# بهینه‌سازی ترکیبیاتی مقدماتی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: مرتضی علیمی، هانی احمد زاده

دانشکده علوم ریاضی


## تمرین تحویلی ۱


نام و نام‌خانوادگی: سروش زارع  شماره دانشجویی: ۹۷۱۰۰۴۰۵


### پرسش ۴

اثبات این سوال در جزوه آمده است که آن را در اینجا می‌آوریم.
چندوجهی جایگشت‌ها را با با $\pi_n$ نشان می‌دهیم.
ابتدا یک راس $x \in \pi_n$ را در نظر بگیرید. این راس متناظر با یک جایگشت است و و به وضوح در مقدار ادعا شده برای $conv(X)$ قرار دارد زیرا جمع عناصر آن دقیقا $n(n+1)/2$ است و هر $i$ عنصری از آن جمع حداقل $i(i+1)/2$ دارند (با توجه به متمایز بودن درایه‌ها و طبیعی بودن آن‌ها و همچنین اینکه حداقل مقدار ممکن برای درایه‌ها برابر با ۱ است).

حال یک راس $y$ درون $conv(X)$ ادعا شده درنظر بگیرید. ثابت می‌کنیم که $y$ درون چندوجهی جایگشت‌ها (که آن را با $\pi_n$) قرار دارد و با این تفسیر اگر تمام راس‌های $conv(X)$ ادعا شده درون چندوجهی $\pi_n$ قرار داشته باشد، تمام نقاط $conv(X)$ درون این چندوجهی قرار دارد و در نتیجه‌ی اینکه هر کدام از $pi_n$ و $conv(X)$ زیر مجموعه‌ی دیگری هستند، $conv(X)$ ادعا شده دقیقا همان چندوجهی جایگشت‌ها یا $\pi_n$ است که همان حکم سوال است.
پس کافیست سمت باقی مانده‌ی ادعا را اثبات کنیم: یک راس دلخواه $y$ درون $conv(X)$ ادعا شده درنظر بگیرید. با توجه به اینکه $y$ یک راس است، یک بردار $c$ وجود دارد که $y$ جواب یکتای $max\{c^Tx|x \in conv(x)\}$ است. اگر درایه‌های $c_i$ را به ترتیب $c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq ... c_{i_n}$ در نظر بگیریم، ادعا می‌کنیم که برای هر $1 \leq k \leq n$ داریم $y_{i_k} = k$ و با اثبات این ادعا مشخص می‌شود که $y$ متناظر با یک جایگشت خواهد بود. اثبات این تساوی با برهان خلف و درنظر گرفتن کوچک ترین اندیس $k$ که در این تساوی صدق نمی‌کند به دست می‌آید که در صفحه‌ی ۴۸ جزوه و در مثال جایوجهی آمده است که در اینجا آن را تکرار نمی‌کنیم.