Удовиченко Игорь, 315

1) Переход: $\begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ x_2 = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$ (из θ-ва) : $x_1^2+x_2^2=1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_j d\,\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{cx_1+dx_2}{ax_1+bx_2}\right)}_{\text{берём щедь}} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cancel{(ax_1+bx_2)^2}}{(ax_1+bx_2)^2+(cx_1+dx_2)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{(-cx_2+dx_1)(ax_1+bx_2)-(cx_1+dx_2)(-ax_2+bx_1)}{\cancel{(ax_1+bx_2)^2}}\,d\theta = \left\{\begin{matrix}\text{много чего} \\ \text{сократилось в} \\ \text{числителе}\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{-bcx_2^2+adx_1^2-bcx_1^2+adx_2^2}{(ax_1+bx_2)^2+(cx_1+dx_2)^2}\,d\theta = \left\{\begin{matrix} x_1=\cos\theta \\ x_2=\sin\theta\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{ad-bc}{2\pi}\int \frac{d\theta}{(a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(c\cos\theta+d\sin\theta)^2}$$

3) а) $\frac{d\lambda}{dt} = \varphi_2\cdot\dot\varphi_2 + 4b\sin\frac{1}{2}\varphi_1\cdot\cos\frac{1}{2}\varphi_1\cdot\frac{1}{2}\dot\varphi_1 =$

$= \varphi_2(-b\sin\varphi_1 - a\varphi_2) + 2b\sin\frac{1}{2}\varphi_1\cdot\cos\frac{1}{2}\varphi_1\cdot\varphi_2 = -b\cancel{\varphi_2\sin\varphi_1} - a\varphi_2^2 +$

$+\cancel{\varphi_2 b\sin\varphi_1} = -a\varphi_2^2 < 0$, т.к. $\varphi_2 \not\equiv 0$ (опечатка в русском переводе)

б) покажем, что $\lambda \to c$. $\lambda \geq 0\ \forall t$, т.к. λ – сумма квадратов

λ монотонно убывает $\Rightarrow \lambda \xrightarrow[t\to\infty]{} c$

$\lambda \to c \Rightarrow \frac{d\lambda}{dt} \to 0 \Rightarrow -a\varphi_2^2 \to 0 \Rightarrow \varphi_2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b\sin^2\frac{\varphi_1}{2} \to c \Rightarrow \sin\varphi_1 \to c_1$

в) $\dot{\varphi}_2 = -b \sin \varphi_1 - a\varphi_2 \xrightarrow[t\to\infty]{} -b\sin\varphi_1 \longrightarrow -b\sin c_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 \xrightarrow[t\to\infty]{} k\pi$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$

г) природа траекторий:

~~дальше~~ расм систему $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b\sin x_1 - a x_2 \end{cases}$ ~~в окрестности~~ с НУ $\begin{cases} x_1(0) = 2k\pi + \varepsilon \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$

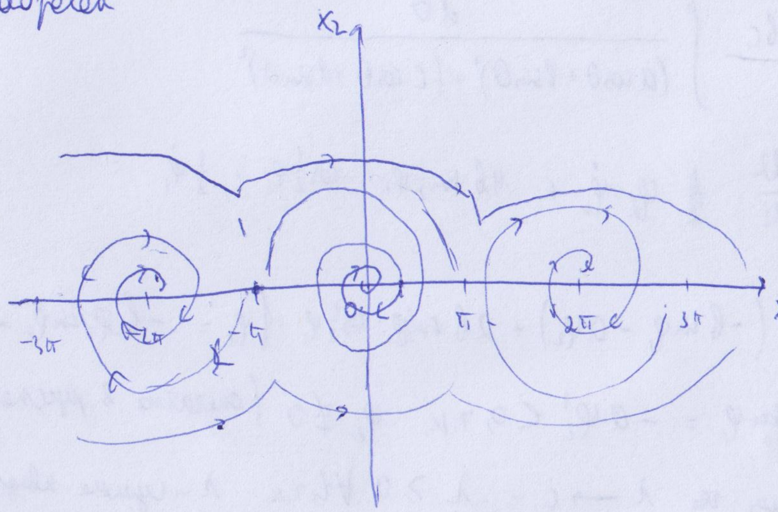
$\exists\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -b\sin\varepsilon$ — потянет обратно в сторону НУ

$\varepsilon < 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -b\sin\varepsilon$ — ~~пока~~ ,, ——

уст.

$\exists$ НУ $\begin{cases} x_1(0) = (2k+1)\pi + \varepsilon \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_2 = b\sin\varepsilon$ — тянет туда, куда отклонили $\Rightarrow$ неуст.

д) набросок

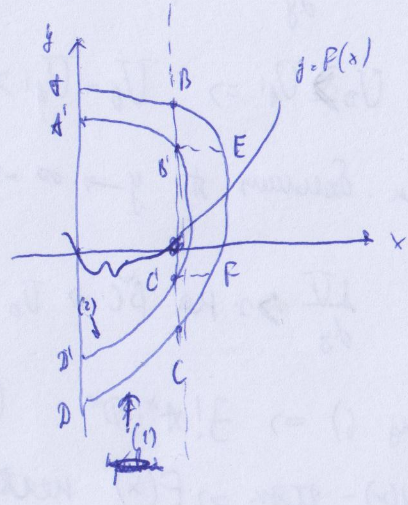


(5) $f(\cdot)$ — четн. $g(\cdot)$ — нечетн ; $g(x)>0$, $x>0$; $g\in C^1$; $A(t)$ — к.н.

$F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$; $G(x)=\int\limits_0^x g(t)dt$; $\exists a>0$: $F(x)<0$, $0<x<a$; $F(x)>0$, $x>a$

$F(x)$ монотонно возр ; $F(x), G(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ при

$V=\frac{1}{2}y^2+G(x)$
$$\begin{cases}\dot x = y-F(x)\\ \dot y=-g(x).\end{cases}$$



1) $\frac{dV}{dx}=\cancel{y\dot y+g(x)}\quad -\frac{gF}{y-F}$

производная монот. возр. по y =>

=> $\frac{dV}{dx}\Big|$ на $\breve{AB}$ больше, чем

$\frac{dV}{dx}$ на $\breve{A'B'}$ => $V_B-V_A < V_{B'}-V_{A'}$, т.к. $F(x)<0$ в этих точках,

$y>0$.

2) $\frac{dV}{dy}=F$ т.к. для $x>a$ $F(x)$ монот. возр. то $\frac{dV}{dy}\Big|_{\breve{EF}} > \frac{dV}{dy}\Big|_{\breve{C'D}}$ при

равных x => $V_E-V_F > V_{D'}-V_{C'}$ => $V_F-V_E < V_{C'}-V_{B'}$

3) ~~на~~ от E к B $\frac{dV}{dy}=F$ ~~возрастает~~ >0; $\cancel{\frac{dV}{dx}=\frac{gF}{y-F}}$ =>

=> $V_B>V_{B'}$; $\frac{dV}{dy}=\frac{-gF}{y-F>0}<0$ => $V_{B'}>V_E$ => $V_B>V_E$

4) $\cancel{\frac{dV}{dy}=F}$ $\frac{dV}{dy}$ на $\breve{DC}$ больше, чем на $D'C'$ => {аналогично 1)}

=> $V_D-V_C < V_{D'}-V_{C'}$

5) складывая 1)–4) получаем

$U_D - U_A < U_{D'} - U_{A'}$ на $\breve{AD}$ (кавычки)

6) рассм $\frac{dU}{dy} = F$, при малых A' $\frac{dU}{dy} < 0 \Rightarrow$ U уб. по y $\Rightarrow$

$\Rightarrow U_D > U_{A'} \Rightarrow U_D - U_{A'} > 0$

при больших A $y \to \infty \Rightarrow \frac{dU}{dx} \to 0$ на $\breve{AB}$ и $\overline{CD}$ $\Leftrightarrow$, а

$\frac{dU}{dy} > 0$ на $\breve{BC} \Rightarrow U_D < U_A$

7) из 6) $\Rightarrow \exists! A^*, D^*: \quad U_{A^*} = U_{D^*}$

$f(x)$ – нечёт $\Rightarrow F(x)$ нечётная функция $\Rightarrow$ правые части

системы $\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$ будут y-симм. относительно

начала координат $\Rightarrow$

т.к. $g(\cdot)$ нечётно, то $G(\cdot)$ – чётная функция $\Rightarrow$ на

~~траектории~~ т.к. $U_{A^*} = U_{D^*}$ $\quad y_{A^*} = y_{B^*} \Rightarrow$ эта траектория

и будет той самой периодической траекторией, которую

надо найти, т.к. поле y-симметрично.