



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Курсовая работа.

# «Исследование дискретных динамических систем»

*Студент 315 группы*  
И. Р. Удовиченко

*Научный руководитель*  
Д. А. Алимов

Москва, 2020

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Одношаговая система</b>	<b>3</b>
2.1	Неподвижные точки . . . . .	3
2.2	Исследование устойчивости неподвижных точек . . . . .	4
2.3	Циклы длиной 2 и 3 . . . . .	5
2.4	Показатель Ляпунова . . . . .	7

## 1. Постановка задачи

Даны две дискретные динамические системы:

$$u_{t+1} = \sqrt{bu_t} e^{r(1-u_t^2)}, \quad (1)$$

$$u_{t+1} = \sqrt{bu_t} e^{r(1-u_{t-1}^2)}, \quad (2)$$

где  $r, b, u > 0$ . Необходимо:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования циклов длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметров.
6. Для системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

Сделаем небольшую оговорку. Заметим, что параметр  $b$  не влияет на качественное поведение системы, поэтому для качественного анализа поведения данных динамических систем достаточно рассмотреть случай  $b = 1$ .

## 2. Одношаговая система

### 2.1. Неподвижные точки

Неподвижные точки дискретной системы  $u_{t+1} = f(u_t)$  ищутся как решения алгебраического уравнения  $u = f(u)$  (см. [1]). В нашем случае уравнение выглядит так:

$$u = \sqrt{u} e^{r(1-u^2)}. \quad (3)$$

Одним из решений будет точка  $u = 0$ . Далее введем две вспомогательных функции:  $g_1(u) = \sqrt{u}$  и  $g_2(u) = e^{r(1-u^2)}$ . Тогда остальные неподвижные ищутся как решения уравнения

$$g_1(u) = \sqrt{u} = e^{r(1-u^2)} = g_2(u). \quad (4)$$

Заметим, что при заданных ограничениях на параметры  $g_1(u)$  монотонно возрастает, а  $g_2(u)$  монотонно убывает при  $u > 0$ . Тогда у данного уравнения будет существовать единственное решение, которое и будет являться второй неподвижной точкой. Таким образом, у приведенных динамической систем существует две неподвижные точки: тривиальное положение равновесия  $u^* = 0$  и нетривиальное  $u^* = 1$ .

## 2.2. Исследование устойчивости неподвижных точек

Положим  $f(u) = \sqrt{u} e^{r(1-u^2)}$ . Вблизи тривиального положения равновесия функция  $f(u)$  эквивалентна функции  $\sqrt{u}$ . Неустойчивость тривиального положения равновесия можно продемонстрировать на диаграмме Ламерея (рис. 1). Подробности про диаграмму Ламерея можно найти в [1, с. 72].

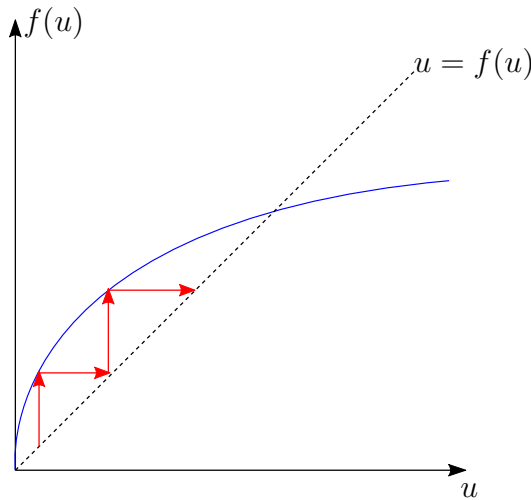


Рис. 1: Диаграмма Ламерея вблизи тривиального положения равновесия.

Для исследования вопроса устойчивости нетривиальной неподвижной точки понадобится следующее

**Утверждение 1** Пусть задана дискретная динамическая система  $u_{t+1} = f(u_t)$ . Пусть также  $u^*$  — неподвижная точка. Тогда неподвижная точка асимптотически устойчива, если  $|f'(u^*)| < 1$  и неустойчива, если  $|f'(u^*)| > 1$ . В устойчивом случае можно также исследовать характер стремления к неподвижной точке: если  $f'(u^*) \geq 0$ , то сходимость монотонная и если  $f'(u^*) < 0$ , то сходимость колебательная.

Доказательство этого утверждения приведено в [1, с. 83]. Найдем производную правой части для данной системы:

$$f'(u) = -2ru^{\frac{3}{2}}e^{r(1-u^2)} + \frac{e^{r(1-u^2)}}{2\sqrt{u}}. \quad (5)$$

Подставляя  $u = 1$ , получаем следующее выражение для производной  $f(u)$ :

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u^*=1} = \frac{1}{2} - 2r. \quad (6)$$

Таким образом, при  $r \in (0, 1/4]$  неподвижная точка будет асимптотически устойчивой и сходимость будет монотонной, при  $r \in (1/4, 3/4)$  — асимптотическая устойчивость и колебательная сходимость и при  $r \in (3/4, \infty)$  неподвижная точка будет неустойчивой.

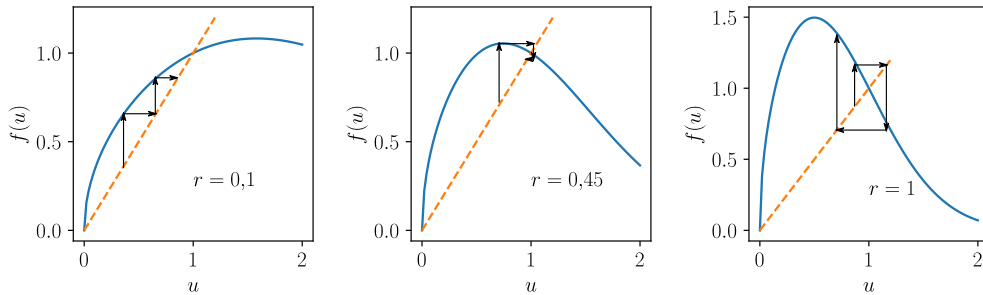


Рис. 2: Диаграмма Ламерея для различных значений параметра.

## 2.3. Циклы длиной 2 и 3

Цикл длины  $n$  ищется как неподвижная точка отображения  $f \circ \dots \circ f$ , где композиция берется  $n$  раз. то есть циклы длины 2 и 3 ищутся как решения уравнений:

$$u = (f \circ f)(u) \quad (7)$$

для цикла длины 2 и

$$u = (f \circ f \circ f)(u) \quad (8)$$

для цикла длины 3. На рис. 3 показаны графики функций  $f$ ,  $f \circ f$  и  $f \circ f \circ f$ , из которых видно, что возможно появление циклов длины 2 и 3, так как существуют решения соответствующих уравнений, не совпадающие с решениями уравнения для неподвижной точки.

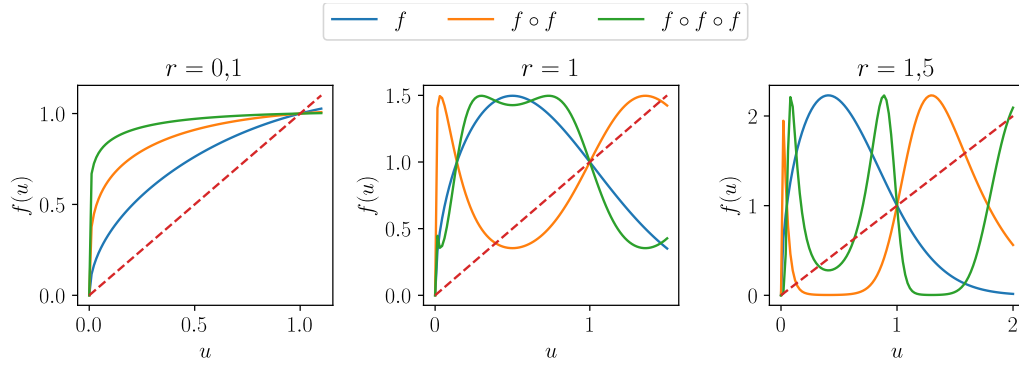


Рис. 3: Графики функций  $f$ ,  $f \circ f$  и  $f \circ f \circ f$  при различных значениях параметра.

Покажем циклы длины 2 и 3 на диаграмме Ламерея (рис. 4) при  $r = 1$  и  $r = 1,5$ .

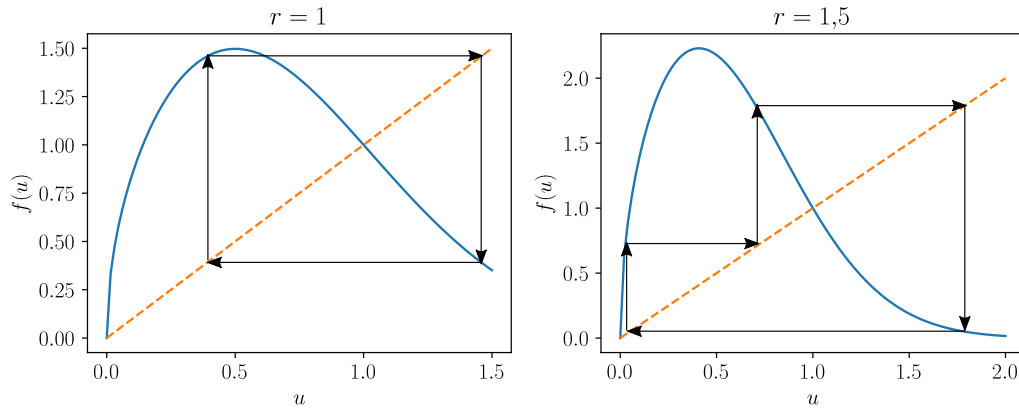


Рис. 4: Циклы длины 2 и 3 на диаграмме Ламерея.

Также в анализе дискретных систем используются бифуркационные диаграммы. Для ее построения вычислим 1000 итераций дискретной си-

стемы до стабилизации, а следующие 100 точек отложим по оси ординат. Полученный график приведен на рис. 5.

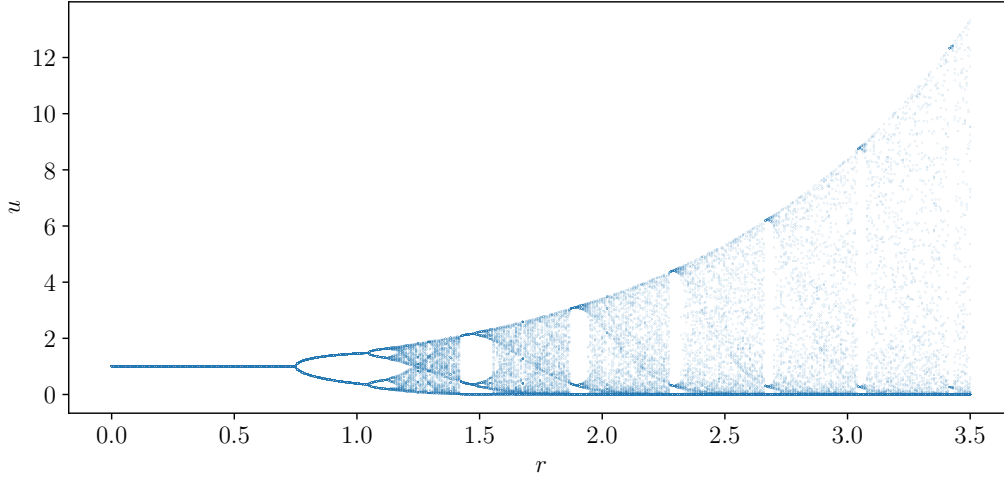


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма.

На графике видно, как неподвижная точка теряет устойчивость при  $r = 3/4$  и возникает цикл длины 2. Также видно, что существуют значения параметра, при которых для системы характерно хаотическое поведение.

## 2.4. Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова дискретной системы с правой частью  $f(u)$  вычисляется следующим образом:

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|f'(u_1)| + \dots + \ln|f'(u_n)|}{n}. \quad (9)$$

Данный показатель является мерой заотичности траекторий системы. Если он меньше нуля, то близкие по начальным значениям траектории сходятся на бесконечности, если больше нуля, то близкие траектории сильно расходятся и система демонстрирует хаотическое поведение. Для построения численной аппроксимации показателя Ляпунова было вычислено 1000 точек траектории для каждого значения параметра. Получившийся график показан на рис. 6.

Как видно из графика, существуют значения параметра  $r$ , при которых показатель Ляпунова положительный и система демонстрирует хаотическое поведение. Моменты, когда показатель Ляпунова обнуляется, соответствуют точкам бифуркации системы.

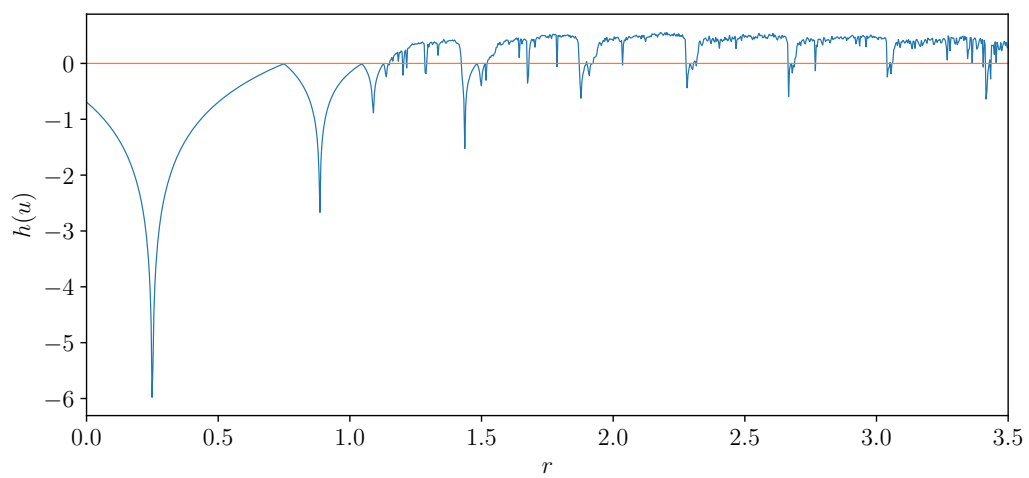


Рис. 6: Численная аппроксимация показателя Ляпунова.

## Список литературы

- [1] Братусь А. П. Новожилов А. С. Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. МГУ, 2011.