Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 06.04.20 (21-ый день карантина)

“Гильбертово пространство”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать параграф 6 (стр. 57 – 68) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

В любом евклидовом пространстве выполнено “равенство параллелограмма”:

$$\forall x, y \; ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Евклидово пространство называется гильбертовым, если оно полно относительно нормы, согласованной со скалярным произведением.

Примеры гильбертовых пространств: $\mathbb{R}^n$, l_2, L_2.

Теорема 1. *Пусть в гильбертовом пространстве H задано замкнутое выпуклое множество M, и точка $x \notin M$. Тогда существует единственное $y \in M$: $\rho(x, M) = ||x - y||$.*

Следствие: для любого подпространства L гильбертова пространства H существует единственный элемент $y \in L$, реализующий расстояние от точки x до подпространства L (это проекция $y = \mathrm{Pr}_L(x)$).

Теорема 2. *Пусть $||x - y|| = \rho(x, L)$, L – подпространство гильбертова пространства H. Тогда $(x - y) \perp L$.*

Следствие: для любого $x \in H$ справедливо разложение $x = y + z$, $y \in L$, $z \perp L$, причем это разложение единственное.

Теорема 3 (Теорема Пифагора)**.** *Для элементов ортогонального разложения справедливо соотношение $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$.*

Совокупность всех элементов H, ортогональных к подпространству L, называется ортогональным дополнением L и обозначается $L^\perp$.

Теорема 4. *$L^\perp$ является подпространством в H.*

Теорема 5. *Пусть L – линейное многообразие в гильбертовом пространстве H. L плотно в H тогда и только тогда, когда $L^\perp = \{0\}$.*

Задача 1. *Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.*

Решение: Рассмотреть тождество параллелограмма, в котором

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, 0.5] \\ 2x - 1 & , \quad x \in [0.5, 1] \end{cases}, \; y(t) = \begin{cases} -2x + 1 & , \quad x \in [0, 0.5] \\ 0 & , \quad x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

Тогда $||x|| = ||y|| = 1$, $||x - y|| = 1$, $||x + y|| = 1$. То есть тождество параллелограмма не выполнено, а значит согласованного с нормой скалярного произведения не существует.

Задача 2. *Доказать, что в пространстве l_1 нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.*

Решение: Рассмотреть тождество параллелограмма, в котором

$$x = (1, 0, 0, ...), \; y = (0, 1, 0, ...).$$

Тогда $||x|| = ||y|| = 1$, $||x - y|| = 2$, $||x + y|| = 2$. Снова не выполнено тождество параллелограмма.

Задача 3. *Пусть L – подпространство гильбертова пространства X. Доказать, что $x \perp L$ тогда и только тогда, когда $||x|| \leq ||x - y||$, $\forall y \in L$.*

Решение: $||x|| \leq ||x - y||$, $\forall y \in L$ эквивалентно тому, что $\langle y, y \rangle \geq 2 \langle x, y \rangle$, $\forall y \in L$. Теперь, если $x \perp L$, то последнее условие очевидно выполняется. Обратно, если последнее условие выполняется, то рассмотрев векторы y и $-y$, получим, что $\langle x, y \rangle = 0$, $\forall y \in L$.

Задача 4. *Доказать, что для произвольного множества M в гильбертовом пространстве X имеет место включение $M \subseteq (M^\perp)^\perp$. Возможно ли строгое включение? Доказать, что равенство имеет место тогда, и только тогда, когда M – подпространство X.*

Решение: Вложение проверяется непосредственно. Из свойств ортогонального дополнения следует, что $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ – линейное подпространство, т.е. равенство возможно только в случае, если M – линейное подпространство.

Докажем, что если M – линейное подпространство, то $M = (M^\perp)^\perp$. Пусть $x \in (M^\perp)^\perp$. Поскольку M – линейное подпространство, то существует единственная пара векторов $y \in M$, $z \in M^\perp$: $x = y + z$. Для любого $w \in M^\perp$ $\langle x, w \rangle = 0$. В частности, при $w = z$ получим, что $\langle y + z, z \rangle = ||z||^2 = 0$. Следовательно, $z = 0$ и $x \in M$.

Пример строго включения: $X = \{x \in l_2 : \exists k \in \mathbb{N} : x_i = 0, \forall i \geq k\} \subset l_2$. Тогда $\bar{X} = l_2$, $X \subset l_2 = (X^\perp)^\perp$.

Задача 5. *В пространстве l_2 привести пример такого множества M, что множество $M + M^\perp$ не совпадает со всем l_2.*

Решение: Пусть $M = \{(1, 0, 0, ...)\}$. Тогда $M^\perp = \{x \in l_2 : x_1 = 0\}$, $M + M^\perp \neq l_2$.

Задача 6. *В пространстве l_2 построить замкнутое множество, в котором нет элемента с наименьшей нормой.*

Решение:

$$x^{(n)} = (0, ..., 0, 1 + 1/n, 0, ..., 0).$$

Домашнее задание: № 3.9, 3.11, 3.28, 3.36, 3.37, 3.44, 3.45.