APÉNDICE II: EL LAGRANGIANO. (Video curso "*Mini curso de MECÁNICA CUÁNTICA, a lo Feynman*", capítulos 2 y 3, de Javier García)

Un FUNCIONAL es un operador matemático que transforma funciones en números reales: $s[f(x)] \in \mathbb{R}$

Un ejemplo de funcional podría ser $s[f(x)] = \int_0^1 f(x)dx$

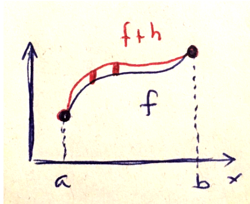
$s[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_0^1 = 1/3$; $s[sin x] = \int_0^1 sin x dx = [-cos x]_0^1 = -cos 1 + 1 \simeq 0.46$

Otro ejemplo de funcional podría ser: $s[f(x)] = \int_0^1 \left([f(x)]^2 + [f'(x)]^2 \right) dx$

ahora, $s[x^2] = \int_0^1 \left[(x^2)^2 + (2x)^2\right] dx = \int_0^1 (x^4 + 4x^2)dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = 1/5 + 4/3 = 23/15$

Por notación, llamamos $L = \left(f(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^2$, y así, en general, $s[f] = \int_a^b L(f, f')\, dx$ será un funcional.

Nos preguntamos ahora, ¿se puede derivar un funcional?.



Consideremos un pequeño cambio en la función $f(x)$, ahora será $\delta f(x) = f(x) + h(x)$ con las condiciones que $h(a) = h(b) = 0$ (la función y su función cambiada coinciden en los extremos del intervalo) ($f(x)$ y $f(x) + h(x)$) y que difieran poco en $]a, b[$, $h(x)$ pequeño. La derivada del funcional medirá como cambia el funcional al cambiar un poco la función. (δ indica cambio)

DERIVADA FUNCIONAL: $\frac{\delta s}{\delta f}$

$$s[f] = \int_a^b L(f, f')\, dx; \quad s[f + h] = \int_a^b L(f + h, f' + h')\, dx$$

$$\delta s = s[f + h] - s[f] = \int_a^b \{ L(f + h, f' + h') - L(f, f') \}\, dx = \int_a^b \delta L\, dx$$

Como, para funciones de dos variables e cumple que: $f(x, y) \to \delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y$, tendremos que:

$\delta L = \frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'$ y entonces: $\delta S = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}\delta f\, dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\, dx$

Integrando por partes la última integral: $\left(\int u dv = uv - \int v du \right)$ Si $u = \frac{\partial L}{\partial f'} \to du = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}\right]$ y

$dv = \delta f'\, dx \to v = \delta f$. Tendremos: $\int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\, dx = \left[\frac{\partial L}{\partial f'} \cdot \delta f\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}\right] \delta f\, dx$

Recordad que δf es lo que habíamos llamado $h(x)$ y que $\delta f = h(x)]_a^b = h(b) - h(a) = 0$ tal y como habíamos impuesto, con lo que la primera parte del resultado de aplicar el método por partes se anula.

Tenemos que: $\delta S = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}\delta f\, dx - \int_a^b \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}\right]\delta f'\, dx$. Agrupando en una sola integral:

$\delta s = \int_a^b \delta f \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right] dx$. Y ahora, *por enésima vez nos perdonarán los matemáticos,* pasando δf dividiendo:

$$\frac{\delta s}{\delta f} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right] dx$$ que es a lo que llamamos derivada funcional.

Vamos a obtener las leyes de Newton de la mecánica clásica. Ahora la variable independiente es el tiempo ($x \to t$) y la variable dependiente es la posición ($f(x) \to x$) ($f'(x) \to \dot{x} = v$) . Con esta notación:

$$s[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L[x, \cdot x]dt \qquad \text{y} \qquad \frac{\delta s}{\delta x(t)} = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] dt$$

Deseamos crear un funcional s / $\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0$ (haya un mínimo) y de aquí se deben deducir las leyes de Newton.

Para que $\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0$ basta con que se anule el integrando: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$, es decir $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$

Esto ha de ser equivalente a $F = ma = m\frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}(mv)$; $m = cte$. Luego: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv = m\dot{x}$ y $\frac{\partial L}{\partial x} = F$.

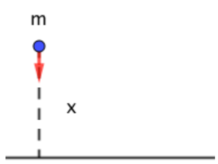
En el caso de tener fuerzas conservativas: $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ (V es la energía potencial). Ha de ocurrir que. $L = -V + algo(\dot{x})$, así, $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + 0 = F$. Veamos quién ha de ser ese "$algo$":

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(-V(x)) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\, algo = 0 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\, algo = mv = m\dot{x} \to \frac{\partial}{\partial \dot{x}} algo = m\dot{x} \to algo = \int m\dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Luego: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$. Así debe ser L para que se obtengan las leyes de Newton.

A este L se le llama LAGRANGIANO, $\mathscr{L}$ = "cinética - potencial". Al funcional s se le llama ACCIÓN $s = \int_{t_a}^{t_b} \mathscr{L}\, dt$ y esto reproduce las leyes de Newton. Par un $V(x)$ dado, la trayectoria $x(t)$ será aquella que minimice la acción: $\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0$

Veamos un ejemplo: $V(x) = mgx$



$-\frac{\partial V}{\partial x} = -mg = F$ Fuerza que siente la partícula que la tira hacia abajo.

$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$

$\frac{\delta s}{\delta x(t)} = 0 \to \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

Como $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = -mg \to \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + mg = 0 \to m\frac{d}{dt}\dot{x} + mg = 0 \to m\ddot{x} = -mg \to \ddot{x} = -g$

Es decir: $a = -g$ y a partir de aquí: $v = \int a\,dt = -gt + v_0$ y $x = \int v\,dt = -gt^2/2 + v_0 t + x_0$

Hemos obtenido: $x(t) = x_0 + v_o t - \frac{1}{2}gt^2$ que es la trayectoria de una partícula libre en un campo gravitatorio.