Удовиченко Игорь

20.3 $A: L_2[0,1] \longmapsto L_2[0,1]$

$$Ax(s) = \int_0^1 st(1-st)x(t)dt = s\int_0^1 tx(t)dt - s^2\int_0^1 t^2x(t)dt$$

Проверим критерий предкомпактности в L_2: $\exists\ x(t) \in B_1(0)$

$$\|(Ax)(s+h) - (Ax)(s)\|^2 = \|(s+h)\int_0^1 tx(t)dt - (s+h)^2\int_0^1 t^2x(t)dt - s\int_0^1 tx(t)dt + s^2\int_0^1 t^2x(t)dt\| =$$

$$= \left\| h\int_0^1 tx(t)dt - h(2s-h)\int_0^1 t^2x(t)dt \right\|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow A B_1(0) \text{ предкомпактен} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A вполне непрерывен.

Теперь найдём его спектр

$$Ax(s) = s\int_0^1 tx(t)dt - s^2\int_0^1 t^2x(t)dt = \lambda x(s) \ \Big|\cdot s$$

$$s^2\int_0^1 tx(t)dt - s^3\int_0^1 t^2x(t)dt = \lambda s x(s) \ \Big|\int_0^1 \cdot\, ds$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 tx(t)dt - \frac{1}{4}\int_0^1 t^2x(t)dt = \lambda\int_0^1 tx(t)dt$$

$$\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\int_0^1 tx(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t^2x(t)dt$$

Теперь умножаем на s^2:

$$s^3\int_0^1 tx(t)dt - s^4\int_0^1 t^2x(t)dt = \lambda s^2 x(s) ds$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 tx(t)dt - \frac{1}{5}\int_0^1 t^2x(t)dt = \lambda\int_0^1 t^2x(t)dt$$

$$\frac{4}{4}\int_0^1 t\,x(t)\,dt = \left(\frac{1}{5}+\lambda\right)\int_0^1 t^2 x(t)\,dt$$

делим почленно

$$4\cdot\left(\frac{1}{3}-\lambda\right) = \frac{1}{4\left(\frac{1}{5}+\lambda\right)}$$

$$16\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{5}+\lambda\right)=1$$

$$16(1-3\lambda)(1+5\lambda)=15$$

$$16+32\lambda-240\lambda^2=15$$

$$240\lambda^2-32\lambda-1=0$$

$\lambda = \cancel{16 \pm \sqrt{\;}}$ решаем, получаем два

(20.5) $\exists$ $Ax_1=\lambda_1 x_1$, $Ax_2=\lambda_2 x_2$; $A=A^*$; $\lambda_1\neq\lambda_2$

$$\lambda_1\langle x_1,x_2\rangle = \langle Ax_1,x_2\rangle = \langle x_1,A^*x_2\rangle = \langle x_1,Ax_2\rangle = \lambda_2\langle x_1,x_2\rangle \Rightarrow$$

$\Rightarrow \langle x_1,x_2\rangle = 0$, QED

(20.11) A — с/с ; $R(A-\lambda I)=H$; Д-ть: $\lambda\in\rho(A)$

$A-\lambda I$ — тоже с/с

$R(A-\lambda I)=H \Rightarrow \ker(A-\lambda I)=\{\Theta\} \Rightarrow A-\lambda I$ непрерывно обратим $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\in\rho(A)$

(20.12) A — с/с; $\lambda \in \rho(A)$; $\lambda \in \mathbb{R}$ Док-ть: $R_\lambda(A)$ — с/с

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$

R_λ — резольвента $\Rightarrow$ $A - \lambda I$ непрерывно обратим $\Rightarrow$

$\operatorname{im}(A - \lambda I) = \operatorname{im} R_\lambda^{-1} = H \Rightarrow \forall x \in H\ \exists y : x = R_\lambda^{-1} y$

Тогда $\langle R_\lambda x, y \rangle = \langle R_\lambda R_\lambda^{-1} z, y \rangle = \langle z, y \rangle$

С другой стороны
с/с как обратн с/с

$\langle x, R_\lambda y \rangle = \langle R_\lambda^{-1} z, R_\lambda y \rangle = \langle z, R_\lambda^{-1} R_\lambda y \rangle = \langle z, y \rangle$ QED

(20.15) H — ∞-мерно

A — с/с. ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — с.з. Тогда $\forall x$ $Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где

x_i — соб ~~значен~~ вектора, соотв λ_i по т. Гильберта - Шмидта

Т.к. H — ∞-мерно, то $\exists$ $y \neq 0$: $y \perp x_i$ $\forall i \Rightarrow$ все $\alpha_i = 0 \Rightarrow$

$Ay = \Theta \Rightarrow y \in \ker\{A\} \Rightarrow \lambda = 0$ — с.з.