

Curso de Mécanica Teórica, Tarea transformada de Bogoliubov - Parte 2

Dionicio Alberto Pérez-Landero

September 13, 2020

Dado el siguiente hamiltoniano

$$H = \alpha_1 a_1 a_1^* + \beta_1 (a_1 a_1 + a_1^* a_1^*) + \alpha_2 a_2 a_2^* + \beta_2 (a_2 a_2 + a_2^* a_2^*) + \gamma (a_1 a_2 + a_1 a_2^* + a_1^* a_2 + a_1^* a_2^*) \quad (1)$$

- Describir el problema de eigenvalores usando la ecuación maestra

$$U \frac{\partial H}{\partial a} - V \frac{\partial H}{\partial a^*} = \lambda (V a + U a^*) \quad (2)$$

- Posteriormente, encontrar las eigenfrecuencias
- Para el caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y $\gamma = -\frac{1}{2}$ encontrar de manera completa las matrices U y V.

Iniciamos con el primer problema, primero representamos la ecuación 2 de forma matricial

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial a_1} \\ \frac{\partial H}{\partial a_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial a_1^*} \\ \frac{\partial H}{\partial a_2^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} \right) \quad (3)$$

El resultado de las operaciones es un vector columna de dos componentes, tomando el primer componente obtenemos

$$u_{11} \frac{\partial H}{\partial a_1} + u_{12} \frac{\partial H}{\partial a_2} - v_{11} \frac{\partial H}{\partial a_1^*} + v_{12} \frac{\partial H}{\partial a_2^*} = \lambda_1 (v_{11} a_1 + v_{12} a_2 + u_{11} a_1^* + u_{12} a_2^*) \quad (4)$$

Ahora, procedemos a calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} = \alpha_1 a_1^* + 2\beta_1 a_1 + \gamma a_2 + \gamma a_2^* \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} = \alpha_2 a_2^* + 2\beta_2 a_2 + \gamma a_1 + \gamma a_1^* \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_1^*} = \alpha_1 a_1 + 2\beta_1 a_1^* + \gamma a_2 + \gamma a_2^* \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2^*} = \alpha_2 a_2 + 2\beta_2 a_2^* + \gamma a_1 + \gamma a_1^* \quad (8)$$

Ahora, sustituimos las ecuaciones anteriores en la ecuación (4)

$$\begin{aligned}
& u_{11} (\alpha_1 a_1^* + 2\beta_1 a_1 + \gamma a_2 + \gamma a_2^*) + u_{12} (\alpha_2 a_2^* + 2\beta_2 a_2 + \gamma a_1 + \gamma a_1^*) \\
& - v_{11} (\alpha_1 a_1 + 2\beta_1 a_1^* + \gamma a_2 + \gamma a_2^*) - v_{12} (\alpha_2 a_2 + 2\beta_2 a_2^* + \gamma a_1 + \gamma a_1^*) \\
& = \lambda_1 v_{11} a_1 + \lambda_1 v_{12} a_2 + \lambda_1 u_{11} a_1^* + \lambda_1 u_{12} a_2^*
\end{aligned} \tag{9}$$

Posteriormente factorizamos las a y a^*

$$\begin{aligned}
& a_1 (u_{11} 2\beta_1 + u_{12} \gamma - v_{11} \alpha_1 - v_{12} \gamma) + a_2 (u_{12} 2\beta_2 + u_{11} \gamma - v_{12} \alpha_2 - v_{11} \gamma) \\
& a_1^* (-v_{11} 2\beta_1 + u_{12} \gamma + u_{11} \alpha_1 - v_{12} \gamma) + a_2^* (-v_{12} 2\beta_2 + u_{11} \gamma + u_{12} \alpha_2 - v_{11} \gamma) \\
& = \lambda_1 v_{11} a_1 + \lambda_1 v_{12} a_2 + \lambda_1 u_{11} a_1^* + \lambda_1 u_{12} a_2^*
\end{aligned} \tag{10}$$

Esta ecuación debe cumplirse para todas las a , lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 (u_{11} 2\beta_1 + u_{12} \gamma - v_{11} \alpha_1 - v_{12} \gamma) & = \lambda_1 v_{11} a_1 \\ a_2 (u_{12} 2\beta_2 + u_{11} \gamma - v_{12} \alpha_2 - v_{11} \gamma) & = \lambda_1 v_{12} a_2 \\ a_1^* (-v_{11} 2\beta_1 + u_{12} \gamma + u_{11} \alpha_1 - v_{12} \gamma) & = \lambda_1 u_{11} a_1^* \\ a_2^* (-v_{12} 2\beta_2 + u_{11} \gamma + u_{12} \alpha_2 - v_{11} \gamma) & = \lambda_1 u_{12} a_2^* \end{cases} \tag{11}$$

Eliminando las a de las ecuaciones y reacomodando, obtenemos

$$\begin{cases} -v_{11} 2\beta_1 + u_{12} \gamma + u_{11} \alpha_1 - v_{12} \gamma & = \lambda_1 u_{11} \\ -v_{12} 2\beta_2 + u_{11} \gamma + u_{12} \alpha_2 - v_{11} \gamma & = \lambda_1 u_{12} \\ u_{11} 2\beta_1 + u_{12} \gamma - v_{11} \alpha_1 - v_{12} \gamma & = \lambda_1 v_{11} \\ u_{12} 2\beta_2 + u_{11} \gamma - v_{12} \alpha_2 - v_{11} \gamma & = \lambda_1 v_{12} \end{cases} \tag{12}$$

Lo anterior se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma & -2\beta_1 & -\gamma \\ \gamma & \alpha_2 & -\gamma & -2\beta_2 \\ 2\beta_1 & \gamma & -\alpha_1 & -\gamma \\ \gamma & 2\beta_2 & -\gamma & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Siendo este un problema de eigenvalores, para resolverlo he hecho uso de Wolfram Alpha, dando como solución al problema de eigenvalores

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = & \left\{ -\frac{1}{2} \left[(-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_2^2)^2 - 4(\alpha_1^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_1^2 \beta_2^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 \gamma^2 + 8\alpha_1 \beta_2 \gamma^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 4\alpha_2^2 \beta_1^2 + 8\alpha_2 \beta_1 \gamma^2 + 16\beta_1^2 \beta_2^2 - 16\beta_1 \beta_2 \gamma^2) \right]^{1/2} + \frac{\alpha_1^2}{2} + \frac{\alpha_2^2}{2} - 2\beta_1^2 - 2\beta_2^2 \right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{14}$$

Estableciendo las condicones en particular $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y $\gamma = -\frac{1}{2}$ obtenemos el valor propio

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \tag{15}$$

Por lo tanto, la eigenfrecuencia es

$$\Omega = \sqrt{2} \omega_0 \tag{16}$$

Habiendo encontrado el valor propio, procedemos a calcular los coeficientes de las matrices U y V , teniendo para el caso particular que estamos viendo, la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 - \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Reduciendo la matriz con Gauss Jordan obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 + 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Con lo que podemos concluir lo siguiente tomando $v_{12} = 1$

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Ahora, debemos normalizar el vector, pero esta normalizacion esta dada por el problema.

$$\begin{aligned} u_{11}^2 + u_{12}^2 - v_{11}^2 - v_{12}^2 &= 1 \\ (A(-3 - 2\sqrt{2}))^2 + (A(3 + 2\sqrt{2}))^2 - (-A)^2 - (A)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (20)$$

Dando como resultado

$$A = \frac{1}{\sqrt{32 - 24\sqrt{2}}} \quad (21)$$

Teniendo finalmente que

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{32 - 24\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Tenemos la mitad los valores de las matrices U y V , para resolver lo siguiente tomamos ahora la los segundos terminos, es decir, debemos repetir todo el proceso tomando el componente $_{2,1}$ de la “*Master equation*”, pero a medida que vamos resolviendo el problema vemos que en este caso son identicos, con el mismo valor propio y dando tambien lo siguiente

Teniendo finalmente que

$$\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{32 - 24\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Finalmente, las matrices U y V son

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} & 3 + 2\sqrt{2} \\ -3 - 2\sqrt{2} & 3 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$