Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Численное решение задачи Дирихле с помощью преобразования Фурье»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1 Постановка задачи **3**

2 Алгоритм решения **4**

3 Вычисление аналитического решения **7**

4 Графики **10**

4.1 Для численного решения 10

4.2 Только численное решение 12

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \nabla u\,(x,\,y) - \mu u\,(x\,y) = f\,(x,\,y)\,, \quad (x,\,y) \in [0,\,1] \times [0,\,1]\,, \\ u\,(x,\,0) \equiv u\,(x,\,1) \equiv \xi\,(x)\,, \\ u\,(0,\,y) \equiv u\,(1,\,y) \equiv \eta\,(y)\,, \\ \xi\,(0) = \xi\,(1) = \eta\,(0) = \eta\,(1)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функция $f\,(\cdot\,,\,\cdot)$ непрерывно дифференцируема в $[0,\,1] \times [0,\,1]$, функции $\xi\,(\cdot)\,, \eta\,(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0,\,1]$, а вещественный параметр $\mu > 0$.

Для данной задачи нужно построить алгоритм поиска численного решения, основанный на быстром преобразовании Фурье, а именно необходимо реализовать функцию `solveDirichlet(fHandle, xiHandle, etaHandle, mu, N, M)` , возвращающую значение решения на сетке размера N на M. Первые три аргумента функции представляют собой указатели на функции $f\,(\cdot\,,\,\cdot)\,,\ \xi\,(\cdot)\,,\ \eta\,(\cdot)$ соответственно. Затем передается значение параметра μ и размер сетки.

2. Алгоритм решения

Для этой задачи рассматривается разностная схема, в которой уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{y_{k+1,l}-2y_{k,l}+y_{k-1,l}}{h_x^2}+\frac{y_{k,l+1}-2y_{k,l}+y_{k,l-1}}{h_y^2}-\mu y_{k,l}=\phi_{k,l},$$
$$y_{k,0}=y_{k,M}=\xi_k,\quad y_{0,l}=y_{N,l}=\eta_l,\quad k=1,\dots,N-1,\quad l=1,\dots,M-1. \tag{2}$$

Здесь $h_x=1/N,\ h_y=1/M$, значения $y_{k,l}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки
$x_k=\frac{k}{N},\ y_l=\frac{l}{M}, y_{k,l}=u\left(x_k,\,y_l\right),\ \phi_{k,l}=f\left(x_k,\,y_l\right), \xi_k=\xi\left(x_k\right),\ \eta_l=\eta\left(y_l\right).$

Пусть $\{a_{s,p}\}\,,\ \{b_{s,p}\}\,,\ s=1,\dots,N{-}1,\ p=1,\dots,M{-}1$ задают обратное двумерное преобразование для $y_{k,m}$ и $\phi_{k,m}$ соответствено. Тогда

$$y_{k,m}=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}a_{s,p}e^{-2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}$$

$$\phi_{k,m}=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}b_{s,p}e^{-2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}$$

Подставляя эти соотношения в разностную схему (2) и приравнивая коэффициенты при экспонентах, получаем

$$a_{s,p}c_{s,p}=b_{s,p}, \tag{3}$$

где

$$c_{s,p}=-4N^2\sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right)-4M^2\sin^2\left(\frac{\pi p}{M}\right)-\mu.$$

Для выполнения краевых условий нужно специальным образом подобрать значения $\phi_{k,0},\ \phi_{0,l}$. Для запишем обратное ПФ для $b_{s,p}$ и представим его в виде сумм

$$b_{s,p}=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\phi_{k,m}e^{2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}=$$
$$\frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\phi_{0,l}e^{2\pi i\left(\frac{lp}{M}\right)}+\frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\phi_{l,0}e^{2\pi i\left(\frac{ls}{N}\right)}-\frac{1}{MN}\phi_{0,0}+\overline{b_{s,p}}. \tag{4}$$

Здесь $\overline{b_{s,p}}=\dfrac{1}{MN}\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sum\limits_{m=1}^{M-1}\phi_{k,m}e^{2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}$. Заметим, что $\overline{b_{s,p}}$ можно вычислить, применив обратное двумерное преобразование преобразование

Фурье (функция `ifft2` в Matlab) к матрице (взяли $\phi_{0,k} = 0, \quad \phi_{l,0} = 0, \quad k = 0, \ldots, M-1, \quad l = 0, \ldots, N-1$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \phi_{1,1} & \ldots & \phi_{1,M-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \phi_{N-1,1} & \ldots & \phi_{N-1,M-1} \end{pmatrix}$$

Так как

$$y_{0,m} = \eta_m = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} a_{s,p} e^{-2\pi i \left(\frac{mp}{M}\right)} = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{b_{s,p}}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \left(\frac{mp}{M}\right)},$$

$$y_{k,0} = \xi_k = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} a_{s,p} e^{-2\pi i \left(\frac{ks}{N}\right)} = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{b_{s,p}}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \left(\frac{ks}{N}\right)},$$

подставляя (4) в эти выражения, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\phi_{0,0}, \ldots, \phi_{0,M-1}, \phi_{1,0}, \ldots, \phi_{N-1,0}$:

$$\eta_m = \frac{1}{MN} \sum_{l=0}^{M-1} \phi_{0,l} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{1}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{mp}{M}} e^{2\pi i \frac{lp}{M}}$$
$$+ \frac{1}{MN} \sum_{l=1}^{N-1} \phi_{l,0} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{1}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{mp}{M}} e^{2\pi i \frac{ls}{N}} - \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{\overline{b_{s,p}}}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{mp}{M}}, \quad m = 0, \ldots, M-1 \tag{5}$$

$$\xi_k = \frac{1}{MN} \sum_{l=0}^{M-1} \phi_{0,l} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{1}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{ks}{N}} e^{2\pi i \frac{lp}{M}}$$
$$+ \frac{1}{MN} \sum_{l=1}^{N-1} \phi_{l,0} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{1}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{ks}{N}} e^{2\pi i \frac{ls}{N}} - \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{\overline{b_{s,p}}}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{ks}{N}}, \quad k = 1, \ldots, N-1 \tag{6}$$

Так как $\xi_0 = \eta_0$ по условию задачи, то уравнение на ξ_0 не было включено в систему. Для вычисления коэффициентов вида $\frac{1}{MN} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \frac{1}{c_{s,p}} e^{-2\pi i \frac{mp}{M}} e^{2\pi i \frac{lp}{M}}$ достаточно просуммировать матрицу $\left\{ \frac{1}{c_{s,p}} \right\}$ по s, применить обратное преобразование по p с помощью функции `fft` и циклически сдвинуть на m вправо.

Коэффициенты вида $\dfrac{1}{MN}\sum\limits_{s=0}^{N-1}\sum\limits_{p=0}^{M-1}\dfrac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{mp}{M}}e^{2\pi i\frac{ls}{N}}$ вычисляются последовательным применением прямого преобразования Фурье к строкам матрицы $\left\{\frac{1}{c_{s,p}}\right\}$, а затем обратного преобразования (`ifft`) к её столбцам.

Правая часть системы вычиляется так же с помощью прямого преобразования `fft`.

Решив систему, построим матрицу $\{\phi_{k,m}\}$, $k = 1,\dots,N-1$, $m = 1,\dots,M-1$. Применяя к ней двумерное обратное преобразование Фурье (`ifft2`), находим матрицу $\{b_{s,p}\}$, $s = 1,\dots,N-1$, $p = 1,\dots,M-1$. С помощью формулы (3) вычислим значения $\{a_{s,p}\}$, $s = 1,\dots,N-1$, $p = 1,\dots,M-1$ и применим к ним прямое преобразование Фурье `fft2`, найдя тем самым искомое решение $\{y_{k,m}\}$, $k = 1,\dots,N-1$, $m = 1,\dots,M-1$.

3. Вычисление аналитического решения

В этом разделе будет вычислено аналитическое решение задачи (1) для функции $f\,(x,\,y) = xe^{-4x} + \cos(x) + 2ye^{2y}\sin(2y) = f_1(x) + f_2(y)$. Исходя из вида f решение ищется в виде

$$u(x,\,y) = u_1(x) + u_2(y), \quad u_1(0) = u_1(1) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2(1) = u_2^0,$$

числа u_1^0 и u_2^0 известны.

При этих условиях задача (1) распадается на две одномерные краевые задачи

$$\begin{cases} u_1'' - \mu u_1 = xe^{-4x} + \cos(x) \\ u_1(0) = u_1(1) = u_1^0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_2'' - \mu u_2 = 2ye^{2y}\sin(2y) \\ u_2(0) = u_2(1) = u_2^0 \end{cases} \tag{8}$$

Общее решение однородного уравнения для обеих задач имеет вид

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Далее решаем уравнение методом вариации постоянной: представляем решение в виде $u(x) = c_1(x)e^{\sqrt{\mu}x} + c_2(x)e^{-\sqrt{\mu}x}$. Подставляя данный вид функции в задачи (7) и (8). Легко заметить, что решение имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{u}_1(x) = -\frac{xe^{-4x}}{\mu-16}+\\
&\frac{\mu^3u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}-\mu^3u_1^0e^4-31\mu^2u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}+31\mu^2u_1^0e^4+\mu^2e^{\sqrt{\mu}}+\mu^2e^{\sqrt{\mu}+4}\cos(1)}{\left(\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256\right)e^4}-\\
&\frac{\mu^2e^4+224\mu u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}-224\mu u_1^0e^4-23\mu e^{\sqrt{\mu}}}{\left(\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256\right)e^4}-\\
&32\frac{\mu e^{\sqrt{\mu}+4}\cos(1)+40\mu e^4+256u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}}{\left(\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256\right)e^4}-\\
&\frac{256u_1^0e^4-24e^{\sqrt{\mu}}+256e^{\sqrt{\mu}+4}\cos(1)-248e^4e^{\sqrt{\mu}x}}{\left(\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256\right)e^4}\\
&+\frac{\mu^3u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}-\mu^3u_1^0e^4-31\mu^2u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}+31\mu^2u_1^0e^4+\mu^2e^{\sqrt{\mu}+4}-\mu^2e^4\cos(1)}{\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256}-\\
&\frac{\mu^2+224\mu u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}-224\mu u_1^0e^4-40\mu e^{\sqrt{\mu}+4}}{\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256}+\\
&\frac{23\mu+32\mu e^4\cos(1)+256u_1^0e^{\sqrt{\mu}+4}}{\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256}-\\
&\frac{256u_1^0e^4+248e^{\sqrt{\mu}+4}-256e^4\cos(1)+24e^{-\sqrt{\mu}x}e^{\sqrt{\mu}-4}}{\mu^3e^{2\sqrt{\mu}}-\mu^3-31\mu^2e^{2\sqrt{\mu}}+31\mu^2+224\mu e^{2\sqrt{\mu}}-224\mu+256e^{2\sqrt{\mu}}-256}-\\
&\qquad\frac{\cos(x)}{\mu+1}+\frac{8e^{-4x}}{(\mu-16)^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u}_2(y) = &-\frac{8\mu^2 e^{2y}\sin(2y)}{\mu^4+128\mu^2+4096} - \frac{8\mu^2 e^{2y}\cos(2y)}{\mu^4+128\mu^2+4096} - \frac{2\mu y e^{2y}\sin(2y)}{\mu^2+64} + \\
&\frac{128\mu e^{2y}\sin(2y)}{\mu^4+128\mu^2+4096} - \frac{128\mu e^{2y}\cos(2y)}{\mu^4+128\mu^2+4096} - \frac{16y e^{2y}\cos(2y)}{\mu^2+64} \\
&+ \frac{\mu^4 u_2^0 e^{\sqrt{\mu}} - \mu^4 u_2^0 - 2\mu^3 e^2 \sin(2) + 128\mu^2 u_2^0 e^{\sqrt{\mu}}}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} - \\
&\frac{128\mu^2 u_2^0 + 8\mu^2 e^{\sqrt{\mu}} - 8\mu^2 e^2 \sin(2)}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} - \\
&\frac{24\mu^2 e^2 \cos(2) + 128\mu e^{\sqrt{\mu}} - 128\mu e^2\cos(2) + 4096 u_2^0 e^{\sqrt{\mu}} - 4096 u_2^0 - 512 e^{\sqrt{\mu}}}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} - \\
&\frac{512\sqrt{2} e^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}+2\right) e^{\sqrt{\mu}} e^{-\sqrt{\mu} y}}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} + \\
&\frac{\mu^4 u_2^0 e^{\sqrt{\mu}} - \mu^4 u_2^0 + 2\mu^3 e^{\sqrt{\mu}+2}\sin(2) + 128\mu^2 u_2^0 e^{\sqrt{\mu}}}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} - \\
&\frac{128\mu^2 u_2^0 + 24\mu^2 e^{\sqrt{\mu}+2}\cos(2)}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} + \\
&\frac{8\mu^2 e^{\sqrt{\mu}+2}\sin(2) - 8\mu^2 + 128\mu e^{\sqrt{\mu}+2}\cos(2)}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} - \\
&\frac{128\mu + 4096 u_2^0 e^{\sqrt{\mu}} - 4096 u_2^0 + 512\sqrt{2} e^{\sqrt{\mu}+2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\right) + 512 e^{\sqrt{\mu} y}}{\mu^4 e^{2\sqrt{\mu}} - \mu^4 + 128\mu^2 e^{2\sqrt{\mu}} - 128\mu^2 + 4096 e^{2\sqrt{\mu}} - 4096} + \\
&\frac{512 e^{2y}\sin(2y)}{\mu^4+128\mu^2+4096} + \frac{512 e^{2y}\cos(2y)}{\mu^4+128\mu^2+4096}.
\end{aligned}
$$

4. Графики

4.1. Для численного решения

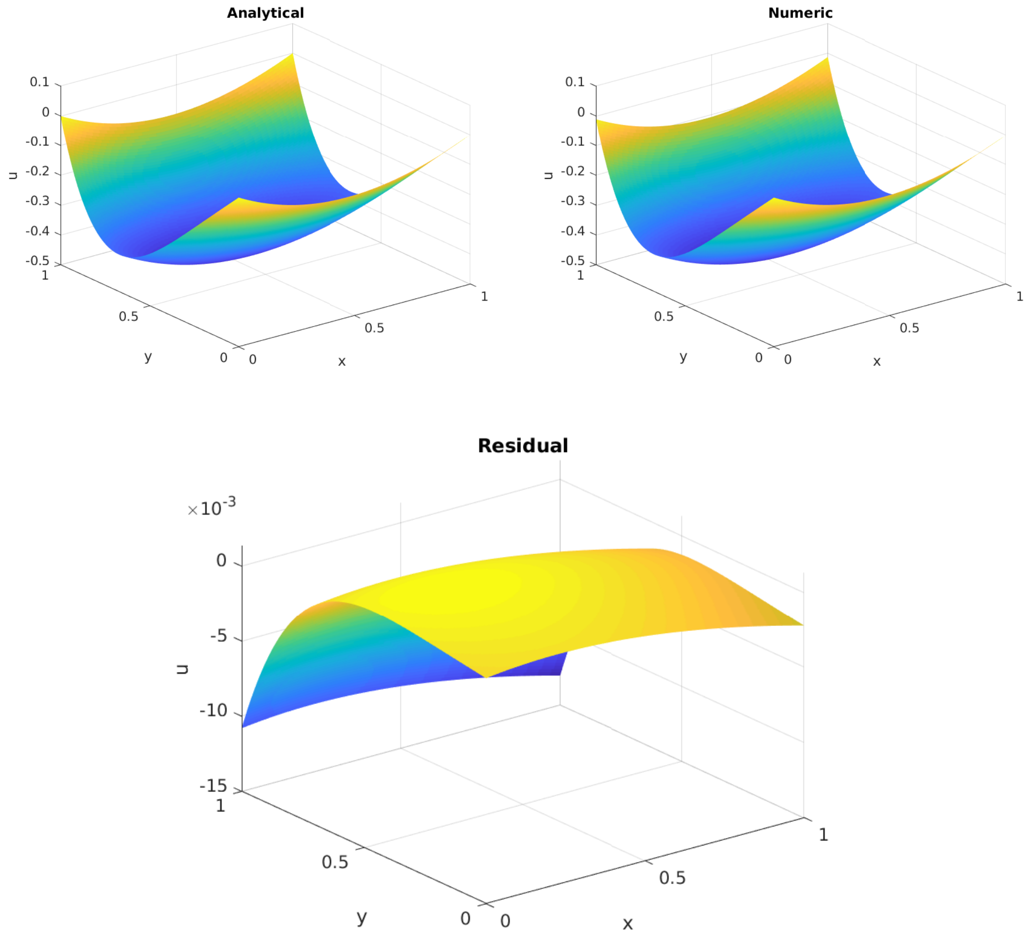


рис. 1 $\mu = 1{,}78, \quad u_1^0 = u_2^0 = 0, \quad M = 156, \ N = 256.$ *Максимум невязки* — 0.013

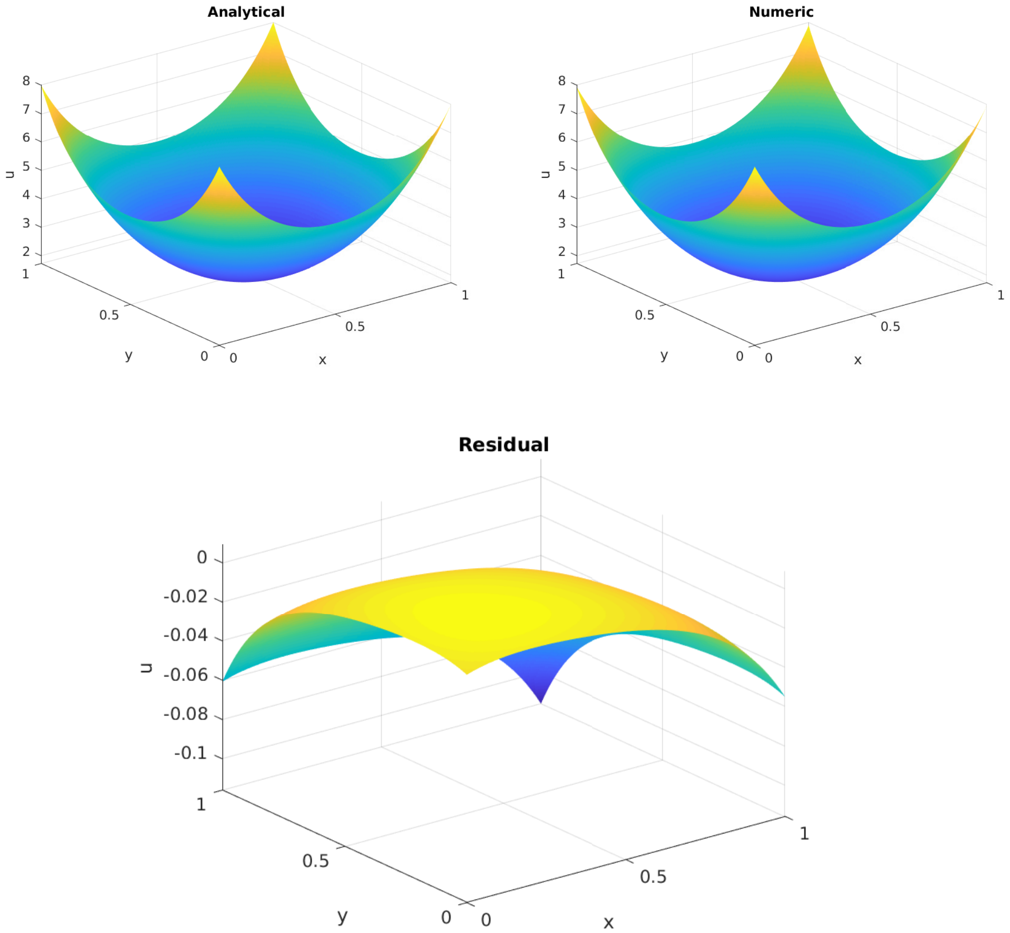
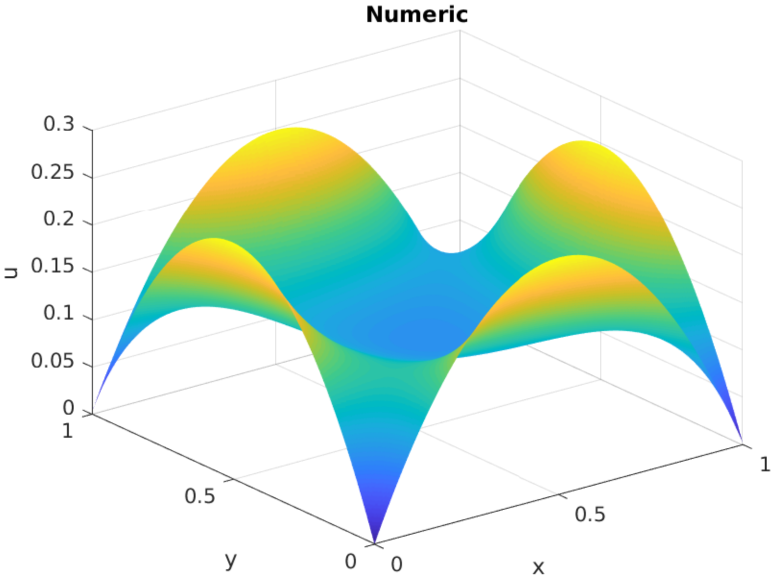
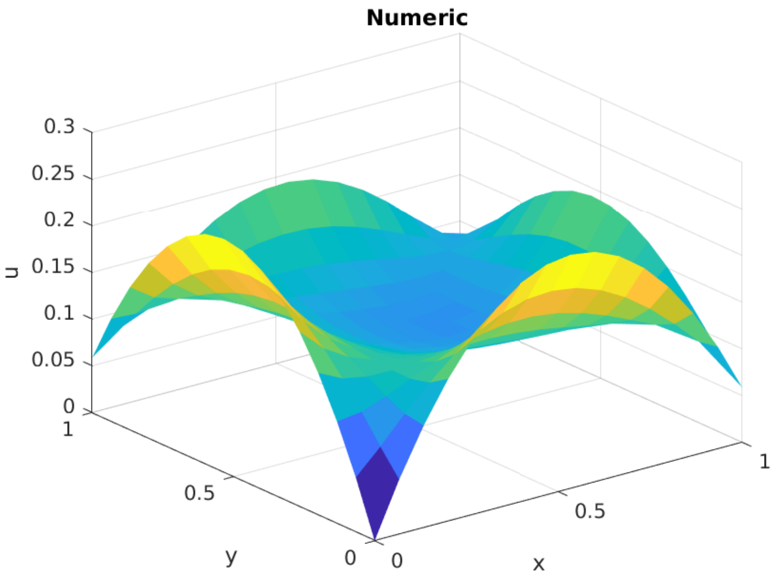


рис. 2 $\mu = 18, \quad u_1^0 = u_2^0 = 4, \quad M = 300, \;\; N = 300.$ *Максимум невязки* — 0.1169

4.2. Только численное решение

Пусть $f(x,y) = e^{x^2+y^4}$, $\xi(x) = x(1-x)$, $\eta(y) = y(1-y)$. В первом случаем шаг сетки 512, во втором — 16.





Пусть теперь $f(x,y) = e^{x^2+4y^4}$, $\xi(x) = x^2(1-x)$, $\eta(y) = y(1-y^3)$. В первом случаем шаг сетки 512, во втором — 16.