Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
И. Р. Удовиченко

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2020

Содержание

Задание 1

Пусть дана случайная величина $X \sim U[0,1]$, рассмотрим случайную величину $Y = \mathbb{1}(X < p)$. Тогда Y принимает значение 1 с вероятностью p. Это следует из свойства: $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Определение 1 *Биномиальным распределением случайной величины с параметрами n, p будем называть случайную величину, принмающую значения, равные числу успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p.*

Из определения следует способ генерирования биномиальной случайной величины:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

где случайные величины Y_i имеют распределение Бернулли с вероятностью успеха p.

Определение 2 *Геометрическим распределением с параметром p (и $q = 1 - p$) будем называть распределение числа неудач до 1-го успеха в схеме Бернулли.*

Функция вероятность геометрического распределения имеет вид: $\mathbb{P}(X = n) = q^n p,\ n \in \mathbb{N}_0$.

Пусть случайная величина $Y \sim exp(\lambda)$. Тогда

$$\mathbb{P}(n \leqslant Y < n+1) = e^{-\lambda n}\left(1 - e^{-\lambda}\right),$$

$$X = \lfloor Y \rfloor \sim geom(1 - e^{-\lambda}).$$

Тогда чтобы получить геометрическое распределение с параметром p надо взять целую часть от експоненциально распределенной случайной величины с параметром $\lambda = -\ln(1-p)$ Экспоненциальное распределение получим обращением функции распределения: если $Z \sim U[0,1]$, тогда $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Z) \sim exp(\lambda)$. Окончательно получаем $X = \left\lfloor \frac{\ln(1-Z)}{\ln(1-p)} \right\rfloor \sim geom(p)$.

Утверждение 1 *Для $X \sim geom(p)$ верно свойство отсутствия памяти: $\mathbb{P}(X \geqslant m+n \mid X \geqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.*

Доказательство.

$$\mathbb{P}(X \geqslant m+n \mid X \geqslant m) = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant m+n)}{\mathbb{P}(X \geqslant m)} = \\ \frac{q^{m+n}p/(1-q)}{q^m p/(1-q)} = q^n = \sum_{i=n}^{\infty} q^i p = \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

■

Рассмотрим игру «орлянку» со случайной величиной X:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ с вероятностью } p = 0{,}5, \\ -1 \text{ с вероятностью } 1-p = 0{,}5. \end{cases}$$

Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ и $Y = S_i/\sqrt{n}$. Так как $\mathbb{E}S_n = 0$ и $var[S_n] = n$, то из центральной предельной теоремы следует, что $Y = S_i/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$.

Задание 2

Определение 3 *Канторовой лестницей нахывается функция f, которая строится следующим образом:*

1. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
2. *Отрезок $[0,1]$ разбивается на 3 равных части, затем на средней части функция f полагается равной полусумме значений на концах.*
3. *для первого и третьего отрезка процедура повторяется рекурсивно.*

По определению канторова лестница обладает свойством фрактальности или самоподобия: $f(x) = 2f(x/3)$. Так как f монотонна и лежит в отрезке $[0,1]$, то существует случайная величина X (сингулярная), функция распределения которой является канторовой лестницей.

Используя свойство фрактальности данной случайной величины, найдем ее математическое ожидание и дисперсию:

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} 1 - X \implies \mathbb{E}X = 0.$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int\limits_0^1 x^2 dF(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} x^2 dF(x) + \int\limits_{\frac{2}{3}}^1 x^2 dF(x).$$

Отсюда используя замену $y = 3x$ и свойство $F(x/3) = F(x)/2$ получаем

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}X^2 = \frac{3}{8}.$$

Список литературы