



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа.

«Исследование дискретных динамических систем»

Студент 315 группы
И. Р. Удовиченко

Научный руководитель
Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Одношаговая система	3
2.1	Неподвижные точки	3
2.2	Исследование устойчивости неподвижных точек	4
2.3	Циклы длины 2 и 3	5
2.4	Показатель Ляпунова	7
3	Двухшаговая система	8
3.1	Исследование устойчивости неподвжных точек	8
3.2	Бифуркация Неймарка-Сакера	9

1. Постановка задачи

Даны две дискретные динамические системы:

$$u_{t+1} = \sqrt{bu_t} e^{r(1-u_t^2)}, \quad (1)$$

$$u_{t+1} = \sqrt{bu_t} e^{r(1-u_{t-1}^2)}, \quad (2)$$

где $r, b, u > 0$. Необходимо:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования циклов длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметров.
6. Для системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

Сделаем небольшую оговорку. Заметим, что параметр b не влияет на качественное поведение системы, поэтому для качественного анализа поведения данных динамических систем достаточно рассмотреть случай $b = 1$.

2. Одношаговая система

2.1. Неподвижные точки

Неподвижные точки дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$ ищутся как решения алгебраического уравнения $u = f(u)$ (см. [1]). В нашем случае уравнение выглядит так:

$$u = \sqrt{u} e^{r(1-u^2)}. \quad (3)$$

Одним из решений будет точка $u = 0$. Далее введем две вспомогательных функции: $g_1(u) = \sqrt{u}$ и $g_2(u) = e^{r(1-u^2)}$. Тогда остальные неподвижные ищутся как решения уравнения

$$g_1(u) = \sqrt{u} = e^{r(1-u^2)} = g_2(u). \quad (4)$$

Заметим, что при заданных ограничениях на параметры $g_1(u)$ монотонно возрастает, а $g_2(u)$ монотонно убывает при $u > 0$. Тогда у данного уравнения будет существовать единственное решение, которое и будет являться второй неподвижной точкой. Таким образом, у приведенных динамической систем существует две неподвижные точки: тривиальное положение равновесия $u^* = 0$ и нетривиальное $u^* = 1$.

2.2. Исследование устойчивости неподвижных точек

Положим $f(u) = \sqrt{u} e^{r(1-u^2)}$. Вблизи тривиального положения равновесия функция $f(u)$ эквивалентна функции \sqrt{u} . Неустойчивость тривиального положения равновесия можно продемонстрировать на диаграмме Ламерея (рис. 1). Подробности про диаграмму Ламерея можно найти в [1, с. 72].

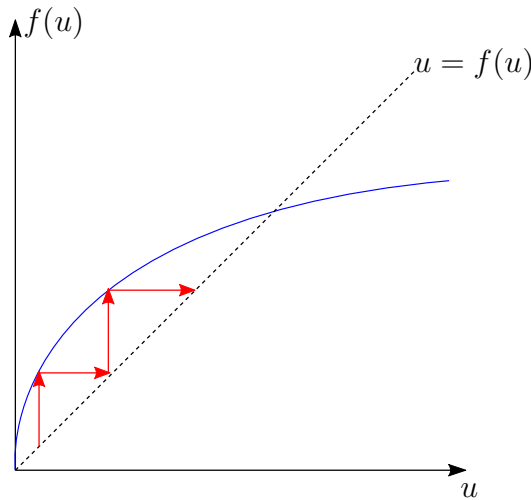


Рис. 1: Диаграмма Ламерея вблизи тривиального положения равновесия.

Для исследования вопроса устойчивости нетривиальной неподвижной точки будем исследовать производную функции f в неподвижной точ-

ке. Неподвижная точка асимптотически устойчива, если $|f'(u^*)| < 1$ и неустойчива, если $|f'(u^*)| > 1$. В устойчивом случае можно также исследовать характер стремления к неподвижной точке: если $f'(u^*) \geq 0$, то сходимость монотонная и если $f'(u^*) < 0$, то сходимость колебательная. Доказательство приведено в [1, с. 83].

Найдем производную правой части для данной системы:

$$f'(u) = -2ru^{\frac{3}{2}}e^{r(1-u^2)} + \frac{e^{r(1-u^2)}}{2\sqrt{u}}. \quad (5)$$

Подставляя $u = 1$, получаем следующее выражение для производной $f(u)$:

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u^*=1} = \frac{1}{2} - 2r. \quad (6)$$

Таким образом, при $r \in (0, 1/4]$ неподвижная точка будет асимптотически устойчивой и сходимость будет монотонной, при $r \in (1/4, 3/4)$ — асимптотическая устойчивость и колебательная сходимость и при $r \in (3/4, \infty)$ неподвижная точка будет неустойчивой.

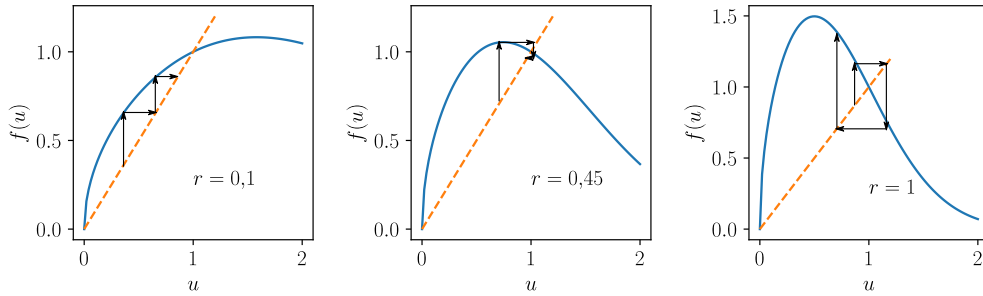


Рис. 2: Диаграмма Ламерея для различных значений параметра.

2.3. Циклы длины 2 и 3

Цикл длины n ищется как неподвижная точка отображения $f \circ \dots \circ f$, где композиция берется n раз. то есть циклы длины 2 и 3 ищутся как решения уравнений:

$$u = (f \circ f)(u) \quad (7)$$

для цикла длины 2 и

$$u = (f \circ f \circ f)(u) \quad (8)$$

для цикла длины 3. На рис. 3 показаны графики функций f , $f \circ f$ и $f \circ f \circ f$, из которых видно, что возможно появление циклов длины 2 и 3, так как существуют решения соответствующих уравнений, не совпадающие с решениями уравнения для неподвижной точки.

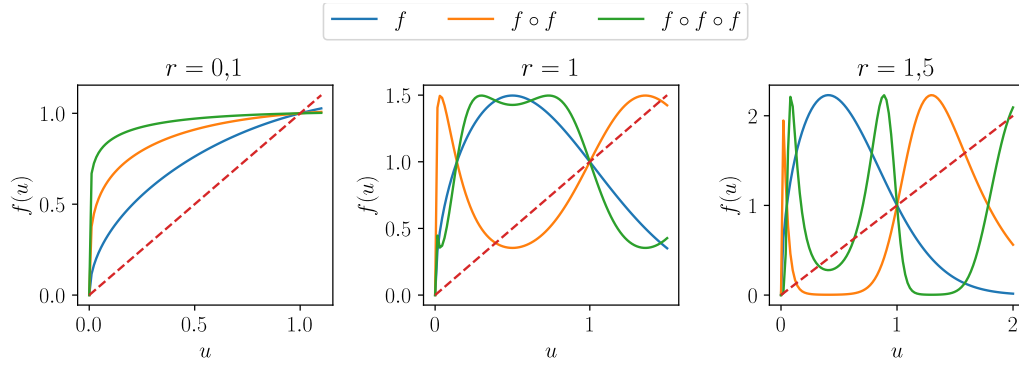


Рис. 3: Графики функций f , $f \circ f$ и $f \circ f \circ f$ при различных значениях параметра.

Покажем циклы длины 2 и 3 на диаграмме Ламерея (рис. 4) при $r = 1$ и $r = 1,5$.

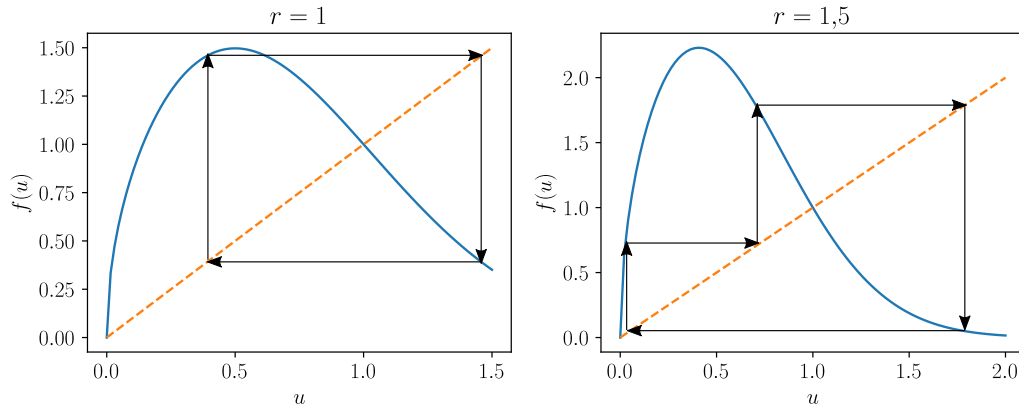


Рис. 4: Циклы длины 2 и 3 на диаграмме Ламерея.

Также в анализе дискретных систем используются бифуркационные диаграммы. Для ее построения вычислим 1000 итераций дискретной системы до стабилизации, а следующие 100 точек отложим по оси ординат. Полученный график приведен на рис. 5.

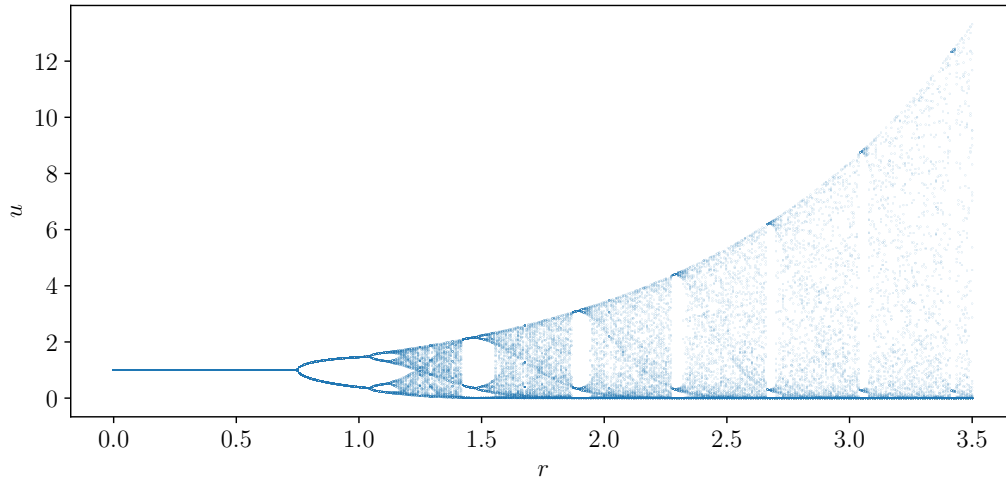


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма.

На графике видно, как неподвижная точка теряет устойчивость при $r = 3/4$ и возникает цикл длины 2. Также видно, что существуют значения параметра, при которых для системы характерно хаотическое поведение.

2.4. Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова дискретной системы с правой частью $f(u)$ вычисляется следующим образом:

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|f'(u_1)| + \dots + \ln|f'(u_n)|}{n}. \quad (9)$$

Данный показатель является мерой заотичности траекторий системы. Если он меньше нуля, то близкие по начальным значениям траектории сходятся на бесконечности, если больше нуля, то близкие траектории сильно расходятся и система демонстрирует хаотическое поведение. Для построения численной аппроксимации показателя Ляпунова было вычислено 1000 точек траектории для каждого значения параметра. Получившийся график показан на рис. 6.

Как видно из графика, существуют значения параметра r , при которых показатель Ляпунова положительный и система демонстрирует хаотическое поведение. Моменты, когда показатель Ляпунова обнуляется, соответствуют точкам бифуркации системы.

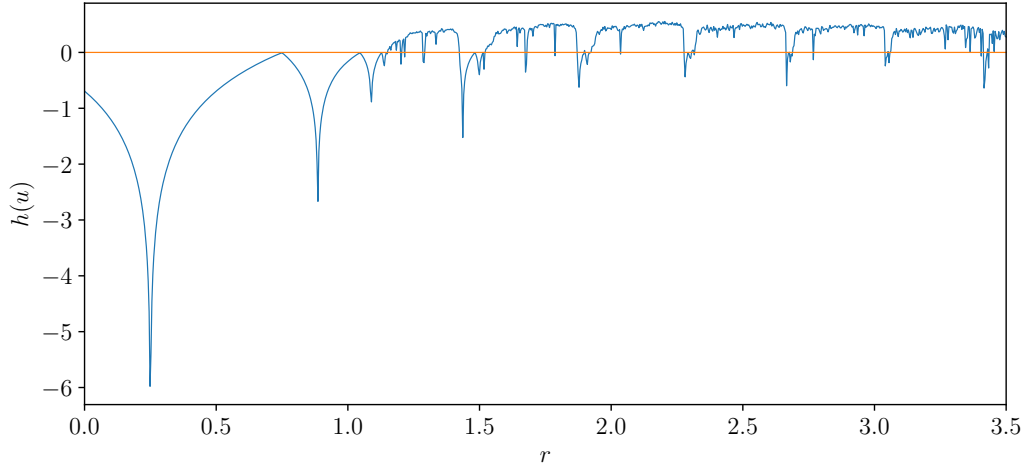


Рис. 6: Численная аппроксимация показателя Ляпунова.

3. Двухшаговая система

Перейдем теперь к исследованию системы с запаздыванием (2). Для этого положим $g(u, v) = \sqrt{u} e^{r(1-v^2)}$. Здесь мы также полагаем параметр $b = 1$, так как он не влияет на качественное поведение системы. Тогда система с запаздыванием эквивалентна следующей двумерной системе:

$$\begin{cases} u_{t+1} = g(u_t, v_t) = \sqrt{u_t} e^{r(1-v_t^2)}, \\ v_{t+1} = u_t. \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что система (2) имеет те же неподвижные точки, что и одношаговая система, а именно: $u^* = 0$ и $u^* = 1$. Перейдем теперь к исследованию устойчивости неподвижных точек.

3.1. Исследование устойчивости неподвижных точек

Исследование тривиальной неподвижной точки $u^* = 0$ проводится аналогично случаю без запаздывания. Точка будет неустойчивой.

Для исследования нетривиальной неподвижной точки выпишем матрицу Якоби системы (10):

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{e^{r(1-v^2)}}{2\sqrt{u}} & -2rv\sqrt{u} e^{r(1-v^2)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В неподвижной точке $v^* = u^* = 1$ матрица Якоби принимает вид:

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -2r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для исследования устойчивости найдем собственные значения матрицы Якоби:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 32r}}{4}. \quad (13)$$

Далее рассмотрим отдельно действительный и комплексный случаи. При $r \in (0, 1/32]$ оба собственных значения действительны и по модулю не превосходят единицы, поэтому будет асимптотическая устойчивость.

В при $r > 1/32$ будет 2 комплексно-сопряженных собственных значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{32r - 1}}{4}, \quad |\lambda_{1,2}| = \sqrt{2r}. \quad (14)$$

Таким образом, при $r < 1/2$ нетривиальная неподвижная точка будет асимптотически устойчивой, при $r > 1/2$ — неустойчивой. Случай $r = 1/2$ требует дополнительного исследования и рассматривается далее.

3.2. Бифуркация Неймарка-Сакера

Бифуркация Неймарка-Сакера возникает при таких значениях параметров, что у матрицы Якоби появляются собственные значения $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ и $|\lambda_{1,2}| = 1$. В системе (10) это происходит при $r = 1/2$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}. \quad (15)$$

При переходе через $1/2$ происходит потеря устойчивости нетривиальной неподвижной точки. Для выяснения характера данной потери устойчивости смоделируем систему численно.

Результаты численного моделирования (рис. 7) показывают, что траектории, выпущенные из малой окрестности неподвижной точки, стремятся к этой неподвижной точке, но скорость сходимости очень низкая. Таким образом, при $r = 1/2$ данная точка является слабо притягивающим фокусом.

Теперь проверим систему на наличие устойчивого цикла после бифуркации. Если такой цикл существует, то потеря устойчивости мягкая. То есть даже после бифуркации траектории все равно остаются в некоторой окрестности начала координат. Также такая бифуркация называется

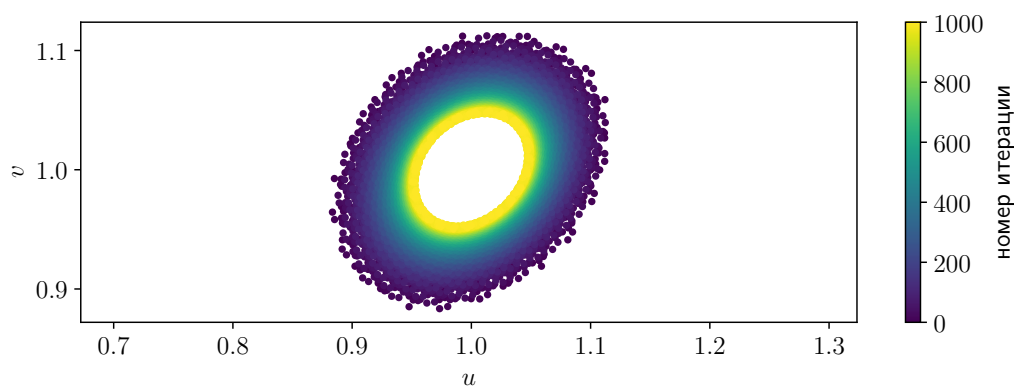


Рис. 7: Слабо притягивающий фокус при $r = 1/2$.

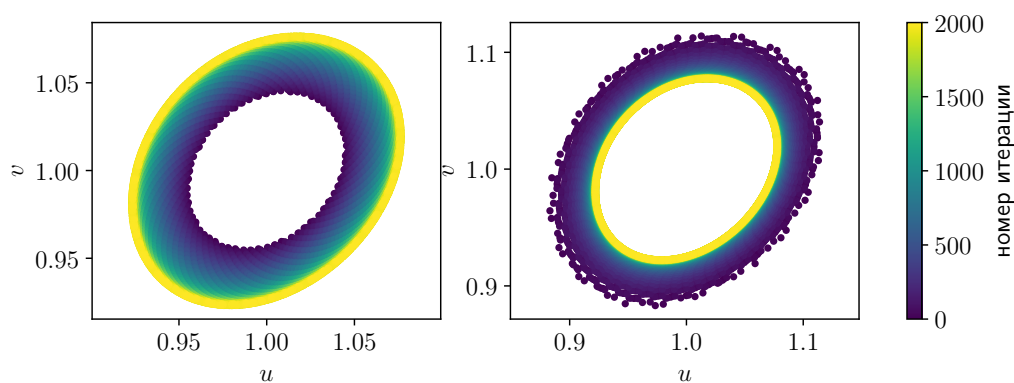


Рис. 8: Предельный цикл при $r = 0,501$. Слева траектории выпускаются внутри цикла, справа— снаружи цикла.

суперкритической. В противном случае бифуркация называется субкритической, а потеря устойчивости— жесткой или катастрофической.

Как видно из рис. 8, после бифуркации появляется устойчивый предельный цикл. Таким образом, в системе наблюдается мягкая потеря устойчивости, и бифуркацию можно отнести к суперкритическому типу.

Список литературы

- [1] Братусь А. П. Новожилов А. С. Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. МГУ, 2011.