فرمول‌های انتگرال:

$$\boxed{\int kdx = kx + c} \Rightarrow \int 5dx = 5x + c \quad , \quad \int -3dx = -3x + c \quad , \quad \int dx = x + c \quad , \quad \int -dx = -x + c$$

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c} \Rightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad \int xdx = \frac{x^2}{2} + c, \quad \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x+a} = Ln|x+a| + c} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = Ln|x| + c \quad , \quad \int \frac{dx}{x-3} = Ln|x-3| + c$$

$$\boxed{\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c} \Rightarrow \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad , \quad \int \cos xdx = \sin x + c$$

$$\boxed{\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c} \Rightarrow \int \sin 4xdx = -\frac{1}{4}\cos 4x + c \quad , \quad \int \sin xdx = -\cos x + c$$

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c} \Rightarrow \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c \quad , \quad \int e^x dx = e^x + c \quad , \quad \int e^{-4x} dx = -\frac{1}{4}e^{-4x} + c$$

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{Lna} + c} \Rightarrow \int 5^x dx = \frac{5^x}{Ln5} + c \quad , \quad \int 2^x dx = \frac{2^x}{Ln2} + c$$

$$\boxed{\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\sinh ax + c} \Rightarrow \int \cosh 4x dx = \frac{1}{4}\sinh 4x + c \quad , \quad \int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\boxed{\int \sinh ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax + c} \Rightarrow \int \sinh 7x dx = \frac{1}{7}\cosh 7x + c \quad , \quad \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\boxed{\int \left(1+\tan^2 ax\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\tan ax + c} \Rightarrow \int \left(1+\tan^2 x\right) dx = \tan x + c$$

$$\boxed{\int \left(1+\cot^2 ax\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = \int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\cot ax + c} \Rightarrow \int \left(1+\cot^2 x\right) dx = -\cot x + c$$

$$\boxed{\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} Ln\left|\cos ax\right| + c} \Rightarrow \int \tan 3x dx = -\frac{1}{3} Ln\left|\cos 3x\right| + c \quad , \quad \int \tan x dx = -Ln\left|\cos x\right| + c$$

$$\boxed{\int \cot ax dx = \frac{1}{a} Ln\left|\sin ax\right| + c} \Rightarrow \int \cot 5x dx = \frac{1}{5} Ln\left|\sin 5x\right| + c \quad , \quad \int \cot x dx = Ln\left|\sin x\right| + c$$

$$\boxed{\int \sec ax \tan ax dx = \frac{1}{a}\sec ax + c} \Rightarrow \int \sec 3x \tan 3x dx = \frac{1}{3}\sec 3x + c \quad , \quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\boxed{\int \csc ax \cot ax dx = -\frac{1}{a}\csc ax + c} \Rightarrow \int \csc 7x \cot 7x dx = -\frac{1}{7}\csc 7x + c \quad , \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{1}{a}\tanh ax + c} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cosh^2 3x} = \frac{1}{3}\tanh 3x + c \quad , \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{1}{a}\coth ax + c} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sinh^2 2x} = -\frac{1}{2}\coth 2x + c \quad , \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax dx = \frac{1}{a} Ln\left|\sec ax + \tan ax\right| + c} \Rightarrow \int \sec x dx = Ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \csc ax dx = \frac{1}{a} Ln\left|\csc ax - \cot ax\right| + c} \Rightarrow \int \csc x dx = Ln\left|\csc x - \cot x\right| + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\text{Arctan}\left(\frac{x}{3}\right) + c \quad , \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Arctan}\, x + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}Ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-25}=\frac{1}{10}Ln\left(\frac{x-5}{x+5}\right)+c \quad , \quad \int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}Ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{(x-7)(x-2)}=\frac{1}{5}Ln\left(\frac{x-7}{x-2}\right)+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+c \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{Arcsin}\, x+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=Ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c=\text{Arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=Ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=Ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c=\text{Arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=Ln\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)+c$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x+c$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\text{Arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\text{Arccosh}\, x+c$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\text{Arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\text{Arcsinh}\, x+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\text{Arcsech}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\text{Arcsech}\, x+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{1}{a}\text{Arccsch}\left(\frac{x}{a}\right)+c} \Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=-\text{Arccsch}\, x+c$$

تمام این فرمول‌ها با این نکته به دست آمده است که مشتق جواب انتگرال با تابع داخل انتگرال برابر است. اثبات این فرمول‌های اصلی در امتحانات نیاز نیست ولی با مشتقگیری از سمت راست می‌توان به تابع داخل انتگرال رسید، مثلاً:

$$\left(\frac{1}{a}\tan ax+c\right)'=\frac{1}{a}\left[a\left(1+\tan^2 ax\right)\right]=1+\tan^2 ax\Rightarrow\int\left(1+\tan^2 ax\right)dx=\frac{1}{a}\tan ax+c$$

اگر انتگرال داده شده دارای کران‌های مشخص برای انتگرال‌گیری باشد (مانند $\int_{x=a}^{b} f(x)dx$) آن انتگرال را معین گوییم و با یافتن جواب انتگرال و قرار دادن کران‌ها به شکل زیر، جواب انتگرال را می‌یابیم:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

نکته: در محاسبه انتگرال معین نیازی به استفاده از c در جواب نیست زیرا در هنگام محاسبه $F(b)-F(a)$ حذف می‌شود.

مثال: مساحت زیر منحنی $f(x)=3x^2-4x+5$ را در بازه $[1,2]$ بیابید.

حل:

$$\int_{x=1}^{2}\left(3x^2-4x+5\right)dx=x^3-2x^2+5x\Big|_1^2=\left(2^3-2\times2^2+5\times2\right)-\left(1^3-2\times1^2+5\times1\right)=10-4=6$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1. $\int_{x=0}^{3}\left(-6x^2+2x-3\right)dx$
2. $\int_{x=0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x-\cos x\right)dx$
3. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x+1}$