بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۱

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع — شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۱

آ)

proof for $\leftarrow$ اگر دو نقطه‌ی گوشه‌ای A و B مجاور باشند، طبق تعریف ابتدای سوال یعنی پاره خط واصل آن‌ها یک وجه یک بعدی از چند وجهی P است. از طرفی طبق تعریف وجه می‌دانیم که هر وجه P به صورت

$$F := P \cap \{x | c'^T x = \delta\}$$

قابل تعریف است که $c'^T x \leq \delta$ یک نامساوی معتبر برای P است. از آنجایی که وجه ۱ بعدی شامل دو نقطه‌ی گوشه‌ای است، بنابراین تنها نقاط گوشه‌ای آن همین A و B هستند و طبق تعریف وجه در بالا، بردار c وجود دارد که A و B تنها نقاط گوشه‌ای بهینه‌ی مساله‌ی

$$min\{c^T x | x \in P\}$$

می‌باشند. (c را قرینه‌ی c' موجود در نامساوی معتبر $c'^T x \leq \delta$ تعریف می‌کنیم و با این کار $c^T x \geq -\delta$ خواهد بود و فقط در نقاط A و B مینیمم خواهد شد).

□

proof for $\rightarrow$ اگر بردار c وجود داشته باشد به طوری که A و B تنها نقاط گوشه‌ای بهینه‌ی مساله‌ی

$$min\{c^T x | x \in P\}$$

باشند و این مقدار مینیمم را با θ نشان دهیم، تمام نقاط چندوجهی P در نامساوی $c^T x \geq \theta$ صدق می‌کنند. بنابراین داریم:

$$c^T x \geq \theta \rightarrow -c^T x \leq -\theta$$

بنابراین می‌توانیم وجه زیر را برای P تعریف کنیم:

$$F := min\{x | c'^T x = \delta\} \ | \ c' = -c, \delta = -\theta$$

پس نقاط گوشه‌ای A و B تنها نقاط گوشه‌ای برای وجه F می‌باشند و در نتیجه F یک وجه یک بعدی است که شامل نقاط گوشه‌ای A و B است و طبق تعریف ابتدای سوال، A و B دو نقطه‌ی گوشه‌ای مجاور در چندوجهی P خواهند بود.

□

ب) اگر M بردار مشخصه یک تطابق در گراف G باشد، راس‌هایی از G که M آنها را درگیر می‌کند را با $f(M)$ نشان می‌دهیم. همچنین کل رئوس G را با $V(G)$ نشان می‌دهیم. طبق تعریف برای هر تطابق کامل مانند M' داریم:

$$f(M') = V(G)$$

همچنین برای دو تطابق M_1 و M_2، $M_1 \cap M_2$ را اشتراک بردار مشخصه‌های این دو تطابق تعریف می‌کنیم.

لم ۱ *بردار مشخصه‌ی هر تطابق کامل مانند M_1، یک نقطه‌ی گوشه‌ای در P است.*

برهان.

لم ۲ *دو بردار مشخصه‌ی M_1 و M_2 دو نقطه‌ی گوشه‌ای مجاور هستند اگر و تنها اگر زیر گراف القایی G با رئوس مربوط به $V(G) \backslash (M_1 \cap M_2)$ دقیقا ۲ تطابق کامل داشته باشد.*

برهان. *در ابتدا قسمت (الف) این سوال را به عنوان فرض قبول می‌کنیم.*

proof for → اگر با ازای دو بردار مشخصه‌ی M_1 و M_2 شرط بالا برقرار باشد، می‌توانیم تعریف کنیم:

$$c_i := \begin{cases} -2, & \textit{if}\, (M_1 \cap M_2)_i = 1 \\ \infty, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

توجه کنید که می‌توانیم به جای بی‌نهایت از هر عدد مثبت بزرگی استفاده کنیم. حال ادعا می‌کنیم بردار c ساخته شده در شرط قسمت (الف) صدق می‌کند. با توجه به اینکه دنبال جواب‌های بهینه‌ی $min\{c^T x | x \in P\}$ هستیم، و با توجه به اینکه کمترین ضرایب مربوط به c در $M_1 \cap M_2$ تعریف شده است و بقیه‌ی ضرایب بسیار بزرگ هستند، تنها دو جواب M_1 و M_2 جواب‌های بهینه‌ی این مساله هستند و بنابراین طبق (الف) این دو نقطه، دو نقطه‌ی گوشه‌ای مجاور هستند.

□

proof for ← عکس نقیض این حالت را اثبات می‌کنیم. یعنی اگر تعداد تطابق‌های کامل زیر گراف القایی G با رئوس متناظر با $V(G) \backslash (M_1 \cap M_2)$ مخالف با ۲ باشد، اثبات می‌کنیم که M_1 و M_2 نقاط گوشه‌ای مجاور نیستند. خود این حکم را نیز با برهان خلف اثبات می‌کنیم. یعنی فرض کنید زیر گراف کاهش یافته به رئوس $V' := V(G) \backslash (M_1 \cap M_2)$ ۲ تطابق کامل نداشته باشد ولی M_1 و M_2 دو تطابق کامل باشند. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که V' اکیدا بیش از ۲ تطابق کامل دارد (وگرنه M_1 و M_2 تطابق کامل نبودند که تناقض است). این تطابق‌های کامل را $D_1, D_2, ...D_k$ که $k > 2$ است نشان دهید. بردار c را مشابه با طرف دیگر اثبات تعریف کنید. حال تعریف می‌کنیم:

$$C_i = D_i + (M_1 \cap M_2)$$

در واقع هر کدام از C_i ها بردار مشخصه‌ی تطابق کاملی است که یال‌های مربوط به $M_1 \cap M_2$ به همراه یال‌های مربوط به D_i را دارد. می‌توان دید که به ازای هر $x \in \{C_1, C_2, ...C_k\}$ مقدار $c^T x$ کمینه‌ی $min\{c^T x | x \in P\}$ است و با توجه به اینکه $k > 2$، طبق (الف) نتیجه می‌گیریم که M_1 و M_2 دو نقطه‌ی گوشه‌ای مجاور نیستند. پس عکس نقیض را اثبات کردیم و حکم مد نظر اثبات شد، یعنی به ازای هر دو بردار مشخصه‌ی M_1 و M_2 که دو نقطه‌ی گوشه‌ای مجاور هستند، زیر گراف القایی G با رئوس مربوط به $V(G) \backslash (M_1 \cap M_2)$ دقیقا ۲ تطابق کامل دارد.

□