بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۷

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع — شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۲

اندیس‌هایی از s_i که در T قرار دارند را با $c_1, ...c_k$ نشان دهید. بنابراین داریم:

$$T = \{s_{c_1}, ...s_{c_k}\}$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V_i &= \{s_1, ...s_{c_i-1}\} \quad \forall 1 \leq i \leq k \\ U_i &= \{s_{c_1}, ..., s_{c_{i-1}}\} \quad \forall 1 \leq i \leq k \\ V_{k+1} &= \{s_1, ..., s_m\} \\ U_{k+1} &= \{s_{c_1}, ...s_{c_k}\} = T \end{aligned}$$

توجه کنید که طبق این تعاریف داریم:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + s_{c_i} \\ rank(V_1) &= 0 \end{aligned}$$

طبق تعریف T، داریم:

$$rank(V_i) < rank(V_i + s_{c_i}) \quad \forall 1 \leq i \leq k \tag{1}$$

لم ۱ *داریم:*

$$rank(V_i + s_{c_i}) = rank(V_i) + 1 \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

برهان. *با توجه به نامساوی (۱)، کافیست اثبات کنیم*

$$rank(V_i + s_{c_i}) \leq rank(V_i) + 1 \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

این موضوع نیز تقریبا واضح است، فرض کنید این طور نباشد و یک مجموعه‌ی مستقل $b_1, ..., b_l$ برای $V_i + s_{c_i}$ وجود داشته باشد به طوری که $l > rank(V_i) + 1$. از آنجایی که حداکثر یکی از این b_i ها برابر با s_{c_i} می‌باشد، با حذف آن b_i یک مجموعه‌ی مستقل B به دست می‌آید به طوری که:

$$|B| \geq l - 1 > rank(V_i)$$

از طرفی با توجه به اینکه $|B| \subseteq V_i + s_{c_i} - s_{c_i} = V_i$ خود $|B|$ یک مجموعه‌ی مستقل برای V_i است و این با فرض اینکه $rank(V_i) < l - 1$ در تناقض است. از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم که

$$rank(V_i + s_{c_i}) \leq rank(V_i) + 1 \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

و از ترکیب این نامساوی و نامساوی (۱) حکم لم اثبات می‌شود.

لم۲ داریم:

$$rank(U_i) = rank(V_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k+1$$

برهان. با توجه به اینکه $U_i \subseteq V_i$، بنابراین

$$rank(U_i) \leq rank(V_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k+1 \tag{۲}$$

از طرفی فرض کنید یک $1 \leq i \leq k+1$ وجود داشته باشد که $rank(V_i) > rank(U_i)$. در این صورت در هنگام ساخته شدن T، حداقل یک عضو $V_i \backslash U_i$ نیز باید در T قرار می‌گرفت و T به اشتباه ساخته شده است، که تناقض حاصل نشان می‌دهد

$$rank(V_i) \leq rank(U_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k+1 \tag{۳}$$

از ۲ نامساوی (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$rank(U_i) = rank(V_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k+1 \tag{۴}$$

که همان حکم لم است.

لم۳ داریم:

$$rank(U_i) = |U_i| = i-1 \quad \forall 1 \leq i \leq k+1$$

و درنتیجه تمام U_i ها مستقل هستند.

برهان. از لم (۱) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$rank(V_i) = i-1 \quad \forall 1 \leq i \leq k+1$$

که از ترکیب این تساوی با لم (۲) داریم:

$$rank(U_i) = rank(V_i) = i-1 \quad \forall 1 \leq i \leq k+1$$

با توجه به اینکه هر U_i دقیقا $i-1$ عضو دارد، داریم:

$$rank(U_i) = i-1 = |U_i| \quad \forall 1 \leq i \leq k+1$$

پس لم(۳) اثبات می‌شود.

در نتیجه‌ی لم(۳)، $U_{k+1} = T$ نیز مستقل است که همان حکم سوال است.

$\square$