Удовиченко Игорь , Вариант 1

① найдём A^*: $\langle Ax, y\rangle_{L_2} = \langle y, A^*x\rangle_{W_2^1}$

||

② Скалярное произведение в $W_2^1[a,b]$:

$$\langle x,y\rangle_{W_2^1[a,b]} = \int_a^b x(t)y(t)\,dt + \int_a^b x'(t)\,y'(t)\,dt$$

Не ограничивая общности (~~линейная~~ аффинная замена переменной), считаем что $a=0$; $b=1$

Покажем что следующие 5 интегралов дают 0, тогда все ост. интегралы сводятся из них

1) $\int_0^1 \sin 2\pi kt\,dt = 0$ — инт от sin по периоду

2) $\int_0^1 \cos 2\pi kt\,dt = 0$ — аналогично

3) $\int_0^1 \sin 2\pi kt \sin 2\pi nt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\cos(2\pi(k-n)t) - \cos(2\pi(k+n)t)\right]dt = 0$

т.к. $k \neq n$

4) аналогично $\cos 2\pi kt \cdot \cos 2\pi nt = \frac{1}{2}\left[\cos 2\pi(k-n)t + \cos 2\pi(k+n)t\right]$

5) $\int_0^1 \sin 2\pi kt \cos 2\pi nt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\sin 2\pi(k-n)t + \sin 2\pi(k+n)t\right]dt = 0$.

т.к. $k \neq n$ и получили интеграл по нескольким полным периодам => эти ф-ции образуют ортогональную систему, QED

(3) $A \in \mathcal{L}(H)$; $\forall x \in H \ \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$

Легко заметить, что $\langle Ax,y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle A(x+y),(x+y)\rangle -$

$- \langle A(x-y),(x-y)\rangle + \langle A(x+iy),(x+iy)\rangle - \langle A(x-iy),(x-iy)\rangle\Big]$

Тогда все слагаемые в правой части — действительные числа $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ax,y\rangle} = \langle y, Ax\rangle$

Далее, ~~в правой части~~ если поменять местами x и y в п.ч., то ничего не изменится $\Rightarrow \langle y, Ax\rangle = \langle Ay,x\rangle = \overline{\langle Ay,x\rangle} =$

$= \langle x, Ay\rangle$. Таким образом, $\langle Ax,y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

(4) H-пр-во со счётным базисом $\Rightarrow H \cong l_2 \Rightarrow$ ~~сп~~ доказываем для l_2: $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$

1) покажем, что $D(A) = l_2$ и $Ax \in l_2$

Действительно $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n$ ограничена $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 x_n^2 \le \underbrace{\max_n \lambda_n^2}_{<\infty} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}_{<\infty} < \infty \Rightarrow \forall x \in l_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow D(A) = l_2$ и $Ax \in l_2$, QED

2) воспользуемся критерием предкомпактности в l_2 для д-ва вполне непрерывности. Покажем, что $AB_1(0)$:

а) равномерно ограничено

б) $\sum_{k=n}^{\infty} x_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ равномерно по x

Тогда $AB_1(0)$ будет предкомпактным и A вполне непрерывен.

Действительно: а) $\forall x \in B_1(0)$ $\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 x_n^2 \le \max_n \lambda_n^2$,

т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \le 1$ $\forall x$

б) $\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^2 x_k^2 \le \max_{k \ge n} \lambda_k^2 \xrightarrow{\forall x \text{ равномерно}} 0$, т.к. $\lambda_n \to 0$ $\Rightarrow$ ($\Leftrightarrow \lambda_n^2 \to 0$)

$\Rightarrow AB_1(0)$ — п/к $\Rightarrow A$ вполне непрерывен QED

5 как и в 4 рассмотрим только случай l_2:

Пусть $\boxed{Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = \cancel{(0, x_1, x_2, \ldots)}\ (x_2, x_3, \ldots)}$

1) Покажем, что A — огр. оператор: $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{n=2}^{\infty} x_n^2 \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \|x\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ огр. $\Rightarrow A$ непрерывен

2) Найдём A^*: $\langle Ax, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n = \langle x, A^* y\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A^* y = (0, y_1, y_2, \ldots)}$

3) ~~Будем решать ур-е: $(A-\lambda I)x = y$ в «матричном» виде~~

$$\cancel{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & -\lambda & 1 & \\ & & -\lambda & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}}$$

Т.к. $\|A\| = \|A^*\| = 1$, то $\forall \lambda > 1 \in \rho(A) \Rightarrow \boxed{\sigma(A) \subseteq [-1,1]}$

а $\boxed{\sigma(A^*) \subseteq [-1,1]}$

При $\lambda \in [-1,1]$ оператор не будет непрерывно обратим, т.к. у «матрицы» не будет диаг. преобладания и при делении на λ будет всё расти

(6) $x(0)=x(1)$

$x'(0)=x'(1)$

$$x''-x'=\lambda x$$

Тогда хар. ур-ие: $\mu^2-\mu-\lambda=0 \Rightarrow \mu = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4\lambda}}{2}$

Тогда общее решение: $x(t)=C_1\exp\left\{\dfrac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}t\right\}+C_2\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}t\right\}$

$x(0)=x(1)$

$x(0)=C_1+C_2$; $x(1)=C_1\exp\left\{\dfrac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\right\}+C_2\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}t\right\}$

$$x'(0)=C_1\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}$$

$$x'(1)=C_1\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\exp\left\{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\right\}+C_2\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}\exp\left\{\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} C_1\left(1-\exp\left\{\dfrac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\right\}\right) = -C_2\left(1-\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}\right\}\right) \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}C_1(\ldots) = -C_2\dfrac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}(\ldots)\end{cases}$$ делим

$\Downarrow$

либо $C_1=C_2=0$ (нам не подходит, т.к. ищем нетрив. значения)

либо $\dfrac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{1}{4}}$

Тогда собств. вектора $\boxed{x(t)=e^{t/2}}$