Решение по Каратеодори

Рассмотрим систему, движение которой задаётся дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)).$$

В каком смысле следует понимать траекторию $x(\cdot)$, управление $u(\cdot)$ — всего лишь измеримая функция? Какие условия при этом необходимо наложить на f и x?

Ответу на эти вопросы посвящено это занятие.

Для удобства введем дополнительное обозначение:

$$g(t, x) = f(t, x, u(t)),$$

«спрятав» таким образом управление внутрь функции $g(t, x)$.

Условия Каратеодори

Пусть $(t_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $\exists a > 0, r > 0$ такие, что:

1. $g(t, x)$ определена для всех $\forall x \in B_r(x^0)$ и почти всех $\dot{\forall} t \in [t_0 - a, t_0 + a]$;

2. $g(t, x)$ измерима по t для всех $\forall x \in B_r(x^0)$,
   $g(t, x)$ непрерывна по x для поти всех $\dot{\forall} t \in [t_0 - a, t_0 + a]$;

3. $\exists m(\cdot)$ - интегрируемая по Лебегу при $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ такая, что:

$$\|g(t, x)\| \leqslant m(t), \quad \forall x \in B_r(x^0), \dot{\forall} t \in [t_0 - a, t_0 + a].$$

Эти три условия и называются *условиями Каратеодори*

Абсолютно непрерывные функции

Итак, мы хотели бы найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t)), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{1}$$

в следующем классе функций:

1. $x(\cdot) \in C$;

2. для почти всех $\dot{\forall} t$ существует $\exists \dot{x}$;

3. для почти всех $\dot{\forall} t$ выполнено $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$.

Покажем, что условий Каратеодори самих по себе недостаточно для определения решения. Рассмотрим следующий тривиальный пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, решением этой системы будет $x \equiv 0$. Но такое решение в рассматриваемом классе не единственно. *Канторова лестница* также будет являться решением этой системы при всех наложенных ограничениях (если это не очевидно, значит, это *УПРАЖНЕНИЕ*).

Чтобы избежать возникновения подобных артефактов в решениях дифференциальных уравнений, наложим дополнительное условие на x:

$x(\cdot)$ — решение (1) $\Leftrightarrow$ для всех $\forall t$ выполнено

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Известно, что если $z(\cdot)$ — измерима, то для любого $\forall \varepsilon > 0$ существует $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall Z \colon \mu Z \leqslant \delta \Rightarrow \left| \int\limits_{\tau \in Z} z(\tau) d\tau \right| \leqslant \varepsilon,$$

что означает абсолютную непрерывность интеграла Лебега. Тогда мы можем заменить условие 3) в условиях Каратеодори на следующие два:

3') $\dot{x}$ — интегрируема по Лебегу;

4) для всех $\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a] \Rightarrow x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau) d\tau$.

Определение 1. *Функций, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3') и 4), будем называть* ***абсолютно непрерывными****, а класс таких функций обозначать* $AC[t_0 - a, t_0 + a]$.

Класс абсолютно непрерывных функций можно определить иначе.

Определение 2. *Будем говорить, что* $x(\cdot) \in AC[\tau_0, \tau_1]$*, если для любого* $\forall\varepsilon > 0$ *существует* $\exists\delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\tau_1', \ldots, \tau_k'$, $\tau_1'', \ldots, \tau_k''$ *таких, что* $\tau_0 \leqslant \tau_1' \leqslant \tau_1'' \leqslant \ldots \leqslant \tau_k' \leqslant \tau_k'' \leqslant \tau_1$ *выполнено:*

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\tau_j'' - \tau_j'\right| \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \left\|x(\tau_j'') - x(\tau_j')\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Утверждение 1. *Определения 1 и 2 эквиваленты*

Доказательство. УПРАЖНЕНИЕ ■

Замечание 1. *Абсолютно непрерывные функции являются непрерывными и равномерно непрерывными, но при этом не обязаны быть дифференцируемыми. В качестве примера можно рассмотреть одномерную функцию* $f(x) = |x|$.

Замечание 2.

$$Lip[\tau_0, \tau_1] \subseteq AC[\tau_0, \tau_1],$$

поскольку

$$\|x(\tau'') - x(\tau')\| \leqslant L\,|\tau'' - \tau'| \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Утверждение 2. *Вложение является строгим:*

$$Lip[\tau_0, \tau_1] \subset AC[\tau_0, \tau_1].$$

Доказательство. УПРАЖНЕНИЕ
Подсказка: рассмотреть функцию $x(t) = t^{\alpha}, 0 < \alpha < 1.$ ■

Определение 3. *Решением системы* (1) *на* $t_0 - a \leqslant \tau_0 < \tau_1 \leqslant t_0 + a$, $t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$ *по Каратеодори называется функция* $x(\cdot)$*, удовлетворяющая следующим критериям:*

1. $x(\cdot) \in AC[\tau_0, \tau_1]$;
2. $x(t_0) = x^0$;
3. *для почти всех* $\dot{\forall} t \in (\tau_0, \tau_1) \Rightarrow \dot{x}(t) = g(t, x(t))$.

Существование решения по Каратеодори

Для доказательства основной теоремы нам потребуется сформулировать несколько вспомогательных теорем.

Теорема 1 (Scorza Dragoni G., 1948). *Пусть* $g(t,x)$ *— измерима по* t *для всех* $\forall x \in B_r(x^0)$ *и непрерывна по* x *для почти всех* $\dot{\forall} t \in [\tau_0, \tau_1]$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists K \subseteq [\tau_0, \tau_1]$, K *— компакт, такой, что*

$$\mu([\tau_0, \tau_1] \setminus K) \leqslant \varepsilon$$

и $g|_{K \times B_r(x^0)}$ *— непрерывна по* (t,x).

Теорема 2 (Критерий измеримости Лузина). *Функция* $z(t)$ *— измерима на* $t \in [\tau_0, \tau_1] \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists K \subseteq [\tau_0, \tau_1]$, K *— компакт, такой, что*

$$\mu([\tau_0,\ \tau_1] \setminus K) \leqslant \varepsilon$$

и $z|_K$ *— непрерывна.*

Замечание 3. *Из теоремы Лузина следует, что для* $g(t,x)$ *существует* $K(x)$, *а из Scorza Dragoni следует существование универсального* K *(на шаре).*

Следствие 1 (Частный случай Scorza Dragoni). *Если* $g(t,x)$ *— измерима по* t *для всех* $\forall x$, *непрерывна по* x *для почти всех* $\dot{\forall} t$, *а* $x(\cdot)$ *— измерима, то функция* $g(t, x(t))$ *– измерима по* t.

Доказательство. Функция $u(\cdot)$ — измерима, следовательно, из критерия Лузина $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \subseteq [t_0 - h, t_0 + h]$, K — компакт:

$$\mu([\tau_0,\ \tau_1] \setminus K) \leqslant \varepsilon$$

и $u|_K$ — непрерывна. Тогда

$$z(\tau) = g(\tau, x^{(k)}(\tau)) = f(\tau, x^{(k)}(\tau), u(\tau))$$

непрерывна на K, а значит, $z(\cdot)$ — измерима. ■

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 3 (Существование решения (1)). *Пусть* $0 < h \leqslant a$ *и*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+h} m(\tau) d\tau \leqslant r, \int\limits_{t_0-h}^{t_0} m(\tau) d\tau \leqslant r.$$

Тогда существует $\exists x(\cdot) \in AC[t_0 - h, t_0 + h]$ *— решение по Каратеодори системы* (1).

Доказательство. Выпишем следующую последовательность функций:

$$x^{(0)}(t) \equiv x^0,$$

$$x^{(k+1)}(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, x^{(k)}(\tau))d\tau.$$

Элементы этой последовательности определены корректно, поскольку $g(\tau, x^{(k)}(\tau))$ измеримы по τ в силу Следствия 1, ограничены интегрируемой функцией $m(t)$ (по условию теоремы) и, следовательно, интегрируемы по Лебегу. При этом $x^{(k)}(\cdot) \in C$ (более того, $x^{(k)}(\cdot) \in AC$).

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Арцела-Асколи, нам необходимо показать равностепенную непрерывность и равномерную ограниченность последовательности.

Равномерная ограниченность (при $t \geqslant t_0$, для $t \leqslant t_0$ — аналогично):

$$\left\|x^{(k+1)}(t) - x^0\right\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \left\|g(\tau, x^{(k)}(\tau))\right\| d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} m(\tau)d\tau \leqslant r.$$

Равностепенная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall t', t'' \in [t_0 - h, t_0 + h], t' \leqslant t'' \colon\ |t' - t''| \leqslant \delta$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\|x^{(n)}(t'') - x^{(n)}(t')\right\| \leqslant \varepsilon?$$

Для нашей последовательности

$$\left\|x^{(n)}(t'') - x^{(n)}(t')\right\| = \left\|\int\limits_{t'}^{t''} g(s, x^{(n-1)}(s))ds\right\| \leqslant \int\limits_{t'}^{t''} m(s)ds \leqslant \varepsilon$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Тогда последовательность непрерывных функций $\left\{x^{(k)}(\cdot)\right\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено и, в силу теоремы Арцела-Асколи,

$$x^{(k)} \rightrightarrows x(\cdot).$$

При этом

$$\left\|x^{(k)}(\cdot) - x(\cdot)\right\|_C = \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\|x^{(k)}(t) - x(t)\right\|,$$

то есть сходимость в C аналогична равномерной сходимости, и $x(\cdot) \in C$.

Наконец, переходим к пределу в итеративной последовательности:

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds, \quad x(\cdot) \in AC[t_0 - h, t_0 + h].$$

Теорема доказана. ■

Единственность решения

Для единственности решения мы обычно требуем липшицевость по x:

$$\|g(t, x'') - g(t, x'))\| \leqslant L(t) \|x'' - x'\|,$$

$L(t)$ — интегрируема по Лебегу.

Ослабив это условие, добавим его к списку *условий Каратеодори* 1)–3):

4’) $\forall x', x''\ \exists L(t)$ — интегрируемая по Лебегу:

$$\langle g(t, x'') - g(t, x'), x'' - x' \rangle \leqslant L(t) \|x'' - x'\|^2.$$

Нетрудно показать, что всякая липшицевая по x функция удовлетворяет этому условию в силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

Теорема 4 (Теорема о единственности решения по Каратеодори)**.** *Пусть выполнены условия Каратеодори 1), 2), 3), а также условие 4’). Тогда решение по Каратеодори задачи Коши* (1) *единственно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x'(t)$ и $x''(t)$ — два различных решения (1) на $[t_0, t_0 + h]$.

Рассмотри вспомогательную функцию

$$z(t) = \|x''(t) - x'(t)\|^2 = \langle x''(t) - x'(t), x''(t) - x'(t) \rangle.$$

Она дифференцируема почти всюду, и для п.в. t

$$\frac{dz}{dt} = 2 \langle g(t, x''(t)), g(t, x'(t)), x''(t) - x'(t) \rangle \leqslant 2L(t)z(t).$$

При этом $z(t_0) = 0$ (из определения z).

Тогда неравенство

$$\frac{dz}{dt} - 2L(t)z(t) \leqslant 0$$

домножим на $\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} L(\xi)d\xi\right\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)e^{-2\int\limits_{t_0}^{t} L(\xi)d\xi}\right) \leqslant 0$$

для п.в. t (верно там, где она дифференцируема). Проинтегрировав, получаем:

$$0 \leqslant z(t)e^{-2\int\limits_{t_0}^{t} L(\xi)d\xi} \leqslant 0.$$

Левое неравенство достигается в силу определния z, а правое следует из того факта, что производная отрицательная, а значение $z(t_0) = 0$.

Тогда в обоих случаях достигаются равенства, и функции совпадают. ■

Продолжимость решения

В случае с решением по Каратеодори также возникает вопрос продолжимости решения вправо.*В условиях Каратеодори есть ограниченность интегрируемой функцией, в теореме о существовании решения мы ограничили интеграл от этой функции $m(\cdot)$ значением r. Разве этого не достаточно? Оказывается, нет.*

Мы рассматриваем систему на отрезке времени $[t - 0 - a, t_0 + a]$.

Зафиксируем $h_1 < a$ и проинтегрируем исходную систему на $[t_0, t_0 + h_1]$. При этом $\|x(t_0 + h_1) - x^0\| < r_1$. Переобозначим полученное значение в точке $\xi_1 = x(t_0 + h_1)$ и запишем новую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t)), \\ x(t_0 + h_1) = \xi^1. \end{cases}$$

Таким образом, мы продвинулись на h_1 вправо по времени.

Далее аналогичным образом выберем h_2, h_3 и т. д. Для каждой получающейся задачи Коши мы можем взять новую

$m(\cdot)$ и варьировать соответствующее ей значение r, устремляя таким образом $h \to a$ и $r \to +\infty$. При этом r не будет ограничено, если $h_1 + h_2 + \ldots < a$. Рассмотрим пример.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (x(t))^2, \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

Проинтегрировав систему:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt,$$

получим решение $x(t) = \frac{1}{1-t}$, *неограниченно растущее в окрестности* $t = 1$.

Покажем, что непродолжимость решения может возникать только в случае неограниченного роста функции. Введём обозначения:

$$\bar{\tau} = \sup\left\{\tau \in (t_0, t_0 + a) \colon \exists x(\cdot) \text{ — решение ЗК (1) при } t \in [t_0, \tau]\right\},$$

$$\underline{\tau} = \inf\left\{\tau \in (t_0 - a, t_0) \colon \exists x(\cdot) \text{ — решение ЗК (1) при } t \in [\tau, t_0]\right\}.$$

Введённые обозначения корректны, поскольку множества непусты в силу существования решения и его ограниченности на отрезке (функции непрерывны).

Теорема 5. *Пусть* $\bar{\tau} < t_0 + a$ $(\underline{\tau} > t_0 - a)$. *Тогда для всех* $\forall r > 0$ *существует* $\exists \tau \in (t_0, \bar{\tau})$ $(\tau \in (\underline{\tau}, t_0))$ *такое, что* $\|x(\tau) - x^0\| = r$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\exists \bar{r} > 0$: $\forall \tau \in (t_0, \bar{\tau}) \Rightarrow \|x(\tau) - x^0\| < \bar{r}$.

Пусть $\Delta > 0, r = \bar{r} + \Delta$, тогда $\forall t \in [t_0, \bar{\tau})$ верно

$$B_\Delta(x(t)) \subseteq B_r(x^0).$$

Возьмём $\delta = t_0 + a - \bar{\tau} > 0$. Тогда $\bar{\tau} + \delta < t_0 + a$.

Для любого $\forall \tau \in [t_0, t\bar{a}u) \Rightarrow [\tau - \delta, \tau + \delta] \times B_{Delta}(x(\tau)) \subseteq [t_0 - a, t_0 + a] \times B_r(x^0)$.

Существует $\exists h > 0, h < \delta$: $\int\limits_{\tau}^{\tau+h} m(s)ds \leqslant \Delta$. При этом получается, что h — не зависит от τ (в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега), то есть мы нашли универсальный шаг, на который можем продвигаться при построении решения: h — универсально для всех $\tau \in [t_0, \bar{\tau})$, то есть мы можем проинтегрировать $x(\cdot)$ до момента $\tau + h$ для любого

τ. По определению $\bar{\tau}$ — это супремум всех моментов времени, когда существует решение. Из определения супремума: $\exists \tau \colon \bar{\tau} - \tau < h/2$. Для этого τ и проинтегрируем систему до $\tau + h$. Но тогда получается, что $\tau + h > \bar{\tau}$, что приводит нас к противоречию.

Теорема доказана. ■

Отбросим теперь в условиях Каратеодори условие с a и заменим отрезок времени на $[t_0, t_1]$ либо $\mathbb{R}$ (в 1) и 2)) и добавим условия продолжимости вправо(влево)

$$\langle g(t,x), x\rangle \leqslant \alpha \left\|x\right\|^2 + \beta \ \ \forall x, \ \alpha, \beta = const > 0 \qquad (2)$$

$$(-\langle g(t,x), x\rangle \leqslant \alpha \left\|x\right\|^2 + \beta).$$

Условие продолжимости в обе стороны (условие сублинейного роста):

$$\left\|g(t,x)\right\| \leqslant A\left\|x\right\| + B, \ \ A, B = const > 0.$$

Замечание 4. *Из условия сублинейного роста следует продолжимость в обе стороны, поскольку*

$$\langle g(t,x), x\rangle \leqslant \left\|g(t,x)\right\|\left\|x\right\| \leqslant A\left\|x\right\|^2 + B\left\|x\right\| \leqslant \alpha\left\|x\right\|^2 + \beta.$$

Как показать, что такие α, β существуют? Положим $\alpha = A + 1$, тогда дискриминант $\left\|x\right\|^2 - B\left\|x\right\| + \beta >= 0$ будет отрицательный, то есть это будет верно для всех β.

Сфорулируем последнюю на сегодня теорему.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие (2). Тогда решение $x(\cdot)$ задачи Коши* (1) *продолжимо вправо.*

Доказательство. Предположим противное, тогда, в силу предудыщей теоремы, $\left\|x(t)\right\|$ неограничена.

Рассмотрим $z(t) = \left\|x(t)\right\|^2 = \langle x(t), x(t)\rangle$.

$$\frac{dz}{dt} = 2\left\langle g(t, x(t)), x(t)\right\rangle \leqslant 2\alpha z(z) + 2\beta,$$

$$\frac{dz}{dt} - 2\alpha z \leqslant 2\beta.$$

Домножим на $\exp\{-2\alpha t\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)e^{-2\alpha t}\right) \leqslant \beta e^{-2\alpha t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t)e^{-2\alpha t} - z(t_0)e^{-2\alpha t_0} \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} 2\beta e^{-2\alpha s} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant z(t) \leqslant z(t_0)e^{-2\alpha t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} 2\beta e^{-2\alpha s} ds.$$

Значит, $z(t)$ ограничена, следовательно, $\|x\|$ ограничена, а значит, продолжимость вправо есть.

Теорема доказана. ■

Наконец, можем заменить условие 3) в условиях Каратеодори условием сублинейного роста, положив $m(t) = Ar + B$ (r - из условий теоремы существования решения).

Итоговые условия на $f(t, x, u)$

1. $f(t, x, u)$ определена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (или $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$);
2. $f(t, x, u)$ непрерывна по (t, x, u), $u(\cdot)$ — измерима;
3. $\|f(t, x'', u) - f(t, x', u)\| \leqslant L \|x'' - x'\|$, $L = const$;
4. $\|f(t, x, u)\| \leqslant A \|x\| + B$, $\forall (t, x, u)$.

Из них следуют соответствующие **условия на** $g(t, x)$:

1. $g(t, x)$ определена при п.в. $t \in \mathbb{R}$ для всех $\forall x$ (п.в. $t \in [t_0, t1]$ для всех $\forall x$);
2. $g(t, x)$ — измерима по t для всех x;
   $g(t, x)$ — непрерывна по x для п.в. $\dot{\forall} t \in \mathbb{R} (t \in [t_0, t_1])$;
3. $\|g(t, x'') - g(t, x')\| \leqslant L(t) \|x'' - x'\|$;
4. условие продолжимости вправо (влево):

$$\langle g(t, x), x \rangle \leqslant \alpha \|x\|^2 + \beta \ \ \forall x, \ \alpha, \beta = const > 0$$

$$(- \langle g(t, x), x \rangle \leqslant \alpha \|x\|^2 + \beta).$$