بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

آزمون میان‌ترم

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۱

سیستم زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V \\
&\sum_{v \in V} x(\delta(v)) = 8 \\
&x \geq 0 \\
&x_e = 1
\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم که همین سیستم جواب مساله است.

پرسش ۲

الف- کافیست با شروع از هر راس v از گراف G، یک الگوریتم مانند $dijkstra$ را اجرا کنیم و پس از اجرای $dijkstra$ با شروع از این راس، به ازای هر راس u طول مسیری که از v به u می‌رود و کمترین طول را دارد می‌دانیم. کافیست همین الگوریتم را به ازای تمام راس‌های دیگر اجرا کنیم و بهترین مسیر را در نهایت اعلام کنیم. این الگوریتم به وضوح چند جمله‌ای است زیرا الگوریتم $dijkstra$ که خود الگوریتمی چند جمله‌ای است را صرفا n بار تکرار می‌کنیم و بین مقادیر به دست آمده برای رئوس ماکسیمم می‌گیریم.

پرسش ۳

قیود زیر را درنظر بگیرید:

$$0 \le f$$
$$p \le \nabla(f)_i \le b \quad \forall i \in V$$

هر $\Delta(f)_i$ را می‌توان به صورت ضرب یک ماتریس سطری A_i در بردار f نشان داد. مقادیر A_i به صورت زیر است:

- درایه‌های متناظر با یال‌های ورودی به i برابر با $+1$ هستند.
- درایه‌های متناظر با یال‌های خروجی از i برابر با -1 هستند.
- بقیه‌ی درایه‌ها برابر با 0 هستند.

از ترکیب این بردارهای سطری A_i، یک ماتریس A می‌سازیم. در نهایت می‌توان قیود را به این شکل نشان داد:

$$\begin{pmatrix} -A \\ A \\ -I \end{pmatrix} (f) \le \begin{pmatrix} -p \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس ضرایب را با A' نشان می‌دهیم و ماتریس طرف راست را با b' نشان می‌دهیم (اسمش یادم رفته :( )
حال از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم فضای این قیود تهی است. در نتیجه طبق لم فارکاش، یک بردار $u \ge 0$ وجود دارد به طوری که $A'u = 0, b'^T u < 0$
نکته: دو مساله‌ی اولیه را می‌توان به شکل‌های ماتریسی زیر نشان داد:

$$\begin{pmatrix} -A \\ -I \end{pmatrix} (f) \le \begin{pmatrix} -p \\ 0 \end{pmatrix}$$

که مربوط به حالت $\Delta(f)_i \ge p$ می‌باشد و

$$\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} (f) \le \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

که مربوط به حالت $\Delta(f)_i \le b$ می‌باشد.
حال کافیست همان بردار u را در این ضرایب ماتریسی قرار دهیم و ببینیم که برای این دو مساله هم به تناقض می‌رسیم (یعنی ضرب بردار u در ماتریس ضرایب هر کدام از مسائل، بردار تمام صفر می‌دهد اما طرف راست اکیدا از صفر کوچک تر می‌شود، که طبق لم فارکاش نتیجه می‌دهد این دو مساله نیز شدنی نیستند که با فرض صورت سوال در تناقض است. دلیل این مساله این است که این ماتریس‌ها صرفا از حذف تعدادی از سطرهای ماتریس‌های مساله‌ی بزرگتر تولید می‌شوند و در نتیجه قیدهای مساوی با ۰ همچنان برقرار می‌مانند و قیدهای اکیدا کمتر از ۰ نیز همچنان برقرار خواهند بود). پس فرض خلف باطل است و مساله‌ی خواسته شده در صورت سوال شدنی است.

$\square$

پرسش ۴

در جلسه‌ی ۱۲ قضیه‌ی tardos که به شکل زیر است اثبات شد:

لم ۱ *یک bـ جریان f، تابع $\pi : V \to R$ و $\epsilon > 0$ به طوری که $c_e^\pi > -\epsilon \forall e \in E_f$ درنظر بگیرید. اگر برای یک یال e داشته باشیم $c_e^\pi > n\epsilon$ آنگاه $f_e^* = f_e$ برای هر bـ جریان بهینه‌ی f_e^* برقرار است.*

با توجه به این لم، و اینکه $\epsilon(g)$ برابر با قدر مطلق میانگین هزینه در دوری با کمترین هزینه تعریف شده است، داریم:

$$c_e^\pi > n\epsilon + n\epsilon(g) > n\epsilon$$

و بنابراین طبق لم (۱)، به ازای هر bـ جریان بهینه‌ی f^*، داریم:

$$f_e^* = f_e \tag{۱}$$

حال به طور مشابه نشان می‌دهیم که همین تساوی برای g_e هم برقرار است. یکی از الگوریتم‌هایی که برای پیدا کردن جریان بیشینه داشتیم بر مبنای پیدا کردن دورهای منفی و رد کردن یک شار f از این دور بود، در نهایت همین روند تکرار می‌شد تا زمانی که هیچ دور منفی وجود نداشت و اثبات می‌شد که جریان نهایی یک جریان بهینه بود. اگر شار اولیه را g فرض کنیم، نکته‌ی کلیدی این است که در هر مرحله از اجرای این الگوریتم، مقدار $n(g)$ کاهش پیدا نمی‌کند. پس اگر شار بهینه‌ی نهایی که با شروع از g به آن می‌رسیم را با g^* نشان دهیم و $\epsilon(g)$ اولیه را با ϵ' نشان دهیم، داریم:

$$c_e^\pi \geq -\epsilon' \quad \forall e \in E_{g^*} \to c_e^\pi > -\epsilon' \quad \forall e \in E_g$$

بنابراین داریم:

$$\exists e \in E : c_e^\pi > n\epsilon + n\epsilon(g) > n\epsilon'$$

بنابراین طبق لم (۱)، برای جریان g و هر جریان بهینه‌ی g^* شرط زیر برقرار است:

$$g_e^* = g_e \tag{۲}$$

از ترکیب تساوی‌های (۱) و (۲) حکم سوال اثبات می‌شود.

پرسش ۵

نکته‌ی کلیدی در این سوال این است که با داشتن مقادیر $\Delta(uv)$ به ازای یال‌های درخت T، مقدار uv به ازای تک تک یال‌های G به صورت یکتا مشخص می‌شود. در واقع برای محاسبه‌ی $\Delta(uv)$ کافیست مسیر (بدون درنظر گرفتن جهت) از u به v را در T پیدا کنیم، در نهایت بر حسب اینکه یال ها در جهت مدنظر یا برعکس آمده‌اند، به آن‌ها ضریب مثبت ۱ یا منفی ۱ بدهیم و این بردار ضرایب را در Δ های یال‌های این مسیر ضرب کنیم. به راحتی می‌توان دید که این کار عملا معادل با این است که ستون‌های ماتریس شبکه‌ی C را به یال‌های $N = E - A$ تحدید کرده و آن را B بنامیم، و سپس مقدار B^T که هر سطر آن نماینده‌ی یک یال $e = uv \notin A$ است و نشان دهنده‌ی این است که مسیر u به v (در T)، چه یال‌هایی را در جهت مثبت و چه یال‌هایی را در جهت منفی پیمایش می‌کند، در بردار y_A ضرب کنیم تا به خواسته‌ی مساله برسیم.

همچنین توجه کنید که به ازای هر y_A دلخواه می‌توان به راحتی یک تابع π ساخت به طوری که قیود مساله برقرار باشد، (در واقع بی‌نهایت تابع می‌توان ساخت، کافیست یک ریشه‌ی r برای درخت T درنظر بگیریم، برای هر راس v مسیر (بدون جهت) از r به v را درنظر بگیریم و یال‌ها را بسته به اینکه در جهت مسیر یا خلاف مسیر هستند با ضرایب مثبت ۱ یا منفی ۱ درنظر بگیریم و این ضرایب را در اندیس متناظر یال‌ها در y_A ضرب کنیم. در واقع برای یک راس $v \in V(G)$ اگر بردار مشخصه‌ی یال‌هایی که در مسیر از r به v ظاهر می‌شوند را با $\chi(P)$ نشان دهیم و بردار ضرایب منفی ۱ یا مثبت ۱ را بر حسب جهت یال‌ها بسازیم و با dir نشان دهیم، قرار می‌دهیم:

$$\pi_v = \pi_r + y_A^T(dir^T\chi(P))$$

با عوض کردن مقدار π_v می‌توان دید که بی نهایت تابع π داریم که می‌توان هر کدام را درنظر گرفت و تاثیری در جواب مساله ندارد (چون در مساله عملا با اختلاف π_v ها کار داریم که اضافه کردن یک ثابت به دو طرف تفاوتی ایجاد نمی‌کند)

پس به ازای هر y_A، مقدار y_A و به دنبال آن (y_N, y_A) یک اختلاف پتانسیل معتبر است و به طور برعکس، به ازای هر اختلاف پتانسیل معتبر به شکل (y_N, y_A) می‌توان فقط با داشتن y_A به طور یکتا مقدار y_N را طبق فرمول آمده در صورت سوال محاسبه کرد. در نتیجه حکم سوال اثبات می‌شود.

□

پرسش ۶