Теоремы о зависимости решения от начальных данных

Сегодня мы затронем вопросы зависимости решения по Каратеодори от начальных данных, а именно исследуем непрерывность и дифференцируемость.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t)), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{ЗК}$$

её решение будем обозначать$x[t] = x(t, t_0, x^0)$.

Вопрос 1: когда $x(t, t_0, x^0)$ непрерывна по (t, t_0, x^0)? *Отдельно по t решение $x[t]$ всегда непрерывно по определению решения* (ЗК).

Вопрос 2: когда $x(t, t_0, x^0)$ дифференцируема по x^0, а $\dfrac{\partial x}{\partial x^0}(t, x, x^0)$ непрерывна по (t, t_0, x^0).

Для линейных систем всё просто: если $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + c(t)$, то

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, s)c(s)ds.$$

Поскольку $X(t, t_0)$ непрерывна, ответ на первый вопрос «да». А что с дифференцируемостью? Обозначим

$$Y[t] = \frac{\partial x(t)}{\partial x^0} = X(t, t_0),$$

решение этого матричного дифференциального уравнения:

$$Y[t] = Y(t, t_0, x^0).$$

Если мы его продифференцируем, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = A(t)Y[t], \\ Y[t_0] = E, \end{cases}$$

то есть здесь всё снова следует из общего вида решения.

Для систем общего вида:

- Вопрос 1 — ответ «да» (при накладываемых условиях на $g(t, x)$);

- Вопрос 2 — ответ «да» при условии, что существует $\exists\dfrac{\partial g}{\partial x}$ измерима по t и непрерывна по x.

Продифференцируем $\dot{x}[t] = g(t, x[t])$ по x^0:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial x(t, t_0, x^0)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(g(t, x(t, t_0, x^0))\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x(t, t_0, x^0)}{\partial x^0}\right) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^0}.$$

Вновь обозначив $Y[t] = \dfrac{\partial x}{\partial x^0}$, получим уравнение в вариациях:

$$\frac{\partial Y[t]}{\partial t} = \frac{\partial g(t, x[t])}{\partial x} Y[t],$$

начальное условие снова

$$Y[t_0] = E.$$

Помимо тех теорем, которые будут рассмотрены сегодня, существуют также и более общие, например, теорема Понтрягина о зависимости от параметра μ, но они нам в курсе не понадобятся.

1 Непрерывность

Мы сформулируем частный случай теоремы о непрерывной зависимости.

Будем предполагать, что

$$g\colon [T_0, T_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad -\infty \leqslant T_0 < T_1 \leqslant +\infty.$$

Кроме того, мы будем накладывать на $g(t, x)$ следующие ограничения $(\star)$:

1. $g(t, x)$ измерима по $t \in [T_0, T_1]$ для всех $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(t, x)$ непрерывна по x для п. в. $\dot{\forall} t \in [T_0, T_1]$;

2. $\exists L = const > 0$: $\|g(t, x') - g(t, x'')\| \leqslant L\,\|x' - x''\|$ для всех $\forall x', x'' \in \mathbb{R}^n$ и п. в. $\dot{\forall} t \in [T_0, T_1]$;

3. $\exists A, B = const, A > 0, B > 0$: $\|g(t, x)\| \leqslant A\,\|x\| + B$ для всех $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $\dot{\forall} t \in [T_0, T_1]$.

Пусть $T_0 < \tau < T_1$. Мы будем рассмтривать чуть более общий вид системы:

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)), \tag{1}$$

$$x(\tau) = \xi, \tag{2}$$

где $\tau \in (T_0, T_1)$.

Определение 1. *Функция $y(\cdot)$ называется ε-решением (1), если $y(\cdot) \in AC([\tau_0, \tau_1, \mathbb{R}^n])$ и $\|\dot{y}(t) - g(t, y(t))\| \leqslant \varepsilon$ для п. в. $\dot{\forall} t \in [\tau_0, \tau_1]$.*

Лемма 1. *Пусть $y^1(\cdot)$ — ε_1-решение (1), а $y^2(\cdot)$ — ε_2-решение (1), при этом $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0$, y^1, y^2 определены на $[\tau_0, \tau_1]$, $T_0 < \tau_0 < \tau < \tau_1 < T_1$ и $\|y^1(\tau) - y^2(\tau)\| \leqslant \delta$. Тогда*

$$\left\|y^1(t) - y^2(t)\right\| \leqslant \delta \mathbf{e}^{L|t-\tau|} + \frac{\varepsilon}{L}\left(\mathbf{e}^{L|t-\tau|} - 1\right),$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqslant 0$, $\tau_0 < t < \tau_1$.

Доказательство. Рассмотрим две функции

$$z^j(t) = \dot{y}^j(t) - g(t, y^j(t));$$

$\|z^j(t)\| \leqslant \varepsilon_j$ для п. в. $\dot{\forall} t$.

Очевидно, что $z^j(\cdot)$ — измеримы. Имеем:

$$y^j(t) - y^j(\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} g(s, y^j(s))ds = \int\limits_{\tau}^{t} z^j(s)ds.$$

Вычтем одно равенство из другого:

$$\left(y^1(t) - y^2(t)\right) - \left(y^1(\tau) - y^2(\tau)\right) -$$

$$- \int\limits_{\tau}^{t} \left[g(s, y^1(s)) - g(s, y^2(s))\right] ds = \int\limits_{\tau}^{t} \left[z^1(s) - z^2(s)\right] ds.$$

Обозначим $\Delta y(t) = y^1(t) - y^2(t)$, $r(t) = \|\Delta y(t)\|$, тогда

$$r(t) \leqslant r(\tau) + L \int\limits_{\min(t,\tau)}^{\max(t,\tau)} r(s)ds + \varepsilon\,|t - \tau|\,. \tag{3}$$

Не ограничивая общности, будем предполагать $t > \tau$. Обозначим $\dot{R}(t) = r(t)$, тогда, в силу условия $r(\tau) \leqslant \delta$, получим:

$$\dot{R}(t) - LR(t) \leqslant \delta + \varepsilon(t - \tau).$$

Домножая на $\mathbf{e}^{-Lt}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(R\mathbf{e}^{-Lt}\right) \leqslant (\delta + \varepsilon(t-\tau))\mathbf{e}^{-Lt}.$$

Проинтегрировав на отрезке времени от τ до t, получим

$$R(t)\mathbf{e}^{-Lt} - R(\tau)\mathbf{e}^{-L\tau} \leqslant \frac{\delta}{L}\left(\mathbf{e}^{L\tau} - \mathbf{e}^{-Lt}\right) - \frac{\varepsilon\tau}{L}\left(\mathbf{e}^{-L\tau} - \mathbf{e}^{-Lt}\right) +$$

$$\frac{\varepsilon}{L}\left(\tau\mathbf{e}^{-L\tau} - t\mathbf{e}^{-Lt}\right) + \frac{\varepsilon}{L^2}\left(\mathbf{e}^{-L\tau} - \mathbf{e}^{-Lt}\right).$$

Домножим всё на $\mathbf{e}^{Lt}$, получим:

$$R(t) \leqslant \frac{\delta}{L}\left(\mathbf{e}^{L(t-\tau)} - 1\right) - \frac{\varepsilon}{L}(t-\tau) + \frac{\varepsilon}{L^2}\left(\mathbf{e}^{L(t-\tau)} - 1\right).$$

Это неравенство можно подставить в оценку (3) (за $R(t)$ мы обозначили интеграл, стоящий справа от знака неравенства):

$$r(t) \leqslant \delta + \delta\left(\mathbf{e}^{L(t-\tau)} - 1\right) + \varepsilon\left(\frac{\mathbf{e}^{L(t-\tau} - 1}{L} - (t-\tau) + (t-\tau)\right).$$

Приводя слагаемые, получим оценку из условия леммы. ■

Рассмотрим $x(t,\tau,\xi)$ — решение (1), (2).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия ($\star$). Тогда в области $(T_0,T_1)^2 \times \mathbb{R}^n$ решение $x(t,\tau,\xi)$ непрерывно.*

Доказательство. Обозначим $V = (T_0,T_1)^2 \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим последовательность:

$$x^{(0)}(t,\tau,\xi) = y[t] + \xi - y[\tau],$$

где $y[t] = x(t,t_0,x^0)$ для некоторого t_0: $T_0 < t_0 < T_1$.

$$y[t] = y[\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} g(s,y[s])ds.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ определим

$$x^{(k)}(t,\tau,\xi) = \xi + \int\limits_{\tau}^{t} g(s,x^{(k-1)}(s,\tau,\xi))ds.$$

Тогда

$$\left\|x^{(0)}(t,\tau,\xi) - y[t]\right\| = \left\|\xi - y[\tau]\right\|,$$

$$\left\|x^{(1)}(t,\tau,\xi)-x^{(0)}(t,\tau,\xi)\right\| =$$
$$= \left\|\int\limits_{\tau}^{t}\left[g\left(s,x^{(0)}(s,\tau,\xi)\right)-g(s,y[s]))\right]\right\| ds \leqslant$$
$$\leqslant L\left\|\xi-y[\tau]\right\|\left|t-\tau\right|.$$

Для произвольного $k\in\mathbb{N}$:

$$\left\|x^{(k+1)}(t,\tau,\xi)-x^{(k)}(t,\tau,\xi)\right\| \leqslant \frac{L^{k+1}\left|t-\tau\right|^{k+1}}{(k+1)!}\left\|\xi-y[\tau]\right\|,$$

т. е.

$$\left\|x^{(k+1)}(t,\tau,\xi)-x^{(k)}(t,\tau,\xi)\right\|\to 0$$

при $k\to\infty$, причём равномерно на любом $\forall K$ — компакте из V. Значит, $x^{(k)}$ равномерно сходится на нём (в силу сходимости в C).

Тогда имеем:

$$\left\|x^{(k)}(t,\tau,\xi)-y[t]\right\| \leqslant \left\|x^{(k)}(t,\tau,\xi)-x^{(k-1)}(t,\tau,\xi)\right\| +$$
$$+\left\|x^{(k-1)}(t,\tau,\xi)-y[t]\right\| \leqslant \{\text{ряд Тейлора}\} \leqslant \mathbf{e}^{L|t-\tau|}\left\|\xi-y[\tau]\right\|.$$

Т. к. $x(t,\tau,\xi)=\xi+\int\limits_{\tau}^{t}g(s,x(s,\tau,\xi))ds$, то

$$x^{(k)}(t,\tau,\xi)\rightrightarrows x(t,\tau,\xi),\ k\to\infty$$

и выполняется оценка

$$\left\|x(t,\tau,\xi)-y[t]\right\|\leqslant \mathbf{e}^{L|t-\tau|}\left\|\xi-y[\tau]\right\|.$$

Из непрерывности $y[t]$ (в силу $(\star)$) следует непрерывность $x^{(k)}(t,\tau,\xi)$, а значит, и непрерывность $x(t,\tau,\xi)$. ■

Следствие 1. $x(t,\tau,\cdot)$ *является гомеоморфизмом (топологическое отображение), т. е.* $x(t,\tau,\cdot)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *взаимно однозначное, непрерывное и обратно непрерывное отображение:*

$$x^{-1}(t,\tau,\cdot)=x(\tau,t,\cdot).$$

Следствие 2.

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),\\ x(t_0)=x^0,\ \ u(t)\in\mathscr{P}(t).\end{cases}$$

$\mathscr{X}[t]=\mathscr{X}(t,t_0,x^0)$. *Тогда если* $\xi\in int\mathscr{X}[\tau]$, *то* $\forall t>\tau$, $\forall u(\cdot)$ *для* $s\in[\tau,t]$

$$x[s]=x(s,\tau,\xi|u(\cdot))\in int\mathscr{X}[s].$$

Замечание 1. *Если* $\xi \in int\mathscr{X}[\tau]$, *то некоторая окрестность* $U_\delta(\xi) \subseteq \mathscr{X}[\tau]$. *Возьмём* $x \in U_\delta(\xi)$ *и рассмотрим* $y[s] = x(s, \tau, x|u(\cdot))$ *(управление* $u(\cdot)$ *такое же).*

$$\bigcup_{x \in U_\delta(\xi)} \{y[s]\} \subseteq \mathscr{X}[s] \Rightarrow x[s] \in int \bigcup_{x \in U_\delta(\xi)} \{y[s]\}.$$

Замечание 2. *Таким образом, если в нелинейной системе траектория движется по границе трубки достижимости и в какой-то момент «проваливается» внутрь неё, то снова оказаться на границе траектория не сможет. В соответствии с принципом максимума, такая траектория может уже не быть оптимальной, например, в задаче быстродействия. Отличие от линейных систем здесь в том, что для последних траектория уйти с границы не может.*

2 Дифференцируемость

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $(\star)$ *и, кроме того, производная* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *существует для всех* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\forall} t \in [T_0, T_1]$, *измерима по* t, *непрерывна по* x, *а также удовлетворяет следующему условию регулярности:*
пусть для любых $\forall \tau_0, \tau_1$: $T_0 < \tau_0 < \tau_1 < T_1$, *для любых* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall D \subseteq \mathbb{R}^n$, D *— непустой компакт, существует* $\exists \delta(\varepsilon, \tau_0, \tau_1, D) > 0$:

$$\forall x', x'' \in D\colon \ \|x' - x''\| \leqslant \delta, \forall t \in [\tau_0, \tau_1] \Rightarrow$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x}(t, x') - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x'')) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда $\exists \left. \dfrac{\partial x(t, \tau, \xi))}{\partial \xi} \right|_{(t, t_0, x^0)} = Y(t, \tau, \xi)$, $Y[\cdot] \in AC$, *удовлетворяющая уравнению в вариациях*

$$\dot{Y}[t] = \frac{\partial g(t, x(t, \tau, \xi))}{\partial x} Y[t], \tag{УВ}$$

$$Y[\tau] = E.$$

Доказательство. Обозначим $y[t] = x(t, \tau, \xi^0)$. Зафиксируем $\forall h \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим $x_h[t] = x(t, \tau, \xi^0 + \alpha h)$. Обозначим норму разности этих решений

$$\vartheta_h(t, \tau, \xi^0, \alpha) = x_h[t] - y[t].$$

Существует ли $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)}{\alpha}$ (на некотором компакте $|\alpha|\leqslant\alpha_0$)? Поскольку $y[t]$ и $x_h[t]$ являются решениями исходной системы, они также являются её ε-решениями с $\varepsilon=0$. Мы можем применить лемму 1 для того, чтобы оценить ϑ_h:

$$\big\|\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)\big\|\leqslant|\alpha|\,\|h\|\,\mathbf{e}^{L|t-\tau|}\xrightarrow[\alpha\to 0]{}0,$$

причём сходимость равномерна по (t,τ,ξ) в пределах произвольного компакта.

Теперь продифференцируем ϑ_h по времени. Для п. в. $\dot\forall t$:

$$\frac{d\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)}{dt}=g(t,x_h[t])-g(t,y[t])=$$

$$=\{\text{ф-ла конечных приращений}\}=$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}(t,y[t]+\beta(t)(x_h[t]-y[t]))\right]\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)=**$$

Пусть τ_0,τ_1: $T_0<\tau_0<\tau_1<T_1$ и $D\in\mathbb{R}^n$, D — компакт, таковы, что $\forall t\in[\tau_0,\tau_1]$, $\forall\beta\in[0,1]$, $\forall\tau\in[\tau_0,\tau_1]$ и
$\forall\alpha\colon\ |\alpha|\leqslant\alpha_0\Rightarrow y[t]+\beta\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)\in D$. *Это возможно ввиду ограниченности $y[t]$ и полученной оценки на ϑ_h.*

Из условия регулярности на g:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,\tau_0,\tau_1,D)>0\colon$$

$$\left\|\frac{\partial g(t,y[t])}{\partial x}-\frac{\partial g(t,y[t]+\beta[t]\vartheta_h)}{\partial x}\right\|\leqslant\varepsilon\ \text{при}\ \ \|\vartheta_h\|\leqslant\delta.$$

Обозначим разность производных, стоящих под знаком нормы, за $-\Gamma$.

Тогда

$$**=\left[\frac{\partial g}{\partial x}(t,y[t])+\Gamma\right]\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)=$$

$$=\big\{\gamma\colon\alpha\gamma=\Gamma\vartheta_h\Rightarrow\|\gamma\|\leqslant\|\Gamma\|\,\|h\|\,\mathbf{e}^{L|t-\tau|}\big\}=$$

$$=\frac{\partial g}{\partial x}(t,y[t])\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)+\gamma\alpha.$$

Введём новую функцию $\chi_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)=\dfrac{\vartheta_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)}{\alpha}$.

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}(t,\tau,\xi^0,\alpha)=\frac{\partial g}{\partial x}(t,y[t])\chi_h(t,\tau,\xi^0,\alpha)+\gamma,$$

т. е. χ_h - это $\tilde{\varepsilon}$-решение уравнения (УВ)

$$\dot{z}[t] = \frac{\partial g}{\partial x}(t, y[t])z[t]$$

с $\|\gamma\| \leqslant \tilde{\varepsilon}$. Покажем, что это действительно так.

Пусть $\psi_h[\cdot] = \psi_h(\cdot, \tau)$ — истинное решение (УВ) с начальным условием $\psi_h[\tau] = h$. Заметим, что

$$\chi_h(\tau, \tau, \xi^0, \alpha) = \frac{x_h[\tau] - y[\tau]}{\alpha} = \frac{\xi^0 + \alpha h - \xi^0}{\alpha} = h,$$

тогда

$$\left\|\chi_h(\tau, \tau, \xi^0, \alpha) - \psi_h(\tau, \tau)\right\| = 0.$$

Применим лемму 1 к (УВ): при $\delta = 0$, $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}$, $\varepsilon_2 = 0$ (т. е. $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}$) справедлива оценка

$$\left\|\chi_h(t, \tau, \xi^0, \alpha) - \psi_h(t, \tau)\right\| \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}}{L}\left(\mathbf{e}^{L|t-\tau|} - 1\right) < \varepsilon^0.$$

Это верно при $|\alpha| \leqslant \alpha_0$.

Двигаясь по цепочке $\varepsilon^0 \to \tilde{\varepsilon} \to \varepsilon \to \delta$, возспользуемся оценкой

$$\|\vartheta_h\| \leqslant |\alpha|\,\|h\|\,\mathbf{e}^{L|t-\tau|}$$

для получения

$$\forall \varepsilon^0 > 0 \exists \tilde{\alpha} > 0\colon\ |\alpha| \leqslant \tilde{\alpha} \Rightarrow \|\vartheta_h\| \leqslant \delta.$$

Это значит, что

$$\chi_h \rightrightarrows \psi_h \text{ при } \alpha \to 0$$

на компакте $K = [\tau_0, \tau_1]^2$. Значит, существует искомый предел.

$\lim \chi_h$ — производная по направлению h. Чтобы получить итоговое $Y[\cdot]$, найдём $\dfrac{\partial x}{\partial \xi_1}, \ldots, \dfrac{\partial x}{\partial \xi_n}$ *(по стандартному ОНБ)*, и положим столбцы Y равными этим частым производным. Тогда $Y[t]$ будет удовлетворяться матричному (УВ) и начальному условию $T[\tau] = E$. ■

Следствие 3. *Чувствительность к вариации в начале:*

$$x(t, \tau, \xi) = x(t, \tau, \xi^0) + Y(t, \tau, \xi^0)(\xi - \xi^0) + \bar{o}(\left\|\xi - \xi^0\right\|).$$

Следствие 4. *Когда выполнено условие регулярности из последней теоремы?*

Ответ: *когда* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,u)$ *непрерывна по* (t,x,u).

Поскольку $y(\cdot) \in L_\infty$, $\|u(\cdot)\| \leqslant C$. $\forall D \subset \mathbb{R}^n$, D *— компакт,* $\forall [\tau_0,\tau_1] \Rightarrow K = [\tau_0,\tau_1] \times D \times B_C(0)$ *следует, что* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *равномерно непрерывна на* K *(теорема Кантора), значит*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x''\colon \ \|x' - x''\| \leqslant \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x',u) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x'',u) \right\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in [\tau_0,\tau_1], \forall u \in B_C(0).$$

Следствие 5. *Применение теоремы:* ψ *— внешняя нормаль к* $\partial \mathscr{X}[t]$.