بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

بهار ۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی ۲

نام و نام‌خانوداگی: سروش زارع — شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵

پرسش ۱

آ) اگر χ^R بردار مشخصه‌ی R باشد، داریم:

$$|R \cap \{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\}| = \chi^R_{\sigma_i(2t-1)} + \chi^R_{\sigma_i(2t)} = 1$$

بنابراین همین قیدها را می‌توانی برای x های شدنی لحاظ کنیم و به چندوجهی زیر برسیم:

$$\begin{aligned} Ax &\le 1 \\ -Ax &\le -1 \\ 0 \le x_i &\le 1 \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

که ماتریس A اینگونه تعریف می‌شود که $n/2$ سطر اول آن متناظر با $n/2$ قید به شکل زیر

$$x_{\sigma_1(2t-1)} + x_{\sigma_1(2t)} \ \ \forall t \in [n/2]$$

و $n/2$ سطر بعدی متناظر با قیدهای

$$x_{\sigma_2(2t-1)} + x_{\sigma_2(2t)} \ \ \forall t \in [n/2]$$

می‌باشند، یعنی در هر کدام از این سطرها دو درایه $2t-1$ و $2t$ برابر با ۱ هستند و بقیه‌ی درایه‌ها ۰ هستند. اگر چندوجهی حاصل از این قیود را با Q نشان دهیم، ادعا می‌کنیم $Q = P_R$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم هر راس v از P_R عضو Q است. این مورد تقریبا واضح است، زیرا رئوس P_R را دقیقا بردار مشخصه‌هایی درنظر گرفتیم که شروط گفته شده مربوط به زیرمجموعه‌ی خوب برایشان برقرار بود، که عملا معادل با همان قیودی است که در چندوجهی Q آورده‌ایم. بنابراین $v \in Q$. از آنجایی که تمام رئوس P_R عضو Q هستند و Q و P_R هر دو مجموعه‌ی محدب هستند، $P_R \subseteq Q$.
حال نشان می‌دهیم که تمام رئوس Q نیز داخل P_R هستند. برای این مورد نشان می‌دهیم هر راس Q صحیح است و درنتیجه هر راس از Q دقیقا متناظر با یکی از راس‌های P_R است. دلیل این اتفاق این است که اگر به قیدهای Q نگاه کنیم، می‌بینیم که $n/2$ سطر اول آن، دقیقا مانند ماتریس وقوع در یک گراف دو بخشی می‌باشند و $n/2$ سطر دوم آن نیز ماتریس وقوع در یک گراف دو بخشی دیگر می‌باشند، و هدف پیدا کردن یک تطابق است. بنابراین در عمل انگار یک گراف دو بخشی داریم و سعی می‌کنیم که یک تطابق از آن را پیدا کنیم. از آنجایی که ماتریس وقوع گراف‌های دو بخشی TU است، تمام راس‌های Q صحیح می‌باشند و درنتیجه هر راس از Q داخل P_R است. به دلیل محدب بودن Q و P_R، نتیجه می‌گیریم که $Q \subseteq P_R$.
از دو گزاره‌ی اثبات شده نتیجه می‌شود که $Q = P_R$ که همان حکم سوال است.

$\square$

ب) در قسمت (الف) دیدیم که نمایش چند وجهی گفته شده به صورت نامساوی‌ها به صورت $Ax \le b$ قابل بیان است که A ماتریسی TU است. از طرفی با قرار دادن بردار x به طوری که همه‌ی x_i ها برابر با $1/2$ باشند، به وضوح می‌بینیم که شرط بخش (الف) برقرار است و درنتیجه چند وجهی زیرمجموعه‌های خوب ناتهی است. از طرفی به خاطر TU بودن ماتریس A، تمام راس‌های این چند وجهی صحیح هستند و درنتیجه حداقل یک جواب بهینه‌ی صحیح دارد. اگر

زیرمجموعه‌ی R متناظر با این جواب بهینه را با R^* نشان دهیم، ادعا می‌کنیم که R^* یک رنگ آمیزی با اختلاف ۲ به ما می‌دهد.

برهان: کافی است اثبات کنیم به ازای هر $i = 1, 2$ و هر $l, u \in [n]$ که $l < u$ شروط گفته شده در ابتدای سوال برقرارند. کافی است اثبات کنیم به ازای $i \in \{0, 1\}$ دلخواه و دو مقدار $l, u \in [n]$ دلخواه که $l < u$ این شروط برقرارند. داریم: $I := \{\sigma_i(l), \sigma_i(l+1), ..., \sigma_i(u)\}$ حال سعی می‌کنیم همین I را بازنویسی کنیم. ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$\forall t \in [n/2] : D(i,t) := \{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\}$$

حال داریم:

$$I = [\bigcup_{j=\lceil (l+1)/2 \rceil}^{\lfloor r/2 \rfloor} D(i,j)] \cup L \cup U \quad (۱)$$

به طوری که داریم:

$$L = \begin{cases} \{\sigma_i(l)\} & \text{if } l \; mod \; 2 = 0 \\ \phi & \text{else} \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} \{\sigma_i(u)\} & \text{if } u \; mod \; 2 = 1 \\ \phi & \text{else} \end{cases}$$

در واقع بازه‌ی I را به تعدادی بازه به شکل $\{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\}$ (و در صورت نیاز برای ابتدا و انتهای I، دو مجموعه‌ی تک عضوی L و U) افراز کرده‌ایم. حال با درنظر گرفتن R^* می‌بینیم که به ازای هر کدام از این مجموعه‌های ۲ عضوی که بخشی از I را ساخته‌اند، $|R \cap \{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\}| = 1$ برقرار است و همچنین به طور مشابه داریم:

$$|\{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\} \backslash R| = 1$$

و درنتیجه داریم:

$$||\{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\} \cap R| - |\{\sigma_i(2t-1), \sigma_i(2t)\} \backslash R|| = 0$$

با جمع زدن این تساوی روی تمام زیرمجموعه‌های ۲ تایی در (۱)، می‌بینیم که بدون درنظر گرفتن L و U، این تساوی همچنان صفر باقی می‌ماند. در نهایت با اضافه کردن L و U می‌بینیم که ممکن است دیگر تساوی برقرار نباشد ولی از آنجایی که هر کدام از L و U یک عضو دارند، حداکثر به اندازه‌ی ۲ یا منفی ۲ از صفر فاصله می‌گیریم، پس همواره شرط

$$||I \cap R^*| - |I \backslash R^*|| \leq 2$$

برقرار است. در نتیجه R^* متناظر با یک رنگ‌آمیزی با اختلاف ۲ است و حکم این قسمت اثبات می‌شود.

□