



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

« \TeX -анье теоремки»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель этого безобразия
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Формула Остроградского – Гаусса

Пусть D — односвязная область в E^3 (т. е. для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой C можно указать ориентированную кусочно-гладкую поверхность G , расположенную в D , для которой C является границей). Пусть $S = \partial D$ — граница этой области, удовлетворяющая условиям:

1. Поверхность S — кусочно-гладкая двусторонняя полная ограниченная замкнутая и без особых точек.
2. Прямоугольную декартову систему координат (далее ПДСК) можно выбрать так, что для каждой из осей координат любая прямая, параллельная этой оси, будет пересекать поверхность S не более чем в двух точках.

Пусть \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к S . Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (формула Остроградского – Гаусса). Пусть \vec{a} — векторное поле, дифференцируемое в области D , удовлетворяющей условиям 1 и 2, и такое что производная по любому направлению непрерывна в $D \cup \partial D = \bar{D}$. Тогда справедлива формула

$$\underbrace{\iiint_{\bar{D}} \vec{a} \, dv}_{\text{интеграл от дивергенции}} = \underbrace{\oint_{\partial D} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, ds}_{\text{поток поля через поверхность}}. \quad (1)$$

Коротко: интеграл от дивергенции равен потоку.

Доказательство. Все входящие в формулу (1) функции непрерывны, поэтому интегралы в обеих частях равенства существуют.

Заметим, что формула (1) инвариантна относительно выбора ПДСК, так как инвариантно все, что входит в эту формулу. Поэтому достаточно доказать теорему для какой-то одной ПДСК. Выберем ПДСК так, чтобы выполнялось условие 2.

Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)^T$, $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)^T$. Тогда, учитывая, что

$$\cos \alpha \, ds = dydz, \quad \cos \beta \, ds = dzdx, \quad \cos \gamma \, ds = dxdy,$$

получим

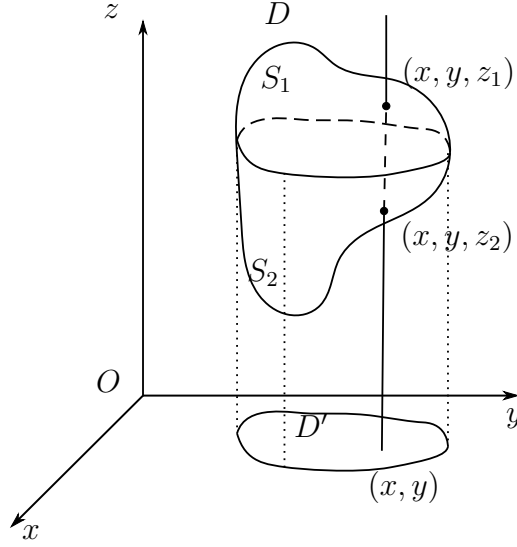


Рис. 1: К доказательству теоремы.

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\
 &= \oint_{\partial D} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \\
 &= \oint_{\partial D} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy). \quad (1')
 \end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$I = \iiint_{\bar{D}} \frac{\partial R}{\partial x} dx dy dz = \oint_{\partial D} R dx dy,$$

для остальных двух пар интегралов показывается аналогично. Обозначим через D' проекцию области D на плоскость Oxy . Через граничные точки D' проведем прямые, параллельные оси Oz . Каждая из этих прямых пересекается с ∂D ровно в одной точке. Множество всех таких точек разделяет ∂D на 2 части, которые мы обозначим через S_1 и S_2 (см. рис. 1). Если мы проведем прямую из внутренней точки D' , параллельную Oz , то она пересечет поверхность в 2 точках: $(x, y, z_1(x, y)) \in S_1$ и

$(x, y, z_2(x, y)) \in S_2$, причем $z_1(x, y) \geq z_2(x, y)$. Так как граница области кусочно-гладкая, то $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — кусочно-гладкие функции в D' . По формуле сведения тройного интеграла к повторному получаем:

$$\begin{aligned} I = \iint_{D'} \left[\int_{z_2(x, y)}^{z_1(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right] dxdy &= \iint_{D'} R(x, y, z_1(x, y)) dxdy - \\ &- \iint_{D'} R(x, y, z_2(x, y)) dxdy = \iint_{S_1} R(x, y, z) dxdy + \\ &+ \iint_{S_2} R(x, y, z) dxdy = \oiint_S R(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $S = S_1 \cup S_2$ и соотношением

$$- \iint_{D'} R(x, y, z_2(x, y)) dxdy = \iint_{S_2} R(x, y, z) dxdy = \iint_{S_2} R \cos \gamma ds,$$

справедливым в силу того, что внешняя нормаль \vec{n} к поверхности S_2 образует тупой угол с осью Oz , поэтому $\cos \gamma < 0$. ■