بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۳

نام و نام‌خانوداگی: سروش زارع

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۴

سیستم Q_1 را به صورت زیردرنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} A_1x &\leq b_1 \\ A_2x &\leq b_2 \end{aligned}$$

به طور مشابه سیستم Q_2 را به صورت زیردرنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} A'_1x &\leq b'_1 \\ A'_2x &\leq b_2 \end{aligned}$$

باید اثبات کنیم که دستگاه Q_2 تمام دوگان صحیح است. بنابراین به ازای یک c که Q_2 و دوگان آن جواب بهینه دارند، باید اثبات کنیم که برنامه‌ی دوگان Q_2 یعنی

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & [b_1'^T \ \ b_2^T]y \\ \text{که} \quad & [A_1'^T \ \ A_2^T]y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

که آن را با $D(Q_2)$ نشان می‌دهیم، جواب بهینه‌ی صحیح دارد. حال دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{کمینه کن} \quad & [b_1^T \ \ b_2^T]y \\ \text{که} \quad & [A_1^T \ \ A_2^T]y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

این دستگاه دوگان Q_1 است و آن را با $D(Q_1)$ نشان می‌دهیم. با توجه به تماما دوگان صحیح بودن Q_1، این دستگاه جواب بهینه‌ی صحیحی مانند

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} \tag{۱}$$

□

دارد به طوری که

$$\begin{aligned} b_2^T y_2^* &= m_2 \\ b_1^T y_1^* &= m_1 \\ A_2^T y_2^* &= c_2 \\ A_1^T y_1^* &= c_1 \end{aligned}$$

که $c = c_1 + c_2$ و مقدار $m := m_1 + m_2$ همان مقدار بهینه‌ی دستگاه است. با توجه به تساوی

$$\{x|A'_1x \leq b'_1\} = \{x|A_1x \leq b_1\} \tag{۲}$$

فضای شدنی دوچند وجهی Q_1 و Q_2 برابرند و درنتیجه جواب بهینه‌ی آن‌ها نیز برابر است. حال نشان می‌دهیم بردارهای صحیح $y_1, y_2 \geq 0$ وجود دارند که

$$b'^T_1 y_1 + b^T_2 y_2 = m \tag{۳}$$

$$A'^T_1 y_1 + A^T_2 y_2 = c \tag{۴}$$

طبیعتا می‌توانیم قرار دهیم $y_2 := y^*_2$ و در ادامه سعی می‌کنیم مقدار مناسبی برای y_1 پیدا کنیم.
دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{rl} \text{کمینه کن} & b_1 y \\ \text{که} & A^T_1 y_1 = c_1 \\ & y_1 \geq 0 \end{array}$$

مقدار جواب بهینه‌ی این دستگاه m_1 است (در غیر این‌صورت اگر این جواب بهینه توسط بردار y'' تولید شود، با قرار دادن y'' به جای y^*_1 و تغییر ندادن y^*_2 جواب بهتری از (۱) خواهیم داشت که با بهینه بودن (۱) در تناقض است). طبق قضیه‌ی دوگانی قوی، مقدار جواب بهینه‌ی دوگان این دستگاه نیز m_1 است. دوگان این دستگاه را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & c^T_1 x \\ \text{که} & A_1 x \leq b_1 \end{array}$$

با توجه به تساوی (۲)، این دوگان را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & c^T_1 x \\ \text{که} & A'_1 x \leq b'_1 \end{array}$$

طبق فرض سوال، این دستگاه تماما دوگان صحیح است. پس اگر به ازای یک c صحیح این دستگاه و دوگان آن جواب بهینه داشته باشند، دوگان آن جواب بهینه‌ی صحیح دارد. حال دوگان دستگاه بالا را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{rl} \text{کمینه کن} & y^T_1 b'_1 \\ \text{که} & A'^T_1 y_1 = c_1 \\ & y_1 \geq 0 \end{array}$$

با توجه به اینکه خود دستگاهمان مقدار جواب بهینه‌ی m_1 داشت، دوگان آن نیز طبق قضیه‌ی دوگانی قوی جواب بهینه‌ی m_1 دارد و با توجه به تماما دوگان صحیح بودن دستگاه اصلی، دوگان جواب بهینه‌ی صحیح دارد. از طرفی اگر این جواب بهینه‌ی صحیح را با y'' نشان دهیم، می‌توانیم قرار دهیم $y_1 = y''$ (از قبل قرارداده بودیم $y_2 = y^*_2$) به این ترتیب تساوی‌های (۳) و (۴) برقرار می‌شوند و y_1 و y_2 نیز بردارهای صحیح نامنفی هستند. پس دستگاه Q_2 تماما دوگان صحیح است و حکم اثبات می‌شود.

□