



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа.

«Исследование дискретных динамических систем»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Научный руководитель
Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Одношаговая система	3
2.1	Неподвижные точки	3
2.2	Исследование устойчивости неподвижных точек	4
2.3	Циклы длиной 2 и 3	5

1. Постановка задачи

Даны две дискретные динамические системы:

$$u_{t+1} = \sqrt{bu_t} e^{r(1-u_t^2)}, \quad (1)$$

$$u_{t+1} = \sqrt{bu_t} e^{r(1-u_{t-1}^2)}, \quad (2)$$

где $r, b, u > 0$. Необходимо:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования циклов длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметров.
6. Для системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

Сделаем небольшую оговорку. Заметим, что параметр b не влияет на качественное поведение системы, поэтому для качественного анализа поведения данных динамических систем достаточно рассмотреть случай $b = 1$.

2. Одношаговая система

2.1. Неподвижные точки

Неподвижные точки дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$ ищутся как решения алгебраического уравнения $u = f(u)$ (см. [1]). В нашем случае уравнение выглядит так:

$$u = \sqrt{u} e^{r(1-u^2)}. \quad (3)$$

Одним из решений будет точка $u = 0$. Далее введем две вспомогательных функции: $g_1(u) = \sqrt{u}$ и $g_2(u) = e^{r(1-u^2)}$. Тогда остальные неподвижные ищутся как решения уравнения

$$g_1(u) = \sqrt{u} = e^{r(1-u^2)} = g_2(u). \quad (4)$$

Заметим, что при заданных ограничениях на параметры $g_1(u)$ монотонно возрастает, а $g_2(u)$ монотонно убывает при $u > 0$. Тогда у данного уравнения будет существовать единственное решение, которое и будет являться второй неподвижной точкой. Таким образом, у приведенных динамической систем существует две неподвижные точки: тривиальное положение равновесия $u^* = 0$ и нетривиальное $u^* = 1$.

2.2. Исследование устойчивости неподвижных точек

Положим $f(u) = \sqrt{u} e^{r(1-u^2)}$. Вблизи тривиального положения равновесия функция $f(u)$ эквивалентна функции \sqrt{u} . Неустойчивость тривиального положения равновесия можно продемонстрировать на диаграмме Ламерея (рис. 1). Подробности про диаграмму Ламерея можно найти в [1, с. 72].

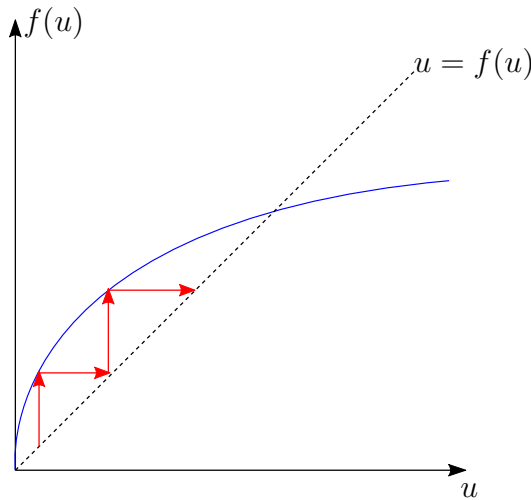


Рис. 1: Диаграмма Ламерея вблизи тривиального положения равновесия.

Для исследования вопроса устойчивости нетривиальной неподвижной точки понадобится следующее

Утверждение 1 Пусть задана дискретная динамическая система $u_{t+1} = f(u_t)$. Пусть также u^* — неподвижная точка. Тогда неподвижная точка асимптотически устойчива, если $|f'(u^*)| < 1$ и неустойчива, если $|f'(u^*)| > 1$. В устойчивом случае можно также исследовать характер стремления к неподвижной точке: если $f'(u^*) \geq 0$, то сходимость монотонная и если $f'(u^*) < 0$, то сходимость колебательная.

Доказательство этого утверждения приведено в [1, с. 83]. Найдем производную правой части для данной системы:

$$f'(u) = -2ru^{\frac{3}{2}}e^{r(1-u^2)} + \frac{e^{r(1-u^2)}}{2\sqrt{u}}. \quad (5)$$

Подставляя $u = 1$, получаем следующее выражение для производной $f(u)$:

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u^*=1} = \frac{1}{2} - 2r. \quad (6)$$

Таким образом, при $r \in (0, 1/4]$ неподвижная точка будет асимптотически устойчивой и сходимость будет монотонной, при $r \in (1/4, 3/4)$ — асимптотическая устойчивость и колебательная сходимость и при $r \in (3/4, \infty)$ неподвижная точка будет неустойчивой.

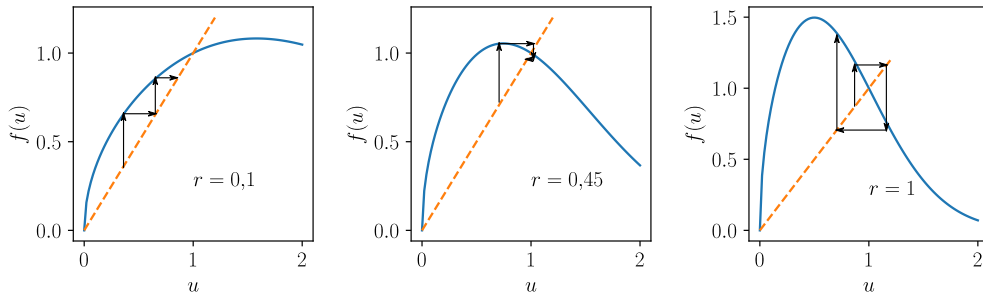


Рис. 2: Диаграмма Ламерея для различных значений параметра.

2.3. Циклы длиной 2 и 3

Цикл длины n ищется как неподвижная точка отображения $f \circ \dots \circ f$, где композиция берется n раз. то есть циклы длины 2 и 3 ищутся как решения уравнений:

$$u = (f \circ f)(u) \quad (7)$$

для цикла длины 2 и

$$u = (f \circ f \circ f)(u) \quad (8)$$

для цикла длины 3. На рис. 3 показаны графики функций f , $f \circ f$ и $f \circ f \circ f$, из которых видно, что возможно появление циклов длины 2 и 3, так как существуют решения соответствующих уравнений, не совпадающие с решениями уравнения для неподвижной точки.

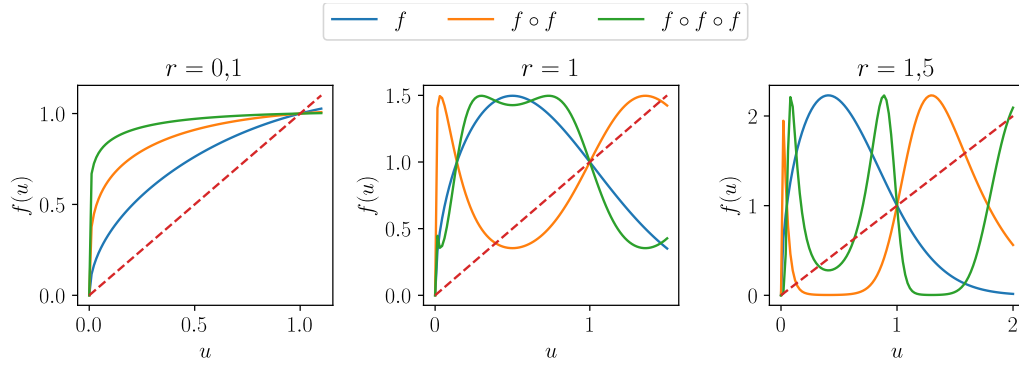


Рис. 3: Графики функций f , $f \circ f$ и $f \circ f \circ f$ при различных значениях параметра.

Покажем циклы длины 2 и 3 на диаграмме Ламерея (рис. 4) при $r = 1$ и $r = 1,5$.

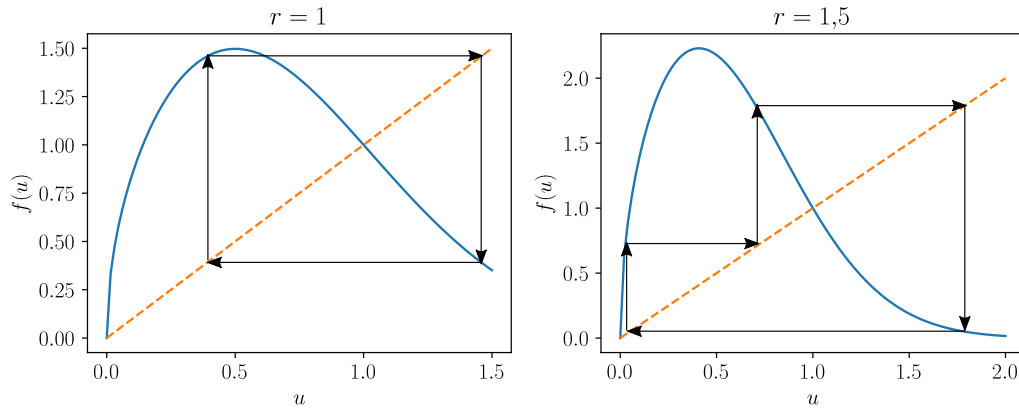


Рис. 4: Циклы длины 2 и 3 на диаграмме Ламерея.

Также в анализе дискретных систем используются бифуркационные диаграммы. Для ее построения вычислим 1000 итераций дискретной си-

стемы до стабилизации, а следующие 100 точек отложим по оси ординат. Полученный график приведен на рис. 5.

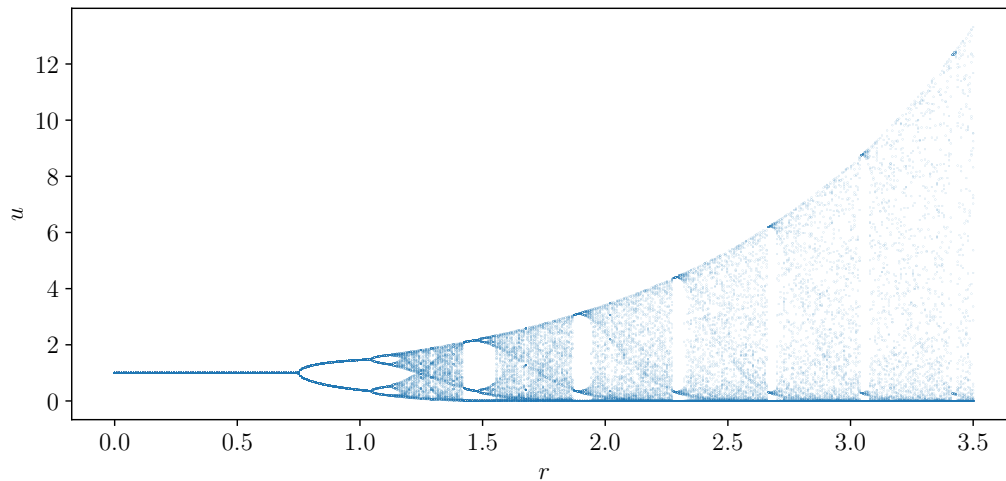


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма.

На графике видно, как неподвижная точка теряет устойчивость при $r = 3/4$ и возникает цикл длины 2. Также видно, что существуют значения параметра, при которых для системы характерно хаотическое поведение.

Список литературы

- [1] Братусь А. П. Новожилов А. С. Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. МГУ, 2011.