



تمرین تحویلی ۵

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

نام و نام خانوداگی: سروش زارع

پرسش ۱

در ابتدا فرض می‌کنیم که مواردی مانند دور با ظرفیت بی نهایت و مجموع هزینه‌های منفی وجود ندارد، زیرا در غیر این صورت مساله جواب بهینه ندارد.

لم ۱ می‌توانیم یک ماتریس U با درایه‌های ثابت u پیدا کنیم به طوری که افزودن قید $f \leq U$ جواب‌های مساله را عوض نکند.

برهان. می‌توانیم با استفاده از الگوریتمی شبیه به باینری سرچ مقدار u را پیدا کنیم. در ابتدا قرار می‌دهیم $U = 1$ و جواب بهینه‌ی مساله را پیدا می‌کنیم، سپس در هر مرحله u را دو برابر می‌کنیم، اگر جواب بهینه‌ی مساله عوض نشد، همین u را به عنوان درایه‌های U در قید $f \leq U$ در نظر می‌گیریم. ولی اگر جواب تغییر کرد، همین الگوریتم را ادامه می‌دهیم. \square

پس تا کنون مساله‌ای به شکل زیر داریم:

$$\begin{aligned} & \text{کمینه کن } c^T f \\ & \text{که } 0 \leq f \leq U \\ & \nabla(f)_i = b_i \quad \forall i \in V \end{aligned}$$

حال سعی می‌کنیم هزینه‌ی منفی را از بین ببریم. برای این کار، در ابتدا به ازای هر یال $e = xy$ با c_e منفی، مقادیر b_x و b_y را به شکل زیر آپدیت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} b_x &+ = u \\ b_y &- = u \end{aligned}$$

خود یال e را حذف می‌کنیم و یک یال $e' = yx$ را با هزینه‌ی $|c_e| = -c_e$ و شار اولیه‌ی \bullet اضافه می‌کنیم. این آپدیت را به ازای تمام یال‌های با هزینه‌ی منفی انجام می‌دهیم تا در نهایت هیچ هزینه‌ی منفی باقی نمانده باشد. نحوه‌ی این مدل سازی به این گونه است که به ازای یک یال $e = xy$ با هزینه‌ی منفی، با عوض کردن b_x و b_y فرض می‌کنیم که تمام ظرفیت این یال استفاده شده است، ولی این شانس را به الگوریتم می‌دهیم که بتواند از تمام این ظرفیت استفاده نکند (با قرار دادن یال برعکس e' از y به x با هزینه‌ی مثبت). در واقع تمام هزینه‌های منفی را در ابتدا لحاظ می‌کنیم و صرفاً در صورت نیاز برخی از آن‌ها را بعداً کنسل می‌کنیم. در نهایت اگر مقدار b آپدیت شده را با b' نشان دهیم و هزینه‌ها را با c' نشان دهیم، کفایت مساله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} & \text{کمینه کن } c'^T f \\ & \text{که } 0 \leq f \leq U \\ & \nabla(f)_i = b'_i \quad \forall i \in V \end{aligned}$$

اگر جواب بهینه‌ی این مساله را با f^* نشان دهیم، برای به دست آوردن جواب مساله‌ی اصلی، برای یال‌های e که از همان ابتدا هزینه‌ی مثبت داشته‌اند کفایت همان f_e^* را برای f_e در نظر بگیریم و برای یال‌های e که در ابتدا هزینه‌ی منفی داشته‌اند، کفایت f_e را برابر با $f_e^* - u$ قرار دهیم (چون در ابتدا فرض کردیم تمام ظرفیت e استفاده شده است ولی در نهایت به اندازه‌ی f_e^* از آن را کنسل کرده‌ایم).