DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

VARIABLE ALETORIA

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Se denotan las v.a. con letras mayúsculas y sus posibles valores con letras minúsculas.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o numerable de valores.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ se llama función de probabilidad o función de masa a aquella función que hace corresponder a cada valor de la variable con su probabilidad.

Ejemplo

X = resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

1. $0 \leq P(X=x_i) \leq 1$
2. $P(X\leq x) = \sum_{i, x_i \leq x} P(X=x_i)$
3. $\sum_i P(X=x_i) = 1$
4. $P(X>x) = 1 - P(X\leq x)$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

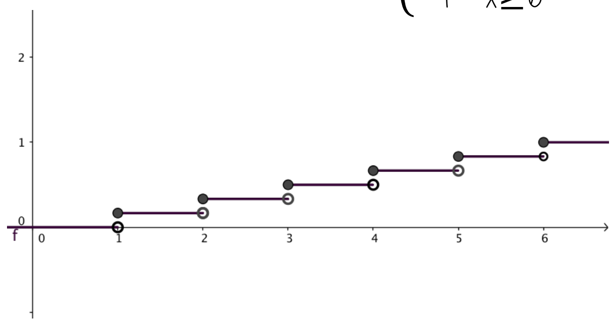
Es la función acumulada $F(x)=P(X\leq x)$. Está definida para todos los valores de la variable X. Dom=R.

Ejemplo

X=lanzar un dado

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
F(x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{6} & 1\leq x<2 \\ \frac{2}{6} & 2\leq x<3 \\ \frac{3}{6} & 3\leq x<4 \\ \frac{4}{6} & 4\leq x\leq 5 \\ \frac{5}{6} & 5\leq x<6 \\ 1 & x\geq 6 \end{cases}$$



PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

1. $F(-\infty)=0$
2. $F(\infty)=1$
3. Si $x\leq y$, entonces $F(x)\leq F(y)$
4. Es una función escalonada.

ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA V A

$$E(X)=\sum_i x_i P(X=x_i) = x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n$$

$$Var(X)= \sum_i x_i^2 P(X=x_i) - E(X)^2$$

Ejemplo

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
x_ip_i	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6
$x_i^2 p_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	91/6

$E(X) = 21/6$

$Var(X) = 91/6 - (21/6)^2 = 105/36 = 2,92$

MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS

MODELO BERNOULLI

Tenemos un experimento aleatorio donde solo hay dos posibles resultados a los que llamaremos éxito o fracaso. $Rec(X)=\{0,1\}$ (valores que puede tomar la variable aleatoria)

$$X=\begin{cases} 1 & \text{si éxito} \\ 0 & \text{si fracaso} \end{cases}$$

$X \sim Bern(p)$

x	0	1
Probab.	$1-p=q$	p

$E(X)=p$
$Var(X)=p-p^2$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-p & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo

Tirar una moneda al aire.

$$X=\begin{cases} 1 & \text{si sale cara} \\ 0 & \text{si sale cruz} \end{cases}$$

$X \sim Bern(1/2)$

x	0	1	
p	1/2	1/2	
x·p	0	1/2	1/2
x^2·p	0	1/2	1/2
			Suma total

$E(X)=1/2$
$Var(X)=1/4$

MODELO BINOMIAL

Repetimos n veces un experimento Bernoulli de parámetro p, en las mismas condiciones de independencia.

La variable aleatoria: nº de veces que ocurre el suceso A (nº éxitos) será una binomial con parámetros n y p: Bin(n,p).

Rec $X=\{0,1,2,3,\ldots\}$ (valores que puede tomar la variable aleatoria)

$X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=a)=\binom{n}{a}p^a(1-p)^{n-a} \quad \text{donde } \binom{n}{a}=\frac{n!}{a!(n-a)!}$$

$E(X)=np$
$Var(X)=np(1-p)=npq$

Ejemplo

El 20% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Definimos X=nº de personas que estan viendo el programa ~ Bin(10, 0.20) donde p=0,2 es la probabilidad de éxito (ver concurso de tv). $Rec(X)=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

a) Calcula la probabilidad de que ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X=8)=\binom{10}{8}\cdot 0{,}2^8\cdot(1-0{,}2)^2=\underline{0{,}000074}$$

b) Calcula la probabilidad de que más de ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9(1-0{,}2)^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}(1-0{,}2)^0=0{,}000004+0{,}0000001$$
$$=\underline{0{,}0000041}$$

c) Calcula la probabilidad de que algunas de las diez personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>0)=1-P(X\leq 0)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}2^0(1-0{,}2)^{10}=1-0{,}11=\underline{0{,}89}$$

c) Calcular la media y la varianza $E(X)=10\cdot 0{,}20=\underline{2}$ $Var(X)=10\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=\underline{1{,}6}$

MODELOS PROBABILÍSTICOS CONTINUOS

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Una variable aleatoria es continua si puede tomar cualquier tipo de valor.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Es la función acumulada $F(x) = P(X \leq x)$. Está definida para todos los valores de la variable X. Dom=R (no son funciones escalonadas)

PROPIEDADES

1. $F(-\infty)=0$
2. $F(\infty)=1$
3. Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$
4. $F(x)$ es continua

FUNCION DE DENSIDAD

$f(x) = F'(x)$

PROPIEDADES

1. $f(x) \geq 0$
2. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
3. $F(x) = P(X \leq x)$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
5. $P(X=a) = 0$

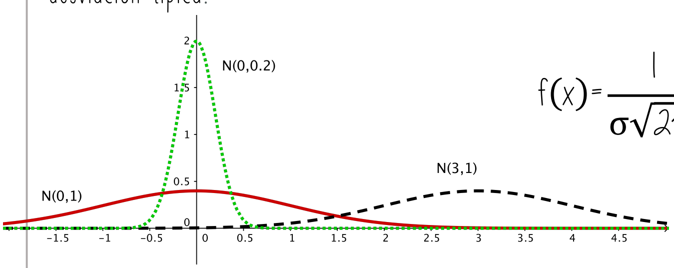
En variables continuas no tiene sentido la función de probabilidad ya que $P(X=a)=0$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

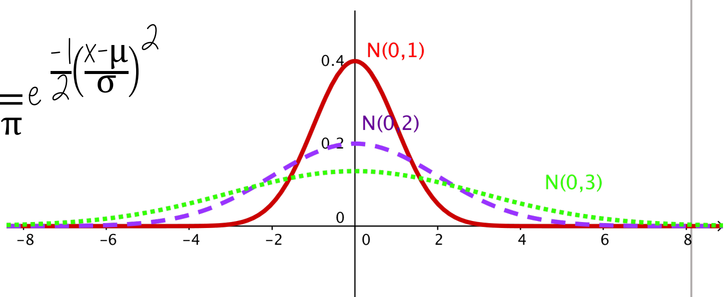
$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - E(X)^2$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Uno de los modelos de variables continuas más importantes es la distribución normal $X \sim N(\mu,\sigma)$ siendo μ media y σ la desviación típica.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

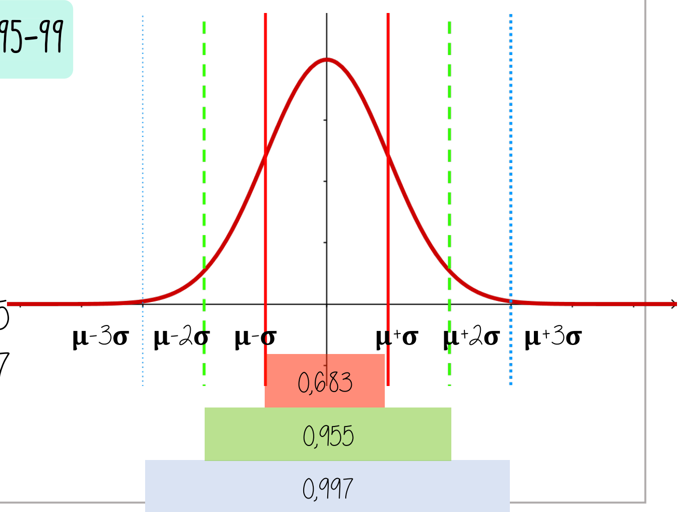


La función de densidad es simétrica respecto a μ.

REGLA 68-95-99

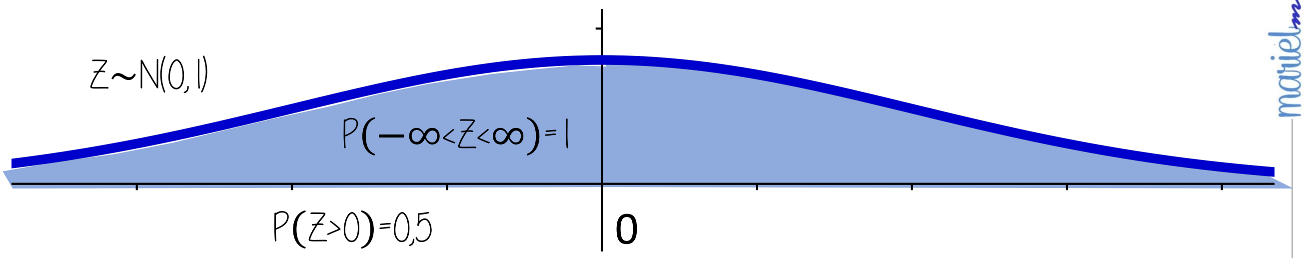
PROPIEDADES

$$\text{Si } X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow \begin{cases} P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}683 \\ P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}955 \\ P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}997 \end{cases}$$



CALCULO DE PROBABILIDADES EN LA DISTRIBUCION N(0,1)

marielmates

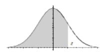


$P(Z>0)=0,5$

$P(Z<0)=0,5$

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

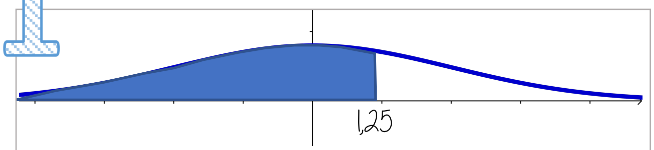
Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

En la tabla buscamos $P(Z<a)$, siendo a un nº positivo

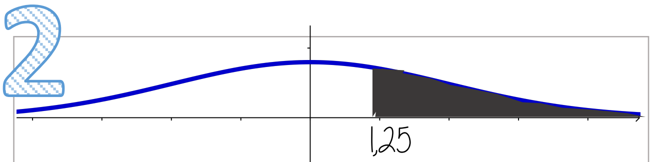
1

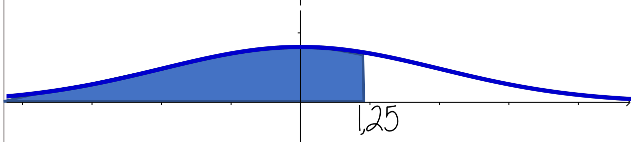


$P(Z<1,25)=0,8944$

Buscamos directamente en la tabla

2

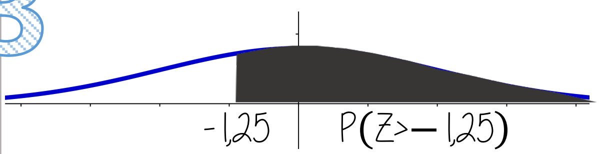




$P(Z>1,25)=1-P(Z<1,25)=1-0,8944=$

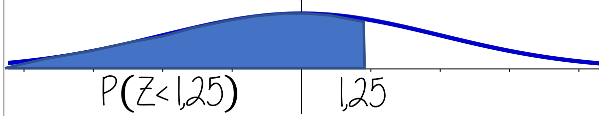
$=0,1056$

3



$P(Z>-1,25)$

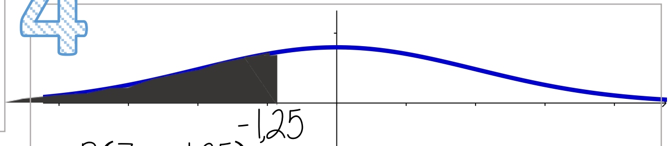
$=$



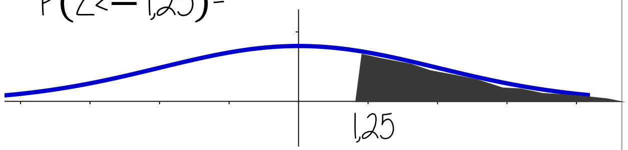
$P(Z<1,25)$

$P(Z>-1,25)=P(Z<1,25)=0,8944$

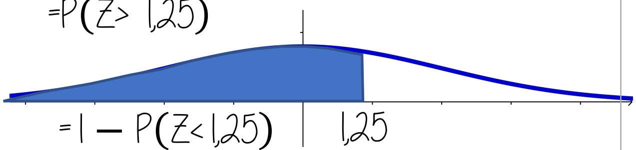
4



$P(Z<-1,25)=$



$=P(Z>1,25)$

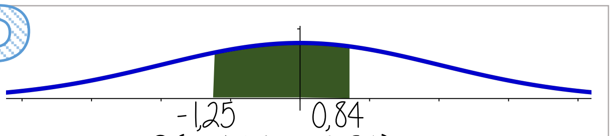


$=1-P(Z<1,25)$

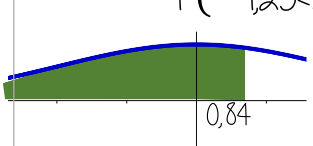
$P(Z<-1,25)=P(Z>1,25)=$

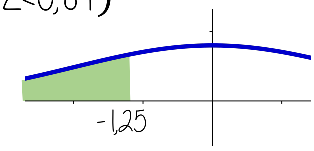
$=1-P(Z<1,25)=0,1056$

5



$P(-1,25<Z<0,84)$





$P(Z<0,84)-P(Z<-1,25)$

$=0,7995-(1-P(Z<1,25))=$

$=0,7995-(0,1056)=0,5839$

$P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)$

https://marielmatesblog.wordpress.com/

PROPIEDADES

- Si $X \sim N(\mu,\sigma)$, $Y=aX+b \Rightarrow Y \sim N(a\mu+b, |a|\sigma)$.
- Si $X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ TIPIFICAR
- Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ un conjunto de v.a. independientes con distribución $N(\mu,\sigma)$ se cumple que $\sum_i X_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y desviación típica σ, si n es suficientemente grande $(n>30)$ se cumple que :

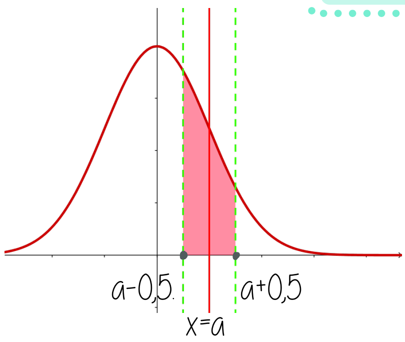
$$\sum_i X_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \qquad \bar{X}=\frac{\sum_i X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL

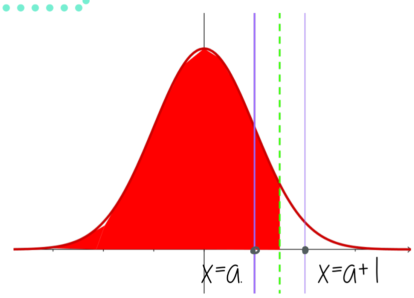
Si $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow$ $X \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ $\qquad \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$n \geq 30,\ np>5\ n(1-p)>5$

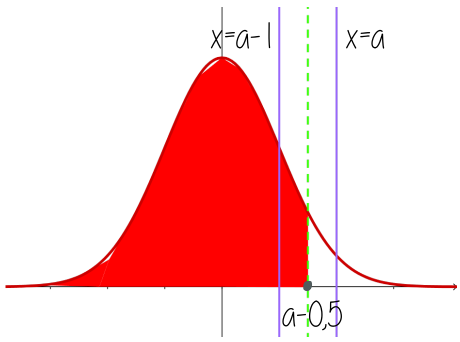
CORRECCIÓN DE CONTINUIDAD



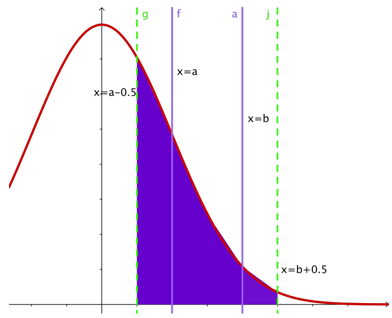
$$P(X_B=a) = P(a-0{,}5 \leq X_N \leq a+0{,}5)$$



$$P(X_B \leq a) = P(X_N \leq a+0{,}5)$$



$$P(X_B < a)=P(X_B \leq a-1)=P(X_N \leq a-0{,}5)$$



$$P(a \leq X_B \leq b)=P(a-0{,}5 \leq X_N \leq b+0{,}5)$$

$$P(X_B > a) = P(X_B \geq a+1) = P(X_N \geq a+0{,}5)$$

$$P(X_B \geq a)=P(X_N \geq a-0{,}5)$$

$$P(a \leq X_B < b) =P(a \leq X_B \leq b-1) = P(a-0{,}5 \leq X_N \leq b+0{,}5)$$