Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление. Множество достижимости»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Содержание

Часть I

Теоретическая часть

1. Постановка задач

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} - x^2 \sin x + x^3 + x^4 + 2\dot{x} = u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u \in [-\alpha, \alpha]$. В начальный момент времени $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ в классе программыних управлений в заданный момент времени $t \geqslant t_0$.

Сведем данное дифференциальное уравнение к системе уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - 2x_2 - x_1^3 - x_1^4 + x_1^2 \sin x_1. \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия: $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Сформулируем принцип максимума Понтрягина для задач достижимости. Он доказан в [1]

Теорема 1 (ПМП для задачи достижимости) *Рассматривается следующая автономная система:*

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)). \tag{3}$$

Дополнительно предполагаем, что функции f и f'_x непрервыны, и ограничения на управление и не зависят от времени: $u(t) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ $\dot{\forall} t$. Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) = \big\langle \psi(t), f(x(t), u(t)) \big\rangle. \tag{4}$$

Тогда если (u^*, x^*)— оптимальная пара, такая что $x^*(t) \in \partial X(t)$, то существует функция $\psi^*(t)$, удовлетворяющая сопряженной системе:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \tag{5}$$

для которой выполнено условия максимума:

$$\mathcal{H}\big(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)\big) = \sup_{v \in \mathcal{P}} \mathcal{H}\big(\psi^*(t), x^*(t), v\big). \tag{6}$$

Эта теорема позволяет использовать для построения границы множества достижимости только те траектории, которые удовлетворяют условию максимума (6).

Сформулируем также теорему, которая позволяет указать структуру переключений управления в нашей системе. Доказательство приведено в [1].

Теорема 2 (о нулях x_2 и ψ_2) *Пусть $t_1 < t_2$, $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$, x_2 не обращается в нуль на (t_1, t_2) и $\psi_2(t_1) \neq 0$. Тогда $\psi_2(t_2) \neq 0$ и существует $\tau \in (t_1, t_2)$, такое что $\psi_2(\tau) = 0$.*

Смысл теоремы в том, что между двумя моментами времени, в который x_2 обращается в 0, существует момент времени, в который ψ_2 обращается в 0.

3. Исследование задачи

Запишем для заданной задачи функционал Гамильтона-Понтрягина и сопряженную систему:

$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2 \left(u - 2x_2 - x_1^3 - x_1^4 + x_1^2 \sin x_1\right) \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \left(3x_1^2 + 4x_1^3 - 2x_1 \sin x_1 - x_1^2 \cos x_1\right), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\psi_2. \end{cases} \tag{8}$$

Из функционала Гамильтона-Понтрягина выпишем вид экстремальных управлений:

$$u^* = \begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2 = 0, \\ -\alpha, & \psi_2 < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 1 *Особый режим в данной задаче невозможен.*

Доказательство. Будем доказывать от противного: предположим, что $\psi_2 = 0$ на некотором интервале. Тогда и $\dot{\psi}_2 = 0$ на этом интервале. Тогда в силу 2-го уравнения системы (8) $\psi_1 = 0$ на этом интервале. Получаем противоречие с условием нетривиальности сопряженных переменных. ∎

Таким образом, система движется в одном из двух режимов:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha - 2x_2 - x_1^3 - x_1^4 + x_1^2 \sin x_1. \end{cases} \tag{+}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha - 2x_2 - x_1^3 - x_1^4 + x_1^2 \sin x_1. \end{cases} \tag{−}$$

Список литературы

[1] А. Комаров Ю. Лекции по оптимальному управлению. Москва, 2020.