بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۱

نام و نام‌خانوداگی: سروش زارع

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۲

آ) قضیه رادون! (صورت قضیه برای یادآوری در زیر آورده شده است)

قضیه ۱ *فرض کنید $S \in \mathbb{R}^d$. اگر $d+2$ نقطه‌ی دلخواه داخل S بگیریم و این نقاط را A بنامیم، می‌توان A را به دو دسته افراز کرد که پوش محدب این دو دسته اشتراک داشته باشد.*
در واقع قضیه‌ی رادون، حالت خاص قسمت (الف) برای $r=2$ است.

ب) *حالت (الف) را به حالت مخروطی در (ب) کاهش می‌دهیم و بنابراین درستی حالت الف اثبات می‌شود. مجموعه‌ی A را همان مجموعه‌ی داخل مساله‌ی (الف) درنظر بگیرید. با توجه به اینکه این نقاط در $\mathbb{R}^d$ قرار دارند، می‌توانیم یک بعد دیگر اضافه کنیم و قرار دهیم:*

$$B_i := (x_i, 1) \forall x_i \in A$$

در واقع یک اسکالر ۱ را به عنوان آخرین عضو به x_i اضافه می‌کنیم تا B_i حاصل شود.

لم ۲ *$CH(B)$ شامل مبدا نیست.*
برهان. *اثبات به راحتی با تعریف ترکیب محدب حاصل می‌شود، داریم:*

$$CH(B) = \{x | x = \sum_{x_i \in B} \lambda_i x_i, \sum_i \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

حال اگر توجهمان را متمرکز به آخرین اندیس x_i ها کنیم، می‌بینیم که هر ترکیب محدب از عنصرهای B، آخرین اندیسشان دقیقا ۱ خواهد بود. به طور دقیق تر داریم:

$$\begin{aligned} y \in CH(B) &\to y = \sum_{x_i \in B} \lambda_i x_i, \sum_i \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ &\to y_{d+1} = \sum_{x_i \in B} \lambda_i (x_i)_{d+1} = \sum_{x_i \in B} \lambda_i = 1 \\ &\to y \neq 0 \end{aligned}$$

که همان شرط لازم برای برقراری مساله‌ی (ب) به ازای بردارهای $x \in B$ است. بنابراین چون قسمت (ب) را به عنوان فرض قبول کردیم، می‌توانیم B را به زیرمجموعه‌های $B_1, \dots B_r$ تقسیم کنیم به طوری که $\bigcap_i^r cone(B_i) \neq \{0\}$. یکی از اعضای این اشتراک را با D نشان دهید. با توجه به نحوه‌ی تعریف B و همچنین تعریف تابع cone، $(d+1)$امین اندیس D اکیدا بیشتر از ۰ است. همچنین طبق تعریف cone می‌توانیم ببینیم که هر ضریب $\lambda \geq 0$: λD نیز عضو این اشتراک خواهد بود. یکی از این ضریب‌ها مانند D' را درنظر می‌گیریم که $(d+1)$امین اندیس آن دقیقا برابر با ۱ باشد (با قرار دادن

$\lambda = \frac{1}{D_{d+1}}$ این کار ممکن است). بنابراین داریم:

$$\forall 1 \leq i \leq r \ \exists \lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_{|B_i|} \geq 0 : D' = \sum_{j}^{|B_i|} \lambda_j {(B_i)}_j, D'_{d+1} = 1$$
$$\rightarrow \sum_{j}^{|B_i|} \lambda_j = 1 \rightarrow D' \in \bigcap_{i}^{r} CH(B_i)$$

که منظور از ${(B_i)}_j$ همان jامین عنصر از مجموعه‌ی B_i است و منظور از D'_{d+1} درایه‌ی $d+1$ از D' است.

حال اگر درایه‌ی آخر D' یعنی D'_{d+1} را حذف کنیم، و مجددا درایه $d+1$ از B_i ها را حذف کرده تا دوباره به A_i برسیم، به یک $x \in \mathbb{R}^d$ می‌رسیم که در $\bigcap_i^r A_i$ وجود دارد که همان حکم قسمت (الف) است.

□