13.8

l_2 — гильб. Тогда $l_2^* \cong l_2$ по т. Рисса. Тогда f_n можно считать $\in l_2$

Т.к. $\langle x, f_n\rangle = x_n \Rightarrow f_n$ — n-й базисный вектор в l_2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n\| = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\langle x, f_n\rangle = x_n \quad \forall x; \quad \|x\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \Rightarrow x_n^2 \to 0 \Rightarrow x_n \to 0 \quad \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \to 0 \quad \forall x \Rightarrow f_n \to 0$ $*$-слабо, QED

13.9 $\langle x, f_n\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\cos\pi n t \, dt$

$\cancel{g_n(t) = \cos\pi n t \in L_2[-1,1] \Rightarrow}$

а) $\langle x, f_n\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\cos\pi n t\, dt \le \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_{-1}^{1}(\cos\pi n t)^2\,dt} \le \|x(t)\|_{L_2}\cdot\begin{cases}\sqrt{2}, & n=0\\ 1, & n>0\end{cases}$

$\int_{-1}^{1}\cos^2\pi n t\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{1+\cos 2\pi n t}{2}\,dt = 1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos 2\pi n t\,dt = \begin{cases}2, & n=0\\ 1, & n>0\end{cases}$

$\Rightarrow \|f_n\|$ = достигается на $x(t) = f_n(t) \Rightarrow \|f_n(t)\| = \begin{cases}\sqrt{2}, & n=0\\ 1, & n>0\end{cases}$

б) ~~Положим~~ $e_n = f_n,\ n \ge 1$, $e_0 = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ $\quad \langle x, f_n\rangle = x_n$, f_i система f_n ортогональна $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \to 0 \quad \forall x$ в силу равенства Парсеваля $\Rightarrow f_n \to 0$ $*$-слабо.

в) нет; $\|f_n\| = \begin{cases}\sqrt{2}, & n=0\\ 1, & n>0\end{cases} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(13.10) $C[-1;1]$

$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)\right)$; $f_0(x) = x'(0)$; $|\varepsilon| < 1$

a) $|f_0(x)| = |x'(0)| \le \max\limits_{[-1,1]}|x(t)| + \max\limits_{[-1,1]}|x'(t)| = \|x(\cdot)\|_{C[-1,1]} \Rightarrow$

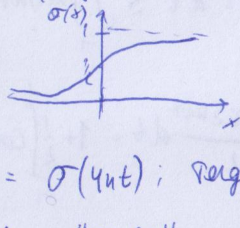
$f_0(x)$ огр. и $\|f_0(\cdot)\| \le 1$

$$|f_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\varepsilon}|x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)| = \frac{1}{2\varepsilon}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x'(t)\,dt\right| \le \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|x'(t)|\,dt \le$$

$$\le \max_{[-\varepsilon,\varepsilon]}|x'(t)| \le \max_{[-1,1]}|x(t)| + \max_{[-1,1]}|x'(t)| = \|x\|_{C[-1,1]} \Rightarrow f_\varepsilon(x) \text{ огр.}$$

и $\|f_\varepsilon(x)\| \le 1$

Покажем, что $\|f_0\| = 1$. расм. ф-цию $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$; $\sigma(0) = \frac{1}{2}$;



$\sigma'(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x))$;

рассмотрим послед. $x_n(t) = \sigma(4nt)$; тогда $x_n'(t) = 4n\,\sigma(4nt)(1-\sigma(4nt))$

$x_n'(0) = n$; $\max\limits_{[-1,1]}|x_n(t)| \le 1 \underbrace{\Rightarrow \|x_n(\cdot)\|}_{n\varepsilon}{}_{C[-1,1]} \le 1+n$, т.к. максимум

$\sigma'(t)$ достигается в 0.

$f_0(x_n) = x_n'(0) = n$; $1 \ge \frac{\|f_0(x_n)\|}{\|x_n\|} \ge \frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow \|f_0\| = 1$

Покажем, что $\|f_\varepsilon(\cdot)\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$

$$\frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} = \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}$$

$$|f_\varepsilon(x)| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\left(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)\right)\right| \le \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}|x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)| + \frac{\cancel{\varepsilon}}{2\cancel{\varepsilon}(1+\varepsilon)}|x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)| \le$$

$\le \{$1-е слаг. через $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x'(t)\,dt$; 2-е — через сумму модулей$\}$ $\le \frac{\max|x'(t)|}{1+\varepsilon} + \frac{\max|x(t)|}{1+\varepsilon} = \frac{\|x(\cdot)\|_{C[-1,1]}}{1+\varepsilon}$

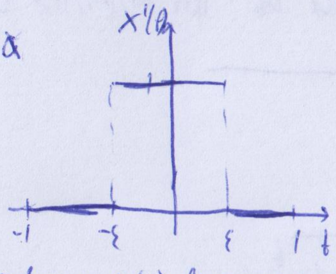
Укажем последовательность ф-ций, которая в пределе даст нужную норму

Оценка достигается на ф-ции $x(t)=\begin{cases}-\varepsilon, & t\in[-1,-\varepsilon]\\ t, & t\in[-\varepsilon,\varepsilon)\\ \varepsilon, & t\in[\varepsilon,1]\end{cases}$

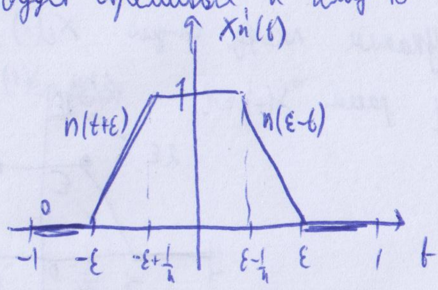
Тогда $\|x(t)\|=1+\varepsilon$; $f_\varepsilon(x(\cdot))=1 \Rightarrow \|f_\varepsilon(x(\cdot))\| = \frac{1}{\varepsilon+1}\cdot\|x(\cdot)\|_{C[-1,1]}$

$x(t)\notin C^1[-1,1]$, т.к. $x(t)$ не диф-ма в точках $-\varepsilon$ и ε.

Укажем последовательность $x_n(t)$, которая будет стремиться к нему по такому. а



производная $x(t)$ выглядит так



приблизить её будем так

Тогда $x_n'(t)\to x'(t) \Rightarrow$ если положить $x_n(-1)=x(-1)=-\varepsilon$, то $x_n(t)\to x(t)$ и получим нужную оценку. Укажем явный вид $x(t)$:

на $[-1,-\varepsilon]$: $x_n(t)=-\varepsilon$

на $[-\varepsilon,-\varepsilon+\frac{1}{n})$: $\int\limits_{-\varepsilon}^{t} n(z+\varepsilon)\,dz = \frac{nz^2}{2}\Big|_{-\varepsilon}^{t} + n\varepsilon(t+\varepsilon) = \frac{nt^2}{2}-\frac{n\varepsilon^2}{2}+n\varepsilon(t+\varepsilon) =$

$= \frac{n}{2}(t-\varepsilon)(t+\varepsilon)+n\varepsilon(t+\varepsilon)=\frac{n}{2}(t+\varepsilon)(t-\varepsilon+2\varepsilon)=\frac{n}{2}(t+\varepsilon)^2$

на $[-\varepsilon+\frac{1}{n},\ \varepsilon-\frac{1}{n}]$: $t-\frac{\varepsilon}{2n}$

на $[\varepsilon-\frac{1}{n},\ \varepsilon]$: $\int\limits_{\varepsilon-\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{2n}}^{t} n(\varepsilon-z)\,dz = n\varepsilon\left(t-\varepsilon-\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{2n}\right)-\frac{nt^2}{2}+\frac{n}{2}\left(\varepsilon-\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{2n}\right)^2$

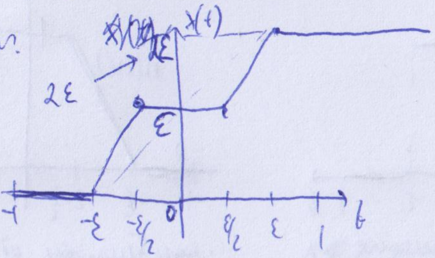
на $[\varepsilon, 1]$: константа, равная вот этому в правом конце. QED б) Т.к. мн-во в пр-ве непрерывно дифф. ф-ций, то *-слабая сходимость непрерывно следует из того, что центральная разностная производная сходится к обычной производной

в) Покажем, что $\exists C>0$: $\|(A_\varepsilon - A_0)(\cdot)\| > C$

$$(A_\varepsilon - A_0)(x(\cdot)) = \cancel{x'}\frac{1}{2\varepsilon}\left(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)\right) - x'(0)$$

Укажем каждую ф-цию $x_\varepsilon(\cdot)$, такую что $\|(A_\varepsilon - A_0)(x_\varepsilon)\| > C$ для некоторого C.

Рассм. $x(t)$, т.ч.



кусочно линейная ф-ция. Здесь $A_\varepsilon(x(\cdot)) = 1$; $x'(0)=0 \Rightarrow$

норма будет $=1$ на всех таких x_ε. Для порядку сгладим

углы, как в пункте а) $\Rightarrow$ $A_\varepsilon \overset{\|\cdot\|}{\not\to} A$.