Удовиченко, 315 ①

1) $J(u) = \int_{-1}^{1} 8x(x+1)\, u^2(x)dx \longrightarrow \inf$

$u \in \left\{ u \in U_0 = L^2(-1,1) \,\middle|\, \int_{-1}^{1} u^2(x)dx \le 2 \right\} = \left\{ u \in U_0 = L^2(-1,1) \,\middle|\, \|u\|_{L^2}^2 \le 2 \right\}$

$\psi(\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} L(u, \lambda)$

$L(u,\lambda) = \int_{-1}^{1} 8x(x+1)\, u^2(x)dx + \cancel{\lambda} \lambda\left(\|u(\cdot)\|_{L^2}^2 - 2\right)$

Оценим $J(u)$. $8x(x+1)$ — парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$

$\min 8x(x+1) = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -2$ при $x = -\frac{1}{2}$. Тогда $\int_{-1}^{1} 8x(x+1)\, u^2(x)dx \geq$

$\geq -2\|u(\cdot)\|_{L^2}^2$. Причём равенство достигается ~~на~~ в пределе на δ-образной последовательности, сходящейся к $\|u(\cdot)\|_{L^2}\,\delta(t+\frac{1}{2})$ при фикс. ~~по~~ $\|u(\cdot)\|_{L^2}^2$. Тогда

$\inf\limits_{u \in U_0} L(u,\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} \left[-2\|u(\cdot)\|_{L^2}^2 + \lambda\left(\|u(\cdot)\|_{L^2}^2 - 2\right) \right] =$

$= \inf\limits_{u \in U_0} \left[\|u(\cdot)\|_{L^2}^2 (\lambda - 2) - 2\lambda \right] = \begin{cases} -\infty, & \lambda < 2 \\ -2\lambda, & \lambda \geq 2 \end{cases}$.

Ответ $\psi(\lambda) = \begin{cases} -\infty, & \lambda < 2 \\ -2\lambda, & \lambda \geq 2 \end{cases}$

Удовиченко, 315 ②

Тогда двойственная задача:

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\infty, & \lambda < 2 \\ -2\lambda, & \lambda \geq 2 \end{cases} \longrightarrow \sup_{\lambda}$$

$$\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\}$$

2) $\sup \psi(\lambda) = -4$, достигается на $\lambda = 2$

<u>Ответ</u>: $\psi^* = -4$; $\Lambda^* = \{2\}$