Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление. Задача управления ракетой»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Содержание

Часть I
Теоретическая часть

1. Постановка задач

Движение ракеты в вертикальной плоскости вблизи поверхности земли описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm - kv^2 + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases} . \tag{1}$$

Здесь $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, $m > M$ — ее переменая масса, где M — масса ракеты без топлива. $g > 0$ — гравитационная постоянная, $k > 0$ — коэффициент вязкого трения. $l > 0$ определяет реактивную силу, действующуя на ракету. $u \in [0, u_{max}]$ — скорость подачи топлива. Начальные условия: $t_0 = 0,\ v(0) = 0,\ m(0) = m_0 > M$.

Задача 1

За счет выбора программного управления u необходимо вывести ракету на максимальную высоту в момент времени $T > 0$.

Задача 2

За счет выбора управления вывести ракету на высоту $H > 0$ в момент времени $T > 0$ так, чтобы минимизировать функционал:

$$\int\limits_0^T e^{-\alpha t} u(t)\, dt, \quad \alpha > 0. \tag{2}$$

Для каждой задачи необходимо численно промоделировать поведение системы при всевозможных качественно различных «режимах».

2. Принцип максимума Понтрягина

При решении задач оптимального управления ключевую роль играет следующий принцип максимума Понтрягина [1]. Приведем здесь формулировку принципа максимума Понтрягина для автономных систем.

Теорема 1 (ПМП для автономных систем) *Ставится следующая автономная задача управления:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x^0 \\ x(t^1) = x^1 \\ u(t) \in \mathcal{P} \\ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0\big(x(t), u(t)\big) \to \inf, \end{cases} \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, множество $\mathcal{P}$ является непустым выпуклым компактом, не меняющимся с течением времени, управление и ищется в классе измеримых функций. Введем фукнцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathscr{H}(\psi, x, u) = \big\langle \psi, \hat{f}(x,u) \big\rangle = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(x,u). \tag{4}$$

Тогда если $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ — оптимальная пара, то:

1. $\psi^* \neq 0 \ \forall t \in [t_0, t_1]$.
2. $\dot{\psi}^* = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1]$ *на оптимальных параметрах. Данная система называется сопряженной системой.*
3. $u^*(t) \in \operatorname*{Argmax}\limits_{u \in \mathcal{P}} \mathscr{H}(\psi^*(t), x^*(t), u)$.
4. $\psi_0^* \equiv const \leqslant 0$.
5. *Условия трансверсальности, которые означают, что сопряженные переменные ортогональны начальному и конечному множествам:*
$$\begin{cases} \psi^*(t_0) \perp T_{x^*}(t_0)\mathcal{X}^0, \\ \psi^*(t_1) \perp T_{x^*}(t_1)\mathcal{X}^1. \end{cases}$$

Отметим, что данные условия являются лишь необходимыми, но не достаточными.

3. Решение задачи 1

Положим $x_1 = v$, и $x_2 = m$. Тогда система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g - \dfrac{kx_1^2}{x_2} + \dfrac{u}{x_2}(l + x_1) \\ \dot{x}_2 = -u \\ \int\limits_0^T x_1 \, dt \to \max . \end{cases} \tag{5}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathscr{H} = \psi_0 x_1 + \psi_1 \left[-g - \frac{kx_1^2}{x_2} + \frac{u}{x_2}(l + x_1) \right] - \psi_2 u. \tag{6}$$

Сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_0 + \dfrac{2k\psi_1 x_1^2}{x_2} - \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{k\psi_1 x_1^2}{x_2^2} + \dfrac{\psi_1 u}{x_2^2}(l + x_1). \end{cases} \tag{7}$$

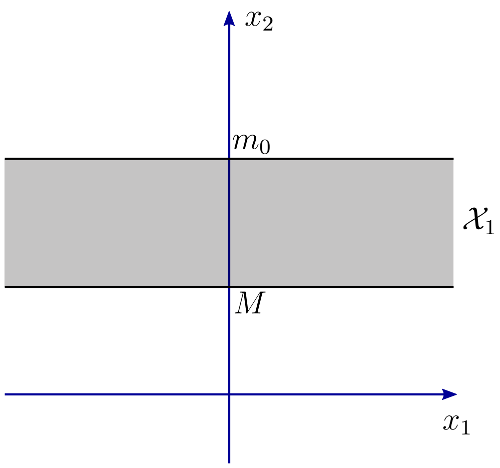

Рис. 1: Конечное множество задачи

Из рис. 1 следуют условия трансверсальности:

$$\begin{cases} \psi_1(T) = 0, \\ \psi_2(T) \leqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $F = \psi_1(x_1 + l) - \psi_2 x_2$. Тогда оптимальное управление:

$$u^* = \begin{cases} u_{max}, & \text{если } F > 0, \\ [0, u_{max}], & \text{если } F = 0, \\ 0, & \text{если } F < 0, \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что в нормальном случае функция F удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{F} = -(x_1 + l) - \psi_1 g + \frac{2k\psi_1 x_1}{x_2}(x_1 + l) - \frac{u}{x_2}F. \tag{10}$$

Так же по постановке задачи ракета не должна «упасть». То есть в начальный момент времени движение вниз невозможно, стартует ракета в режиме $u = u_{max}$, из чего можно сделать вывод, что $F(0) > 0$.

3.1. Анормальный случай

В анормальном случае $\psi_0 \equiv 0$. Тогда из сопряженной системы (14) и условий трансверсальности следует, что $\psi_1 \equiv 0$ и $\psi_2 \equiv C \leqslant 0$. В силу условия невырожденности сопряженных переменный $C < 0$. Тогда из условий трансверсальности следует, что $\psi_1(T) = 0$ и $\psi_2(T) \leqslant 0$. Так как переменная x_2 положительная для всех t, то сразу получаем, что в анормальном случае $F(t) < 0$ и $u(t) = u_{max}$, пока не закончится топливо ($x_2 = M$).

Теперь перейдем к рассмотрению различных вариантов нормального случая. Как было замечено выше, в нормальном случае в началеный момент $u = u_{max}$.

3.2. Достаточно топлива

В этом подслучае мы рассматриваем ситуацию, при которой если $u = u_{max}$ на всем промежутке времени от 0 до T, пока $m(t) > M$, то в конечный момент времени $x_2 > M$. Покажем, что в таком случае переключений не будет. Действительно, пусть в момент времени τ произошло переключение и управление стало меньше, чем u_{max}. Тогда скорость станет меньше, чем при управлении $u = u_{max}$, а значит и высота в конечный момент времени станет также меньше, так как скорость при $u = u_{max}$ не может быть меньше, чем при любом другом управлении, а высота — это интеграл от скорости. Таким образом, при численном решении задачи имеет смысл сначала проверить, хватит ли ракете топлива, если просто взять максимальное управление.

3.3. Особый режим

Особый режим в системе возникает, когда $F = 0$ на множестве положительной меры. Чтобы найти управление в особом режиме, исследуем производный функции F.

$$\dot{F} = -g\psi_1 + \frac{2kl\psi_1 x_1}{x_2} + \frac{2k\psi_1 x_1^2}{x_2} - \frac{l\psi_1 u}{x_2} - l - \frac{\psi_1 u x_1}{x_2} + \psi_2 u - x_1.$$

Заметим, что перед u стоит коэффициент $\psi_2 x_2 - \psi_1(x_1 + l)$, который равен 0, потому что $F = 0$. Тогда

$$\dot{F} = -g\psi_1 + \frac{2kl\psi_1 x_1}{x_2} + \frac{2k\psi_1 x_1^2}{x_2} - l - x_1.$$

Символьное выражение для второй производной слишком громозко, поэтому выпишем сразу выражение для управления в особом режиме, которое получается решением линейного по u уравнения $\ddot{F} = 0$.

$$u^*_{sm} = \frac{2gkl\psi_1 x_2 + 6gk\psi_1 x_1 x_2 - 2gx_2^2 - 2k^2 l\psi_1 x_1^2 + 2klx_1 x_2 + kx_1^2 x_2}{g\psi_1 x_2 + 2kl^2\psi_1 + 6kl\psi_1 x_1 + 4k\psi_1 x_1^2 - lx_2 - x_1 x_2}.$$

Исследование особого режима проводится численно.

3.4. Мало топлива

В случае, когда топлива недостаточно, единственный выход — перебор по начальным условиям на значения сопряженных переменных. Условия трансверсальности на правом конце не дают нам никакой информации, так как последнее переключение (когда заканчивается топливо) происходит «недобровольно» и на оптимальной траектории условия трансверсальности нарушаются. Система для численного интегрирования выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = -g - \dfrac{kx_1^2}{x_2} + \dfrac{u}{x_2}\,(l + x_1) \\ \dfrac{dx_2}{d\tau} = -u \\ \dfrac{d\psi_1}{d\tau} = -1 - \dfrac{\psi_1}{x_2}\,(u - 2kx_1) \\ \dfrac{d\psi_2}{d\tau} = -\dfrac{\psi_1}{x_2^2}\big(kx_1^2 - u(l + x_1)\big). \end{cases} \tag{11}$$

Замечание: сила сопротивления воздуха направлена против движения, поэтому коэффициент k имеет тот же знак, что и x_1.

3.5. Результаты численного моделирования

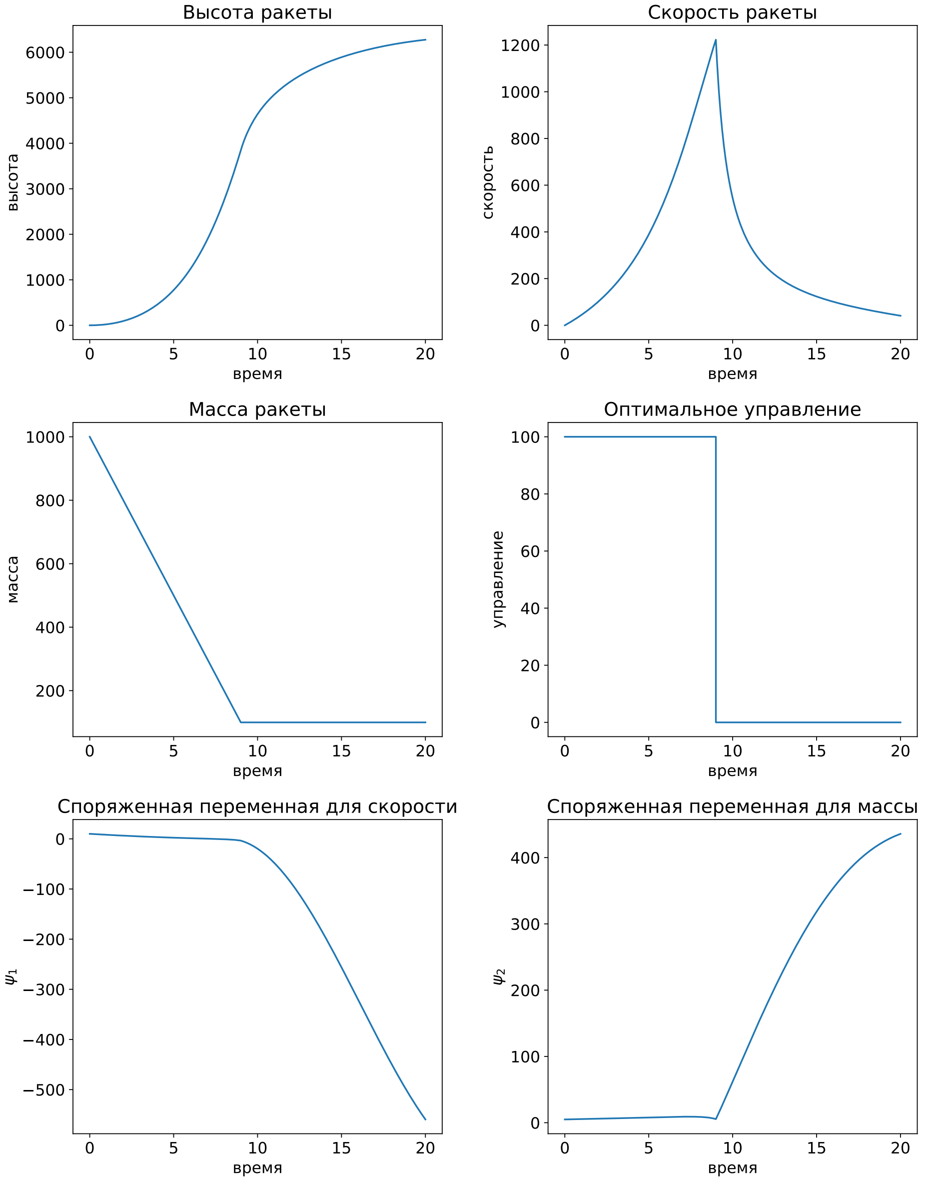

Рис. 2: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 0.1$, $T = 20$. Видно, что нарушены условия трансверсальности. Высота 6275.

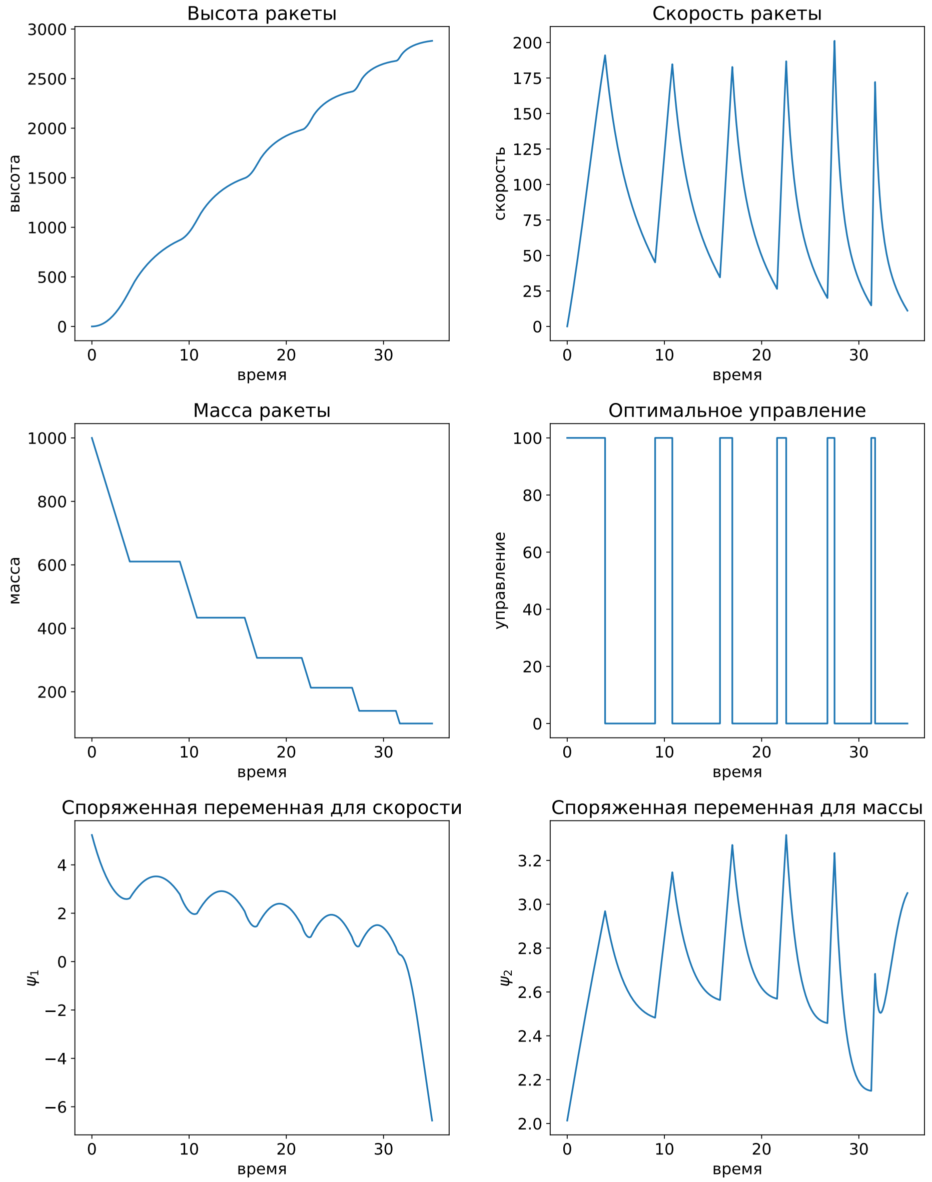

Рис. 3: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 35$. Высота 2881. Здесь также нарушено условие трансверсальности для сопряженной переменной по скорости. Заметим, что если бы T было, чуть меньше, то условие трансверсальности бы выполнилось ($\psi_1 = 0$). Но так как топливо заканчивается и мы не можем сделать еще одно переключение, то вся красота ломается. Поэтому непереборный алгоритм тут не работает. Так же в этом случае не рассматривался особый режим, из-за чего возникает большое количество переключений, которые можно избежать.

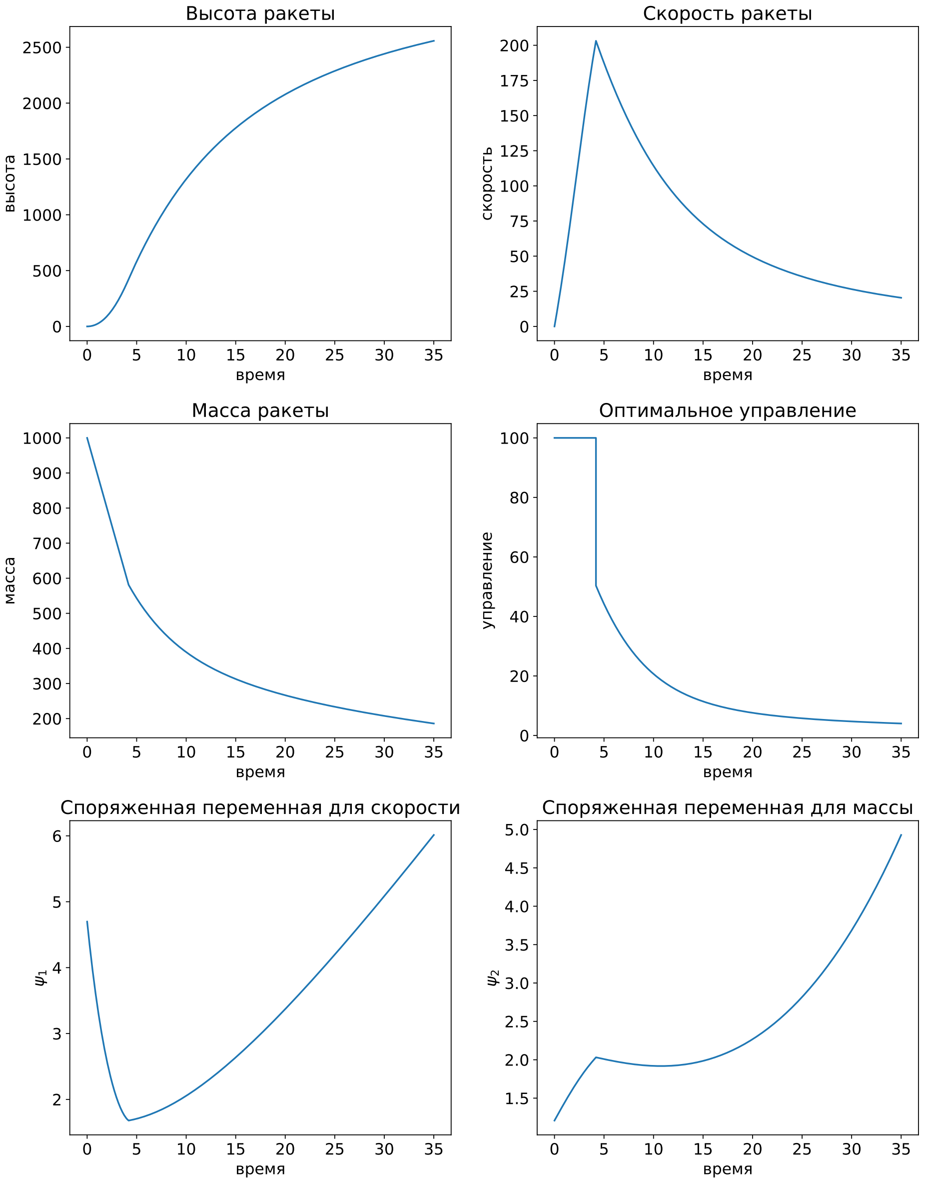

Рис. 4: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 35$. Высота 2558. Здесь параметры такие же, как и в предыдущем слуае, но рассмотрен вариант, когда на первом переключении ракета входит в особый режим. Как видно, ОР не является оптимальным при данных параметрах.

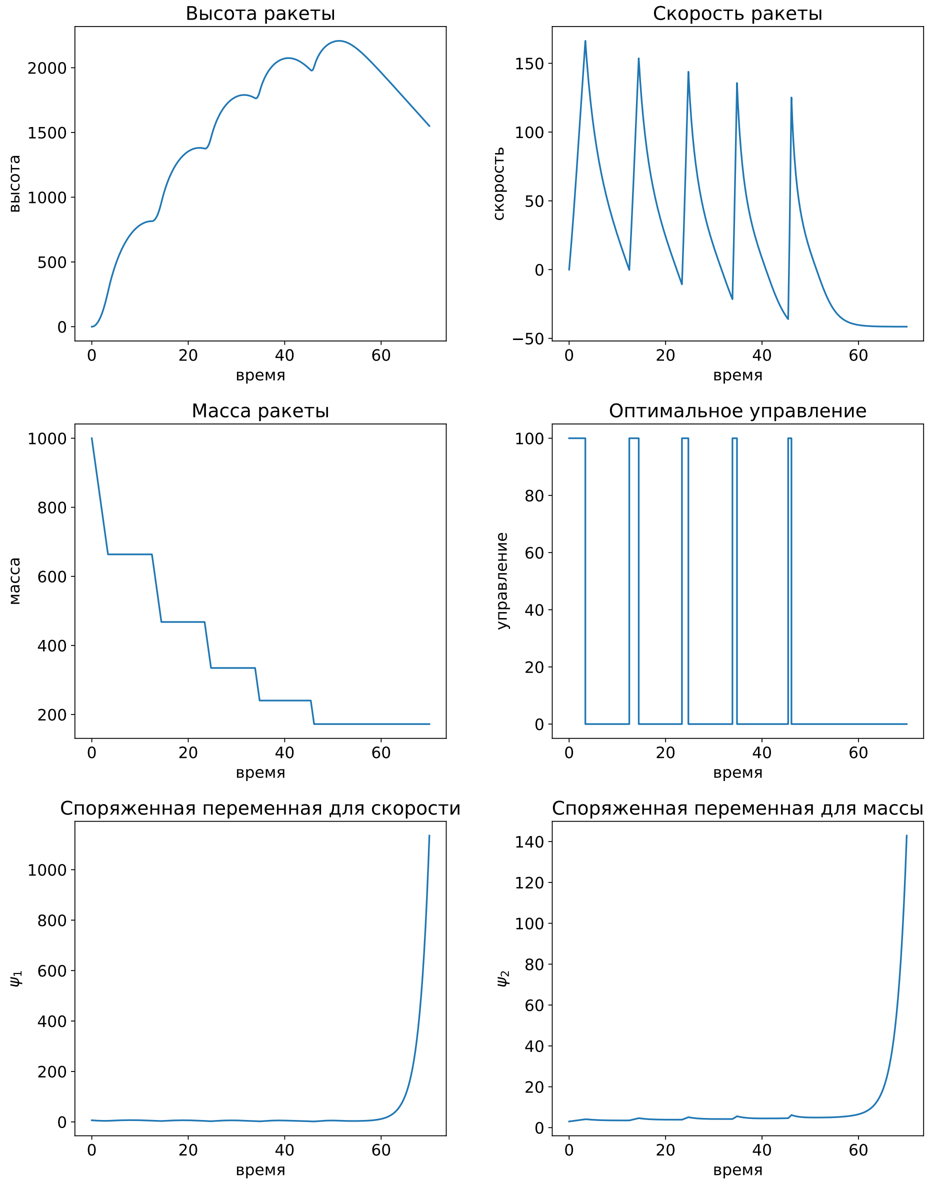

Рис. 5: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 70$. Высота 1550. В данном случае мы увеличили временной интервал с 35 до 70. Рассматриваются только регулярные решения.

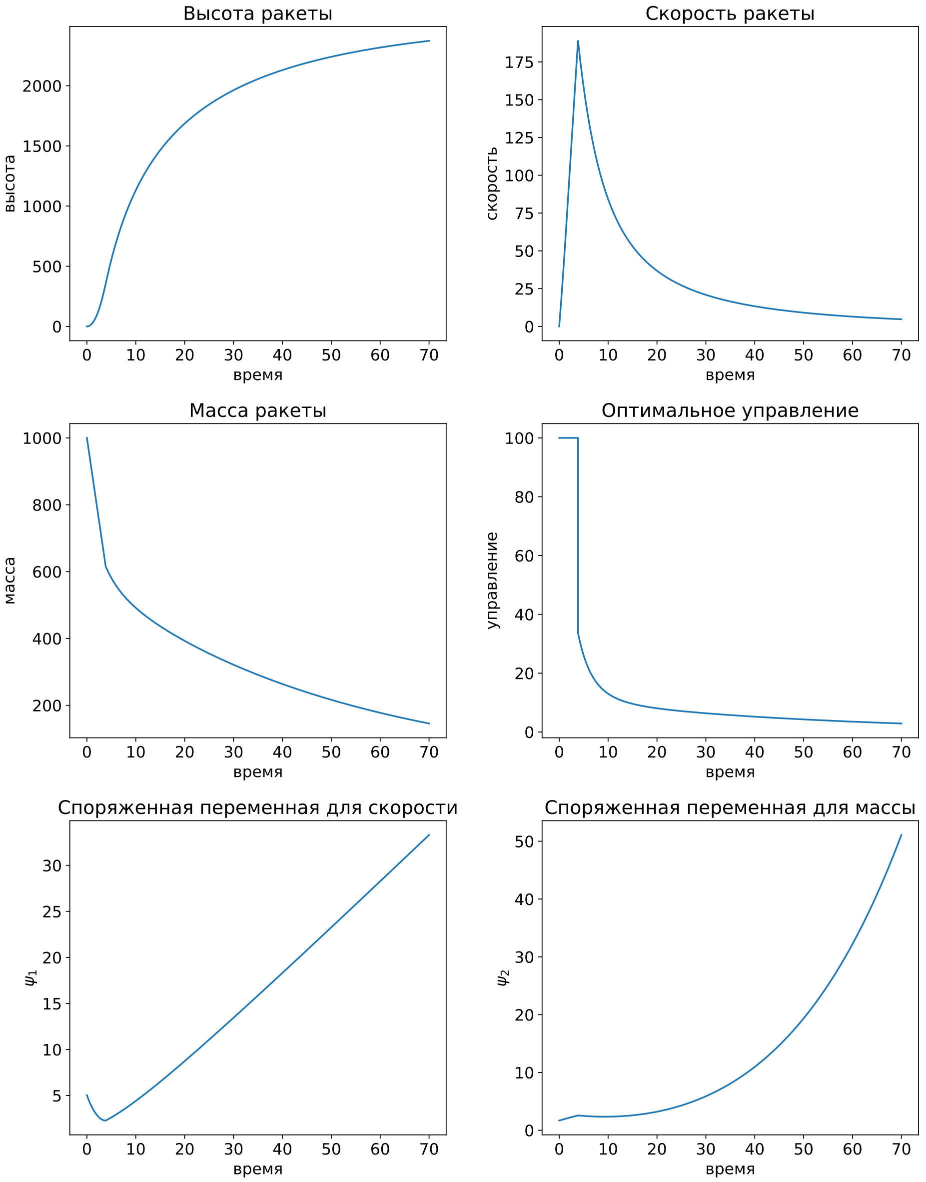

Рис. 6: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 70$. Высота 2373. Однако если при данных параметрах рассмотреть особый режим, то виден выйгрыш в высоте примерно в 1,5 раза.

4. Решение задачи 2

Как и в предыдущей задаче, положим $x_1 = v$, и $x_2 = m$. Дополнительно введем переменную x_3, отвечающую за высоту. Тогда система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g - \dfrac{kx_1^2}{x_2} + \dfrac{u}{x_2}(l + x_1) \\ \dot{x}_2 = -u \\ \dot{x}_3 = x_1 \\ \int\limits_0^T e^{-\alpha t} u(t)\, dt \to \min . \end{cases} \tag{12}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathscr{H} = \psi_0 e^{-\alpha t} u(t) + \psi_1 \left[-g - \frac{kx_1^2}{x_2} + \frac{u}{x_2}(l + x_1) \right] - \psi_2 u + \psi_3 x_3. \tag{13}$$

Сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_0 + \dfrac{2k\psi_1 x_1^2}{x_2} - \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{k\psi_1 x_1^2}{x_2^2} + \dfrac{\psi_1 u}{x_2^2}(l + x_1) \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Заданы следующие ограничения на значения переменный в начале и в конце:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad u(0) \geqslant \frac{m_0 g}{l}.$$

Последнее из этих условий гарантирует, что ракета не упадет в начале. Также заданы условия на правом конце и условия трансверсальности:

$$\psi_1(T) = 0, \quad x_3(T) = H.$$

Как и в предыдущей задаче определим функцию, от значений которой будет зависеть управление:

$$F = \psi_0 x_2 e^{-\alpha t} + \psi_1(x_1 + l) - \psi_2 x_2. \tag{15}$$

Тогда оптимальное управление:

$$u^* = \begin{cases} u_{max}, & \text{если } F > 0, \\ [0, u_{max}], & \text{если } F = 0, \\ 0, & \text{если } F < 0, \end{cases} \tag{16}$$

4.1. Анормальный случай

В данной задаче анормальный случай является просто задачей 1, поэтому считаем, что анормальный случай уже рассмотрен и далее будет рассматриватсья только случай, когда $\psi_0 \equiv -1$.

4.2. Особый режим

Рассмеотрение особого режима практически не отличается от 1 задачи: точно так же рассматриваются первая и вторая производная функции (15). Различия в управлении в особом режиме минимальны: по одному слагаемому добавляется в числитель и знаменатель дроби:

$$u^*_{sm} = \frac{\alpha^2 x_2^3 e^{-\alpha t} + 2gkl\psi_1 x_2 + 6gk\psi_1 x_1 x_2 - 2gx_2^2 - 2k^2 l\psi_1 x_1^2 + 2klx_1 x_2 + kx_1^2 x_2}{-\alpha x_2^2 e^{-\alpha t} + g\psi_1 x_2 + 2kl^2\psi_1 + 6kl\psi_1 x_1 + 4k\psi_1 x_1^2 - lx_2 - x_1 x_2}. \tag{17}$$

4.3. Алгоритм численного решения

Отличия от алгоритма решения задачи 1 несущественны. Здесь так же рассматривается переборный алгоритм по начальным условиям на сопряженные переменный. Рассматривать ψ_3 нет необходимости, так как переключения между режимами не зависят от нее. Потому перебором по начальным условиям находятся все управления, подозрительные на оптимальные и затем среди них выбирается то, которое приводит на высоту, максимально близкую к H. Так же, как и в первой задаче отдельно рассматриваются решения без ОР и с ОР.

4.4. Результаты численного моделирования

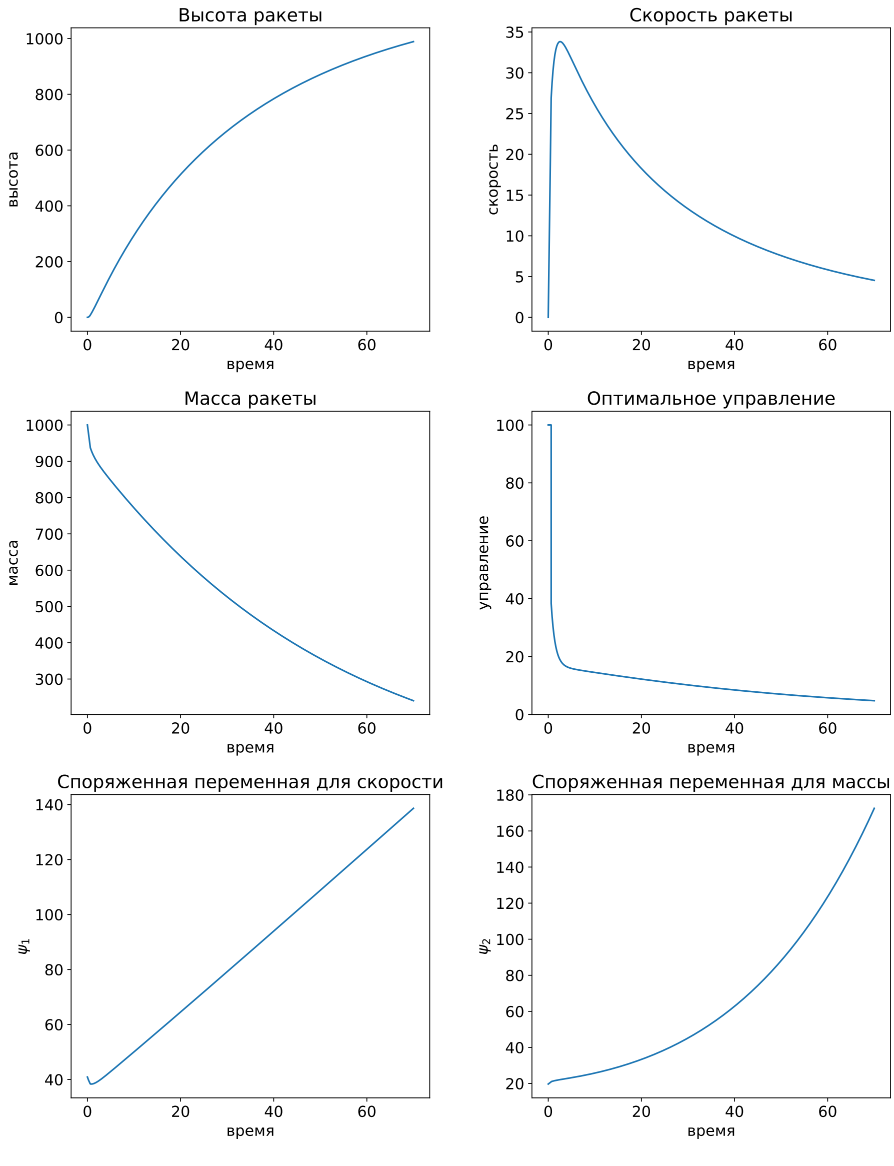

Рис. 7: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 70$, $\alpha = 1$, $H = 1000$. Значение функционала: 3,0757. Как видно, при данных параметрах оптимальным будет ОР.

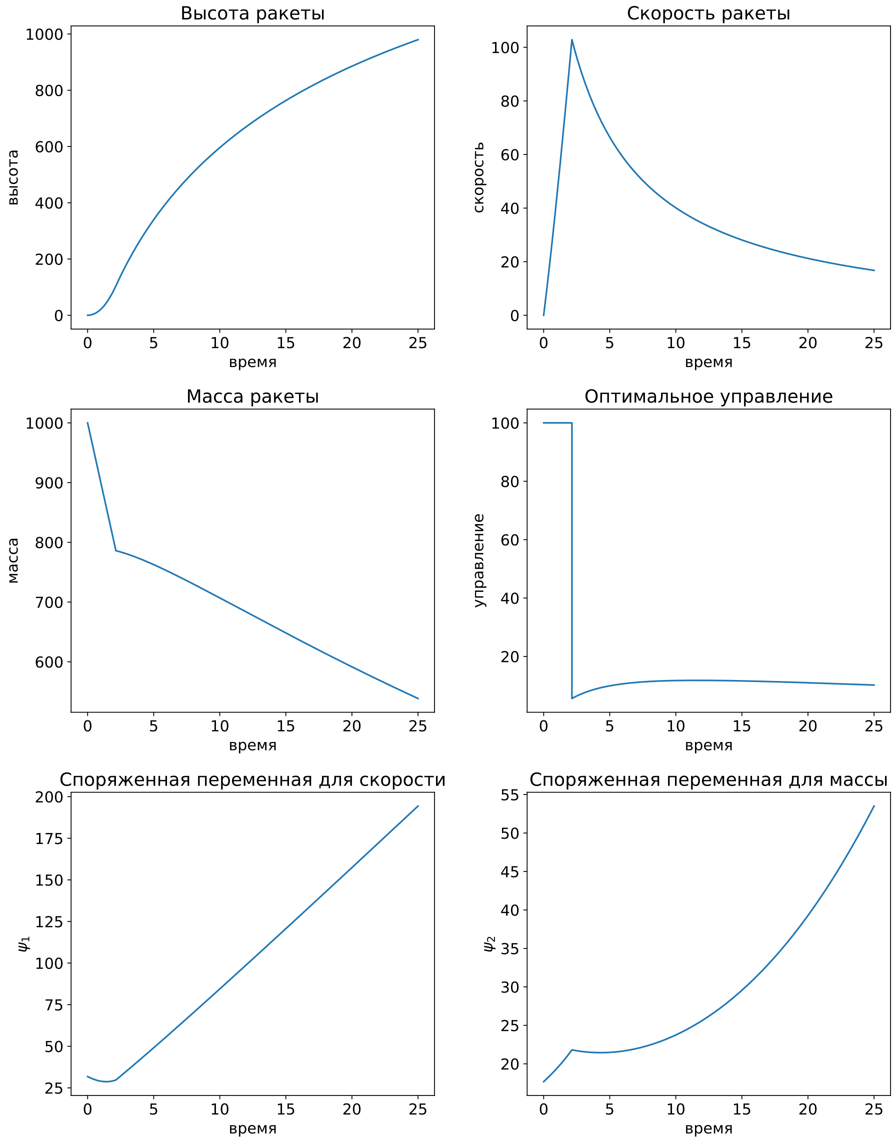

Рис. 8: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 25$, $\alpha = 10^{-3}$, $H = 1000$. Значение функционала: 221,38. Здесь также выгоден ОР.

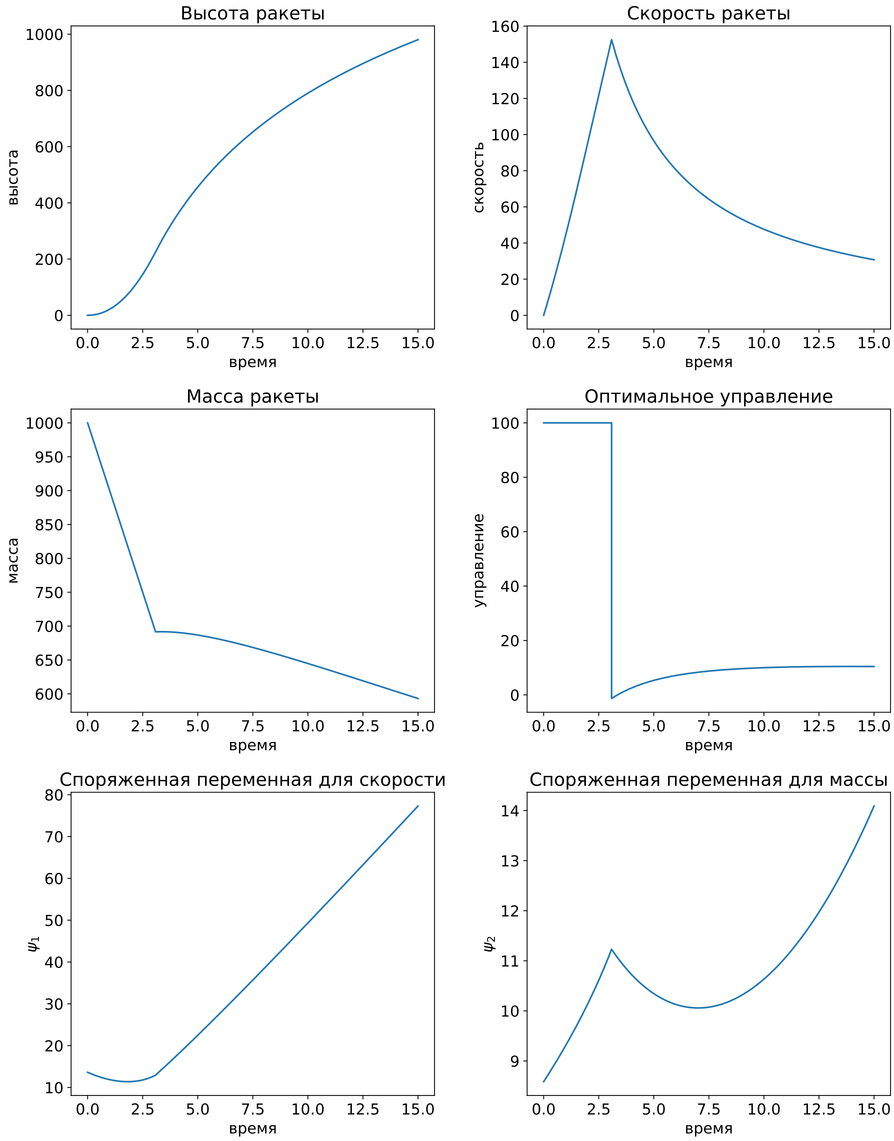

Рис. 9: Параметры: $m_0 = 1000$, $M = 100$, $l = 500$, $u_{max} = 100$ $g = 10$, $k = 1$, $T = 15$, $\alpha = 10^{-3}$, $H = 1000$. Значение функционала: 13,63. Снова ОР.

Список литературы

[1] А. Комаров Ю. Лекции по оптимальному управлению. Москва, 2020.