14.10) $A: l_1 \longmapsto l_1 \quad (\Rightarrow A^*: l_\infty \longmapsto l_\infty)$

б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$; $\lambda_n \in \mathbb{R}$: $|\lambda_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$

$\forall y \in l_\infty \quad y: (y_1, y_2, \ldots)$

$y(Ax) = \{\lambda_1 y_1 x_1 + \lambda_2 y_2 x_2, \ldots\} \Rightarrow (A^* y)(x) \Rightarrow A^* y = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \ldots)$

в) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$

$y(Ax) = y_2 x_1 + y_3 x_2 + \ldots = (A^* y) x \Rightarrow A^* y = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$

г) $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$

$y(Ax) = y_1 x_2 + y_2 x_3 + \ldots = (A^* y)(x) \Rightarrow A^* y = (0, y_1, y_2, \ldots)$.

14.18) $A: l_2 \longmapsto l_1$; $Ax = x$; $D(A) = \{x: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\} \subset l_2$

а) Покажем, что $\forall x \in l_2 \ \exists \{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in D(A)$: $\|x - x^{(k)}\|_{l_2}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Положим $x^{(k)} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \in D(A)$ т.к. конечная послед.

Тогда $\|x - x^{(k)}\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(k)})^2 = \sum_{n=k}^{\infty} x_n^2 \to 0$ в силу равенства

Парсеваля $\Rightarrow \overline{D(A)} = l_2$, QED

б) Покажем, что A – не огр., т.е. $\exists$ послед $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$: $\dfrac{\|Ax^{(k)}\|_{l_1}}{\|x^{(k)}\|_{l_2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$x^{(k)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{k}, 0)$; $\|x^{(k)}\|_{l_2} \nearrow_{k\to\infty} \frac{\pi^2}{6}$

$\|Ax^{(k)}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ — расходящийся ряд $\Rightarrow$ A не огр. оператор.

в) A^* ~~...~~: $l_1^* \longmapsto l_2^*$; ~~A^* ...~~ l_∞: $A^*: l_\infty \longmapsto l_2$

$\forall y \in l_\infty \quad y(Ax) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n x_n = (A^*y)(x) \Rightarrow A^*y = (y_1, y_2, \ldots)$

$A^*y \in l_2 \Rightarrow D(A^*) = \{ y \in l_\infty : A^*y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_2 \} =$

$= \{ y \in l_\infty : \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty \}.$

14.19 $A : L_2[0,1] \longmapsto L_2[0,1]$

$Ax(t) = x(t^2)$; $D(A) = \{ x(\cdot) \in L_2[0,1] : \int_0^1 x^2(t^2)\,dt < \infty \}$

а) $\int_0^1 x^2(t^2)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \tau = t^2 \\ dt = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{x^2(\tau)\,d\tau}{2\sqrt{\tau}}$ — проблемы в 0.

Положим $x_n(t) = \left\{ \begin{array}{l} x(t),\ t \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 0,\ t \in [0, \frac{1}{n}) \end{array} \right\}$. Тогда $\|x_n(\cdot) - x(\cdot)\|^2 =$

$= \int_0^1 (x_n(t) - x(t))^2\,dt = \int_0^{1/n} x^2(t)\,dt \leq \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к. $x^2(\cdot) \in L_2[0,1]$

Покажем, что $x_n(\cdot) \in D(A)$: $\int_0^1 x_n^2(t^2)\,dt = \int_0^1 \frac{x_n^2(\tau)\,d\tau}{2\sqrt{\tau}} =$

$= \int_{1/n}^1 \frac{x^2(\tau)\,d\tau}{2\sqrt{\tau}} \leq \frac{n}{2} \int_0^1 x^2(\tau)\,d\tau < \infty$, т.к. $x(\cdot) \in L_2[0,1]$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x(\cdot) \in L_2[0,1]\ \exists \{x_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty} \in D(A) : \|x(\cdot) - x_n(\cdot)\|_{L_2[0,1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{D(A)} = L_2[0,1]$, QED

б) покажем, что не ограниченный.

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ t^{-1/3}, & t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$\|x_n\|^2 = \int_0^1 x_n^2(t)\,dt = \int_{1/n}^1 t^{-2/3}\,dt = \frac{1}{3} t^{1/3} \Big|_{1/n}^{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

$$\|Ax_n(\cdot)\|^2 = \int_0^1 x_n^2(t^2)\,dt = \int_{1/n}^1 t^{-4/3}\,dt = -\frac{1}{3} t^{-1/3} \Big|_{^3 1/n}^{1}$$ — расходится при $n \to \infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\|Ax_n(\cdot)\|}{\|x_n(\cdot)\|} \longrightarrow \infty \Rightarrow$ оператор A не огр., QED

в) $$y(Ax(\cdot)) = \int_0^1 y(t)x(t^2)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \tau = t^2 \\ t = \sqrt{\tau} \\ dt = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{y(\sqrt{\tau})\, x(\tau)}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau \Rightarrow (A^*y)(x(\cdot)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^*y)(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \; ; \; A^*: L_2^* \longmapsto L_1^* \Rightarrow A^*: L_2 \longmapsto L_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(A^*) = \left\{ y \in L_2[0,1] : \int_0^1 \frac{y^2(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\,dt < \infty \right\}$$