بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۱

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع | شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

واضح است که مساله‌ی گفته شده در سوال یک چند وجهی است که در اینجا آن را با Q نشان می‌دهیم.

برای راحتی نوشتن، منظور از بردارهایی به شکل $(a_1, ...a_k)$ برداری ستونی با این درایه‌هاست و منظور بردار سطری نیست!

پرسش ۳

از آنجایی که چند وجهی P کراندار فرض شده، می‌توانیم آن را به شکل یک چندراسی ($polotype$) درنظر بگیریم. رئوس این چندراسی را با $v_1, ...v_t$ نشان دهید. در واقع داریم

$$CH(v_1, ...v_t) = P$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$V := (v_1, v_2, ...v_t)$$

در واقع V یک بردار ستونی شامل v_i ها است.
با توجه به نحوه‌ی ساخت پوش محدب، می‌دانیم که هر نقطه‌ی داخل P به صورت ترکیب محدب v_i ها قابل نوشتن است.
بنابراین داریم:

$$\forall x \in P \ \ \exists \ \ 0 \leq \lambda_1 \leq 1, ..., 0 \leq \lambda_t \leq 1 : \sum_i^t \lambda_i v_i = x \ \ , \ \ \sum_i^t \lambda_i = 1 \qquad (۱)$$

می‌توانیم این ضرایب را به صورت یک تابع از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{W}^t$ درنظر بگیریم که ورودی آن یک نقطه‌ی $x \in P$ است و خروجی آن ضرایب λ_i مربوطه به صورت یک بردار ستونی است. این تابع را با f نشان می‌دهیم. پس از این پس می‌توانیم به جای تمرکز روی نقاط $x \in P$، روی تصویر این نقاط تحت f تمرکز کنیم و با داشتن هر کدام از این مقادیر در $\mathbb{W}^d$ می‌توانیم نقطه‌ی متناظر آن در $\mathbb{R}^n$ را به دست آوریم (طبق فرمول ۱). اگر هر کدام از این نقاط را با بردار λ نشان دهیم و درایه‌های آن را با λ_i نشان دهیم، تا کنون فقط قیود زیر را داشتیم:

$$0 \leq \lambda_1 \leq 1, ..., 0 \leq \lambda_t \leq 1 \ \ , \ \ \sum_i^t \lambda_i = 1$$

تا کنون قیود $x \in P$ را در این فضای جدید مدل کردیم، حال می‌خواهیم تعدادی قید دیگر اضافه کنیم که قیود $a_i^T x = b_i$ را نیز داشته باشیم.
به ازای هر شرط $a_j^T x = b_j$ در Q، می‌توانیم این شرط را با یک فرمول بندی جدید بنویسیم:

$$A_j^T x = b_j \rightarrow A_j^T [f(x)^T V] = b_j$$
$$\rightarrow \sum_i^t (A_j^T v_i f(x)_i) = b_j$$

با توجه به اینکه $A_j^T v_i$ یک اسکالر است، می‌توانیم یک ماتریس p تعریف کنیم به طوری که

$$p_{i,j} = A_j^T v_i$$

و قیوداضافه شده را به صورت $P\lambda = b$ نشان دهیم. حال با اضافه کردن دادن یک سطر تمام ۱ به P، قید $\sum_i^t \lambda_i = 1$ را نیز در همین ماتریس P لحاظ می‌کنیم و به طور مشابه درایه‌ی ۱ را به بردار b اضافه کنیم. پس می‌توانیم یک مساله‌ی برنامه ریزی خطی بنویسیم که قیود آن شامل $P\lambda = (b, 1)$ و $\lambda \geq 0$ است. قبل از نوشتن تابع هدف، توجه کنید که این برنامه ریزی خطی به نوعی در تناظر با Q آمده در مساله است، زیرا از این ایده استفاده کردیم که هر ترکیب محدب مناسب از λ_i ها، خودش یک نقطه‌ی $x \in Q$ را مشخص می‌کند (با استفاده از فرمول ۱). منظور از "تناظر" است که هر نقطه‌ی شدنی داخل این برنامه ریزی خطی، می‌تواند با استفاده از معکوس تابع f که دقیقا همان فرمول (۱) است، بهمان نقطه‌ی شدنی $x \in Q$ را بدهد. حال به سراغ نوشتن تابع هدف می‌رویم. از همان فرمول ۱ استفاده می‌کنیم تا با داشتن ضرایب λ_i، مقدار $c^T x$ آمده در Q را باز نویسی کنیم:

$$x \in Q \rightarrow \exists 0 \leq \lambda_1 \leq 1, ..., 0 \leq \lambda_t \leq 1 : x = \sum_i^t \lambda_i v_i \ \ , \ \ \sum_i^t \lambda_i = 1$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$c^T x = c^T [\sum_i^t \lambda_i v_i]$$

و تابع هدفمان مینیمم کردن عبارت بالاست. پس یک برنامه ریزی خطی نوشتیم که مقدار جواب بهینه‌ی آن دقیقا برابر با مقدار جواب بهینه در Q است.

حال به ابعاد ماتریس P استفاده شده در این برنامه ریطی خطی توجه کنید: با توجه به نحوه‌ی ساختن این ماتریس، p دقیقا $L+1$ سطر و t ستون دارد. با توجه به کراندار بودن فضای شدنی P، برنامه‌ی LP در یکی از رئوس یا BFS های این برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه را به ما می‌دهد. با توجه به اینکه هر BFS از درنظر گرفتن یک زیر مجموعه از ستون‌های P که مستقل خطی هستند ساخته می‌شود و اینکه رنک ستونی و رنک سطری P برابر است و همچنین اینکه P در مجموع $L+1$ سطر دارد، هر BFS حداکثر $L+1$ درایه‌ی نا ناصفر دارد. یادآوری می‌کنیم که هر درایه‌ی جواب‌های شدنی در LP، متناظر با ضرایب λ_i است که طبق فرمول ۱، یک جواب شدنی برای Q می‌دهد. بنابراین می‌توانیم با یک ترکیب محدب شامل حداکثر $L+1$ تا از راس‌های چند راسی Q، هر نقطه‌ی شدنی مساله‌ی Q و در نتیجه جواب بهینه‌ی Q را نشان دهیم که همان حکم مساله است.