بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۸

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع — شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

در سوال ۲ ماترویدها را به صورت $M = (S, \mathcal{I})$ و $M^* = (S, \mathcal{I}')$ فرض می‌کنیم. همچنین منظور از عبارتی مانند $span_M(x)$، $span(x)$ در ماتروید M و منظور از عبارتی مانند $span_{M'}(x)$، $span(x)$ در ماتروید M' می‌باشد(به جای $span$ هر تابع دیگری ممکن است استفاده شود).

پرسش ۲

از برهان خلف استفاده می‌کنیم، فرض کنید حکم برقرار نباشد و درنتیجه مدارهای C و C^* فقط در یک x اشتراک داشته باشند. طبق تعریف دوگان، می‌دانیم که $A \in \mathcal{I}'$ اگر و تنها اگر پایه‌ای برای M در مجموعه‌ی $S \backslash A$ وجود داشته باشد. بنابراین طبق تعریف زنجیر می‌دانیم:

$$Y \in \mathcal{I}' \quad \forall Y \subset C^* \to C^* - x \in \mathcal{I}' \tag{۱}$$

لم ۱ *ادعا می‌کنیم که*

$$x \notin span_M(S \backslash C^*)$$

برهان. *این ادعا با برهان خلف اثبات می‌شود، فرض کنید این طور نباشد و در نتیجه $x \in span_M(S \backslash C^*)$ بنابراین داریم*

$$rank(span_M(S \backslash C^*)) = rank(span_M(S \backslash C^* + x)) \tag{۲}$$

بنابراین در عبارت (۱)، می‌توانیم x را نیز به مجموعه‌ی $Y = C^* - x$ اضافه کنیم و Y حاصل همچنان عضو $\mathcal{I}'$ باقی می‌ماند (زیرا طبق (۲)، $rank_M(S - Y)$ کاهش نمی‌یابد). از طرفی می‌دانستیم که C^* یک مدار است و عضو $\mathcal{I}'$ نیست، از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم که فرض خلف باطل است و لم برقرار است.

□

لم۲ *مجموعه‌ی $S \backslash C^*$ را درنظر بگیرید. از آنجایی که C یک مدار است، $C - x$ یک عضو مستقل برای M است و می‌توانیم آن را به یک پایه برای $S \backslash C^*$ گسترش دهیم. پایه‌ی حاصل را B بنامید. ادعا می‌کنیم که $B' := B + x$ همچنان مستقل است.*

برهان. *فرض کنید اینطور نباشد (برهان خلف). بنابراین داریم:*

$$x \in span_M(S \backslash C^*)$$

که به طور مستقیم با لم (۱) در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و لم(۲) اثبات می‌شود.

لم۳ B' به دست آمده در لم (۲) را درنظر بگیرید داریم:

$$C \subseteq B' \to C \in \mathcal{I}$$

برهان. طبق اصول موضوعه‌ی ماترویید، داریم:

$$A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \to B \in \mathcal{I}$$

که دقیقا مطابق با لم۳ است (توجه کنید دلیل اینکه $C \subseteq B'$ این است که هنگام ساختن B ابتدا از عضو مستقل $C - x$ شروع کردیم و در نهایت x را به B اضافه کردیم، بنابراین تمام اعضای C در B' قرار دارند و $C \subseteq B'$).
لم۳ به وضوح با اینکه C یک زنجیر است و درنتیجه $C \notin \mathcal{I}$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و امکان ندارد که $|C \cap C^*| = 1$. در نتیجه حکم سوال اثبات شد.