

### Задание 3. Вариант 15.

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} - x^2 \sin(x) + x^3 + x^4 + 2\dot{x} = u,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . На возможные значения управляющего параметра  $u$  наложено ограничение:  $u \in [-\alpha, \alpha]$ . Задан начальный момент времени  $t_0 = 0$  и начальная позиция  $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$ . Необходимо построить множество достижимости  $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$  (множество пар  $(x(t), \dot{x}(t))$ ) в классе программных управлений в заданный момент времени  $t \geq t_0$ .

- 1) Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset(alpha,t)`, которая по заданным параметрам  $\alpha > 0$ ,  $t \geq t_0$  рассчитывает приближенно множество достижимости  $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ . На выходе функции — два массива  $X$ ,  $Y$  с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).
- 2) Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha,t1,t2,N,filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha,t)`, строит множества достижимости для моментов времени  $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2-t_1)i}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Здесь  $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ ,  $N$  — натуральное число. Для каждого момента времени  $\tau_i$  функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранен в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при  $t_2 = t_1$ ).
- 3) В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множества достижимости от величины параметра  $\alpha$ . Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.