بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۳

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع   شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۱

لم ۱ *اگر به ازای یک $x \in P$ و $T, T' \subseteq S$ داشته باشیم*

$$x(T) = r(T)$$
$$x(T') = r(T')$$

خواهیم داشت:

$$x(T \cap T') = r(T \cap T')$$
$$x(T \cup T') = r(T \cup T')$$

برهان. *داریم:*

$$x(T \cap T') + x(T \cup T') \leq r(T \cap T') + r(T \cup T') \leq r(T) + r(T') = x(T) + x(T')$$

نامساوی اول به دلیل قیود P است، نامساوی دوم به دلیل فرض (ب) در صورت سوال است و تساوی آخر به دلیل فرض لم است. حال توجه کنید که طرف راست و چپ این عبارت با هم برابرند. بنابراین تمام نامساوی ها به صورت تساوی برقرارند و به طور دقیق تر داریم:

$$x(T \cap T') = r(T \cap T')$$
$$x(T \cup T') = r(T \cup T')$$

که همان لم خواسته شده است.

□

حال نقطه‌ی گوشه‌ای x با شروط

$$x_e > 0, \forall e \in S$$

درنظر می‌گیریم. با توجه به اینکه x گوشه‌ای است، باید در $|S|$ قید مستقل خطی به شکل $x(T) = r(T)$ صدق کند. برای هر کدوم از این قیود χ^T را درنظر می‌گیریم و مجموعه‌ی این χ^T ها را به صورت سطر به سطر در یک ماتریس A قرار می‌دهیم. همچنین این سطرها را مرتب می‌کنیم به طوری که تعداد ۱ ها در سطرها از بالا به پایین نزولی باشد. ماتریس A ماتریسی $|S| * |S|$ است. با توجه به اینکه سطرها را مستقل خطی درنظر گرفتیم، رنک سطری برابر با $|S|$ است و درنتیجه رنک ستونی نیز $|S|$ است. حال سطر اول را درنظر بگیرید، اگر در تمام درایه‌های i که این سطر برابر با ۱ است، سطر دوم نیز برابر با ۱ باشد، با توجه به اینکه سطرها را به ترتیب نزولی چیده‌ایم، سطر اول و دوم دقیقا برابرند و مستقل خطی نمی‌باشند که تناقص است. پس سطر دوم حداقل در یکی از درایه‌هایی که سطر اول مقدار ۱ دارد، مقدار ۰ دارد. به طور مشابه سطر

سوم حداقل در یکی از درایه‌هایی که سطر دوم برابر با ۱ است، مقدار ۰ دارد وهمین استدلال را تا انتها می‌توانیم ادامه دهیم. پس می‌توانیم با اشتراک گیری، به بردارهایی به شکل زیر برسیم:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}?\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}?\\?\\\vdots\\?\\1\end{pmatrix} \tag{۱}$$

که مقادیر علامت سوال می‌توانند هر کدام از مقدارهای ۰ و ۱ باشند. نکته‌ی کلیدی این است که این بردارها از اشتراک گیری تعدادی بردار که متناظر با قیودی به شکل $x(T) = r(T)$ می‌باشند به دست آمده‌اند و درنتیجه طبق لم (۱)، هر کدام از بردارهای v در بالا، در شرط $x(v) = r(v)$ صدق می‌کند. همچنین اگر از اجتماع گیری نیز استفاده کنیم (هر بردار را با بردارهای قبل خود اجتماع بگیریم، به بردارهای زیر می‌رسیم:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix} \tag{۲}$$

این بردارها به وضوح مستقل خطی هستند و همچنین مجددا طبق لم (۱) نتیجه می‌گیریم که به ازای هر بردار v از بین این بردارها، داریم $x(v) = r(v)$. بنابراین شرط (ب) خواسته شده در حکم سوال برقرار است. همچنین این بردارها به وضوح تشکیل یک زنجیر می‌دهند که تعداد اعضای آن $|S|$ است و درنتیجه شرط (ج) نیز برقرار است. شرط (آ) نیز به خاطر برقراری لم (۱) و نحوه‌ی ساختن بردارهای (۲) برقرار است. پس تمامی شرط‌ها برقرار است و زنجیر مدنظر را ساختیم.
□