



تمرین تحویلی ۵

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

نام و نام خانوادگی: سروش زارع

پرسش ۲

ابتدا برنامه‌ی اصلی (Primal) را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \text{کمینه کن} \quad c^T f \\ & \text{که} \quad 0 \leq f \leq u \\ & \quad \nabla(f)_i = b_i \quad \forall i \in V \end{aligned}$$

حال برنامه‌ی دوگان (Dual) را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \text{بیشینه کن} \quad b^T \pi + u^T y \\ & \text{که} \quad y_{i,j} + \pi_j - \pi_i \leq c_{i,j} \quad \forall e = ij \in E \\ & \quad y, \pi \geq 0 \end{aligned}$$

طبق لنگی مکمل، اگر f^* یک جواب شدنی برای P و مجموعه‌ی $B^* = \{y^*, \pi^*\}$ یک جواب شدنی برای D باشند، این جواب‌ها بهینه‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$f_e^* > 0 \rightarrow y_{i,j}^* + \pi_j^* - \pi_i^* = c_{i,j} \quad (۱)$$

$$f_e^* < u_e \rightarrow y_e^* = 0 \quad (۲)$$

لم ۱ تساوی سمت راست (۱) در صورت بهینه بودن D همواره برقرار است و در واقع شرطی اضافه است. برهان. (فرض خلف) فرض کنید $B^* = \{y^*, \pi^*\}$ یک جواب بهینه برای D باشد. اگر i, j موجود باشند به طوری که داشته باشیم

$$y_{i,j}^* + \pi_j^* - \pi_i^* < c_{i,j}$$

می‌توانیم $y_{i,j}$ را به اندازه‌ی یک $\epsilon > 0$ افزایش دهیم به طوری که همچنان قبود D برقرار باشند و علاوه بر آن، با توجه به مثبت بودن ظرفیت‌ها (درایه‌های u)، تابع هدف نیز افزایش پیدا می‌کند که با بهینه بودن B در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و لم (۱) اثبات می‌شود. حال با توجه به لم (۱)، می‌توانیم بنویسیم:

$$y_{i,j}^* = c_{i,j} - \pi_j^* + \pi_i^*$$

و در نتیجه شرط (۲) را می‌توانیم به صورت معادل زیر بنویسیم:

$$f_e^* < u_e \rightarrow c_{i,j} - \pi_j^* + \pi_i^* = 0$$

پس توانستیم شروط لنگی مکمل را بدون استفاده از y^* بنویسیم.