بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۲

نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع

شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۲

برای جلوگیری از ابهام، مجموعه‌ی A گفته شده در سوال را با B نشان می‌دهیم. همچنین در این اثبات منظور از ماتریس یک متوالی، ماتریس یک متوالی ستونی نیست و منظور یک متوالی سطری است که اثبات را راحت تر می‌کند.

الفـ نقاط مجموعه‌ی B را به صورت $\{p_1, ...p_m\}$ فرض کنید. کافی است ماتریس A را به این صورت تعریف کنیم که $A_{i,j} = 1$ اگر و تنها اگر $p_j \in I_i$ و در غیر اینصورت $A_{i,j} = 0$ و برنامه ریزی خطی به این صورت می‌شود:

$$\begin{array}{rl} \text{کمینه کن} & w^T x \\ \text{که} & Ax \leq k \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{array}$$

که در واقع آرام‌سازی شده‌ی برنامه‌ریزی صحیح زیر است که جواب مساله در حالت صحیح را می‌دهد:

$$\begin{array}{rl} \text{کمینه کن} & w^T x \\ \text{که} & Ax \leq k \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

$\square$

ب‌ـ فرض می‌کنیم نقاط p_i به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند. با این فرض هر سطر ماتریس A که متناظر با یک بازه‌ی I_i است، تعدادی متوالی از نقاط p_i را درون خود دارد و بقیه‌ی نقاط را درون خود ندارد، بنابراین هر سطر A تعدادی متوالی عدد ۱ دارد و بقیه‌ی خانه‌هایش ۰ هستند.

تعریف ۱ *ماتریس A_{n*m} را یک متوالی سطری(یا به اختصار یک متوالی) می‌نامیم، اگر هر سطر آن یک متوالی باشد. یعنی برای هر $i \in \{1, ..., n\}$، دو عدد مثل $l_i, r_i \in \{1, ..., m\}$ وجود داشته باشند که:*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & l_i \leq j \leq r_i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

با توجه به تعریف بالا، ماتریس A ساخته شده، یک متوالی سطری است. ادعا می‌کنیم که این ماتریس تماما تک‌پیمانه‌ای است، که از قضیه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۱ *اگر A ماتریس یک متوالی سطری باشد، آنگاه A تماما تک‌پیمانه‌ای است.*

برهان. *ابتدا نیازداریم برخی پیش‌نیاز ها را تعریف کنیم و پس از آن این قضیه به راحتی اثبات می‌شود:*

تعریف ۲ *یک دو رنگ‌آمیزی متساوی از ماتریس A، افراز ستون‌های A به دو مجموعه‌ی قرمز و آبی است به طوری که تفاضل جمع‌ستون‌های آبی و جمع ستون‌های قرمز، برداری با مولفه‌های 0و$1-$و 1 باشد.*

قضیه ۲ ماتریس A تماما تک‌پیمانه‌ای است، اگر و فقط اگر هر زیرمجموعه از ستون‌های A یک دورنگ آمیزی متساوی داشته باشد.
برهان. این قضیه *Ghouila-Houri* نام دارد که در کلاس و در جزوه اثبات شده است.

حال به اثبات قضیه‌ی ۲ بر می‌گردیم، ماتریس A یک ماتریس یک متوالی سطری است.
اثبات می‌کنیم که برای هر هر زیرمجموعه از ستون‌های A مانند S، یک دو رنگ‌آمیزی متساوی برای S موجود است. این حکم با اثبات دو گزاره‌ی زیر به دست می‌آید:

۱. اگر A_S را ماتریس تشکیل شده از انتخاب ستون‌های S از A درنظر بگیریم، آنگاه A_S یک ماتریس یک متوالی سطری است. اثبات این ادعا واضح است(در واقع اگر A_S یک متوالی نباشد، می‌توانیم با افزایش آن به A، ببینیم که A نیز یک متوالی نیست که تناقض است).

۲. هر ماتریس یک متوالی مانند A دارای دو رنگ‌آمیزی متساوی روی ستون‌ها است.

برهان. ستون‌ها را یکی در میان آبی و قرمز می‌کنیم، حال می‌خواهیم تفاصل مجموع ستون‌های قرمز و مجموع ستون‌های آبی را به دست آوریم. برای سطر دلخواه i، درایه‌های ستون‌های l_i تا r_i از این سطر برابر با ۱ هستند و بقیه‌ی درایه‌ها ۰ هستند. پس مجموع ستون‌های آبی منهای ستون‌های قرمز برای سطر i ام، برابر است با $\sum_{l=l_i}^{r_i}(-1)^l$ که یکی از اعداد 0 یا $1-$ یا 1 خواهد بود.

با استفاده از گزاره‌ی (۱)، هر زیرمجموعه از ستون‌ها مثل S یک ماتریس یک متوالی می‌سازد و از گزاره‌ی (۲) نتیجه می‌گیریم که این زیرماتریس A_S، رنگ آمیزی متساوی روی ستون‌ها دارد، پس طبق قضیه‌ی (۴)، A تماما تک پیمانه‌ای است و حکم سوال اثبات می‌شود.

□

ج- چندوجهی ساخته شده در بخش الف را با P نشان می‌دهیم. طبق بخش (ب)، تمام رئوس این چندوجهی صحیح می‌باشند و درنتیجه کافیست یک راس از این چندوجهی که جواب بهینه تولید می‌کند را پیدا کنیم. برای این کار، فرض می‌کنیم الگوریتمی داریم که با داشتن بردار c و قیود چندوجهی P، یک جواب شدنی که حاصل c^Tx را بیشینه می‌کند پیدا می‌کند. نام این الگوریتم را A می‌نامیم (که می‌تواند الگوریتمی مانند simplex یا الگوریتم‌های مشابه باشد). به وضوح نقطه‌ای که این الگوریتم پیدا می‌کند بر روی یکی از وجه‌های P قرار دارد. در ابتدا چند وجهی P قیودی معادل با چندوجهی آمده در بخش الف دارد و c برداری است که وزن‌های w_i را نشان می‌دهد (یعنی $c_i = w_i$). با استفاده از الگوریتم A می‌توانیم یک نقطه‌ی بهینه در چندوجهی P پیدا کنیم و آن را با x^* نشان دهیم. اگر x^* صحیح بود که همان جواب خواسته شده است. اگر صحیح نبود، اندیسی مانند i وجود دارد که x_i^* صحیح نیست. با توجه به اینکه x^* روی یک وجه قرار دارد و با توجه به اینکه تمام رئوس چندوجهی به دلیل TU بودن صحیح می‌باشند، به ازای هر $k \in \{0, 1\}$ جواب بهینه‌ی دیگری مانند y^* وجود دارد که $y_i^* = k$. بنابراین کافیست به دلخواه یکی از $k = 0, 1$ را درنظر بگیریم و قید $x_i = k$ را به قیود P اضافه کنیم. همچنان قیودمان شرط TU بودن را دارند و بنابراین می‌توان همین الگوریتم را تکرار کرد تا زمانی که به یک جواب صحیح برسیم (با توجه به اینکه در مجموع m اندیس x_i وجود دارد و اینکه در هر مرحله یک قید اضافه می‌شود که برای یکی از این اندیس‌ها شرط مساوی را اجبار می‌کند، در نهایت پس از حداکثر m مرحله این الگوریتم متوقف می‌شود).
اگر زمان اجرای الگوریتم A را با $O(A)$ نشان دهیم، زمان اجرای کل الگوریتم از $O(Am)$ است. بنابراین یک الگوریتم چند جمله‌ای برای حل سوال خواسته شده پیدا کردیم.

□