3.9 нет, не будет

Пример: $x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [a, \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}) \\ n(t - \frac{a+b}{2}), & t \in [\frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1, & t \in (\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}, b] \end{cases}$

Тогда $x_n(t) \longrightarrow x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ 1, & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, & t = \frac{a+b}{2} \end{cases}$; $x(t)$ — не явл. непрер. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не гильб.

3.11 Нет. Укажем такие числа $\lambda_1, \dots \lambda_n, \dots$, что $\exists$ последовательность, нет сходится не к м-ву из l_2

положим $x^{(k)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots)$

Тогда $\lambda_n = \frac{1}{n}$ $\quad x^{(k)} \longrightarrow x = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots)$, но $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \not< \infty$

$\|x^{(k)} - x\| = \langle x^{(k)} - x, x^{(k)} - x \rangle = \langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle - 2\langle x^{(k)}, x \rangle + \langle x, x \rangle =$

$= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, т.к.

ряд сх. $\Rightarrow$ $x^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, но x не лежит в нашем пр-ве $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пр-во не гильб.

3.28 $M = \{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$

Очевидно, что M замкнуто относительно сложения и умножения. ~~Покажем, что $\forall x \in l_2 \ \exists \{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in M: x^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$~~

Покажем, что $M^\perp = \{\theta\}$, т.е. $\forall x \in M$ $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow y = \theta$

$x_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0, \ldots) \Rightarrow \langle x, y\rangle = y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$

$x_2 = (0, 1, -1, 0, 0 \ldots) \Rightarrow \langle x, y\rangle = y_3 - y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = y_3$

$\vdots$

$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \ldots \Rightarrow$ не $y_i = 0 \Rightarrow y = \theta \Rightarrow M^\perp = \{\theta\} \Rightarrow M$

всюду плотно в l_2

3.36 а) Замкнутость отн. сложения и умножения очевидна.

Покажем, что $\forall \{x_n\} \in M$ $x_n \to x \Rightarrow x \in M$

Это следует из ~~...~~ арифметических операций над пределами $\Rightarrow M$ – п/п.

б) $\langle x, y\rangle = 0$; $x(\cdot) \in M$

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt = \int_{-1}^{0} x(t)y(t)\,dt = 0 \;\forall x(\cdot) \in M \Rightarrow$$

$\Rightarrow y$ должно удовлетворять: $y(t) = 0 \;\forall t \le 0$

$$M^\perp = \{y(\cdot) \in L_2[-1, 1] \mid y(t) = 0,\ t \le 0\}$$

в) да, т.к. $L_2[-1, 1]$ – гильб., а M – п/п

3.37 $x^{(k)} = \left(1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \ldots\right)$ $k \in \mathbb{N}$

$M := \mathrm{span}(x^{(k)})$. Покажем, что $M^\perp = \{\theta\}$, т.е. $\forall x \in M$

$\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow y = \theta$; $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^{(k)}$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ П: $\exists\, y_n \ne 0$ для ненул. наименьшего n.

Тогда $\langle y, x^{(k)}\rangle = \sum_{i=n}^{\infty} y_i \cdot \frac{1}{2^{ik}} = \frac{1}{2^{nk}}\left(y_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} y_i \cdot \frac{1}{2^{(i-n)k}}\right)$

$$\underbrace{2^{nk}\langle y, x^{(k)}\rangle}_{0 \text{ по предположению}} = y_n + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} y_i \cdot \frac{1}{2^{(i-n)k}}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0}$$

~~Т.к. $y_i = 0$ при $i < n$, то $2^{nk}\langle y, x^{(k)}\rangle = \langle y, \hat{x}^{(k)}\rangle$, где~~

~~$\hat{x}^{(k)} = (0, 0, \ldots, 1, 2)$~~

~~$(n+1)$-е место~~

$\Rightarrow y_n = 0$ — ?! $\Rightarrow y = \Theta$, QED

3.44 $\exists A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$ $A_n \neq \emptyset$

$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$; A_n — замк, вып, огр.

Выберем в $\forall A_k$ эл-т x_n с наименьшей нормой.

Тогда $\{\|x_n\|\}$ огр, т.к. A_1 огр, $\{\|x_n\|\}$ не убывает в силу вло-

женности $\Rightarrow$ имеет конечный предел.

Далее, покажем, что последоват. $\{x_n\}$ фундам. $\Rightarrow x_n \to x$ в силу пр-ва,

т.к. пр-во гильбертово. И по построению $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

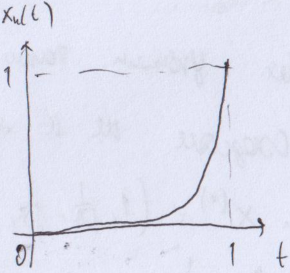
Оценим $\|x_{n+p} - x_n\|^2$: $\|x_{n+p} - x_n\|^2 \overset{\text{т-во параллелограмма}}{=} 2(\|x_n\|^2 + \|x_{n+p}\|^2) - \|x_{n+p} + x_n\|^2 \leq$

$\leq \underbrace{2\|x_n\|^2 + 2\|x_{n+p}\|^2 - 4\|x_n\|^2}_{\to 0}$, т.к. $\|x_{n+p} - x_n\|^2 \geq (2\|x_n\|)^2$

$\to 0 \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall p \geq n \Rightarrow \{x_n\}$ — фунд.

QED

3.45 $\;\exists\; x_n(t) = t^n$



$A_n = \{x(\cdot) \in C[0,1] \mid |x(t)| \le t^n \;\forall t \in [0,1]\}$

Тогда $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ будет состоять только из разрывных в $t=1$ ф-ций.