Уравнение Игры, 315

$$\dot{N} = N\left[r\left(1-\frac{N}{K}\right) - \frac{kD}{N+D}\right]$$

$$\dot{P} = sP\left(1-\frac{hP}{N}\right)$$

$$N = \frac{hDr}{k}u; \quad P = \frac{Dr}{k}v; \quad t = \frac{1}{r}\tau$$

Обезразмериваем:

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left[1 - au - \frac{v}{1+bu}\right] \\ \dot{v} = cv\left(1 - \frac{v}{u}\right) \end{cases}$$

здесь $a = \frac{hDr}{kK}$; $b = \frac{hr}{k}$; $c = \frac{s}{r}$; $a, b, c > 0$

2 положения равновесия: 2) $\begin{cases} 1 - au - \frac{v}{1+ba} = 0 \\ 1 - \frac{v}{u} = 0 \end{cases}$ 1) $\begin{cases} 1 - au - \frac{v}{1+bu} = 0 \\ v = 0 \end{cases}$

A_1 A_2

1) $\begin{cases} u = 1/a \\ v = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} v = u \\ 1 - au - \frac{u}{1+bu} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v = u \\ 1 + bu - au - abu^2 - u = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} v = u \\ u = \dfrac{-(a-b+1) \pm \sqrt{(a-b+1)^2 + 4ab}}{2ab} \end{cases}$$; берем только +.

$\Rightarrow \exists$ нетривиальное положение равновесия

$$v^* = u^* = \frac{-(a-b+1) + \sqrt{(a-b+1)^2 + 4ab}}{2ab} =: q$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 1 - au - \frac{v}{1+bu} - au + \frac{bvu}{(1+bu)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{u}{1+bu} \qquad J\Big|_{A_1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{a+b} \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{cv^2}{u^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} = c - \frac{2cv}{u} \qquad \operatorname{Tr} J\Big|_{A_1} = c - 1 \ ; \ \det J\Big|_{A_1} = -c \Rightarrow \text{седло}$$

$$J\Big|_{A_2} = \begin{pmatrix} -aq + \frac{bq^2}{(1+bq)^2} & -\frac{q}{1+bq} \\ c & -c \end{pmatrix} \quad \operatorname{Tr} J\Big|_{A_2} = -c - aq + \frac{bq^2}{(1+bq)^2}$$

$$\det J\Big|_{A_2} = cq\left(a - \frac{bq}{(1+bq)^2} + \frac{1}{1+bq}\right) = cq\left(a + \frac{1}{(1+bq)^2}\right) > 0 \text{ всегда} \Rightarrow$$

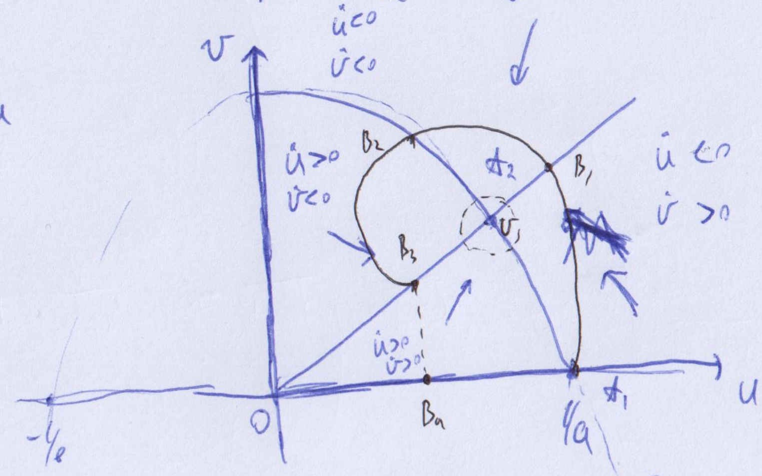
$\Rightarrow$ либо узел, либо фокус. (уст. $\Leftrightarrow \operatorname{Tr} J\big|_{A_2} < 0$)

$$\operatorname{Tr} J\Big|_{A_2} = \frac{bq^2}{(1+bq)^2} - (aq + c) \Rightarrow \text{ уст} \Leftrightarrow \frac{bq^2}{(1+bq)^2} < aq + c$$

нарисуем картинку и посмотрим, в каких областях и куда мы поедем!

$$\dot{u} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ v = (1-au)(1+bu) \end{array}\right.$$ — парабола с ветвями вниз и корнями $\frac{1}{a}$ и $-\frac{1}{b}$

$$\dot{v} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = u \end{array}\right.$$



Как видно, отовсюду едем к точке A_2 $\Rightarrow$ $\exists$ область захвата в $\mathrm{int}\, \mathbb{R}^2_+$

Для теоремы Бендиксона-Пуанкаре выпустим траекторию из A_1 и посмотрим как поедет (по стрелочкам). Тогда мн-во, огр. $A_1 B_1 B_2 B_3 B_4 A_1$ будет положительно инвариантно.

Если $\mathrm{Tr}\, J|_{A_2} > 0$, то неуст. пол. равн $\Rightarrow$ U будет отрицательно инвариантно $\Rightarrow$ в области $A_1 B_1 B_2 B_3 B_4 A_1 \setminus U$ будет замк. траектория по ТБП