



تمرین تحویلی ۷

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

نام و نام خانوادگی: سروش زارع

پرسش ۱

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. قرار بده $C = \{y\}$.۲. اگر عضوی از $A \setminus C$ مانند t وجود داشت به طوری که $C + t \in I$ ، آنگاه قرار بده $C = C + t$ و باز به همین مرحله ۲ برگرد. در غیر این صورت الگوریتم به پایان می‌رسد و خروجی را برابر با C قرار بده.با توجه به تعریف این الگوریتم، واضح است که خروجی C عضو I است (زیرا در هر مرحله C طوری بزرگ می‌شود که این شرط برقرار بماند).

لم ۱ اگر خروجی الگوریتم را با C نشان دهیم، C دقیقاً برابر است با $A - x + y$ برهان. فرض کنید این طور نباشد (برهان خلف)، از آنجایی که در هر بار اجرای الگوریتم $|C|$ دقیقاً یک واحد افزایش پیدا می‌کند و با توجه به اینکه x و y دو عنصر موازی هستند، هیچ گاه x و y هر دو در C قرار نمی‌گیرند (در غیر این صورت در یک مرحله خواهیم داشت

$$x, y \in C, C \in I \rightarrow \{x, y\} \in I$$

دلیل این مورد این است که طبق اصول موضوعه‌ی ماتروید، داریم:

$$\{x, y\} \subseteq C, C \in I \rightarrow \{x, y\} \in I$$

که با فرض اینکه x و y دو عنصر موازی‌اند در تناقض است. پس از آنجایی که C در ابتدا شامل y است، نتیجه می‌گیریم هیچ گاه x درون C قرار نمی‌گیرد. بنابراین در هر بار اجرای الگوریتم، یک عنصر از $A - x$ به C اضافه می‌شود و در نهایت پس از تعدادی بار این روند متوقف می‌شود، اگر تمام اعضای $A - x$ به C اضافه نشوند (همان فرض خلف)، در نهایت داریم:

$$|C| < |A - x + y| = |A|$$

از طرفی طبق تعریف ماتروید، می‌دانیم که با توجه به اینکه $A, C \in I$ ، $|A| > |C|$ ، یک عضو $t \in A \setminus C$ پیدا می‌شود که $t + C \in I$. با کمی دقت می‌بینیم که مرحله ۲ الگوریتم دقیقاً در تلاش برای پیدا کردن همین t بود، بنابراین الگوریتم نمی‌تواند در این مرحله به پایان رسیده باشد و از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم که فرض خلف باطل است و C نهایتاً دقیقاً برابر است با $A - x + y$. با توجه به اینکه در هر بار اجرای الگوریتم شرط $C \in I$ برقرار می‌ماند، در نهایت داریم:

$$A - x + y = C \in I$$

که همان حکم سوال است.