Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 23.03.20 (7-ой день карантина)

“Слабая и $*$-слабая сходимость”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать раздел 17.5 (стр. 176 – 178) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

Определение 1. *Пусть X – линейное нормированное пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$ слабо сходится к $x \in X$, если для любого линейного непрерывного функционала $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.*

Определение 2. *Пусть X – линейное нормированное пространство. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in X^*$ $*$-слабо сходится к $f \in X^*$, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.*

Чем отличается $*$-слабая сходимость от слабой сходимости в пространстве X^*?

Теорема 1. *Если последовательность x_n сходится к x сильно при $n \to \infty$, то $x_n \to x$ слабо при $n \to \infty$.*

Теорема 2. *Если последовательность x_n сходится слабо, то она ограничена.*

Доказательство следует из принципа равномерной ограниченности (теоремы Банаха-Штейнгауза).

Теорема 3. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Тогда если $x_n \to x$ слабо ($x_n \in X$), то $Ax_n \to Ax$ слабо.*

Теорема 4. *Пусть X – конечномерное нормированное пространство. Тогда если $x_n \to x$ слабо, то $x_n \to x$ сильно.*

Задача 1. *Пусть X – банахово пространство. Доказать, что если последовательность $f_n \in X^*$ $*$-слабо сходится, то она равномерно ограничена по норме.*

Решение: Следствие из теоремы Банаха-Штейнгауза.

Задача 2. *Пусть X – банахово пространство, $x_n, x \in X$, $f_n, f \in X^*$. Доказать, что из каждого из двух условий*

- *$x_n \to x$ слабо, $f_n \to f$ сильно;*
- *$x_n \to x$ сильно, $f_n \to f$ $*$-слабо*

следует сходимость $f_n(x_n) \to f(x)$. Привести пример недостаточности условия

- *$x_n \to x$ слабо, $f_n \to f$ $*$-слабо.*

Решение:
1) Пусть $x_n \to x$ слабо, $f_n \to f$. Тогда

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |(f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(x))| \le \|f_n - f\| \cdot \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|.$$

Слабо сходящаяся последовательность ограничена, а значит $\|x_n\| \le C$.
$f_n \to f \Rightarrow \|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$.
$x_n \to x$ слабо $\Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \to 0$.
Объединяя полученные соотношения, получаем, что $|f_n(x_n) - f(x)| \to 0$, то есть $f_n(x_n) \to f(x)$.
2)Пусть $x_n \to x$, $f_n \to f$ слабо. Тогда

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |(f_n(x_n) - f_n(x)) + (f_n(x) - f(x))| \le \|f_n\| \cdot \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)|.$$

$*$-слабо сходящаяся последовательность ограничена, а значит $\|f_n\| \le C$.
$x_n \to x \Rightarrow \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.
$f_n \to f$ $*$-слабо $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \to 0$.
Объединяя полученные соотношения, получаем, что $|f_n(x_n) - f(x)| \to 0$, то есть $f_n(x_n) \to f(x)$.
3) Пример: $X = l_2$, $x_n = f_n = e_n$ (базис). Для любого $g \in l_2^*$ функционал g соответствует вектору $g = (g_1, g_2, ..., g_n, ...) \in l_2$. Тогда $g(x_n) = g_n \to 0$, в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} g_n^2$. Аналогично $\forall y \in l_2$ $f_n(y) = y_n \to 0$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится слабо, а $\{f_n\}$ – $*$-слабо к нулю. При этом $f_n(x_n) \equiv 1$, а значит последовательность $\{f_n(x_n)\}$ не сходится к $f(x) = 0$.

Задача 3. *В пространстве $C[a, b]$ доказать, что всякая слабо сходящаяся последовательность сходится поточечно. Привести пример слабо, но не сильно сходящейся последовательности.*

Решение: Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть функционалы вида $f_\tau(x) = x(\tau)$.
Пример (для $C[0, 1]$): пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{1}{2^n}\right) 2^{n+1} & , \quad t \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ 1 + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - t\right) 2^{n+1} & , \quad t \in \left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $x_n \in C[0, 1]$, $||x_n|| = 1$, а потому x_n не сходится к 0. В то же время $x_n \to 0$ слабо, т.к.

$$|f(x_n)| = \left| \int_0^1 x_n(t) df(t) \right| \le \mathrm{Var}_{[2^{-n}, 2^{-n+1}]} f(t) \to 0.$$

Задача 4. *Доказать, что $C[a, b]$ – не слабо полное пространство.*

Решение: В $C[0, 1]$ рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$. Отсутствие слабого предела следует из того, что сходимость – поточечная, а поточечно указанная последовательность сходится не к функции из $C[0, 1]$. Фундаментальность необходимо показать непосредственно, по определению.

Домашнее задание: № 13.8, 13.9, 13.10.