4.10 $L_2[-1,1]$; $x_1(t)=0$; $x_2(t)=1$; $x_3(t)\equiv t$

Длины сторон: $\|y_1\| = \|x_2-x_3\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} (1-t)^2\,dt\right)^{1/2} = \frac{(t-1)^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\|y_2\| = \|x_1-x_3\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|y_3\| = \|x_1-x_2\| = \sqrt{2}$$

не в том порядке взяли

$$\langle y_1,y_2\rangle = \int\limits_{-1}^{1} (1-t)t\,dt = \frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}-\frac{5}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cos\varphi_3 = \frac{2/3}{2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{3}$$

$$\langle y_2,y_3\rangle = \int\limits_{-1}^{1} t\,dt = 0 \Rightarrow \cos\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \pi/2$$

$$\langle y_1,y_3\rangle = \int\limits_{-1}^{1} (1-t)\,dt = t-t^2/2\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 2 \Rightarrow \cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$$

4.11 $\|t^\alpha\| = \left(\int\limits_0^1 t^{\alpha p}\,dt\right)^{1/p} = \left(\frac{t^{\alpha p+1}}{\alpha p+1}\Big|_0^1\right)^{1/p} = (\alpha p+1)^{-1/p}$

интегрировать можно, если $\alpha p+1>0$; $\alpha p>-1$. $\alpha=0 \Rightarrow t^\alpha$ лежит во всех L_p и $\|t^0\|=1$ пр-во $L_\infty[0,1]$: $\|t^\alpha\|_{L_\infty[0,1]} = \operatorname{esssup}\limits_{t\in[0,1]} t^\alpha = 1$, $\alpha\geq 0$

4.18 $[c,d] \subset [a,b]$; $M = \{ x(\cdot) \in L_2[a,b] : x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \ \forall t \in [c,d] \}$

1) $\exists\ x(\cdot), y(\cdot) \in M$; Тогда $\alpha x(\cdot) + \beta y(\cdot) \in M$ — очевидно

2) замкнутость: $\exists\ x_n(\cdot) \in M$. Тогда $x_n(t) = 0 \ \dot\forall t \ldots$; $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$.

Тогда из св-в пределов $x(t) = 0 \ \dot\forall t \in [c,d]$.

3) $y(\cdot) \in M^\perp$, если $\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = 0 \ \forall x(\cdot) \in M$

$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \int\limits_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0 \ \forall x(\cdot) \in M$. Тогда ~~тебе~~ это

выполнялось надо потребовать, чтобы $y(t) = 0 \ \dot\forall t \in [a,b] \setminus [c,d]$

Ответ: $M^\perp = \{ y(\cdot) \in L_2[a,b] \mid y(t) = 0 \ \dot\forall t \in [a,b] \setminus [c,d] \}$

4.19 1) линейность ~~очевидна~~ следует из линейности интеграла;

замкнутость — из св-в пределов.

2) Покажем, что $M^\perp = \operatorname{span}\{ x(t) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 1 \}$.

Действительно, если $x(t) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} C$, то $\int\limits_a^b C x(t)\, dt = C \int\limits_a^b x(t)\, dt = 0$

Теперь $\exists\ x(t) \not\equiv const$; $m = \int\limits_a^b x(t) dt$; обозначим $A^+ = \{ t \in [a,b] \mid$

$x(t) > m \}$; $A^- = \{ t \in [a,b] \mid x(t) \le m \}$. ; $\mu(A^+) = \mu^+$; $\mu(A^-) = \mu^-$.

Положим $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu^+}, & t \in A^+ \\ -1/\mu^-, & t \in A^- \end{cases}$; $\mu^+, \mu^- > 0$, т.к. $x(t) \overset{\text{п.в.}}{\not\equiv} const$

Тогда $y(t) \in M$, и $\langle y(\cdot), x(\cdot) \rangle > 0 \Rightarrow x(\cdot) \notin M^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow M^\perp = \operatorname{span}\{1\}$.

(5.9) $x(t) = t^2 \in L_2[0,1]$; $L = \{x(t) \in L_2[0,1] \mid \int_0^1 x(t)dt = 0\}$

$L = \{x(\cdot) \in L_2[0,1] \mid \langle x(\cdot), 1\rangle = 0\}$.

Тогда $\rho(x(\cdot), L) = \frac{\langle x(\cdot), 1\rangle}{\|1\|^2_{L_2[0,1]}} = \langle x(\cdot), 1\rangle = \int_0^1 t^2 dt = t^3/3 \Big|_0^1 = 1/3$

Лагерр

1: $\|1\| = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 \Rightarrow e_0(t) \equiv 1$

$f_1 = t$; $g_1 = t - \langle t, e_0\rangle \cdot e_0 = t - \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = t-1$

$\int_0^{+\infty}(t-1)^2 e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt - 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 \Rightarrow e_2(t) = t-1$

Докажем общую формулу: расм $\int_0^{+\infty} e_m(t)e_n(t)\,dt$; $m \leq n$.

Лежандр $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

$$\int_{-1}^{1} 1^2\,dt = 2 \Rightarrow e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_1 = t;\quad g_1 = t - \langle t, e_0\rangle e_0 = t - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{2}}\,dt = t - \frac{1}{4}t^2\Big|_{-1}^{1} = t$$

$$\|g_1\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

$$f_2 = t^2;\quad g_2 = t^2 - \langle t^2, e_0\rangle e_0 - \langle t^2, e_1\rangle e_1$$

$$\langle t^2, e_0\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\langle t^2, e_1\rangle = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,t^3\,dt = 0 \Rightarrow g_2 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|g_2\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - 1/3\right)^2 dt = \cancel{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = \int_{-1}^{1} t^4\,dt - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t^2\,dt + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \Rightarrow e_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - 1/3\right)$$

~~Общая ф-ла не верна, т.к. по ней $e_0(t) = 1$, а тут $\frac{1}{\sqrt{2}}$!!~~

$$\exists\ m \neq n\ (m<n);\quad \langle f_m, f_n\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2^m m!}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\cdot\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^{m+n} m!\, n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\cdot\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\,dt = 0$$

Тут интегрировать по частям, но поля этого листочка слишком узки для выкладок

QED

Чебышев - 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$g_0 = 1 \quad \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^{1} = \pi \Rightarrow e_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$f_1 = t \ ; \quad g_1 = t - \langle t, e_0 \rangle e_0 =$$

$$\langle t, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{1} \frac{d(1-t)}{\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 = t - \frac{1}{\pi}$$

докажем ф. ч. $\displaystyle\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^1 \cos(n \arccos t)\cos(m \arccos t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$$= -\int_0 \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

Чебышёв-2

$$\frac{T'_{n+1}(t)}{n+1} = \frac{-\sin((n+1)\arccos t)\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{\cancel{(-1)}\sqrt{1-t^2}}$$

$$\langle x_n, x_m\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\sin((n+1)\arccos t)\cdot\sin((m+1)\arccos t)\cdot\cancel{\sqrt{1-t^2}}}{\cancel{(-1)^2}\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0, \text{ если } n \neq m.$$

(см. Чебышёв-1)