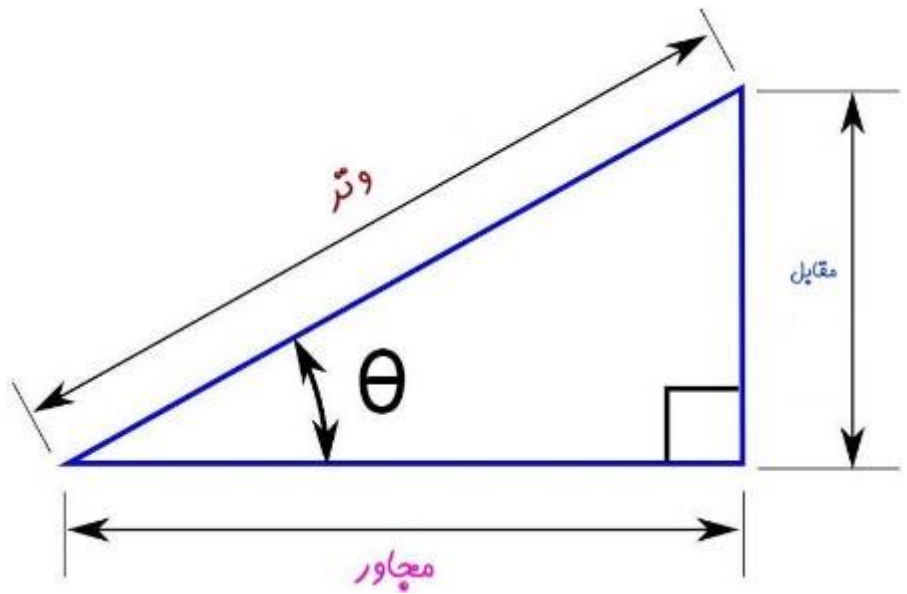


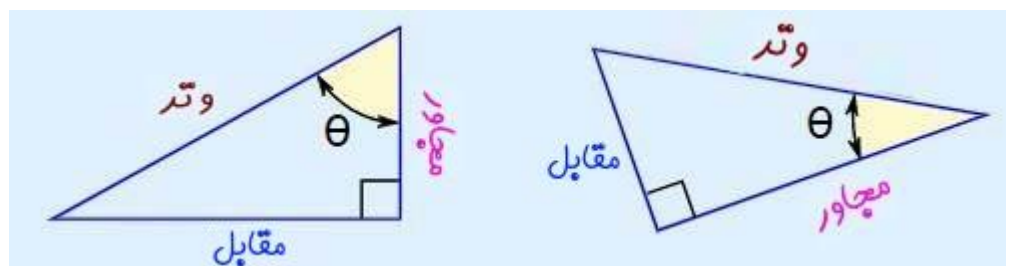
مثلث قائم الزاویه

مثلث قائم الزاویه به مثلثی گفته می‌شود که یکی از زوایای آن 90° درجه باشد. در چنین مثلثی دو ضلع عمود بر هم وجود دارد و ضلع سوم انتهای این دو را به یکدیگر متصل می‌کند. سینوس، کسینوس و تانژانت مفاهیمی هستند که در مثلث قائم الزاویه معنا و مفهوم پیدا می‌کنند. جهت توضیح روابط مربوط به این مفاهیم، در ابتدا مثلثی قائم الزاویه را مطابق با شکل زیر در نظر بگیرید.



جهت درک بهتر مفاهیم، اجزا یک مثلث قائم الزاویه را مطابق با زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

- ضلع مقابل: ضلع قرار گرفته مقابل زاویه θ
- ضلع مجاور: ضلع قرار گرفته کنار زاویه θ
- وتر: بزرگ‌ترین ضلع مثلث قائم الزاویه

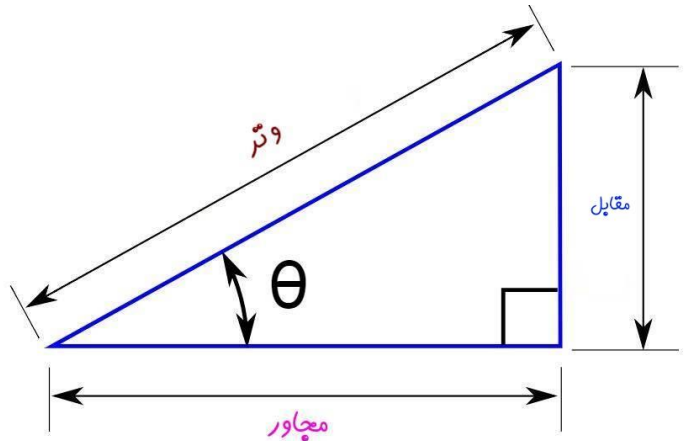


شکل فوق دو مثلث قائم الزاویه و اجزاء آن را نشان می‌دهد.

سینوس، کسینوس و تانژانت

مفاهیم سینوس، کسینوس و تانژانت برابر با نسبت اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف می‌شوند. در زیر مثلی قائم‌الزاویه و توابع مثلثاتی مربوط به آن تعریف شده‌اند.

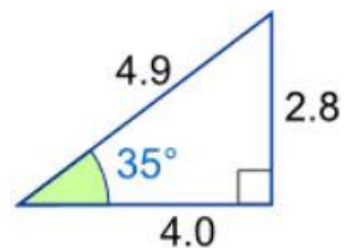
$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}\end{aligned}$$



سینوس، کسینوس و تانژانت به ترتیب با نمادهای \sin ، \cos و \tan نمایش داده می‌شوند. توجه داشته باشید که برای یک زاویه θ ثابت، این مقادیر ثابت هستند؛ دلیل این امر، افزایش همزمان صورت و مخرج آن‌ها است. در ادامه مثالی ذکر شده که جهت درک بهتر این مفاهیم، مطالعه آن ضروری است.

مثال ۱

مثلی را مطابق با شکل زیر در نظر بگیرید.



با توجه به شکل فوق، مقادیر $\sin 35^\circ$ ، $\cos 35^\circ$ و $\tan 35^\circ$ را بدست آورید.

طبق تعریف انجام شده در بالا، مقدار سینوس 35° درجه ($\sin 35^\circ$) برابر است با:

$$\begin{aligned}\sin(35^\circ) &= \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ &= \frac{2.8}{4.9} \\ &= \mathbf{0.57...}\end{aligned}$$

همچنین مقادیر $\cos 35^\circ$ و $\tan 35^\circ$ نیز برابرند با:

$$\begin{aligned}\cos(35^\circ) &= \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \\ &= \frac{4.0}{4.9} \\ &= \mathbf{0.82...}\end{aligned}$$

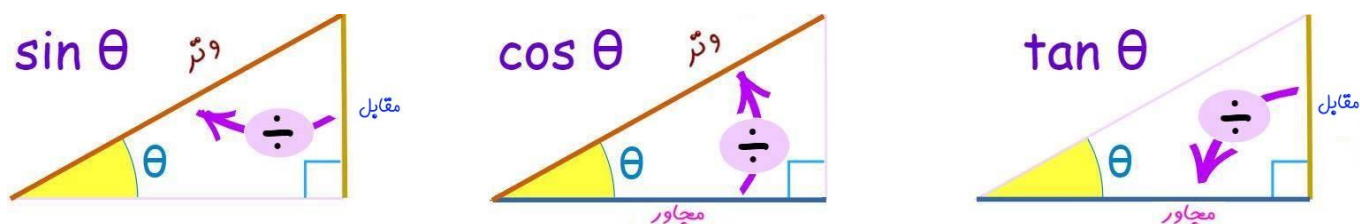
$$\begin{aligned}\tan(35^\circ) &= \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \\ &= \frac{2.8}{4.0} \\ &= \mathbf{0.70...}\end{aligned}$$

ماشین حساب‌های مهندسی و علمی نیز قابلیت محاسبه مقادیر مثلثاتی - یا همان سینوس، کسینوس و تانژانت - را دارند. البته توجه داشته باشید که یک زاویه را می‌توان در دو حالت رادیان یا درجه بیان کرد. برای نمونه $\frac{3}{14}$ رادیان برابر با 18° درجه است.



در اکثر ماشین حساب‌های مهندسی و علمی امکان محاسبه توابع مثلثاتی وجود دارد.

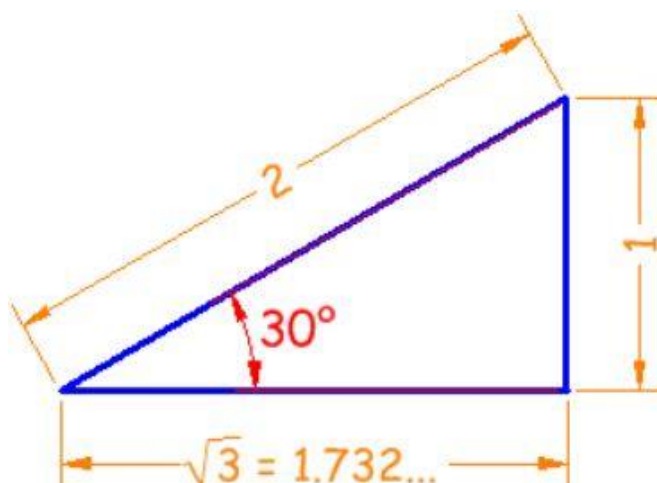
جهت به‌خاطر سپردن، می‌توانید از شکل‌های زیر استفاده کنید. در این اشکال، از فلش‌های صورتی رنگی استفاده شده که ابتدای آن اندازه ضلع قرار گرفته در صورت و انتهایش اندازه ضلع مخرج کسر را نشان می‌دهد.



توجه داشته باشید که مقادیر سینوس و کسینوس کمتر از ۱ و بیشتر از -۱ هستند؛ اما مقدار تانژانت می‌تواند از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت تغییر کند.

مثال ۲

با توجه به شکل زیر، مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه ۳۰ درجه را بدست آورید.



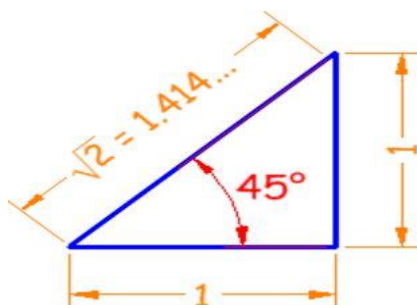
با توجه به طول‌های نشان داده شده در شکل فوق می‌توان گفت:

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ) &= 1 / 2 = 0.5 \\ \cos(30^\circ) &= 1.732 / 2 = 0.866... \\ \tan(30^\circ) &= 1 / 1.732 = 0.577...\end{aligned}$$

می‌توانید مقادیر به‌دست آمده در بالا را با استفاده از ماشین حساب چک کنید.

مثال ۳

سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه ۴۵ درجه را با توجه به شکل زیر بدست آورید.



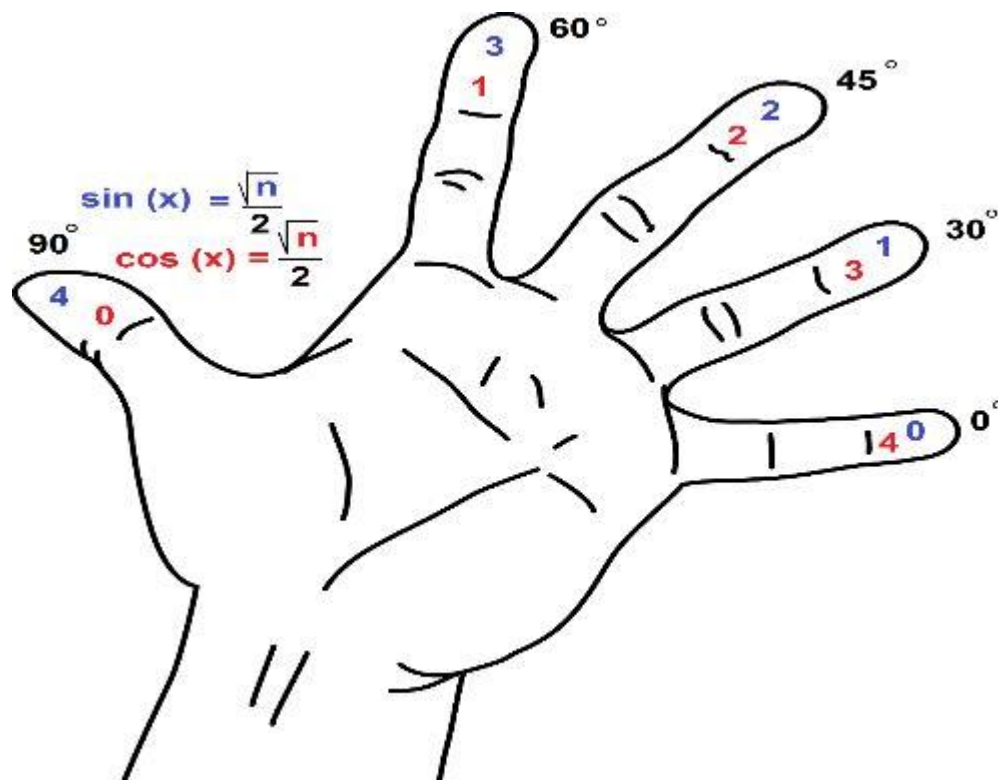
در زاویه ۴۵ درجه، مثلث، همزمان قائم‌الزاویه و متساوی الساقین است؛ بنابراین طول اضلاع مجاور و مقابل با هم برابر هستند. از این رو همان‌طور که در ادامه نیز محاسبه شده مقادیر سینوس و کسینوس با هم برابر بوده و مقدار تانژانت نیز برابر با ۱ است. در حقیقت این مقادیر برابرند با:

$$\begin{aligned}\sin(45^\circ) &= 1 / 1.414 = 0.707... \\ \cos(45^\circ) &= 1 / 1.414 = 0.707... \\ \tan(45^\circ) &= 1 / 1 = 1\end{aligned}$$

در جدول زیر توابع مثلثاتی برای زوایای پرکاربرد در امتحانات، ذکر شده است. پیشنهاد می‌شود جدول مذکور را به خاطر بسپارید.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده

بدیهی است که حفظ کردن ۱۵ عدد به نظر دشوار می‌رسد؛ از این رو روشی را ارائه می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توان مقادیر سینوس و کسینوس را محاسبه کرد. در نتیجه با داشتن این دو مقدار و تقسیم آن‌ها به یکدیگر، مقدار تانژانت نیز قابل محاسبه خواهد بود. انگشت کوچک تا شست را به ترتیب با اعداد ۰ تا ۴ نامگذاری کنید. همانند شکل زیر، این انگشتان را به ترتیب در زوایای ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° در نظر بگیرید.



به منظور محاسبه سینوس یک زاویه، از شماره انگشت مرتبط با آن جذر گرفته و بر ۲ تقسیم کنید. برای نمونه فرض کنید می‌خواهید سینوس ۳۰° درجه را محاسبه کنید. همان‌طور که در شکل زیر نیز مشخص شده، انگشت شماره ۱ در زاویه ۳۰° درجه قرار دارد، بنابراین سینوس این زاویه برابر است با:

$$\sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

به منظور محاسبه کسینوس نیز دقیقاً همین کار را به صورت عکس انجام دهید؛ یعنی شماره انگشت شست برابر با صفر و انگشت کوچک برابر با ۴ است. فرض کنید می‌خواهید کسینوس ۳۰° درجه را محاسبه کنید. همان‌گونه که در شکل فوق می‌بینید شماره ۳ در زاویه ۳۰° درجه قرار دارد (اعداد قرمز رنگ مربوط به محاسبه کسینوس هستند). در نتیجه کسینوس زاویه ۳۰° درجه برابر است با:

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

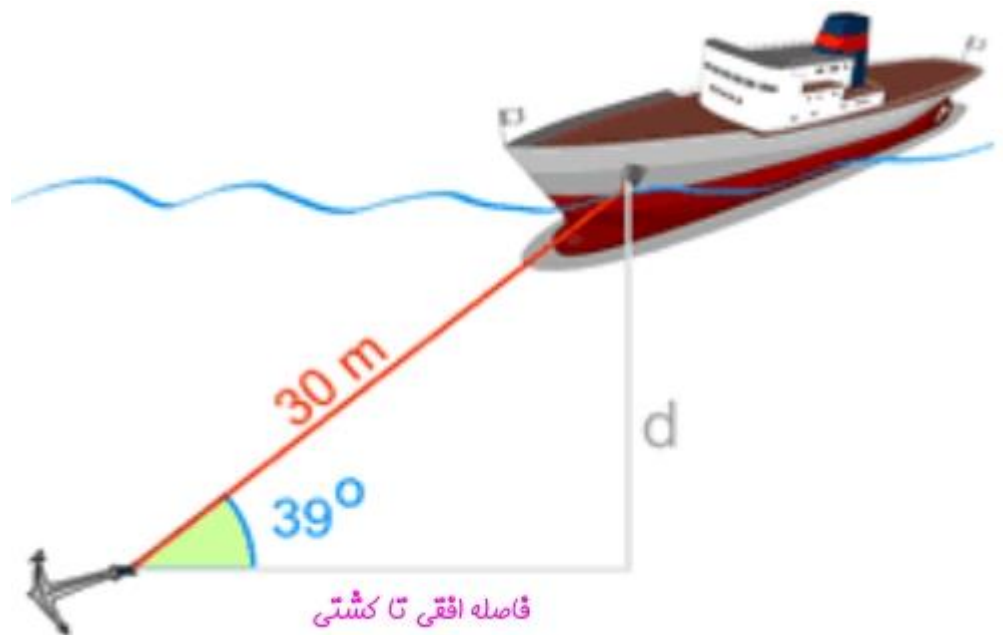
چرا این مفاهیم مهم هستند؟

به راستی چرا این مفاهیم تعریف شده و دارای اهمیت‌اند؟ البته این مفاهیم دارای کاربردهای فراوانی هستند؛ اما اصلی‌ترین دلایل آن‌ها موارد زیر هستند.

- با دانستن زاویه یک کمیت می‌توان اندازه آن را یافت.
 - با دانستن اندازه یک کمیت - **برداری** - می‌توان زاویه آن را یافت.
- شاید بیان بالا برای شما کمی گیج‌کننده باشد؛ از این رو پیشنهاد می‌کنیم که حتماً مثال زیر را مطالعه فرمایید.

مثال ۴

با استفاده از مفهوم سینوس، اندازه d را در شکل زیر بیابید.



فرضیات و مجهول این مسئله به شرح زیر هستند:

- زاویه کابل با سطح افقی آب برابر با 39° درجه است.
- طول کابل برابر با ۳۰ متر است.
- $?=d$

همان‌طور که در شکل نیز مشخص شده می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ای در نظر گرفت که در آن طولِ کابل برابر با وتر، فاصله d برابر با ضلع مقابل و فاصله افقی تا کشتی، برابر با ضلع مجاور زاویه 39° درجه است.

در ابتدا با استفاده از ماشین حساب سینوس زاویه 39° درجه برابر با 0.6293 بدست می‌آید. در حقیقت:

$$\begin{aligned}\sin 39^\circ &= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \\ \sin 39^\circ &= d/30 \\ d/30 &= \sin 39^\circ \\ d/30 &= 0.6293\ldots\end{aligned}$$

با ضرب کردن دو طرف رابطه بالا در عدد 30 ، می‌توان گفت:

$$\begin{aligned}d &= 0.6293 \times 30 \\ d &= \mathbf{18.88}\end{aligned}$$

بنابراین اندازه d برابر با 18.88 متر بدست می‌آید.

دیگر توابع

توجه داشته باشید که در مثلثات توابع دیگری نیز وجود دارند که کمتر متداول هستند. این توابع سینکانت، کُسنکانت و کُتانژانت هستند که هرکدام از آن‌ها با استفاده از روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\text{سینکانت} : \quad \sec(\theta) &= \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}} \quad (=1/\cos) \\ \text{کُسنکانت} : \quad \csc(\theta) &= \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}} \quad (=1/\sin) \\ \text{کُتانژانت} : \quad \cot(\theta) &= \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \quad (=1/\tan)\end{aligned}$$

رابطه بالا می‌گوید:

- سکانت = معکوس کسینوس
- کسکانت = معکوس سینوس
- کتانژانت = معکوس تانژانت