Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Преобразование Фурье»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1. Постановка задачи

Для функции $f(\cdot)$ одной действительной переменной надо найти ее преобразование Фурье с помощью алгоритма бытрого преобразования Фурье и сравнить полученное преобразование с вычесленным аналитически. Исследовать эффекты ряби и наложения спектра, возникающие при использовании данного алгоритма. Для этого необходимо реализовать в системе MATLAB функцию `plotFT`, принимающую на вход следующие аргументы:

- `hFigure` — handle фигуры, куда осуществляется вывод графиков,
- `fHandle` — handle функции, которую надо преобразовать,
- `fFTHandle` — необязательный параметр, handle функции, задающей аналитически вычесленное преобразование Фурье,
- `step` — шаг дискретизации,
- `inpLimVec` — окно для входной функции,
- `outLimVec` — необязательный параметр, задающей пределы осей для вывода результата преобразования Фурье.

Построить преобразование Фурье для слебующего набора функций:

1. $f_1(t) = \dfrac{2t}{5 - 4t + t^2}$,
2. $f_2(t) = \left(t^2 + t\right)[t \leqslant 1]$,
3. $f_3(t) = t^3 e^{-2t^2 - t}$,
4. $f_4(t) = \dfrac{e^{-2|t|}}{1 + 4\,|t|^5}$.

Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ сравнить численный результат с аналитическим.

2. Алгоритм решения

Пусть задана функция $f(\cdot)$ и окно $[a, b]$. Положим $T \stackrel{\text{def}}{=} b - a$. В данной задаче это равносильно тому, что функция просто определена на $[a, b]$. Тогда продолжим T-периодически нашу функцию на $\mathbb{R}$:

$$f_0(t) = f\big(a + (t - a) \bmod T\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Образ $f_0(\cdot)$ при приобразовании Фурье — это образ исходной функции, но умноженный на «забор» из дельта-функций, идущих с шагом $\Delta_\lambda = 2\pi/T$, причем Δ_λ — это тот шаг, с которым мы получим отсчеты преобразования Фурье.

Затем мы вычисляем шаг Δ, с которым мы будем брать отсчеты исходной функции. Он должен быть, во-первых, не меньше заданного, во-вторых, T должно делиться на Δ нацело.

После того, как шаг выбран, вычсляются отсчеты $f_0[n]$ функции $f_0(\cdot)$ на отрезке $[-\Delta/2, T - \Delta/2]$, где $n = \overline{1, \ldots, N}$, $N = T/\Delta$.

К отсчетам применяется дискретное преобразование Фурье:

$$F[k] = \Delta \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f[n] \exp\left(\frac{-2\pi i(n-1)(k-1)}{N}\right)}_{\text{команда } \texttt{fft}}.$$

Получаются отсчеты образа Фурье на отрезке $[0, 2\pi/\Delta]$. Продолжая $(2\pi/\Delta)$-периодически, получаем отсчеты на всей прямой и выводим на график на нужном отрезке.

3. Аналитическое вычисление преобразования Фурье

3.1. 1-я функция

$$f(t) = \frac{2t}{5 - 4t + t^2}.$$

Используя теорему о вычетах, вычислим преобразование Фурье, как это описано здесь [1, с. 127]. Рассмотрим 3 случая: $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ и $\lambda = 0$:

1. $\lambda < 0$.

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2te^{-it\lambda}}{5 - 4t + t^2}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2te^{it|\lambda|}}{5 - 4t + t^2}\,dt = 2\pi i \sum_{i:\ \operatorname{Im} t_i > 0} \operatorname*{res}_{t=t_i} \frac{2te^{it|\lambda|}}{5 - 4t + t^2}$$

Найдем точки, в которых вычет будет отличен от 0:

$$5 - 4t + t^2 = 0 \iff t = 2 \pm i.$$

Из этих точек на интересует только $2 + i$, так как у нее положительная мнимая часть.

$$\operatorname*{res}_{t=2+i} \frac{2te^{it|\lambda|}}{5 - 4t + t^2} = \frac{2(2+i)e^{i(2+i)|\lambda|}}{2i}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = 2\pi(2+i)e^{i(2+i)|\lambda|}.$$

И, наконец, учитывая, что $\lambda < 0$, получаем:

$$F(\lambda) = 2\pi(2+i)e^{(1-2i)\lambda} = 2\pi e^{\lambda}\left[2\cos(2\lambda) + \sin(2\lambda) + i\big(\cos(2\lambda) - 2\sin(2\lambda)\big)\right].$$

2. $\lambda > 0$. В таком случае сделаем замену $z = -t$. Минус вылезет 3 раза: из-под дифференциала, из пределов и из t в знаменателе. Получаем:

$$F(\lambda) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2ze^{iz\lambda}}{z^2 + 4z + 5}\,dz = -2\pi \sum_{i:\ \operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname*{res}_{z=z_i} \frac{2ze^{iz\lambda}}{z^2 + 4z + 5}.$$

Находим особые точки:

$$z^2 + 4z + 5 = 0 \iff z = -2 \pm i.$$

Из них нас интересует только точка $-2 + i$:

$$\operatorname*{res}_{z=-2+i} \frac{2ze^{iz\lambda}}{z^2 + 4z + 5} = \frac{2(-2+i)e^{i(-2+i)\lambda}}{2i}.$$

Получаем

$$F(\lambda) = 2\pi(2 - i)e^{-(1+2i)\lambda} = \\ 2\pi e^{-\lambda}\left[2\cos(2\lambda) - \sin(2\lambda) - i\big(\cos(2\lambda) + 2\sin(2\lambda)\big)\right].$$

3. $\lambda = 0$.

   В этом случае подынтегральное выражение ведет себя как $1/t + \overline{o}(1/t)$ и несобственный интеграл расходится даже в смысле главного значения. Поэтому в действительной части у образа нашей функции устранимый разрыв, а в мнимой — разрыв 2 рода.

3.2. 2-я функция

$$f(t) = (t^2 + t)\big[|t| \leqslant 1\big].$$

Для начала разобьем интеграл на 2:

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\lambda}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 + t)e^{-it\lambda}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} t^2 e^{-it\lambda}\,dt + \int\limits_{-1}^{1} te^{-it\lambda}\,dt.$$

Послдений интеграл обозначим за I, а первый выразим через него, взяв по частям:

$$\int\limits_{-1}^{1} t^2 e^{-it\lambda}\,dt = -\frac{t^2 e^{-it\lambda}}{i\lambda}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{2}{i\lambda}I = \frac{2}{\lambda}\big(\sin(\lambda) - iI\big).$$

Теперь вычислим I:

$$I = -\frac{te^{-it\lambda}}{i\lambda}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{i\lambda}\int\limits_{-1}^{1} e^{-it\lambda}\,dt = \frac{2i\cos(\lambda)}{\lambda} - \frac{2i\sin(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Тогда при $\lambda \neq 0$ имеем:

$$F_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3}\big(\lambda^2\sin(\lambda) + 2\lambda\cos(\lambda) - 2\sin(\lambda)\big) + \frac{2i}{\lambda^2}\big(\lambda\cos(\lambda) - \sin(\lambda)\big).$$

Вычислим интеграл явно при $\lambda = 0$:

$$\int\limits_{-1}^{1}(t^2 + t)\,dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Окончательно:

$$F(\lambda) = \begin{cases} F_0(\lambda), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ \frac{2}{3}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

4. Графики

В этом разделе сначала демонстрируются графики преобразований Фурье для качественного подбора параметров для заданнных функций, а потом исследуются некоторые искажения и варианты их устранения.

4.1. Результаты для заданных функций

Графики преобразования Фурье для заданных функций показаны на рис. 1–4.

4.2. Эффект ряби

Эффект ряби возникает из-за невозможности точно посчитать несобственный интеграл. Теоритически этот эффект возникает при выборе окна исходной функции. При преобразовании Фурье умножение на окно становится сверткой с чем-то, похожим на $\frac{\sin(x)}{x}$. В точках непрерывности можно добиться сколь угодно малой ряби выбором большого окна (см. рис. 5, 6), а в точках разрыва функции-образа убрать рябь подбором параметров невозможно (см. рис. 1 и 7, рябь вблизи нуля в мнимой части).

4.3. Эффект наложения спектра

Эффект наложения спектра возникает в момент, когда мы выбираем шаг сетки для прообраза. В теории отсчеты функции символизируются умножением на «забор» из дельта-функций, который при преобразовании Фурье переходит в «забор», но с шагом $2\pi/\Delta$. Операция умножения становится сверткой и в итоге образом становися исходных образов, но сдвинутых на некоторое число периодов $2\pi/\Delta$. Соответственно, выбирая большой шаг, мы уменьшаем период образа и он «не успевает прижаться к нулю». На рис. 8 в качестве примера рассмотрена только действительная часть образа Фурье для функции $f_1(\cdot)$.

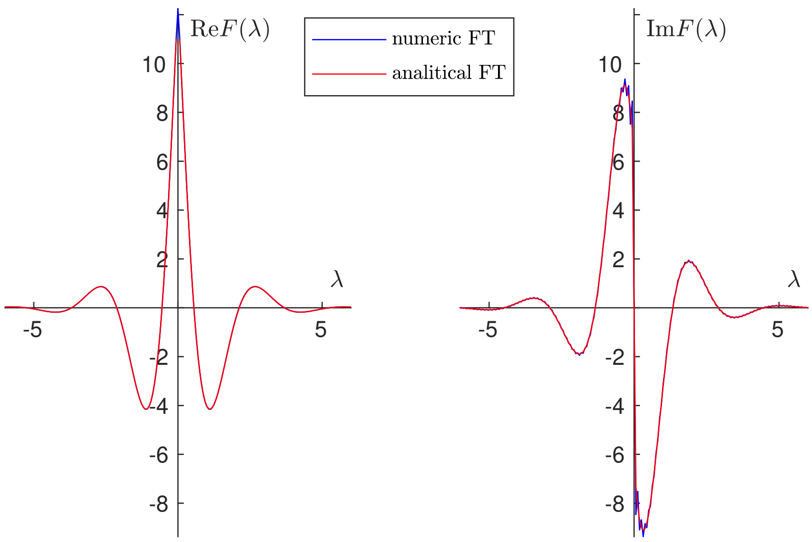

Рис. 1: ПФ для $f_1(t) = \frac{2t}{5-4t+t^2}$.
$a = -50,\ b = 50,\ \Delta = 0.01$.

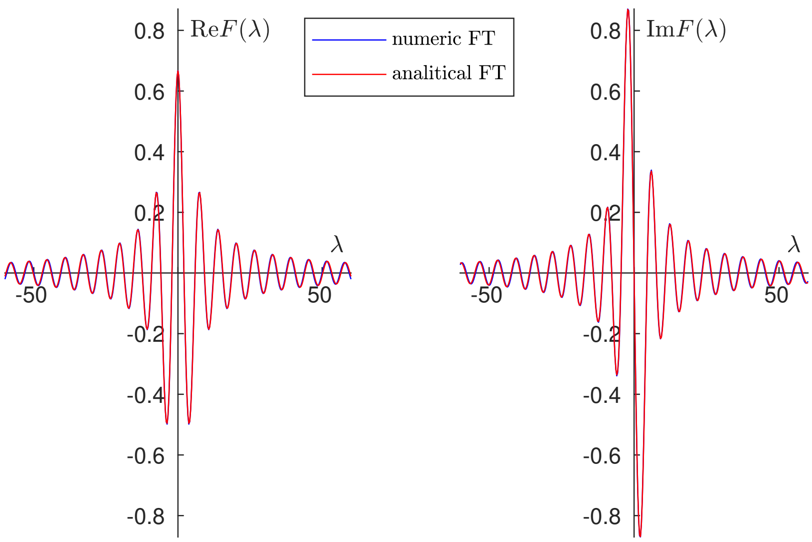

Рис. 2: ПФ для $f_2(t) = (t^2 + t)\,[t \leqslant 1]$.
$a = -10,\ b = 10,\ \Delta = 0.01$.

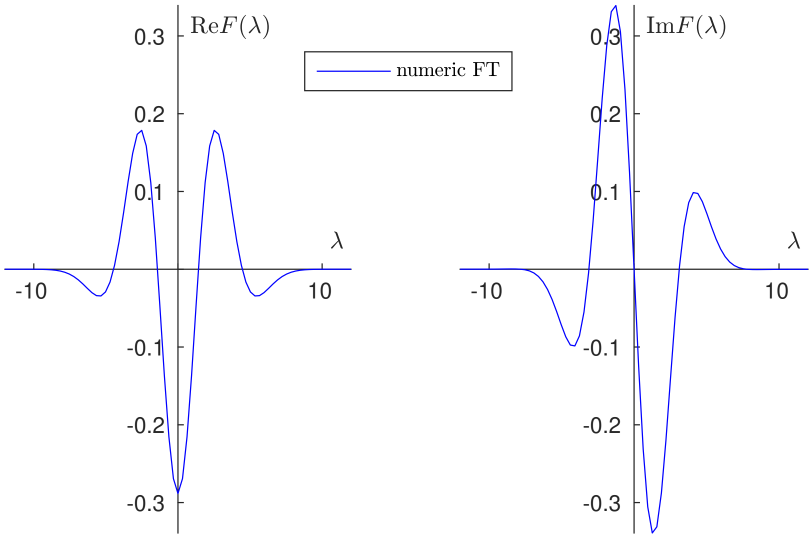

Рис. 3: ПФ для $f_3(t) = t^3 e^{-2t^2 - t}$.
$a = -10,\ b = 10,\ \Delta = 0.01.$

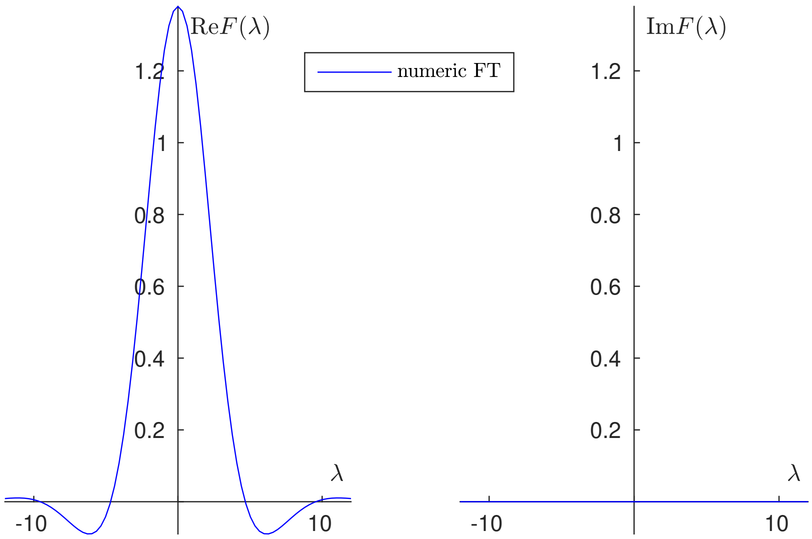

Рис. 4: ПФ для $f_4(t) = \frac{e^{-2|t|}}{1+4|t|^5}$.
$a = -10,\ b = 10,\ \Delta = 0.01.$

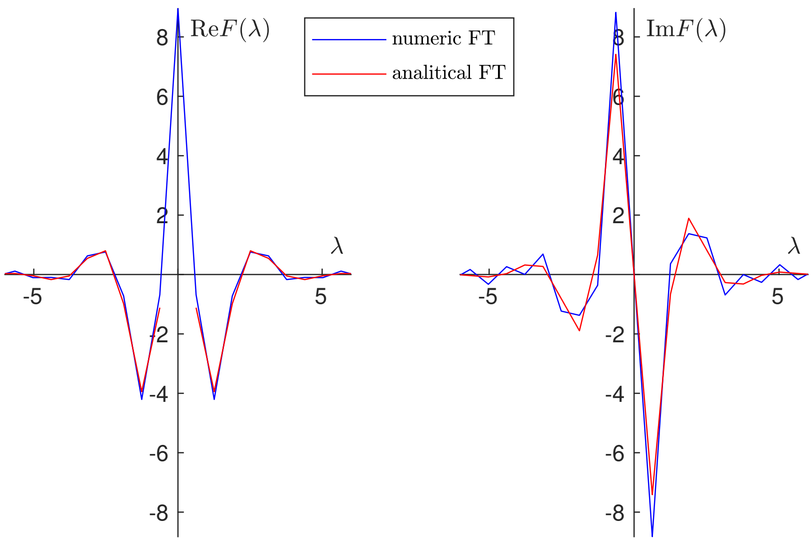

Рис. 5: Эффект ряби для $f_1(\cdot)$.
$a = -5,\ b = 5,\ \Delta = 0.1.$

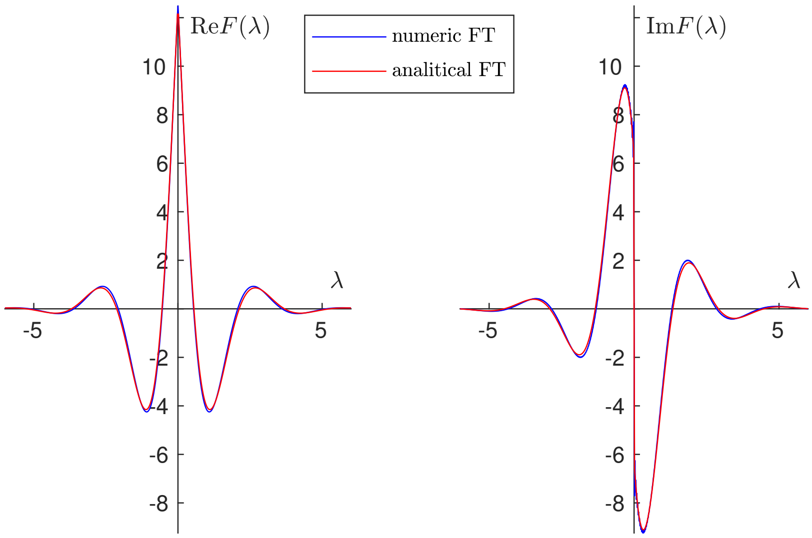

Рис. 6: Устранение ряби для $f_1(\cdot)$ путем расширения окна.
$a = -200,\ b = 200,\ \Delta = 0.1.$

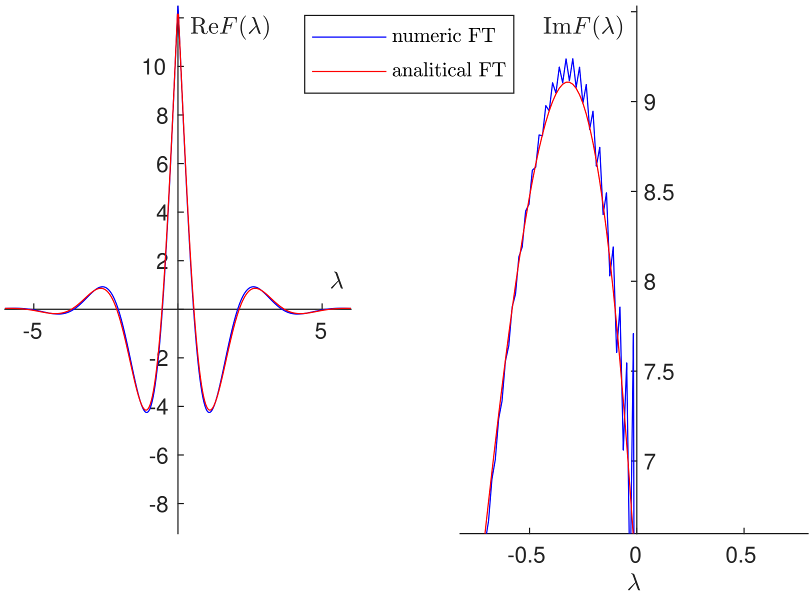

Рис. 7: Но вблизи точек разрыва образа $f_1(\cdot)$ рябь неустранима. $a = -200,\ b = 200,\ \Delta = 0.1$.

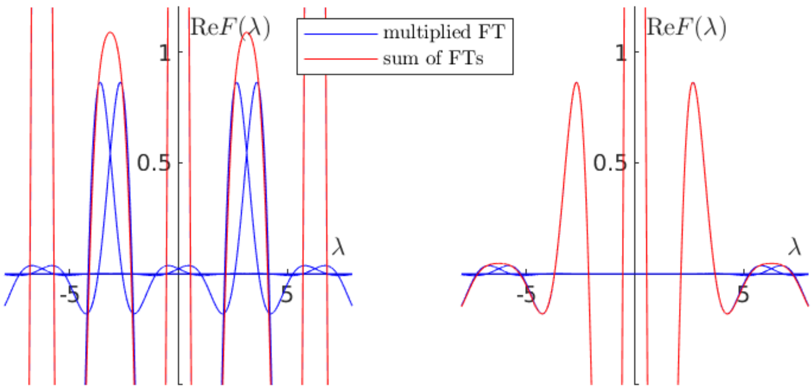

Рис. 8: На левом графике показаны размноженный образ Фурье и сумма образов при шаге $\Delta = 1$, виден ярко выраженный эффект наложения спектра. На правом графике выбран шаг $\Delta = 1/2$, и эффект практически отсутствует.

Список литературы

[1] Леонтьева Т. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Научный мир, 2004. с. 216.