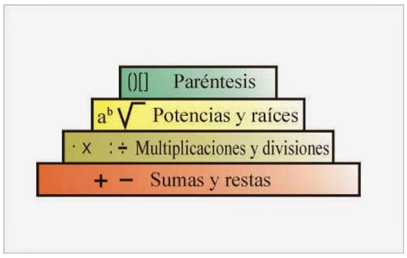
Matemáticas
IES-Albaida

Nacho Vallés

Kit de supervivencia Matemáticas-II

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \qquad \cup \ \cap \ \in \qquad \neq \ \approx \ \equiv \qquad \forall \ \exists \ \exists! \ \nexists \ / \qquad \rightarrow \ \leftrightarrow$



ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

$(a \pm b)^2 = 2^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$PA\colon\ a_n = a_1 + (n-1)d \ \rightarrow\ S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\, n$

$PG\colon\ a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow\ S_n = \dfrac{a_n r - a_1}{r-1} \ ;\ \ si\ |r| < 1\colon\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$

$a^0 = 1, \forall a \neq 0;\ \ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};\ \ a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p};\ \ (ab)^n = a^n b^n;\ \ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n};\ \ a^m a^n = a^{m+n};\ \ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ \ (a^m)^n = a^{m\cdot n}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Racionalización: (no es elegante que aparezcan raíces en el denominador, ni que éste sea negativo)

$\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \dfrac{a\cdot\sqrt{b}}{b}\ ;\ \ \dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \dfrac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \dfrac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}\ ;\ \ \dfrac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \dfrac{a\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})} = \dfrac{a\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$ m. conjugado.

LOGARITMOS :

$a > 0; a \neq 1:\ \ log_a P = x \ \leftrightarrow\ a^x = P \qquad ;\ P \in \mathbb{R}^+$

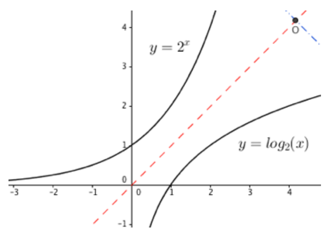
Propiedades:

La func. logaritmica es inyectiva: $p \neq q \ \rightarrow\ log_a p \neq log_a q\ ;\quad log_a a = 1\,;\quad log_a 1 = 0$

$log_a (p\cdot q) = log_a p + log_a q\ ;$

$log_a \left(\dfrac{p}{q}\right) = log_a p - log_a q\,;$

$log_a (p^n) = n\cdot log_a p\,;\ \ log_a\left(\sqrt[n]{p}\right) = \dfrac{log_a p}{n}$



Cambio de base: $log_a p = \dfrac{log_b p}{log_b a}\ ;\ \ si\ a = 10 \rightarrow\ log_{10} x = Log\ x\,;\ \ si\ a = e\ \rightarrow\ log_e x = ln\, x$

Cambio de base de la función exponencial (ej.): $2^x = y \rightarrow \ln 2^x = x\cdot ln2 = lny \rightarrow y = e^{(\ln 2)\cdot x} = 2^x$

POLONOMIOS:

Raíz de un polinomio: Se llama raíz de un polinomio a aquellos valores de la variable “x”, para los cuales el valor numérico del polinomio vale cero. O sea que si α, es raíz de P(x), significa que P(α) = 0

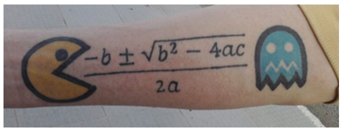
Las siguientes afirmaciones tienen el mismo significado:

- $P(\alpha) = 0$
- $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha)$
- α es raíz de $P(x)$
- $(x-\alpha)$ divide a $P(x)$
- Hallar las raíces de $P(x)$ significa resolver la ecuación $P(x)= 0$

Si un polinomio de segundo grado tiene dos raíces x_1 y x_2, se podrá factorizar como; $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Factorizar un polinomio es descomponerlo en polinomios irreducibles (factor común, Ruffini, identidades notables, resol. ec. 2º grado, …)

ECUACIONES:



⊗ Ecuaciones de primer grado: $ax+b = 0$ → $x=-b/a$

⊗ Ecuaciones de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ → fórmula general

⊗ Ecuaciones 2º grado incompletas: factor común o despejar

⊗ Ecuaciones reducibles a 2º grado (bicuadradas): $ax^{2n}+bx^n+c=0$ → el cambio: $x^n=z$ la convierte en una ecuación de segundo grado. Acordarse de deshacer el cambio.

Ecuaciones polinómicas: (grado mayor o igual a 3) → Factorizar por Ruffini

⚠ Ecuaciones racionales: (cocientes de polinomios, aparecen x en el denominador). Para eliminar los denominadores hay que multiplicar TODA la ecuación por el MCM de los DENOMINADORES. Hay que COMPROBAR SIEMPRE QUE LAS SOLUCIONES obtenidas no anulan ningún denominador en la ecuación de partida.

⚠ Ecuaciones irracionales: (con la x bajo el símbolo √): Tendremos que aislar la/las raíz/raices en un miembro de la ecuación y elevar al cuadrado. El proceso puede necesitar de repetición. Hay que COMPROBAR SIEMPRE LAS SOLUCIONES obtenidas en la ecuación de partida.

⊗ Ecuaciones exponenciales: La incógnita está en el exponente. Podremos usar propiedades de las potencias, logaritmos, a veces será necesario un cambio de variable (acordarse al final de deshacerlo)

⚠ Ecuaciones logarítmicas: la x está dentro de algún logaritmo. Usaremos las propiedades de los logaritmos. Hay que COMPROBAR SIEMPRE LAS SOLUCIONES obtenidas en la ecuación de partida.

⚠ Ecuaciones con valor absoluto: la x aparece dentro del valor absoluto o módulo. Si se resuelven con rigor, estudiando signos, no hay problema. Pero si es así, habrá que COMPROBAR SIEMPRE LAS SOLUCIONES obtenidas en la ecuación de partida.

Ecuaciones/Inecuaciones con valores absolutos.	
Caso:	Solución:
$\lvert x\rvert<3$	$-3<x<3$
$\lvert x\rvert\leq 3$	$-3\leq x\leq 3$
$\lvert x\rvert<-3$ or ≤ -3	Φ
$\lvert x\rvert=3$	$x=3$ or $x=-3$
$\lvert x\rvert=-3$	Φ
$\lvert x\rvert>3$	$x<-3$ U $x>3$
$\lvert x\rvert\geq 3$	$x\leq -3$ U $x\geq 3$
$\lvert x\rvert>-3$ or ≥ -3	R

VALOR ABSOLUTO:

$$|x| = \begin{cases} x\,, & si\ x \geq 0 \\ -x\,, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Distancia en la recta real: $Dist(x, y) = |x - y|$

Entorno de centro a y radio r: $E_r(a)=]a-r,a+r[$

$|x| = |-x|$; $|x| \geq 0$; $|xy| = |x|\,|y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desig. triangular)

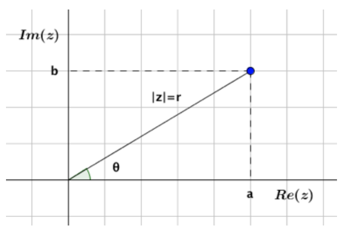
SISTEMAS DE ECUACIONES: Sustitución, reducción, igualación, ~~Gauss~~

INECUACIONES y sistemas:

Inecuaciones y sistemas de 1 incógnita: OJO al multiplicar y/o dividir por una cantidad negativa, el sentido de la desigualdad cambia. Primer grado → despejar; Segundo grado, superior o fracción algebraica → estudiar signos.

Inecuaciones y sistemas con 2 incógnitas: solución semiplano o recinto poligonal (abierto o cerrado)

COMPLEJOS.



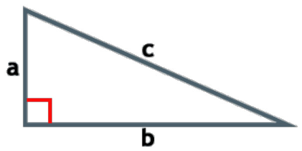
$i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & c \end{array}$$

$$i^n = i^{4c}\, i^r = (i^4)^c\, i^r = i^r \qquad n = 4c + r$$

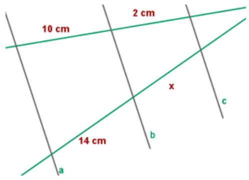
$(a+bi) \pm (c+di) = (a\pm c) + i\,(b\pm d)$ $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + i\,(ad+bc)$ $(a+bi) / (c+di) =$ multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.

TRIGONOMETRÍA



$a^2 + b^2 = c^2$

Teorema de Thales: "Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales el cociente de dos segmentos cualesquiera determinados en una de ellas es igual al cociente de los segmentos correspondientes determinados en la otra."



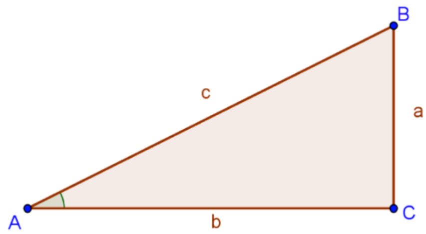
Teorema de Pitágoras: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

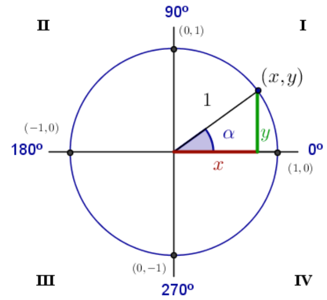
Semejanza de Triángulos: lados proporcionales y ángulos respectivamente iguales. Dos triángulos en posición de Thales son semejantes.
Todo triangulo inscrito en semicircunferencia es t. rectángulo. La tangente a una circunferencia i el radio son siempre perpendiculares.

Seno de A: sen A= $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$

Coseno A: cos A= $\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$

Tangente de A: tg A= $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{b}$



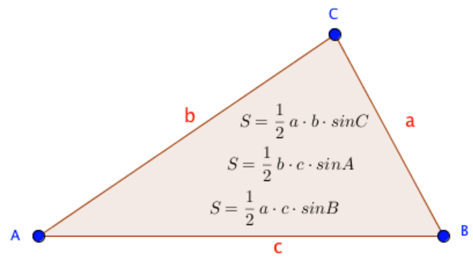


$cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x$

$sen(\alpha) = \frac{y}{1} = y$

$tg(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$

Relaciones fundamentales:	$\boldsymbol{sin^2x + cos^2x = 1 \quad \rightarrow \quad tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2x}}$	$sin^2x = 1 - cos^2x$; $\sin x = \sqrt{1 - cos^2x}$ $cos^2x = 1 - sin^2x$; $\cos x = \sqrt{1 - sin^2x}$

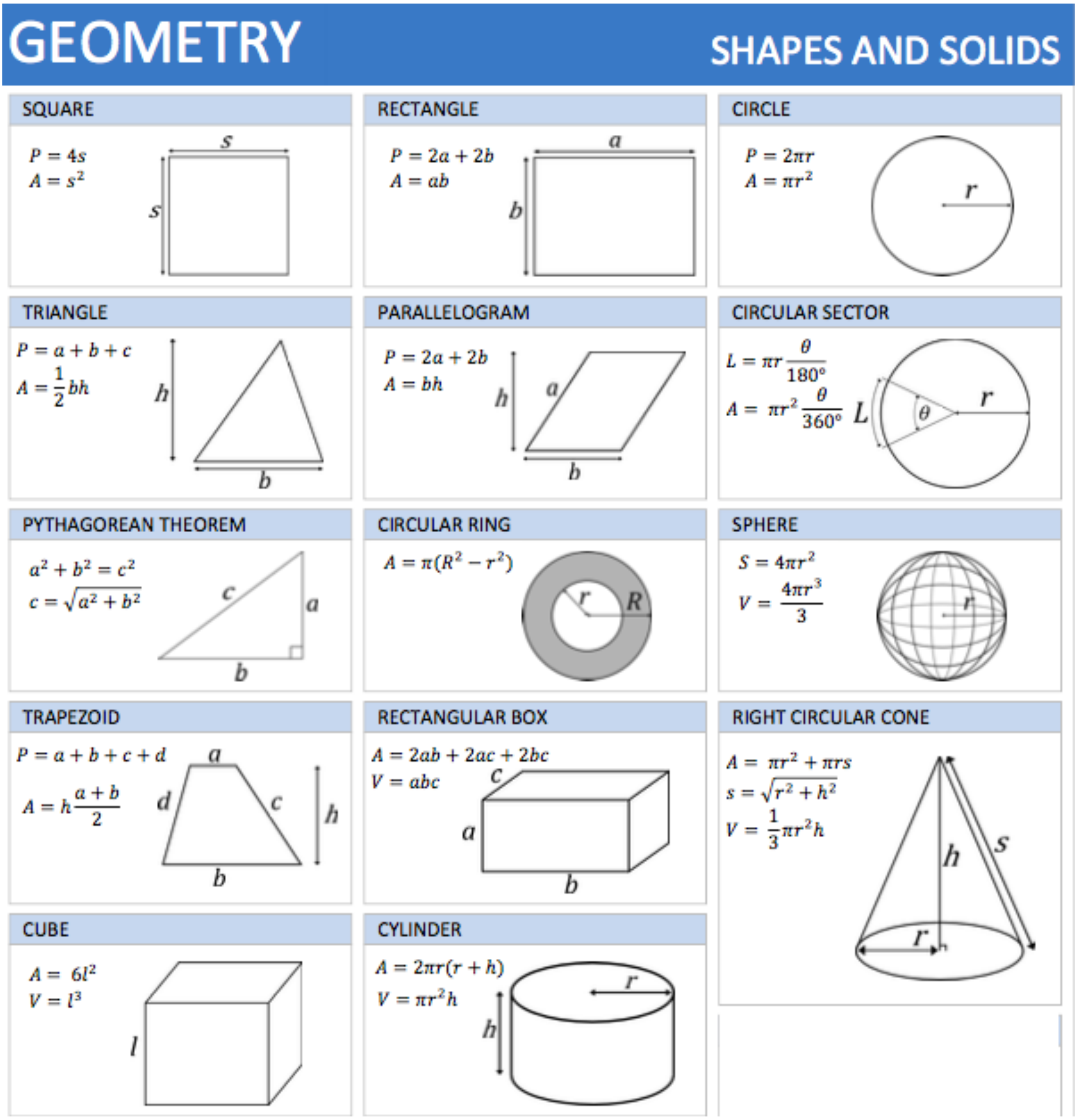
Teorema de senos: $\boldsymbol{\frac{a}{sin\ A} = \frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{sin\ C}}$	
Teorema de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$	

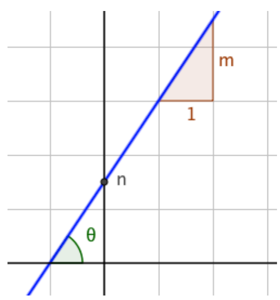
Razones trigonométricas de la suma		
$\boldsymbol{\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot sin\ b}$	$\boldsymbol{\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b}$	$\boldsymbol{tg\ (a \pm b) = \frac{tg\ a\ \pm tg\ b}{1\ \mp tg\ a \cdot tg\ b}}$

Razones trigonométricas del ángulo doble		
$\boldsymbol{\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a}$	$\boldsymbol{\cos 2a = cos^2\ a\ - sin^2\ a}$	$\boldsymbol{tg\ 2a = \frac{2 \cdot\ tg\ a}{1 - tg^2 a}}$

Razones trigonométricas del ángulo mitad		
$\boldsymbol{\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}$	$\boldsymbol{\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}}$	$\boldsymbol{\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}}$

Transformación de sumas en productos	
$\boldsymbol{\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}}$	$\boldsymbol{\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}}$
$\boldsymbol{\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}}$	$\boldsymbol{\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}}$





$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ $\quad \vec{u}\perp\vec{v} \leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$r: Ax + By + c = 0 \to y = mx + n\,;\ \ m = \tan\theta\ ;\ \ r \parallel s\ \leftrightarrow\ m_r = m_s\ \ r \perp s\ \leftrightarrow\ m_r = -\dfrac{1}{m_s}$

$Circunferencia\ centro\ (a,b) y\ radio\ R{:}\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$Elipse\ de\ semiejes\ a\ y\ b{:}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad semi-distancia\ focal{:}\, c\ /\ c^2 = a^2;\ \ excent{:}\, 0 < e = \dfrac{c}{a} < 1$

TABLA DE DERIVADAS

FUNCIÓN SIMPLE		FUNCIÓN COMPUESTA	
y= K	y´= 0		
y = x	y´= 1		
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y = (f(x))^n$	$y' = n\,(f(x))^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
y= lnx	$y' = \frac{1}{x}$	y = ln f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$
y = sen x	y´= cos x	y = sen f(x)	y´= cos f(x) · f´(x)
y = cos x	y´= - senx	y = cos f(x)	y´= -sen f(x)· f´(x)
y = tg x	$y' = 1 + tg^2 x = sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	y = tg f(x)	$y' = (1 + tg^2(f(X))) \cdot f'(x)$
y = arcsen x	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = arcsen f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
y = arccos x	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = arccos f(x)	$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
y = arctg x	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	y = arctg f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

ÁLGEBRA DE DERIVADAS

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN: D(k f(x)) = k·f´(x)

DERIVADA DE LA SUMA: D(f(x) ± g(x)) = f ´(x) ± g´(x)

PRODUCTO DE FUNCIONES: D(f(x) · g(x)) = f´(x)·g(x) + f(x)·g´(x)

COCIENTE DE FUNCIONES : $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \bullet g(x) - f(x) \bullet g'(x)}{[g(x)]^2}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: D(g(f(x)) = g´(f(x)) · g´(x)