Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 20.04.20 (35-ый день карантина)

“Самосопряженный оператор”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать параграфы 18.2, 18.3, 18.5, 18.6 (стр. 188 – 195) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

В **гильбертовом пространстве** H рассмотрим линейный оператор A. Если $A = A^*$, то линейный оператор A называется самосопряженным. Оператор A самосопряжен тогда, и только тогда, когда $\forall x, y \in H$ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Теорема 1. *Пусть операторы A и B являются самосопряженными. Тогда оператор AB самосопряжен тогда, и только тогда, когда $AB = BA$.*

Теорема 2. *Для самосопряженного оператора A*

$$||A|| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : ||x|| \leq 1\}.$$

Будем говорить, что самосопряженный оператор неотрицателен ($A \geq 0$), если $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x$.

Теорема 3. *Каждый неотрицательный оператор A имеет единственный неотрицательный квадратный корень $\sqrt{A}$.*

Задача 1 (ТПС, 18.11)**.** *Является ли подпространством в гильбертовом пространстве H множество*

$$N = \{x : \langle Ax, x\rangle = 0\},$$

если a) A – самосопряженный; b) $A \geq 0$?

Решение: a) Нет. Достаточно рассмотреть конечномерный пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $N = \{x : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ – не является линейным пространством. b) Если $A \geq 0$, то $\exists A^{1/2} \geq 0$. Следовательно, $N = \{x : A^{1/2}x = 0\}$ – линейное подпространство.

Задача 2 (ТПС, 18.15)**.** *Оператор A самосопряженный. Доказать, что $||A^2|| = ||A||^2$.*

Решение: Если A самосопряжен, то и A^2 самосопряжен. Следовательно,

$$||A^2|| = \sup\{|\langle A^2x, x\rangle| : ||x|| \leq 1\} = \sup\{|\langle Ax, Ax\rangle| : ||x|| \leq 1\} = ||A||^2.$$

Задача 3 (ТПС, 18.27)**.** *Оператор A самосопряжен, $A \geq 0$. Доказать, что $||Ax||^2 \leq ||A|| \langle Ax, x\rangle$.*

Решение: Если $A \geq 0$, то $\exists A^{1/2} \geq 0$. Следовательно,

$$||Ax||^2 = \left\langle A^{1/2}x, AA^{1/2}x \right\rangle \leq ||A|| \cdot ||A^{1/2}||^2 = ||A|| \left\langle Ax, x \right\rangle .$$

Задача 4 (ТПС, 18.29)**.** *Оператор A самосопряженный и непрерывно обратимый. Доказать, что обратный оператор также самосопряженный.*

Решение: Для любых $x, y \in H$ $\left\langle A^{-1}x, y \right\rangle = \left\langle A^{-1}x, AA^{-1}y \right\rangle = \left\langle x, A^{-1}y \right\rangle$. Следовательно, $(A^{-1})^* = A^{-1}$.

Задача 5 (ТПС, 18.32)**.** *Пусть A – непрерывный оператор. Доказать, что существует оператор $(I + AA^*)^{-1}$.*

Решение: $\forall x \in H$, $x \neq 0$ $\langle (I + AA^*)x, x \rangle = ||x||^2 + ||A^*x||^2 > 0$. Следовательно, $\ker(I + AA^*) = \{0\}$. Более того, самосопряженный оператор $(I + AA^*)$ является положительно определенным, а значит, является обратимым.

Кроме того, $\mathrm{im}(I + AA^*) = \ker^{\perp}(I + AA^*)^* = \ker^{\perp}(I + AA^*) = \{0\}^{\perp} = H$.

Домашнее задание: № 18.2, 18.3, 18.16, 18.17, 18.21, 18.34, 18.37, 18.41.