# بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

## تمرین تحویلی ۳

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع　　شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

تعریف می‌کنیم

$$P' := CH(\{\chi^F | F \in \mathcal{F}\}$$

**ابتدا نشان می‌دهیم که $P' \subseteq P$.** اثبات این مورد واضح است، با توجه به محدب بودن $P$ و $P'$ کافی است نشان دهیم تمام راس‌های $P'$ در $P$ قرار دارند. از طرفی به ازای هر $\chi^F | F \in \mathcal{F}$ به وضوح تمام شروط

$$\sum_{I \in \mathcal{I}: e \in I} x(I) \geq 1, \forall e \in E$$

برقرار است (با توجه به تعریف $\mathcal{F}$). پس تمام رئوس $P'$ در $P$ قرار دارند و درنتیجه

$$P' \subseteq P \tag{۱}$$

**حال نشان می‌دهیم که $P \subseteq P'$.** برای این کار نیز نشان می‌دهیم که ماتریس توصیف کننده‌ی قیود $P$ تماما تک پیمانه‌ای است و درنتیجه تمام رئوس $P$ صحیح هستند و با توجه به اینکه فقط مقادیر ۰ و ۱ برای درایه‌های صحیح مجاز است (طبق تعریف $P$)، تمام رئوس $P$ در $P'$ قرار خواهند داشت. ماتریس $A$ متناظر با قیود به شکل

$$\sum_{I \in \mathcal{I}: e \in I} x(I) \geq 1, \forall e \in E$$

را درنظر بگیرید. اگر سطرهای این ماتریس را متناظر با یال‌های $e \in E$ درنظر بگیریم و ستون‌ها را متناظر با $I \in \mathcal{I}$ هر ستون متناظر یک زیرمسیر از مسیری مانند $P(v)$ است (طبق صورت سوال). این ماتریس را با $A$ نشان می‌دهیم. اثبات می‌کنیم که $A^T$ تماما تک پیمانه‌ای است و درنتیجه $A$ نیز تماما تک پیمانه‌ای است.
ستون‌های $A^T$ معادل با یال‌های $e \in E$ هستند. کافی است طبق قضیه‌ی $Ghouila - Houri$ نشان دهیم که برای هر زیرمجموعه از این ستون‌ها، یک رنگ آمیزی دو متساوی وجود دارد. این کار نیز به راحتی انجام می‌شود، کافی است برای هر زیرمجموعه‌ی $E' \subseteq E$ بردار مشخصه‌ی $\chi^{E'}$ را درنظر بگیریم و به هر یال $e \in E$ وزن $\chi^{E'}_e$ را نسبت دهیم. در واقع وزن هر یال ۱ است اگر و تنها اگر در $E'$ آمده باشد و درغیر اینصورت ۰ است. این وزن را با $w(e)$ نشان می‌دهیم. همچنین به ازای هر یال $e$ مقدار $d(e)$ را به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم:

- اگر $e = uv$ که $u$ ریشه‌ی درخت است، $d(e) := w(e)$
- اگر $e = uv$ که $u$ پدر $v$ است به طوری که پدر $u$ برابر با $u'$ است، تعریف می‌کنیم:

$$d(e) = w(e) + d(u'u)$$

در واقع $d(e)$ نشان دهنده‌ی جمع وزن یال‌هایی است که از ریشه شروع شده‌اند و درنهایت با طی یک سری یال به $e$ رسیده‌اند (خود $e$ را نیز درنظر می‌گیریم). حال به ازای هر $e \in E | w(e) = 1$ بسته به اینکه $d(e)$ زوج است یا فرد، رنگ ستون متناظر با $e$ در $E'$ را آبی و قرمز می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که با توجه به تعریف $d(e)$، به ازای هر سطر $A^T$ که متناظر با یکی از $I \in \mathcal{I}$ ها است، درایه‌ی مربوط به این سطر در اختلاف ستون‌های آبی و قرمز برابر با یکی از اعداد منفی ۱ و صفر

و مثبت ۱ است (دلیل این اتفاق نیز این است که $I$ متناظر با یک زیر مسیر از یک $P(v)$ است و بنابراین با درنظر گرفتن ستون‌های $E'$ و رنگ آمیزی بیان شده، یال‌های $I$ (به جز یال‌هایی که وزن ۱ دارند که عملا از ستون‌ها حذف شده‌اند) یک در میان آبی و قرمز شده‌اند که نتیجه‌ی مدنظر را می‌دهد). بنابراین به ازای تمام سطرهای $A^T$ این خاصیت برقرار است و رنگ آمیزی بیان شده یک رنگ آمیزی دو متساوی است. درنتیجه $A^T$ ماتریسی $TU$ است و به دنبال آن $A$ نیز $TU$ است. پس تمام رئوس $P$ صحیح می‌باشند و درنتیجه داخل $P'$ خواهند بود و داریم:

$$P \subseteq P' \tag{۲}$$

با توجه به نتایج (۱) و (۲) داریم

$$P = P' = CH(\{\chi^F | F \in \mathcal{F}\}$$

که همان حکم سوال است.

$\square$