بهینه‌سازی ترکیبیاتی (۲۲۴۹۳)

بهار ۱۴۰۰

آزمون میان‌ترم — موعد آپلود پاسخ‌ها: ساعت ۱۴:۳۰

توجه: در صورتی که از مطلبی که در کلاس یا کتاب درس گفته شده استفاده می‌کنید، لازم است به‌طور دقیق ارجاع دهید.

۱. گراف $G = C_{۱۲}$ (دور ۱۲ رأسی) را در نظر بگیرید. فرض کنید e یکی از یال‌های G باشد. $\mathcal{F}$ را خانواده همه تطابق‌های با اندازه ۴ از G که شامل e هستند تعریف کنید.

یک سیستم TDI توصیف کننده پوش محدب بردار مشخصه‌های اعضای $\mathcal{F}$ ارائه کنید و درستی سیستم خود را نشان دهید.

۲. گراف جهت‌دار وزن‌دار G را در نظر بگیرید که گراف زمینه آن یک درخت است. می‌خواهیم زیرمجموعه‌ای از یال‌های G را انتخاب کنیم در G تشکیل یک مسیر (جهت‌دار) دهند و جمع وزنشان کمینه شود.

(آ) نشان دهید این مسئله در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.

(ب) نشان دهید این مسئله در زمان قویاً چندجمله‌ای قابل حل است. [۱]

(ج) (امتیازی) فرض کنید در ورودی عدد k هم داده شده است. هدف این است که تعدادی از یال‌های گراف را انتخاب کنیم به‌طوری که از هر مسیر (جهت‌دار) حداکثر k یال انتخاب شده باشد و جمع وزن یال‌های انتخاب شده کمینه شود. الگوریتمی چندجمله‌ای (ترجیحاً قویاً چندجمله‌ای) برای این مسئله ارائه دهید.

۳. فرض کنید گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ با توابع $b, p : V \to \mathbb{R}$ که $p \le b$ داده شده باشند. فرض کنید جریان‌های $f, f' \ge ۰$ وجود داشته باشند به‌طوری که $\nabla f \ge p$ و $\nabla f' \le b$. نشان دهید جریان $f'' \ge ۰$ وجود دارد به‌طوری که $p \le \nabla f'' \le b$.

راهنمایی: می‌توانید از لم فارکاش، یا یک الگوریتم برای تبدیل یکی از جریان‌ها به دیگری استفاده کنید.

۴. فرض کنید گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ با تابع هزینه $c : E \to \mathbb{R}$ و تابع تقاضای $b : V \to \mathbb{R}$ داده شده باشند. همچنین فرض کنید f و g دو bـجریان روی G باشند و تابع $\pi : V \to \mathbb{R}$ و $۰ < \epsilon$ هم موجود باشند به‌طوری که برای هر یال e از گراف باقیمانده f، داشته باشیم $c_e^\pi \ge -\epsilon$. اگر قدر مطلق کمترین میانگین هزینه دورها در g را با $\epsilon(g)$ نمایش دهیم، نشان دهید اگر برای یک یال $e \in E$ داشته باشیم $c_e^\pi > n\epsilon + n\epsilon(g)$، آنگاه $f_e = g_e$.

۵. برای یک تابع پتانسیل $\pi : V \to \mathbb{R}$ روی رأس‌های گراف $G = (V, E)$، تابع $\Delta_\pi : E \to \mathbb{R}$ که به صورت

$$\Delta_\pi(uv) = \pi(v) - \pi(u), \quad \forall uv \in E$$

تعریف می‌شود را یک تنش (اختلاف پتانسیل) می‌نامند. $G = (V, E)$ را یک گراف هم‌بند ضعیف و $T = (V, A)$ را یک زیردرخت فراگیر از G در نظر بگیرید. قرار دهید $N = E - A$. فرض کنید $C \in \mathbb{R}^{A \times E}$، ماتریس شبکه‌ای متناظر با درخت T و گراف جهت‌دار G است. $B \in \mathbb{R}^{A \times N}$ را ماتریسی با ستون‌هایی از C که متناظر به مجموعه‌ی N هستند، در نظر بگیرید. ثابت کنید که بردار $y = (y_N, y_A) \in \mathbb{R}^E$ یک تنش (اختلاف پتانسیل) است اگر و تنها اگر $y_N = B^T y_A$.

۶. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار باشد، و فرض کنید رأس $r \in V$ وجود داشته باشد که به همه رأس‌های دیگر G یال داشته باشد. مجموعه $\emptyset \neq S \subsetneq V$ را یک *برش یک‌طرفه* می‌گوییم اگر $\delta^+(S) = \emptyset$ و $\delta^-(S) \ge ۱$. خانواده همه برش‌های یک‌طرفه را C بنامید. مجموعه D را برابر با خانواده همه زیرمجموعه‌هایی از یال‌های G تعریف کنید که با یالهای ورودی هر برش یک‌طرفه اشتراک ناتهی دارند. نشان دهید چندوجهی $P \subseteq \mathbb{R}^E$ که در زیر تعریف شده، پوش محدب بردار مشخصه اعضای D را توصیف می‌کند.

$$x(\delta^-(S)) \ge ۱ \quad \forall S \in C$$
$$۰ \le x \le ۱$$

راهنمایی: یک رأس y از P را در نظر بگیرید. مجموعه $\mathcal{F}$ را برابر با همه مجموعه‌هایی که نامساوی متناظرشان برای y کیپ است تعریف کنید. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک زیرمجموعه لایه‌ای ماکزیمال از $\mathcal{F}$ باشد. نشان دهید نامساوی‌های متناظر با $\mathcal{H}$ همه نامساوی‌های متناظر با $\mathcal{F}$ را نتیجه می‌دهند.

---

[۱] طبعاً در صورت حل قسمت ب، نیازی به نوشتن جداگانه آ نیست.