):

$$-f^0(x^*(t), u^*(t)) + \langle \psi^*(t), f(x^*(t), u^*(t)) \rangle \geqslant$$
$$\geqslant -f^0(x^*(t), v) + \langle \psi^*(t), f(x^*(t), v)) \rangle$$

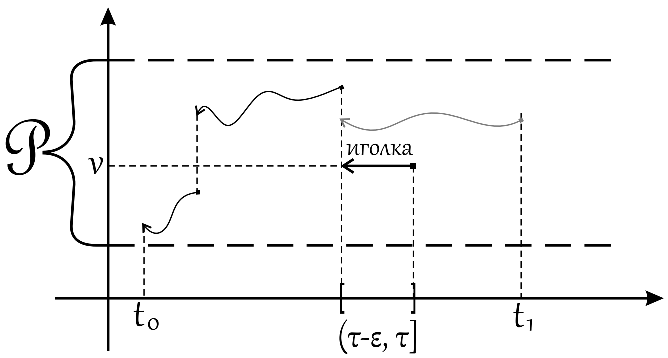
для всех $\forall v \in \mathscr{P}$ (v — конечномерный вектор).

$$J[u(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt + \phi(x(t_1)) \geqslant J[u^*(\cdot)],$$

$$\forall u(\cdot) \in U_\varepsilon(u^*(\cdot))$$

В каком смысле нам здесь понимать ε-окрестность?

Пусть $u^*(\cdot)$ — кусочно-непрерывна и непрерывна слева, тогда в качестве вариации u можем рассмотреть **игольчатую вариацию** следующего вида:
$t_0 < \tau \leqslant t_1,\ 0 < \varepsilon \leqslant \tau - t_0,\ \ v \in \mathscr{P}$



$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus (\tau - \varepsilon, \tau] \\ v, & t \in (\tau - \varepsilon, \tau] \end{cases}$$

Итак, $J[u_\varepsilon(t)] \geqslant J[u^*(\cdot)] \Rightarrow \{\varepsilon > 0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{J[u_\varepsilon(\cdot)] - J[u^*(\cdot)]}{\varepsilon} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{J[u_\varepsilon(\cdot)] - J[u^*(\cdot)]}{\varepsilon} \geqslant 0$$

Лемма 1. $x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon\delta x(t) + \bar{o}(\varepsilon)$, *где*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\delta x(t)) = \left(\dfrac{\partial f(x^*(t), u^*(t))}{\partial x}\right)\delta x(t), \quad t \geqslant \tau, \\ \delta x(\tau) = f(x^*(\tau), v) - f(x^*(\tau), u^*(\tau)), \end{cases}$$

при $t < \tau$ *выполняется* $\delta x(t) = 0$, *то есть* $x_\varepsilon(t) = x^*(t),\ \ t < \tau$ *и при* $t \geqslant \tau$

$$\frac{x_\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \delta x(t).$$

Доказательство леммы.

$$x^*(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s), u^*(s))ds$$

$$x_\varepsilon(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s))ds$$

При $t < \tau$ возьмём $\varepsilon \in (0, \tau - t) \Rightarrow x^*(t) = x_\varepsilon(t)$.
При $t \geqslant \tau$:

$$x_\varepsilon(\tau) - x^*(\tau) = \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) - f(x^*(s), u^*(s))\right] ds.$$

x_ε удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_\varepsilon(t)}{dt} = f(x_\varepsilon(t), v), \\ x_\varepsilon(t-\varepsilon) = x^*(\tau - \varepsilon). \end{cases}$$

Таким образом, из доказанных теорем о непрерывности решение системы $x(t, \tau - \varepsilon, x^*(t-\varepsilon))$ — непрерывно, и $x_\varepsilon(s)$ непрерывна по (s, ε).

Тогда

$$\frac{x_\varepsilon(\tau) - x^*(\tau)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} [\ldots]ds \underset{\varepsilon\to+0}{\overset{\text{т. о ср.}}{\longrightarrow}} f(x^*(\tau), v) - f(x^*(\tau), u^*(\tau))$$

$$= \delta x(\tau), \quad t > \tau.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_\varepsilon(t)}{dt} = f(x_\varepsilon(t), u^*(t)), \\ x_\varepsilon(\tau) = x^*(\tau) + \varepsilon\delta x(\tau) + \bar{o}(\varepsilon). \end{cases}$$

По теореме о диф-сти по начальным данным

$$\exists y(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{x_\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon},$$

для которого справедливо уравнение в вариациях

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) y(t), \\ y(\tau) = \delta x(\tau), \end{cases}$$

следовательно, $\delta x(t) = y(t)$. *Лемма доказана.* ■

Пользуясь полученным представлением для x_ε, теперь мы можем завершить доказательство теоремы.

$$\frac{J[u_\varepsilon(\cdot)] - J[u^*(\cdot)]}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[f^0(x_\varepsilon(s), v) - f^0(x^*(s), u^*(s))\right] ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau}^{t_1} \left[f^0(x_\varepsilon(s), u^*(s)) - f^0(x^*(s), u^*(s))\right] ds +$$

$$+\frac{\phi(x_\varepsilon(t_1)) - \phi(x^*(t_1))}{\varepsilon} \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Каждый из интегралов рассмотрим отдельно. По теореме о производной сложной функции:

$$I_3 \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} \left\langle \frac{\partial \phi(x^*(t_1))}{\partial x}, \delta x(t_1) \right\rangle := \hat{I}_3.$$

Первый интеграл разобьём на два:

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[f^0(x_\varepsilon(s), v) - f^0(x^*(s), v)\right] ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[f^0(x^*(s), v) - f^0(x^*(s), u^*(s))\right] ds$$

$$\Rightarrow I_1 \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} 0 + [f^0(x^*(\tau), v) - f^0(x^*(\tau), u^*(\tau))] := \hat{I}_1.$$

Второй:

$$I_2 \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} \int\limits_{\tau}^{t_1} \left\langle \frac{\partial f^0(x^*(s), u^*(s))}{\partial x}, \delta x(s) \right\rangle ds := \hat{I}_2.$$

Ранее мы показали, что $\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 \geqslant 0$. Получим из этого (УМ):

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi^*}{dt} = \dfrac{\partial f^0}{\partial x} - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi^*, \\ \psi^*(t_1) = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x^*(t_1)). \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \psi^*(t), \delta x(t) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f^0}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi^*, \delta x \right\rangle + \left\langle \psi^*, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial f^0}{\partial x}, \delta x \right\rangle,$$

а это подынтегральное выражение из $\hat{I}_2$. Используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\hat{I}_2 = \int\limits_{\tau}^{t_1} \left\langle \frac{\partial f^0}{dx}, \delta x \right\rangle ds = \left\langle \psi^*(t_1), \delta x(t_1) \right\rangle - \left\langle \psi^*(\tau), \delta x(\tau) \right\rangle.$$

Итак,

$$\hat{I}_2 = -\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}(x^*(t_1)), \delta x(t_1) \right\rangle -$$

$$- \left\langle \psi^*(\tau), f(x^*(\tau), v) - f^*(x^*(\tau), u^*(\tau)) \right\rangle.$$

Тогда

$$\hat{I}_2 + \hat{I}_3 = -\left\langle \psi^*(\tau), f(x^*(\tau), v) - f^*(x^*(\tau), u^*(\tau)) \right\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = [f^0(x^*(\tau), v) - \langle \psi^*(\tau), f(x^*(\tau), v) \rangle] -$$

$$-[f^0(x^*(\tau), u^*(\tau)) - \langle \psi^*(\tau), f(x^*(\tau), u^*(\tau)) \rangle] \geqslant 0 \Rightarrow \text{(УМ)}.$$

Теорема доказана. ■

Пример

$$J = \int\limits_0^1 (u_1 + u_1^2 + x_1^2 - x_2) dt + x_1^2(0) x_2(1) \to \inf,$$

система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_2, \\ \dot{x}_2 = 2u_2 + u_1 + x_1 u_2, x_1(1) = 0, |u_2| \leqslant 1, u_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Вводим переменную, отвечающую интегральной части функционала:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_1 + u_1^2 + x_1^2 - x_2^2, \\ x_0(0) = 0, \end{cases}$$

тогда

$$J = x_0(1) + x_1^2(0)x_2(1) \to \inf.$$

Вводим $e = (t_0, \bar{x}^0, t_1, \bar{x}^1) = (0, [x_0^0, x_1^0, x_2^0]^T, 1, [x_0^1, x_1^1, x_2^1]^T)$,

$$\mathscr{L} = \lambda_0(x_0^1 + (x_1^0)^2 x_2^1) + \lambda_1(t_0 - 0) + \lambda_2(t_1 - 1) + \lambda_3(x_0^0 - 0) + \lambda_4(x_1^1 - 0),$$

$$\mathcal{H} = \psi_0(u_1 + u_1^2 + x_1^2 - x_2) + \psi_1 u_2 + \psi_2(2u_2 + u_1 + x_1 u_2).$$

(СС) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_0 - \psi_2 u_2, \\ \dot{\psi}_2 = \psi_0 \end{cases}$$

(УМ):

$$u_2^* = \begin{cases} 1, & \psi_1 + 2\psi_2 + x_1\psi_2 > 0, \\ [-1, 1], & \psi_1 + 2\psi_2 + x_1\psi_2 = 0, \\ -1, & \psi_1 + 2\psi_2 + x_1\psi_2 < 0, \end{cases}$$

а u_1^*? Пусть $\psi_0 \neq 0 (\psi_0 < 0)$, тогда u_1^* — вершина параболы, направленной ветвями вниз: $u_1^* = -\dfrac{\psi_2 + \psi_0}{2\psi_0}$.

(УТ):

$$\begin{array}{cc} \psi_0(1) = \lambda_0 \leqslant 0 & \psi_0(0) = -\lambda_3 \\ \psi_1(1) = \lambda_4 & \psi_1(0) = -2\lambda_0 x_1^0 x_2^1 \\ \psi_2(1) = \lambda_0 (x_1^0)^2 & \psi_2(0) = 0 \\ \mathcal{H}|_{t=1} = -\lambda_2 & \\ \mathcal{H}|_{t=0} = \lambda_1 & \end{array}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} \psi_1(0) = 2x_1(0)x_2(1) \\ \psi_2(1) = -(x_1(0))^2 \\ \psi_2(0) = 0 \\ \psi_0 \equiv -1 \end{gathered}$$

и (СС) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2x_1 - \psi_2 u_2, \\ \dot{\psi}_2 = -1, \end{cases}$$

$$u_1^* = \frac{\psi_2 - 1}{2},$$
$$\mathcal{H}|_{u=u^*(t)} \equiv \text{const}.$$