Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 27.04.20 (42-ой день карантина)

“Вполне непрерывные операторы”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать параграфы 20.1 –20.4 (стр. 212 – 219) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

Линейный ограниченный оператор A, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется вполне непрерывным, если замкнутый единичный шар пространства X он переводит в предкомпактное множество пространства Y.

Замечание. Вспомните критерии предкомпактности множеств в пространствах $C[a,b]$, $L_2[a,b]$ и l_2!

Теорема 1. *Если оператор A вполне непрерывен, то любое ограниченное множество в X он переводит в предкомпактное множество в Y.*

Теорема 2. *Множество $\sigma(X,Y)$ вполне непрерывных операторов является подпространством в $L(X,Y)$.*

Теорема 3. *Если X или Y конечномерно, то любой непрерывный линейный оператор вполне непрерывен.*

Теорема 4. *Если $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ (в смысле операторной нормы), где A_n – вполне непрерывны или конечномерны, то A вполне непрерывен.*

Теорема 5. *Пусть $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Если хотя бы один из этих операторов вполне непрерывен, то вполне непрерывным будет и их произведение BA.*

Теорема 6. *Пусть $A \in \sigma(X,Y)$. Если $x_n \to x_0$, $n \to \infty$ слабо, то $Ax_n \to Ax_0$, $n \to \infty$ сильно.*

Иногда последнюю теорему используют в качестве определения вполне непрерывного оператора.

Задача 1 (ТПС, 16.1 (а,б))**.** *Какие из следующих операторов $A : C[0,1] \to C[0,1]$ являются вполне непрерывными?*

1. $(Ax)(t) = tx(t)$;
2. $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$.

Решение:

а) Оператор не является вполне непрерывным. Рассмотрим, например, совокупность функций $x_n = t^n$. Эти функции лежат в единичном шаре (ограничены в совокупности), но совокупность функций $A(x_n) = t^{n+1}$ не образует предкомпактное множество (т.к. поточечно функции сходятся к элементу не из пространства $C[0,1]$).

б) Оператор является вполне непрерывным:

$$A(B_1(0)) = \left\{ y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau : x(\tau) \in B_1(0) \right\} = X.$$

Множество X является равномерно ограниченным ($\forall y \in X \ \|y\|_{C[0,1]} \leq 1$), и составляющие его функции являются равностепенно непрерывны:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall t_1, t_2 : |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \forall y \in X \ |y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau \right| \leq |t_1 - t_2| < \varepsilon,$$

если $\delta < \varepsilon$. По теореме Арцела-Асколи множество X является предкомпактным в $C[0,1]$.

Задача 2 (ТПС, 16.3)**.** *При каком условии на функцию $\varphi(t) \in C[0,1]$ оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?*

Решение: Пусть существует $t_0 \in [0,1]$: $\varphi(t_0) \neq 0$. Построим последовательность $x_n(t) \in C[0,1]$: $x_n(t_0) = 1 = \sup_{[0,1]} |x_n(t)|$, $x_n(t) = 0$ при $|t - t_0| \geq 1/n$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, а $\{Ax_n\}$ – не является предкомпактным множеством. Значит, оператор A не является вполне непрерывным. То есть для вполне непрерывности подходит только нулевая функция $\varphi(t)$.

Задача 3 (ТПС, 16.10)**.** *Будет ли вполне непрерывен оператор вложения $A : l_1 \to l_2$, $Ax = x$?*

Решение: Нет. Пример: $x_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (1 стоит на n-ом разряде).

Задача 4 (ТПС, 16.23)**.** *Пусть оператор A непрерывен, оператор A^*A вполне непрерывен. Доказать, что A вполне непрерывен.*

Решение: Рассмотрим ограниченную последовательность $\{x_n\}$: $||x_n|| \leq M$. Тогда можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $A^*Ax_{n_k}$ – фундаментальная. Но $||Ax_{n_k1} - Ax_{n_k2}||^2 \leq 2M||A^*Ax_{n_k1} - A^*Ax_{n_k2}||$. Следовательно, последовательность Ax_{n_k} является фундаментальной, а значит оператор A вполне непрерывен.

Задача 5 (ТПС, 16.24)**.** *Доказать, что если оператор A вполне непрерывен, то и A^* вполне непрерывен.*

Решение: Если A вполне непрерывен, то и AA^* – вполне непрерывен. Но $AA^* = (A^*)^*A^*$. Следовательно, в силу предыдущей задачи, A^* вполне непрерывен.

Домашнее задание: № 16.1(в,г,д), 16.5, 16.7, 16.9, 16.12, 16.20, 16.26.