Minimisation à une variable

TP 1 — Optimisation et Recherche Opérationnelle

Karolina Ochman
Numéro d'étudiant : 26109551

Université de Rennes — Département de Mathématiques
M1 CSM — Année 2025–2026

Introduction

Ce rapport présente les réponses aux questions posées dans le cadre du TP 1 du cours d'Optimisation et Recherche Opérationnelle, consacré à la minimisation d'une fonction réelle d'une variable. Deux méthodes numériques sont étudiées : la méthode de *dichotomie* et la *méthode de la section dorée*.

1 Justification de la méthode de dichotomie

Soit une fonction f unimodale sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire qu'elle admet un unique minimum $x^* \in [a, b]$, telle que f est strictement décroissante sur $[a, x^*[$ et strictement croissante sur $]x^*, b]$.

L'idée de la méthode de dichotomie est d'utiliser cette propriété pour réduire à chaque étape l'intervalle $[a, b]$ contenant le minimum.

À chaque itération :

- On choisit un petit $\varepsilon > 0$ et on calcule les points $\lambda = \frac{a+b}{2} - \varepsilon$ et $\mu = \frac{a+b}{2} + \varepsilon$;
- On compare $f(\lambda)$ et $f(\mu)$:
  - Si $f(\lambda) < f(\mu)$, alors le minimum est dans $[a, \mu]$;
  - Sinon, il est dans $[\lambda, b]$.
- L'intervalle est réduit à chaque étape, assurant la convergence vers le minimum.

Cette méthode est garantie de converger si f est unimodale.

2 Fonction `dichoto`

La fonction MATLAB suivante implémente la méthode de dichotomie.
*Voir le script en **Annexe B**.*

3 Résultats numériques (dichotomie)

Pour chaque fonction test (numéros 1 à 5), nous avons appliqué la méthode sur l'intervalle $[0, 3]$ pour différentes tolérances $\varepsilon = 10^{-k}$, avec k variant de 5 à 10 (par pas de 0,5).

La figure représentant le nombre d'évaluations de la fonction f en fonction de $\log_{10}(\varepsilon)$ est présentée en **Annexe C**.

On observe que le nombre d'évaluations augmente approximativement de manière linéaire avec $\log_{10}(1/\varepsilon)$, ce qui est cohérent avec la complexité théorique de la méthode.

4 Méthode de la section dorée

Cette méthode repose sur une réduction homothétique de l'intervalle $[a, b]$ à chaque étape à l'aide d'un rapport constant $\gamma \in]0, 1[$. Le choix optimal est $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$, correspondant au *nombre d'or.*

Fonction `secdor`

La fonction MATLAB qui implémente cette méthode est donnée en **Annexe B**.

Comparaison des méthodes

Nous avons comparé, pour $a = 0$, $b = 3$ et $\varepsilon = 10^{-5}$, le nombre d'évaluations nécessaires avec :
— la méthode de la section dorée avec $\gamma = 0{,}25$;
— la section dorée avec $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$;
— la méthode de dichotomie.
Un tableau récapitulatif des résultats est donné ci-dessous :

Fonction	**Dichotomie**	**Section dorée (0,25)**	**Section dorée (γ)**
Numéro 1	*38*	*37*	*6*
Numéro 2	*38*	*41*	*21*
Numéro 3	*38*	*34*	*6*
Numéro 4	*38*	*26*	*54*
Numéro 5	*38*	*21*	*29*

Commentaire : Les résultats montrent que l'efficacité de la méthode de la section dorée dépend fortement de la fonction testée. Pour les fonctions 1 et 3, le choix optimal de γ (nombre d'or) permet de réduire considérablement le nombre d'évaluations nécessaires, rendant cette méthode bien plus rapide que la dichotomie.

Cependant, pour d'autres fonctions (notamment la fonction 4), le choix optimal de γ ne garantit pas toujours une meilleure performance. La méthode de la dichotomie reste donc plus stable et prévisible en termes de coût.

Le choix de $\gamma = 0{,}25$ donne des résultats très variables : parfois meilleurs (fonction 5), parfois moins bons (fonction 2), ce qui souligne l'importance du paramètre dans l'efficacité de la méthode.

Conclusion

Ce TP a permis d'implémenter deux méthodes classiques de minimisation pour fonctions unimodales : la méthode de la dichotomie et celle de la section dorée. Les expérimentations montrent que la méthode de la section dorée avec le paramètre optimal γ^* peut être très efficace dans certains cas, réduisant fortement le nombre d'évaluations nécessaires.

Cependant, cette performance dépend de la fonction considérée. La méthode de la dichotomie, bien que légèrement plus coûteuse dans certains cas, offre une convergence plus régulière et prévisible.

Les résultats expérimentaux confirment l'intérêt du choix optimal de γ dans la méthode de la section dorée, mais montrent aussi que la dichotomie reste une méthode robuste et fiable.

Annexes

Annexe A : Graphes des fonctions test (num = 2 et 3)

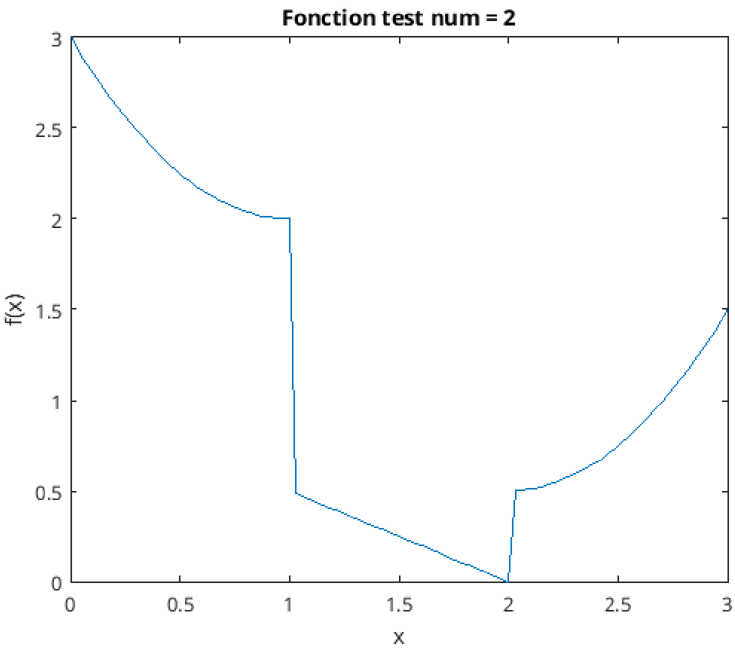

FIGURE 1 – Graphe de la fonction test n°2

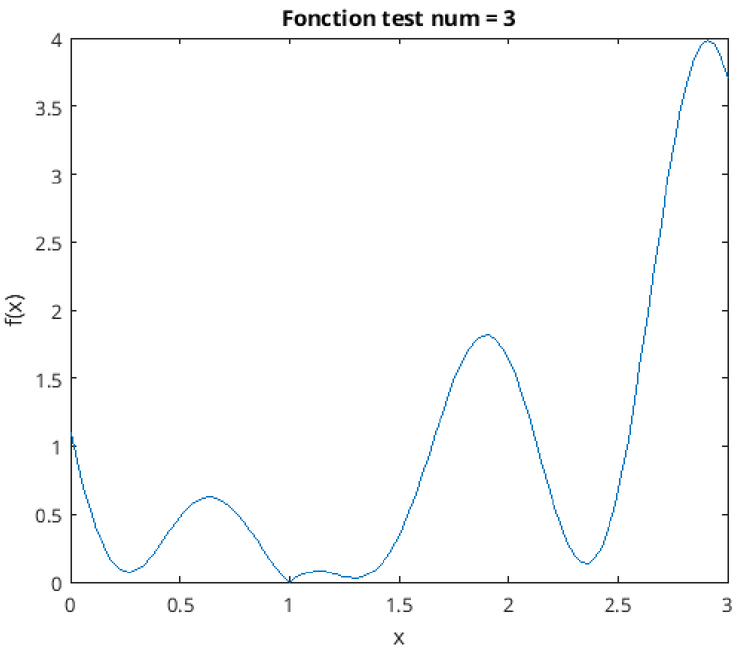

FIGURE 2 – Graphe de la fonction test n°3

Annexe B : Scripts MATLAB

Script `dichoto.m`

```
function [xs, neval] = dichoto(fonction, num, a, b, tol)
```

```
    epsilon = tol / 2;
    neval = 0;

    while (b - a) > tol
        x1 = (a + b) / 2 - epsilon;
        x2 = (a + b) / 2 + epsilon;
        f1 = fonction(num, x1);
        f2 = fonction(num, x2);
        neval = neval + 2;

        if f1 < f2
            b = x2;
        else
            a = x1;
        end
    end

    xs = (a + b) / 2;
end
```

Script `secdor.m`

```
function [xs, neval] = secdor(fonction, num, a, b, tol, gamma)
    delta = gamma / (1 - gamma);
    x1 = a + gamma * (b - a);
    x2 = a + (1 - gamma) * (b - a);
    f1 = fonction(num, x1);
    f2 = fonction(num, x2);
    neval = 2;

    while (b - a) > tol
        if f1 <= f2
            b = x2;
            x2 = x1;
            f2 = f1;
            x1 = a + delta * (b - a);
            f1 = fonction(num, x1);
        else
            a = x1;
            x1 = x2;
            f1 = f2;
            x2 = a + (1 - gamma) * (b - a);
            f2 = fonction(num, x2);
        end
        neval = neval + 1;
    end

    xs = (a + b) / 2;
end
```

Annexe C : Courbes d'évaluations (2 fonctions au choix)

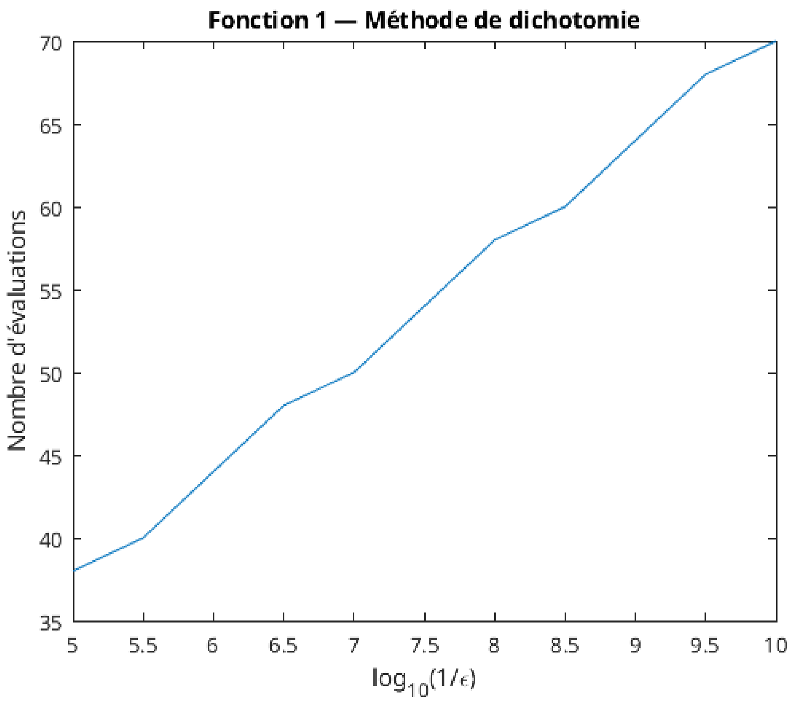

FIGURE 3 – Nombre d'évaluations — fonction 1

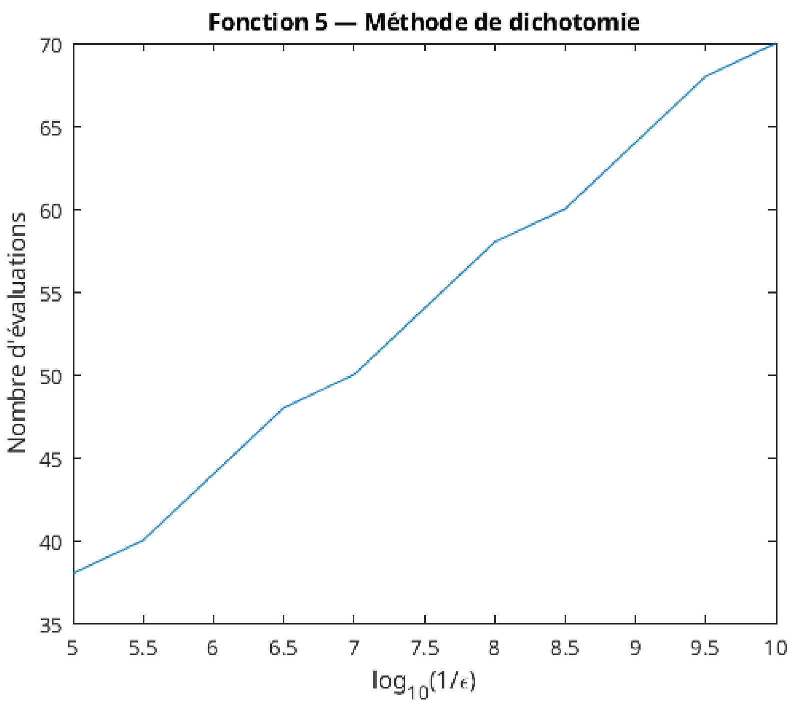

FIGURE 4 – Nombre d'évaluations — fonction 5