16.1 в) $Ax(t) = x(0) + t\,x(1)$

$\exists x(t)$ лежит в единичном шаре $\Rightarrow \max|Ax(t)| \leq 2 \cdot \max|x(t)| \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть равномерная ограниченность

$|Ax(t+h) - Ax(t)| = |\cancel{x(0)} + (t+h)x(1) - \cancel{x(0)} - t\,x(1)| =$

$= h|x(1)| \leq h \Rightarrow$ равностеп. непр. $\Rightarrow$ т. Арцела – Асколи $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ — вполне непрерывен

г) $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{ts} x(s)\,ds =$

$\max|Ax(t)| \leq e \cdot \int\limits_0^1 \max|x(s)|\,ds \leq e \quad (x \in B_1^c(0)) \Rightarrow$ равномерн. огр.

$|Ax(t+h) - Ax(t)| \leq \int\limits_0^1 \left(e^{(t+h)s} - e^{ts}\right) x(s)\,ds = \int\limits_0^1 e^{(ts)}\left(e^{hs} - 1\right) x(s)\,ds \leq$

$\leq e \cdot \int\limits_0^1 \left(e^{hs} - 1\right) ds \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \Rightarrow$ равностеп. непр. $\Rightarrow$ вполне непр.

по т. Арцела-Асколи.

д) нет $\quad Ax(t) = x(t^2)$

$x_n(t) = t^n;\ Ax_n(t) = t^{2n}$, тогда Ax_n не будет предкомпактным

$\Rightarrow$ не вполне непрерывен

16.5 а) нет. рассмотрим $x_n(t) = t^n/n \in C^1[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \max|x_n(t)| + \max|x_n'(t)| \leq 2\ \forall n$; $Ax_n(t) = t^n$ – не п/к.

б) нет $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n(n+1)}$. ~~аналогично пункту~~

Далее, если x_n' фундам., то и $x_n'' \in C[0,1]$ фундам., но $\in C[0,1]$

$x_n'' = t^{n-1}$ — из неё нельзя выделить фундам. $\Rightarrow$

$\{Ax_n\}$ — не предкомпакт.

в) да. Рассм. $B_1(0)$ в $C_2[0,1]$; $x(\cdot) \in B_1(0)$.

- Тогда $\max|x'(t)| \le \max|Ax(t)| \le \|x(\cdot)\|_{C_2} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть равном. огр.

- $|Ax(t+h) - Ax(t)| \le |x'(t+h) - x'(t)| \le \max|x''(t)| \cdot h \le$

$\le \|x(\cdot)\|_{C^2} \cdot h \le h \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \Rightarrow$ равностеп. непр.

$\Downarrow$

по т. Арцела – Асколи будет вполне непрерывность.

16.7 ($\Rightarrow$) От противного: $\exists$ образ бесконечномерный.

Тогда пересечение $B_1^E(0)$ с образом ~~будет~~ не будет предкомпактно ($\nexists$ ε-сети) $\Rightarrow A$ — не вп. непрер. — ?! $\Rightarrow$ образ конечномерный

($\Leftarrow$) по теореме 3.

16.9 а) равномерн. огр.: $\|x(\cdot)\|_C \le \|x(\cdot)\|_{C^1}$

равностеп. непр.: $|x(t+h) - x(t)| \le h \cdot \max|x'(t)| \Rightarrow$ да б) Используем определение, которое в теореме 6

] $x_n(\cdot) \in H^1$; $x_n(\cdot) \xrightarrow{\text{слабо}} x(\cdot) \in H^1$, т.е. $\forall y(\cdot) \in H^1$ (шмо!)

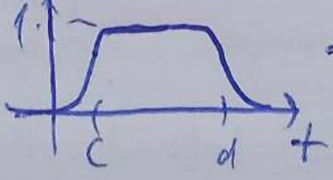
$$\cancel{\int_a^b y(t)x_n(t)dt \longrightarrow \int_a^b y(t)x(t)dt}$$

$$\int_a^b \left[y(t)x_n(t) + y'(t)x_n'(t)\right]dt \longrightarrow \int_a^b \left[y(t)x(t) + y'(t)x'(t)\right]dt.$$

Покажем, что тогда $\max|x_n(t) - x(t)| \longrightarrow 0$,

От противного: пусть $\exists \delta > 0 : |x_n(t) - x(t)| \geq \delta$ на интервале (c,d).

Тогда $\int_a^b \left(y(t)[x_n(t) - x(t)] + y'(t)[x_n(t) - x(t)]\right)dt$ будет $> \varepsilon$,

если $y(t)$ выберем тоже непрерывно дифф-мой, похожей на индикатор (c,d): 

— всё ясно

(16.20) (16.30) 1) область определения: $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n \leq \lambda \Rightarrow$

не влияет на сходимость ряда из квадратов $\Rightarrow$

$\Rightarrow D(A) = H$

2) Область значений: $\forall x \in H$ поделим каждую координату на λ_n и получим прообраз $\Rightarrow$ область значений — H.

5) Вполне непрерывность

3.1) $\exists\, x \in B_1^C(0)$ тогда равномерная ограниченность очевидна

3.2) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} (\lambda_n x_n)^2 \leq \max\limits_{n \geq N} \lambda_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Downarrow$

$A\, B_1^C(0)$ — предкомпакт $\to$ A вполне непрерывен

16.26 $A \cdot B_1^C(0)$ вполне огр. $\Rightarrow$ ~~$\forall$~~ $\forall \varepsilon$ $\exists$ конечная ε-сеть

мн-во $M =$

для M. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$; построим конечную ε-сеть $\forall n$

Тогда объединие счётное число $\frac{1}{n}$-сетей ~~для всех~~ по

всем n и получим счётное всюду плотное мн-во

16.12 Будем решать урие ~~$\mathfrak{B}$~~ $\begin{cases} x'' = y \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$

Найдём ф-цию Грина: $G(t,s)$: 1) $G''_{tt} = 0$ при $t \neq s$

2) $G|_{t=0} = G|_{t=1} = 0$

3) $G|_{t=s}$ — непр по t; $G'_t(s+0,s) - G'_t(s-0,s) = 1$

~~$1) \Rightarrow G(t,s) = a(s)t + b(s)$~~

Тогда $G(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s \\ s(t-1) & s \leq t \end{cases}$ и $x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds$