(18.2) $(Ax)(t) = t\,x(t)$

$\langle Ax, y\rangle = \int_0^1 t\,x(t)y(t)\,dt = \langle x, Ay\rangle \Rightarrow A$ самосопряжён

$\langle Ax, x\rangle = \int_0^1 t\,x(t)\cdot x(t) = \int_0^1 t\,x^2(t)\,dt \geq 0$, т.к. $t \geq 0$, QED

(18.3) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{s+t}x(s)\,ds$

$\langle Ax, y\rangle = \int_0^1\int_0^1 e^{s+t}x(s)\,ds \cdot y(t)\,dt = \int_0^1\int_0^1 e^{t+s}x(s)y(t)\,dt\,ds = \langle x, Ay\rangle = \dots$

$\langle Ax, x\rangle = \int_0^1\int_0^1 e^{s+t}x(s)x(t)\,ds\,dt = \left(\int_0^1 x(s)e^s\,ds\right)\left(\int_0^1 e^t x(t)\,dt\right) \geq 0$

(18.16) $A_n \in \sigma(H)$, $A_n \to A$ сильно ; $A \overset{?}{\in} \sigma(H)$.

рассм. послед. $\langle A_n x, y\rangle$

Тогда $\langle A_n x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle$ из сх-ти операторов

но $\langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle \to \langle x, Ay\rangle$

Т.к. $\langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle$, то $A \in \sigma(H)$

(18.17) $\langle A_n x, x\rangle \geq 0 \Rightarrow \{$ ~~пере~~ предельный переход в нер-ве $\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle Ax, x\rangle \geq 0$. QED

18.34 $A \in \mathcal{B}(H);\ A \geqslant 0$

$\|A+\lambda I\| \geqslant \lambda$ — покажем это. Тогда по т. Банаха он непрерывно обратим.

$$\langle (A+\lambda I)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \lambda\langle x, x\rangle \geqslant \lambda\|x\|^2 \Rightarrow \|A+\lambda I\| \geqslant \lambda.$$

Также отметим, что если $\langle (A+\lambda I)x, x\rangle = 0$, то $x = \theta$, т.к. $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, а $\lambda\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta \Rightarrow A+\lambda I$ обратим

18.37 $A, B \geqslant 0 \Rightarrow \exists\ A^{1/2}, B^{1/2}$ и $A^{1/2}B^{1/2} = B^{1/2}A^{1/2}$; $A^{1/2}, B^{1/2} \in \mathcal{B}(H)$

$$\langle ABx, x\rangle = \langle A^{1/2}A^{1/2}B^{1/2}B^{1/2}x, x\rangle = \langle A^{1/2}B^{1/2}B^{1/2}x, A^{1/2}x\rangle =$$

$$= \langle B^{1/2}A^{1/2}B^{1/2}x, A^{1/2}x\rangle = \langle A^{1/2}B^{1/2}x, B^{1/2}A^{1/2}x\rangle =$$

$$= \langle A^{1/2}B^{1/2}x, A^{1/2}B^{1/2}x\rangle = \|A^{1/2}B^{1/2}x\|^2 \geqslant 0, \ \underline{QED}$$

18.41 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найдём ЖФ и матрицу перехода

$$|A-\lambda I| = (2-\lambda)(5-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Оба $\lambda > 0 \Rightarrow A > 0$; $A \in \mathcal{B}(E)$, т.к. матрица симметрична.

Нет, я отведу ЖФ искать. Будем в лоб: $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ y^2+z^2 = 5 \\ xy+yz = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{легко} \\ \text{заметить} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(а отрицательные не нужны, иначе с.ч. < 0 у $\sqrt{A}$, а так не бывает)

(18.21) $P \in \mathcal{L}(H)$; $P^2 = P$

$a \Rightarrow б$ — очевидно

~~g ⇒ a~~

$в \Rightarrow a$: $\|Px\|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \|Px\|^2 = \langle Px, x \rangle = \langle x, Px \rangle = \langle P^* x, x \rangle \; \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow P = P^*$

$б \Rightarrow в$: $\cancel{\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle}$?!

как это сделать?