بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۸

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۱

ابتدا چند لم ابتدایی مربوط به گراف‌ها را اثبات می‌کنیم و سپس به سراغ اثبات حکم مساله می‌رویم.

یک گراف همبند C را درنظر بگیرید، اگر تعداد رئوس و یال‌های C را به ترتیب با $V(C)$ و $E(C)$ نشان دهیم، ۲ لم زیر برقرارند:

لم ۱ *در صورتی که $E(C) \ge V(C)$ در C یک دور وجود دارد. به طور دقیق تر، اگر این نامساوی به صورت تساوی برقرار باشد دقیقا یک دور در C وجود دارد.*

برهان. *از آنجایی که C همبند است می‌توان یک زیردرخت فراگیر T با $V(C) - 1$ یال برای آن تشکیل داد. از طرفی داریم:*

$$E(C) \ge V(C) \to E(C) > V(C) - 1$$

در نتیجه حداقل یک یال $e \in E(C)$ وجود دارد که $e \notin E(T)$. اضافه کردن این یال به T به وضوح یک دور ایجاد می‌کند. همچنین اگر فقط یک انتخاب برای e داشته باشیم، دقیقا یک دور ایجاد می‌شود. درنتیجه لم اثبات می‌شود.

لم ۲ *در صورتی که $E(C) > V(C)$ در C اکیدا بیش از ۱ دور وجود دارد.*

برهان. *از برهان خلف استفاده کنید و فرض کنید اینطور نباشد، پس طبق لم قبلی، دقیقا یک دور در C وجود دارد. یک یال دلخواه e از این دور را درنظر بگیرید و حذف کنید و گراف حاصل را C' بنامید. اگر C' همچنان همبند بماند، داریم:*

$$E(C') = E(C - 1) \to E(C') \ge V(C') = V(C) \tag{۱}$$

و طبق لم ۱ ، همچنان یک دور در C' وجود دارد که با دور قبلی در مجموع ۲ دور می‌شود و لم اثبات می‌شود. پس فرض کنید که C' همبند نباشد. اگر مولفه‌های همبندی C' را با $C_1, \ldots C_k$ نشان دهیم، اگر حداقل یک مولفه‌ی C_i به اندازه‌ی $V(C_i)$ یال داشته باشد، درون این مولفه یک دور وجود دارد که با دور اولیه می‌شود ۲ دور و لم اثبات می‌شود. پس فرض می‌کنیم:

$$E(C_i) < V(C_i) \quad \forall 1 \le i \le k$$

و از آنجایی که یالی بین این مولفه‌های همبندی وجود ندارد، داریم:

$$E(C') = \sum_i^k E(C_i) \le \sum_i^k (V(C_i) - 1) \le (\sum_i^k V(C_i)) - k = V(C') - k$$

با توجه به اینکه فرض کردیم C' همبند نیست، داریم:

$$k \ge 2 \to E(C') \le V(C') - 2$$

که با نامساوی (۱) در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و لم (۲) نیز برقرار است.

حال ۲ لم بالا را به عنوان فرض قبول می‌کنیم و به سراغ مساله‌ی اصلی می‌رویم:

لم۳ *اگر $A \in \mathcal{I}$ به ازای هر $B \subseteq A$ نیز داریم $B \in \mathcal{I}$.*

برهان. *به وضوح اگر گردایه‌ای از یال‌ها شامل حداکثر ۱ دور باشد (A)، هر زیرمجموعه‌ای از این یال‌ها (B) نیز حداکثر ۱ دور دارد، بنابراین لم اثبات می‌شود.*

لم۴ *اگر $A, B \in \mathcal{I}$ و $|B| > |A|$ می‌توان یک $x \in B \backslash A$ پیدا کرد به طوری که $A + x \in \mathcal{I}$*

برهان. *مولفه‌های همبندی متناظر با یال‌های A و رئوس V را با $C_1, ... C_k$ نشان دهید. به وضوح هیچ یالی بین دو C_i متفاوت وجود ندارد (وگرنه روی هم یک مولفه‌ی همبندی بودند). با توجه به لم‌های (۱) و (۲)، حداکثر در یکی از C_i ها ممکن است داشته باشیم $E(C_i) = V(C_i)$ و به ازای تک تک C_i های دیگر داریم $E(C_i) < V(C_i)$ (وگرنه E حداقل ۲ دور تشکیل می‌دهد). از طرفی با توجه به اینکه هر C_i یک مولفه‌ی همبندی است، داریم: $E(C_i) \geq V(C_i) - 1$. بنابراین به ازای حداقل $k - 1$ مولفه‌ی C_i داریم:*

$$E(C_i) = V(C_i) - 1$$

و به ازای حداکثر یک مولفه‌ی C_i داریم:

$$E(C_i) = V(C_i)$$

بنابراین اگر تعداد کل یال‌های A (یا همان $|A|$) را حساب کنیم، داریم:

$$|A| \leq (\sum_{i}^{k}(V(C_i) - 1)) + 1 = |V| - k + 1 \tag{۲}$$

$$|A| \geq (\sum_{i}^{k}(V(C_i) - 1)) = |V| - k \tag{۳}$$

حال یال‌های B را درنظر بگیرید و آن‌ها را با رنگ قرمز در نظر بگیرید. مجددا طبق لم‌های ۱ و ۲ ، یال‌های قرمز درون هیچ C_i نمی‌تواند اکیدا از $V(C_i)$ بیشتر باشد وگرنه B حداقل ۲ دور دارد. پس اگر یال‌های قرمز درون مولفه‌ی C_i را با $R(C_i)$ نشان دهیم، داریم:

$$R(C_i) \leq V(C_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

با همان استدلال مشابه برای A ، می‌توان دید که این نامساوی نیز حداکثر در یک i به صورت تساوی برقرار است. حال از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که هیچ $x \in B \backslash A$ وجود نداشته باشد که $A + x \in \mathcal{I}$. بنابراین هیچ یال قرمزی بین دو مولفه‌ی متفاوت C_i و C_j وجود ندارد (وگرنه x را می‌توانستیم همان یال درنظر بگیریم و تعداد دورهای $A + x$ نسبت به A افزایش پیدا نمی‌کرد). بنابراین تعداد کل یال‌های قرمز یا همان $|B|$ حداکثر برابر است با:

$$|B| \leq (\sum_{i}^{k}(V(C_i) - 1)) + 1 = |V| - k + 1$$

از آنجایی که فرض کردیم $|A| < |B|$، بنابراین تنها حالت معتبر این است که $|A| = |V| - k$ باشد و درنتیجه A هیچ دوری تشکیل ندهد و $|B| = |V| - k + 1$ باشد و درنتیجه B درون یکی از مولفه‌های C_i تشکیل دور می‌دهد. به راحتی می‌توانیم یک یال $e \notin A$ درون این دور را انتخاب کنیم و آن را به A اضافه کنیم (اگر دور را با D نشان دهیم، حداقل یک یال D وجود دارد که در A وجود ندارد، زیرا در غیر اینصورت A نیز شامل دور D می‌شود که با فرض دور نداشتن A در تناقض است، پس $e \notin A$ وجود دارد) از آنجایی که A قبلا در C_i دور نداشت، اکنون دقیقا ۱ دور در C_i دارد و در C_i های دیگر نیز دور ندارد، بنابراین $A + e$ دقیقا یک دور دارد و $A + e \in \mathcal{I}$ و درنتیجه لم اثبات می‌شود.

با توجه به لم‌های اثبات‌شده‌ی (۳) و (۴) که اصول موضوعه‌ی مربوط به ماترویدها هستند، $(E, \mathcal{I})$ یک ماتروید است و حکم مساله اثبات می‌شود.