

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Численные методы, продолжение Интеграция с языками C/C++

ВАРИАНТ 1

При выполнении заданий 6-7 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков C/C++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [2]. Реализовать мех-функцию `[x1 x2 D] = quadsolve(A, B, C)` на языке C, которая решает квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$, возвращает два его корня и дискриминант D . Все числа комплексные. Выходной аргумент D может быть не указан. Если выходных аргументов меньше двух или больше трёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами **Matlab**.

2 [2]. Реализовать функции `B = inv_matlab(A)`, `B = inv_c(A)`, реализующие обращение матрицы методом Гаусса, с использованием простейших средств Матлаба (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя) и с использованием C (мех-функция).

3 [1]. Сравнить точность функций `inv`, `linsolve` (стандартные матлабовские функции), `inv_matlab`, `inv_c` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

4 [1]. Сравнить быстродействие функций `inv`, `linsolve`, `inv_matlab`, `inv_c` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

5 [1] (*). Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n ($s = \text{inv}, \text{inv_c}, \dots$). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.

6 [7]. Дана следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) - \mu \cdot u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x, 0) &\equiv u(x, 1) \equiv \xi(x), \quad u(0, y) \equiv u(1, y) \equiv \eta(y), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mu > 0, f \in C^1([0, 1] \times [0, 1]), \xi, \eta \in C^1([0, 1]), \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1).$$

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\frac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \frac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell}, \quad (2)$$

$$y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}.$$

Здесь $h_x = 1/M$, $h_y = 1/N$, значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x, y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M$, $y_\ell = \ell/N$, $\varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell)$, $\xi_k = \xi(x_k)$, $\eta_\ell = \eta(y_\ell)$.

- Реализовать численный метод и подобрать примеры

Написать функцию `solveDirichlet(fHandle, xiHandle, etaHandle, mu, M, N)`, возвращающую матрицу размера $M \times N$ с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` соответствуют `function handle` функций $f(x, y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$, а `mu`, `M` и `N` определяют значения параметров μ , M , N . Реализовать в **Matlab** несколько функций общего вида для подстановки в `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

- Проверить корректность работы численного алгоритма

Для функции $f(x, y)$, указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в **Matlab** функцию `fGiven`, так чтобы можно было взять `fHandle=@fGiven`.

Для этой конкретной функции $f(x, y)$ решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции `uAnalytical(xMat, yMat, u1Zero, u2Zero, mu)`, где `xMat` и `yMat` соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y , а `u1Zero`, `u2Zero` и `mu` дают значения скалярных параметров u_1^0 , u_2^0 и μ , соответственно.

Написать функцию `uNumerical(u1Zero, u2Zero, mu, M, N)`, которая передает на вход функции `solveDirichlet` параметры

- `fHandle=@fGiven`,
- `xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu)`,
- `etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)`

и возвращает результат работы `solveDirichlet` (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N , нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

7 [4] (*). Создать в системе L^AT_EX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачи с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции $f(x, y)$, указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0 , не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
4. Для данной конкретной функции $f(x, y)$ привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ , M , N , u_1^0 и u_2^0 .
5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функций $f(x, y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что $u(x, y)$ не обязательно представима в виде суммы $u_1(x) + u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ , M и N .
6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Численные методы, продолжение Интеграция с языками C/C++

ВАРИАНТ 2

При выполнении заданий 6-7 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков C/C++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [2]. Реализовать мех-функцию `[x1 x2 x3] = cubesolve(A, B, C)` на языке C, которая решает кубическое уравнение $Ax^3 + Bx + C = 0$, возвращает три его корня. Все числа комплексные. Выходной аргумент `x3` может быть не указан. Если выходных аргументов меньше двух или больше трёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами **Matlab**.

Указание. Формула для решения ищется через замену $x = w - \frac{B}{3Aw}$.

2 [2]. Реализовать мех-функцию `[A, B, C, D] = createspline_c(x, f)`, рассчитывающую коэффициенты кубического сплайна по вектору значений функции f , заданных на узлах сетки x . Реализовать аналогичную функцию `[A, B, C, D] = createspline_m(x, f)` простейшими средствами **Matlab** (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя).

3 [1]. Сравнить точность функций `interp1` (с ключом `spline`), `spline` (стандартные матлабовские функции), `createspline_c`, `createspline_m` для сеток различной длины, построив соответствующие графики.

4 [1]. Сравнить быстродействие функций `interp1`, `spline`, `createspline_c`, `createspline_m` для сеток различной размерности, построив соответствующие графики.

5 [1] (*). Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n ($s = \text{spline}, \text{createspline}_c, \dots$). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.

6 [7]. Дана следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) - \mu \cdot u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x, 0) &\equiv u(x, 1) \equiv \xi(x), \quad u(0, y) \equiv u(1, y) \equiv \eta(y), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mu > 0, f \in C^1([0, 1] \times [0, 1]), \xi, \eta \in C^1([0, 1]), \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1).$$

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\frac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \frac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell}, \quad (2)$$

$$y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}.$$

Здесь $h_x = 1/M$, $h_y = 1/N$, значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x, y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M$, $y_\ell = \ell/N$, $\varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell)$, $\xi_k = \xi(x_k)$, $\eta_\ell = \eta(y_\ell)$.

- Реализовать численный метод и подобрать примеры

Написать функцию `solveDirichlet(fHandle, xiHandle, etaHandle, mu, M, N)`, возвращающую матрицу размера $M \times N$ с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` соответствуют `function handle` функций $f(x, y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$, а `mu`, `M` и `N` определяют значения параметров μ , M , N . Реализовать в **Matlab** несколько функций общего вида для подстановки в `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

- Проверить корректность работы численного алгоритма

Для функции $f(x, y)$, указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в **Matlab** функцию `fGiven`, так чтобы можно было взять `fHandle=@fGiven`.

Для этой конкретной функции $f(x, y)$ решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции `uAnalytical(xMat, yMat, u1Zero, u2Zero, mu)`, где `xMat` и `yMat` соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y , а `u1Zero`, `u2Zero` и `mu` дают значения скалярных параметров u_1^0 , u_2^0 и μ , соответственно.

Написать функцию `uNumerical(u1Zero, u2Zero, mu, M, N)`, которая передает на вход функции `solveDirichlet` параметры

```
- fHandle=@fGiven,  
- xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu),  
- etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)
```

и возвращает результат работы `solveDirichlet` (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N , нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

7 [4] (*). Создать в системе L^AT_EX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачи с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции $f(x, y)$, указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0 , не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
4. Для данной конкретной функции $f(x, y)$ привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ , M , N , u_1^0 и u_2^0 .
5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функций $f(x, y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что $u(x, y)$ не обязательно представима в виде суммы $u_1(x) + u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ , M и N .
6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Численные методы, продолжение Интеграция с языками C/C++

ВАРИАНТ 3

При выполнении заданий 6-7 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков C/C++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [2]. Реализовать `tex`-функцию `[x1 x2 x3 x4] = biquadsolve(A, B, C)` на языке C, которая решает биквадратное уравнение $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, возвращает четыре его корня. Все числа комплексные. Выходные аргументы `x3, x4` могут быть не указаны. Если выходных аргументов меньше двух или больше четырёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами `Matlab`.

2 [2]. Реализовать `tex`-функцию `[Q, R] = qr_c(A)`, рассчитывающую QR -разложение квадратной матрицы A методом Грама–Шмидта. Реализовать аналогичную функцию `[Q, R] = qr_m(A)` простейшими средствами `Matlab` (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя).

3 [1]. Сравнить точность функций `qr` (стандартная матлабовская функция), `qr_c`, `qr_m` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

4 [1]. Сравнить быстродействие функций `qr`, `qr_c`, `qr_m` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

5 [1] (*). Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n ($s = \text{qr}, \text{qr_c}, \text{qr_m}$). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.

6 [7]. Дана следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) - \mu \cdot u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x, 0) &\equiv u(x, 1) \equiv \xi(x), \quad u(0, y) \equiv u(1, y) \equiv \eta(y), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mu > 0, f \in C^1([0, 1] \times [0, 1]), \xi, \eta \in C^1([0, 1]), \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1).$$

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\frac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \frac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell}, \quad (2)$$

$$y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}.$$

Здесь $h_x = 1/M$, $h_y = 1/N$, значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x, y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M$, $y_\ell = \ell/N$, $\varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell)$, $\xi_k = \xi(x_k)$, $\eta_\ell = \eta(y_\ell)$.

- Реализовать численный метод и подобрать примеры

Написать функцию `solveDirichlet(fHandle, xiHandle, etaHandle, mu, M, N)`, возвращающую матрицу размера $M \times N$ с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` соответствуют `function handle` функций $f(x, y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$, а `mu`, `M` и `N` определяют значения параметров μ , M , N . Реализовать в `Matlab` несколько функций общего вида для подстановки в `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

- Проверить корректность работы численного алгоритма

Для функции $f(x, y)$, указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в `Matlab` функцию `fGiven`, так чтобы можно было взять `fHandle=@fGiven`.

Для этой конкретной функции $f(x, y)$ решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции `uAnalytical(xMat, yMat, u1Zero, u2Zero, mu)`, где `xMat` и `yMat` соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y , а `u1Zero`, `u2Zero` и `mu` дают значения скалярных параметров u_1^0 , u_2^0 и μ , соответственно.

Написать функцию `uNumerical(u1Zero, u2Zero, mu, M, N)`, которая передает на вход функции `solveDirichlet` параметры

- `fHandle=@fGiven`,
- `xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu)`,
- `etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)`

и возвращает результат работы `solveDirichlet` (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N , нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

7 [4] (*). Создать в системе `LATEX` отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачи с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции $f(x, y)$, указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0 , не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
4. Для данной конкретной функции $f(x, y)$ привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ , M , N , u_1^0 и u_2^0 .
5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функций $f(x, y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что $u(x, y)$ не обязательно представима в виде суммы $u_1(x) + u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ , M и N .
6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

Наборы функций к заданиям 6-7 о применении БПФ

1. Акимова Е.Д.: $f(x, y) = (4 - x^3) \sin(x) - 3ye^{4y} - \sin(2y)$
2. Алимгазиев С.М.: $f(x, y) = 3x^3e^x \cos(x) + y \sin(4y) - \cos(y)$
3. Белов А.И.: $f(x, y) = (1 - x) \sin(x) - 3y^2 \sin(3y)$
4. Биджиев Т.М.: $f(x, y) = -x \sin(x) + (4 + y)e^{-2y}$
5. Бутримайте Я.А.: $f(x, y) = \sin(5x) + 2x \cos(x) + (2 + y^3) \cos(2y)$
6. Воробьёва И.Б.: $f(x, y) = xe^{-x} \cos(x) + (2 + y) \cos(2y)$
7. Гилуть А.В.: $f(x, y) = e^{-3x} \sin(x) + 2y^2e^{5y}$
8. Елифанов Г.М.: $f(x, y) = (5 + x^2)e^{3x} - 2y \sin(5y)$
9. Карпикова П.В.: $f(x, y) = (2 - x^3) \cos(x) - 3ye^{-y} + 2 \cos(2y)$
10. Корнилов Д.В.: $f(x, y) = 2x^2 \cos(2x) - y^3e^{-y} \sin(y)$
11. Липатов Д.А.: $f(x, y) = -3e^{3x} \sin(2x) + (1 - y^2)e^y$
12. Рождественските А.Ю.: $f(x, y) = xe^{3x} + 2 \cos(3x) + 2ye^y \sin(y)$
13. Салихова К.И.: $f(x, y) = 2x^2e^{2x} + ye^{3y} \cos(2y)$
14. Сотников Д.М.: $f(x, y) = e^{2x} \cos(3x) - y^2e^y$
15. Труб М.И.: $f(x, y) = 2x \cos(6x) + 2e^{-y} \sin(3y)$
16. Удовиченко И.Р.: $f(x, y) = xe^{-4x} + \cos(x) + 2ye^{2y} \sin(2y)$
17. Федяшин Н.А.: $f(x, y) = -x^2 \sin(x) + y^3e^{3y} \cos(4y)$