Содержание

1 Введение

Определение 1.1. *Пусть функция f ограничена на $\mathbb{R}$, (2π)-периодична и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда* рядом Фурье *для этой функции будем называть такого крокодила:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt. \tag{1.2}$$

Сформулируем *достаточные условия Дирихле*:

Теорема 1.2. *$f(x)$ имеет на $[-\pi, \pi]$:*

1. *конечное число локальных экстремумов,*
2. *не более чем счетное число разрывов I рода.*

Тогда ряд (1.1) *сходится поточечно к* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Как всем известно с десткого сада, система функций $\{1, \cos kx, \sin kx\}$, $k \in \mathbb{N}$ образует в пространстве L_2 полную ортогональную систему. Но все любят экспоненты, поэтому можно сказать, что

$$1 = e^{i0x}, \quad \cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}.$$

Тогда система $\left\{e^{ikx}\right\}$, $k \in \mathbb{N}$ тоже будет полной. Пересчитаем коэффициенты:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Отсюда методом пристальново взгляда получаем формулы для коэффициентов c_k:

$$\begin{cases} c_{-k} & = (a_k + ib_k)/2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ c_0 & = a_0/2, \\ c_k & = (a_k - ib_k)/2, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где a_k, b_k считаются по формулам (1.2). Теперь немного физической интерпретации:

- $|c_k|$ — амплитуда комплексных гармонических колебаний,
- k — частота комплексных гармонических колебаний,
- $\arg c_k$ — начальная фаза.

Ну и для полного цимесу выпишем формулы для C_k через интеграл от экспоненты.

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt. \tag{1.3}$$

2 Обработка сигналов

Будем вертеть сигналами. Сигналами удобно вертеть не как есть, а в образах Фурье. Казалось бы, ну перегнал, ну покрутил там что-то и перегнал обратно. Но возникают 2 проблемы:

1. Интеграл в преобразовании Фурье несобственный в обе стороны.

2. Он может не считаться аналитически, тогда придется считать его численно, а значит, мы потеряем какую-то часть информации и что-то исказим.

Вот мы сейчас и займемся ковырянием этих искажений и попытаемся их уменьшить.

Дисклеймер: в этой главе все суммы и интегралы понимаются формально. Мы будем вертеть ими, как хотим, менять местами сумму и интеграл и ничего нам за это не будет. Пусть нам поступает некоторый сигнал $f(t)$.

Будем расматривать его дискретизацию: вектор значений $f(t)$ в некоторых точках: $f[n]$, $n = \overline{1, N}$. Точки, в которых мы знаем значения нашей функции, будем называть *отсчетами*. Наша цель — придумать такую функцию, которая бы символизировала преобразование непрерывного сигнала в дискретный и при этом хорошо преобразовывалась по Фурье. Так с чего начать, чтобы разобрать сигнал? Начнем с того, что введем функцию, которую будем называть *«забором»* или *«пиками»*: $d_\Delta(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta)$

Определение 2.1. *Функцией,* «посаженной на пики» *будем называть:*

$$f_\Delta(t) \overset{def}{=} f(t) d_\Delta(t). \tag{2.1}$$

Функция, посаженная на пики — это в некотором роде и есть дискретизация сигнала. Действительно, $f_\Delta(t)$ равна нулю везде, кроме наших отсчетов, а интеграл по сколь угодно малой окрестности отсчета будет равен значению функции в этом отсчете.

Вторая операция, которую мы рассмотрим — это

Определение 2.2. «Свертка с забором»

$$f_0(t) \overset{def}{=} f * d_\Delta(t).$$

Давайте вычислим явно $f_0(t)$.

$$f_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f * \delta(t - n\Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - n\Delta - \tau)\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta).$$

То есть «сворачивание с забором» равносильно «размножению» нашей функции с шагом Δ.

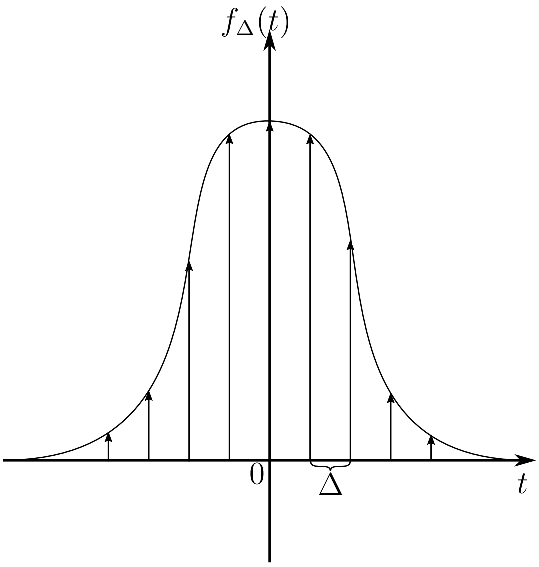

Рис. 1: Сигнал, «посаженный на пики»

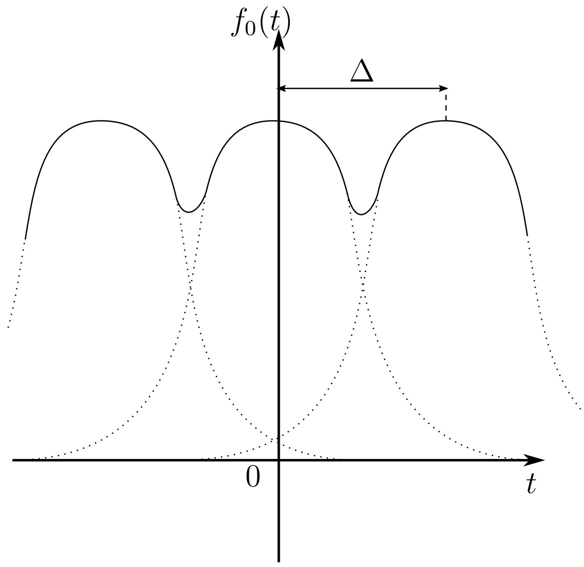

Рис. 2: Сигнал, свернутый с забором