Семинар по функциональному анализу. 315 группа, 11.05.20 (56-ой день карантина)

“Спектр вполне непрерывных и самосопряженных операторов”

Перед решением задач по этой теме рекомендуется самостоятельно прочитать параграф 23.3, 23.4 (стр. 249 – 254) из книги В.А. Треногина "Функциональный анализ".

Теорема 1. *Пусть X – комплексное банахово пространство, и A – вполне непрерывный оператор. Тогда дискретный спектр оператора A состоит из не более чем счетного множества собственных значений, единственной предельной точкой которых может служить лишь точка $\lambda = 0$. Если X бесконечномерно, то 0 пренадлежит спектру (не обязательно точечному). Собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению $\lambda \neq 0$, конечномерно.*

Теорема 2. *Пусть A – вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Тогда*

- *если $A \neq 0$, то A имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля;*
- *все собственные значения A вещественны и расположены на отрезке $[m, M]$, где*
$$m = \inf_{||x||=1} \langle Ax, x \rangle \,, \; M = \sup_{||x||=1} \langle Ax, x \rangle \,;$$
- *если $M \neq 0$, то M является наибольшим собственным значением A; если $m \neq 0$, то m является наименьшим собственным значением A.*

Теорема 3 (Гильберт-Шмидт)**.** *Если A – вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H, то при любом $x \in H$ элемент Ax разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов оператора A.*

Теорема 4. *Если A – вполне непрерывный самосопряженный оператор в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H, то в H существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Задача 1 (ТПС, 20.1)**.** *Доказать, что оператор $A : l_2 \to l_2$,*

$$Ax = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, ...)$$

вполне непрерывен, и найти его спектр.

Решение: Для любого $x \in \mathbb{B}_1(0)$ $||Ax|| \le ||x|| \le 1$. Кроме того,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} x_n^2 \le \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Следовательно, $A\mathbb{B}_1(0)$ является предкомпактным множеством, а оператор A вполне непрерывен.

Спектр состоит лишь из не более чем счетного числа собственных значений. Соотношение $Ax = \lambda x$ не выполняется ни при каких λ, при $x \neq 0$. Непрерывный спектр содержит $\lambda = 0$.

Задача 2 (ТПС, 20.2)**.** *Доказать, что оператор* $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$,

$$Ax(s) = \int_{-1}^{1} s^2 t x(t) dt.$$

вполне непрерывен, и найти его спектр.

Решение: Для любого $x(\cdot) \in \mathbb{B}_1(0)$

$$||Ax||_{L_2}^2 = \left(\int_{-1}^{1} tx(t)dt\right)^2 \left(\int_{-1}^{1} s^4 ds\right) \le ||t||_{L_2}^2 \frac{2}{5} = \frac{4}{15};$$

$$||(Ax)(\cdot + h) - (Ax)(\cdot)||_{L_2}^2 = \left(\int_{-1}^{1} tx(t)dt\right)^2 \left(\int_{-1}^{1} ((s+h)^4 - s^4)ds\right) \le$$

$$\le \frac{2h}{3} \int_{-1}^{1} ((2s+h)((s+h)^2 + s^2))ds \to 0,$$

при $h \to 0$, равномерно по $x(\cdot) \in \mathbb{B}_1(0)$. Следовательно, $A\mathbb{B}_1(0)$ предкомпактно, а оператор A вполне непрерывен.

Рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$. Домножим его на s и проинтегрируем:

$$\left(\int_{-1}^{1} s^3 ds\right) \left(\int_{-1}^{1} tx(t)dt\right) = \lambda \left(\int_{-1}^{1} sx(s)ds\right) = 0.$$

Следовательно, $\lambda = 0$ – единственное собственное значение. Ему соответствуют, например, собственные функции $x(t)$ – четные. Других собственных значений нет. При $\lambda \neq 0$ рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$. Решение этого уравнения можно найти в форме $x(s) = (y(s) - cs^2)/\lambda$ (достаточно подставить и найти c). Следовательно, для любого $y(t) \in L_2[-1,1]$ существует корень уравнения $x(t)$, а потому все $\lambda \neq 0$ – регулярные точки.

Задача 3 (ТПС, 20.7)**.** *Доказать, что оператор* $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ *самосопряженный, и найти его спектр.*

Решение: Для любых $x, y \in L_2[0,1]$ $\langle Ax, y\rangle = \int_0^1 tx(t)y(t)dt = \langle x, Ay\rangle$. Следовательно, оператор A самосопряжен.

Рассмотрим уравнение $Ax = \lambda y$. Следовательно, $(t - \lambda)x(t) = 0$ почти всюду. Но такое возможно только при $x(t) = 0$ п.в. Следовательно, собственных значений нет. В то же время, при $\lambda \in [0,1]$ $\mathrm{im}(A - \lambda I) \neq L_2[0,1]$ (функции из образа принимают малые значения в окрестности точки λ), но замыкание образа (в $L_2[0,1]$) все же совпадает с $L_2[0,1]$. Резольвента задается соотношение $x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda}$ – это линейный оператор не является непрерывным. Значит $[0,1]$ – непрерывный спектр.

Задача 4 (ТПС, 20.18)**.** *Пусть A – вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, и его спектр состоит из собственных значений* 0 *и* 1. *Доказать, что A – оператор ортогонального проектирования.*

Решение: Пусть $M = \{x \in H : Ax = x\}$ – собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 1$. Тогда M инвариантно относительно A. Из самосопряженности A следует инвариантность $M^{\perp}$ относительно A. Если $Ax \neq 0$ при некотором $x \in M^{\perp}$, то в подпространстве $M^{\perp}$ найдется ненулевое собственное значение оператора A. Оно не может быть равным 1, в силу построения. Получается противоречие. Следовательно, $Ax = 0$, $\forall x \in M^{\perp}$. А это и означает, что A – оператор ортогонального проектирования.

Домашнее задание: № 20.3, 20.5, 20.11, 20.12, 20.15.