Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 13.04.20 (28-ой день карантина)

“Ортогонализация, углы, пространства Соболева”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать параграф 9 (стр. 100 – 105) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

Угол φ между двумя ненулевыми векторами x и y гильбертова пространства H определяется из соотношений

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||},\ \varphi \in [0, \pi].$$

Два вектора $x, y \in H$ называются ортогональными, если $\langle x, y\rangle = 0$, или $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Необходимо вспомнить о процессе ортогонализации, который действует в любом гильбертовом пространстве. По заданной линейно независимой системе векторов $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ необходимо построить **ортонормированную систему** $e_1, e_2, ..., e_n, ...$:

- $\boxed{\text{1-ый шаг}}$: Положим $g_1 = f_1$, $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$.
- $\boxed{k\text{-ый шаг}}$ $(k \geq 2)$: Положим

$$g_k = f_k - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - ... - \alpha_{k-1} e_{k-1}, \quad \alpha_i = \langle f_k, e_i\rangle,\ i = 1, ..., k-1, \quad e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}.$$

Стоит, однако, заметить, что в бесконечномерном пространстве такая цепочка соотношений будет бесконечной, а значит для успешного проведения процесса ортогонализации нужно заметить в формулах некоторую закономерность, которая и даст итоговый ответ.

В данном разделе мы также познакомимся с таким понятием, как пространство Соболева. Основная идея следующая (для простоты рассматриваем только случай скалярного аргумента):

- Рассмотрим функции $f(x)$, $x \in X$, которые являются $q \in \mathbb{N}$ раз дифференцируемыми. Множество таких функций обозначим через F_1.
- Множество F_1 можно рассматривать как линейное пространство F_2, порожденное пространством $L_p(X)$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, со специально сконструированной нормой

$$\|f\|_{F_2} = \left(\sum_{k=0}^{q} \int_X |f^{(k)}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Оказывается (можно построить контрпримеры), что линейное пространство F_2 не является полным. То есть предельный переход на элементах этого пространства выводит нас из класса q раз дифференцируемых функций. Поэтому производит операцию пополнения пространства. Пополнение пространства F_2 по указанной выше норме обозначим через $W_P^q(X)$ – это и есть пространство Соболева.

По построению пространство $W_P^q(X)$ является банаховым.

Наиболее важный случай – когда $p = 2$. Тогда исходное пространство $L_2(X)$ является гильбертовым, а потому при построении соболевского пространства $W_2^q(X)$ можно ввести не только норму, но и скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle_{W_2^q(X)} = \sum_{k=0}^{q} \int_X f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) dx$$

Пространство $W_2^q(X)$ является гильбертовым.

Частный случай: $W_2^1[a,b]$. Здесь для каждой функции $f(x) \in W_2^1[a,b]$ по построению найдется такая последовательность функций $g_n(x)$, дифференцируемых на $[a,b]$, что

$$\int_a^b |f(x) - g_n(x)|^2 + \int_a^b |f'(x) - g'(x)|^2 dx \to 0,\ n \to \infty.$$

Здесь классической производной $f'(x)$, конечно, может не существовать. Под $f'(x)$ мы здесь понимаем некоторую функцию из $L_2[a,b]$, определенную именно этим предельным переходом, и далее называемую *обобщенной производной* функции $f(x)$. Аналогично можно определить и обобщенный производные высших порядков.

Показанный здесь способ построения обобщенных производных – один из двух альтернативных подходов. Второй подход – определение обобщенных функций через линейные функционалы (распределения) (например, мы так ранее уже определяли δ-функцию).

Пространства Соболева очень активной используются при решении задач математической физике, где нужно уметь переходить к пределам в интегральных соотношениях и естественно возникает вопрос о том, в каком смысле понимать производные искомых функций после таких предельных переходов.

В теории пространств Соболева имеется раздел, посвященный так называемым теоремам вложения. Смысл таких теорем – найти наиболее "удобные" для работы элементы различных пространств Соболева. Рассмотрим лишь одну, простейшую теорему вложения:

Теорема 1. *Пространство $W_2^1[a,b]$ вложено в $C[a,b]$.*

Эту теорему надо понимать так: найдется такой ограниченный линейный оператор $A : W_2^1[a,b] \to C[a,b]$, что $A(f) = f$, $\forall f \in W_2^1[a,b]$. Иными словами, каждую функцию $f \in W_2^1[a,b]$, понимаемую с точностью до п.в., можно подкорректировать на множестве меры нуль и в итоге сделать непрерывной. Более того, $\|f\|_{C[a,b]} \le K \cdot \|f\|_{W_2^1[a,b]}$ для некоторой константы $K > 0$.

Задача 1 (ТПС, 4.9). *Найти угол между элементами* $\sin(t)$ *и* t *в пространствах* $L_2[0,\pi]$ *и* $W_2^1[0,\pi]$.

Решение: В пространстве $L_2[0,\pi]$:

$$\langle \sin(t), t\rangle_{L_2[0,\pi]} = \int_0^\pi t\sin t dt = -\,t\cos(t)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)dt = \pi,$$

$$\|\sin(t)\|_{L_2[0,\pi]} = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos(2t))dt} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|t\|_{L_2[0,\pi]} = \sqrt{\int_0^\pi t^2 dt} = \sqrt{\frac{\pi^3}{3}},$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

В пространстве $W_2^1[0,\pi]$:

$$\langle \sin(t), t\rangle_{W_2^1[0,\pi]} = \int_0^\pi (t\sin(t) + \cos(t))dt = \pi,$$

$$\|\sin(t)\|_{W_2^1[0,\pi]} = \sqrt{\int_0^\pi (\sin^2(t)+\cos^2(t))dt} = \sqrt{\pi},$$

$$\|t\|_{W_2^1[0,\pi]} = \sqrt{\int_0^\pi (t^2+1)dt} = \sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\pi},$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\pi^2}}.$$

Задача 2 (ТПС, 4.12). *В пространстве* $L_2[-1,1]$ *применить процесс ортогонализации к функциям* $1, t, t^2, t^3$.

Решение:

$$\|1\|^2 = \int_0^1 dt = 1,\ e_1 = 1;$$

$$g_2 = t-\alpha_1 e_1 = t-\alpha_1,\ \alpha_1 = \langle t, 1\rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},\ \|g_2\|^2 = \int_0^1 (t-0.5)^2 dt = \frac{1}{12},\ e_2 = 2\sqrt{3}(t-0.5);$$

$$g_3 = t^2 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2,\ \alpha_1 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3},\ \alpha_2 = \int_0^1 2\sqrt{3}t^2(t-0.5)dt = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\|g_3\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} - (t-0.5)\right)^2 dt = \frac{1}{180},\ e_3 = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right),$$

$$g_4 = t^3-\alpha_1 e_1-\alpha_2 e_2-\alpha_3 e_3,\ \alpha_1 = \frac{1}{4},\ \alpha_2 = \int_0^1 t^3 2\sqrt{3}(t-0.5)dt = \frac{3\sqrt{3}}{20},\ \alpha_3 = \int_0^1 t^3 6\sqrt{5}(t^2-t+1/6)dt = \frac{\sqrt{5}}{20},$$

$$\|g_4\|^2 = \int_0^1 \left(t^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10}(t-0.5) - \frac{3}{2}(t^2 - t + \frac{1}{6})\right)^2 dt = 0.000357143,\ e_3 = \frac{g_4}{\sqrt{0.000357143}}.$$

Задача 3 (ТПС, 4.27). *Доказать, что в пространстве* $W_2^1[0,1]$ *множество*

$$M = \{x \in W_2^1[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$$

является подпространством. Найти его ортогональное дополнение.

Схема решения: Инвариантность M относительно линейных комбинаций элементов, а также замкнутость доказываются непосредственно, по определению.

Найдем ортогональное дополнение. Пусть $y(t) \in M^{\perp}$. Тогда $\forall x(t) \in M$ рассмотрим последовательности непрерывно дифференцируемых функций $y_n(t)$ и $x_n(t)$ таких, что $y_n \to y$ и $x_n \to x$ в смысле нормы $W_2^1[0,1]$, и, кроме того, $x_n(0) = x_n(1) = 0$, $y_n \perp M$. Тогда

$$0 = \langle x_n(t), y_n(t)\rangle_{W_2^1[0,1]} = \int_0^1 x_n(t)y_n(t)dt + \int_0^1 x_n'(t)y_n'(t)dt =$$
$$= x_n(t)Y_n(t)|_0^1 - \int_0^1 (y_n'(t) - Y_n(t))x_n'(t)dt = -\int_0^1 (y_n'(t) - Y_n(t))x_n'(t)dt.$$

Здесь $Y_n(t)$ – первообразная для $y_n(t)$. Если предположить, что $y_n'(t) - Y_n(t) \neq 0$ для некоторого $t \in (0,1)$, то можно найти такую функцию $x_n(t) \in M \cap C^1[0,1]$, для которой получится противоречие к полученному соотношению. Отсюда следует, что $y_n'(t) = Y_n(t)$, $\forall t \in (0,1)$. Это дифференциальное уравнение имеет 2 независимых решения: $y_1(t) = e^t$ и $y_2(t) = e^{-t}$. Следовательно, $M^{\perp} = \mathcal{L}(e^t, e^{-t})$.

Домашнее задание: № 4.10, 4.11, 4.18, 4.19, 5.9, а также

Для основных систем ортогональных многочленов найти первые несколько элементов процессом ортогонализации, а затем обосновать общую формулу (т.е. начинаем с полиномов вида $1, t, t^2, t^3, \ldots$, а после процесса ортогонализации (для специального скалярного произведения) мы должны получить указанные полиномы специального вида):

- Полиномы Лагерра:

  Скалярное произведение:

  $$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt.$$

  Полиномы, которые должны получиться в итоге:

  $$x_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n}.$$

- Полиномы Лежандра:

  Скалярное произведение:

  $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

  Полиномы, которые должны получиться в итоге:

  $$x_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}.$$

- Полиномы Чебышёва 1 рода:

Скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Полиномы, которые должны получиться в итоге:

$$x_n(t) = T_n(t) = \cos(n \arccos(t)).$$

- Полиномы Чебышёва 2 рода:

  Скалярное произведение:

  $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}dt.$$

  Полиномы, которые должны получиться в итоге:

  $$x_n(t) = \frac{T'_{n+1}(t)}{n+1}.$$