

Méthode du gradient à pas optimal

TP 2 — Optimisation et Recherche Opérationnelle

Karolina Ochman, Numéro d'étudiant : 26109551

Université de Rennes — Département de Mathématiques - M1 CSM — Année 2025–2026

Introduction

Ce travail a pour objectif d'implémenter et d'analyser la **méthode du gradient à pas optimal** appliquée à différents problèmes de minimisation. L'algorithme consiste à avancer dans la direction du gradient négatif, avec un pas α_k choisi de façon à minimiser exactement $J(u_k - \alpha \nabla J(u_k))$ à chaque itération. Deux cadres sont étudiés : une fonctionnelle quadratique elliptique (où α_k s'exprime analytiquement) et une fonctionnelle non quadratique (où α_k est obtenu par `fminbnd`).

1 Méthode et mise en œuvre

La méthode a été implémentée en MATLAB, permettant une vectorisation simple et l'utilisation d'outils graphiques (`visiso.m`, `visiter.m`).

Pour le cas quadratique

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) + c,$$

le pas optimal est

$$\alpha_k = \frac{\|\nabla J(u_k)\|^2}{(A\nabla J(u_k), \nabla J(u_k))}.$$

Dans le cas général, il est obtenu numériquement :

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} J(u_k - \alpha \nabla J(u_k)).$$

L'algorithme s'arrête si $\|\nabla J(u_k)\| < 10^{-6}$ ou si $k > 1000$. Les fichiers `J.m`, `GJ.m` et `Gradopt.m` gèrent automatiquement le choix du problème.

2 Résultats et observations

Problèmes quadratiques (P1)–(P3)

Les trois problèmes considérés ont la forme

$$J(u) = \frac{1}{2}u^\top Au - b^\top u + c,$$

et la méthode du gradient à pas optimal converge vers l'unique solution $u^* = A^{-1}b$. Les minima obtenus numériquement coïncident avec les valeurs exactes

$$u_1^* = (1, 1), \quad u_2^* = (4, 2), \quad u_3^* = (-3, 4),$$

ce qui confirme la validité de l'implémentation.

Les gradients successifs vérifient l'orthogonalité

$$(\nabla J(u_k), \nabla J(u_{k+1})) = 0,$$

propriété caractéristique du cas quadratique.

Les matrices associées présentent des conditionnements très différents :

$$\text{cond}(A_1) = 6,85, \quad \text{cond}(A_3) = 223.$$

Ainsi, la convergence est rapide pour (P1) et beaucoup plus lente pour (P3), comme le montrent les courbes de l'Annexe A.

Comparaison avec la théorie. Pour une fonctionnelle quadratique elliptique, on a

$$\|u_k - u^*\|_A \leq \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^k \|u_0 - u^*\|_A, \quad r = \text{cond}(A).$$

Dans (P1), le conditionnement modéré ($r \approx 7$) donne un facteur $\rho \simeq 0.75$ et une décroissance rapide. Dans (P3), le conditionnement élevé ($r \approx 223$) conduit à $\rho \simeq 0.99$, presque égal à 1, ce qui explique la lenteur observée. Les résultats numériques vérifient donc parfaitement la dépendance du taux de convergence vis-à-vis du conditionnement de A .

Problèmes non quadratiques (P4)–(P6)

Le pas α_k est évalué avec `fminbnd`.

P4 : la méthode converge en 81 itérations vers un minimum bien défini (voir Annexe B).

P5 : la fonction $J(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ n'est pas convexe : le Hessian $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ est indéfini, rendant le pas parfois nul ou négatif. Les itérés divergent, ce qui illustre que la méthode n'est adaptée qu'aux fonctionnelles quadratiques elliptiques.

P6 (Rosenbrock) : le mauvais conditionnement du Hessian et la vallée étroite entraînent une convergence très lente ; le maximum d'itérations (1000) est atteint, comme visible sur l'échelle logarithmique (Annexe C).

Résumé des résultats numériques

Exemple	Minimum u^*	$\mathbf{J}(u^*)$	$\ \nabla J(u^*)\ $	Nb itérations
P1	(1.0000, 1.0000)	-1	9.54×10^{-7}	41
P2	(4.0000, 2.0000)	-8	9.54×10^{-7}	44
P3	(-3.0000, 4.0000)	-1	9.57×10^{-7}	137
P4	(8.1191, -7.8691)	2.51×10^{-15}	6.51×10^{-7}	81
P5	Divergence / instable	-	-	-
P6	(1.0000, 0.9999)	8.42×10^{-10}	3.36×10^{-5}	1000 (max)

On observe que les problèmes quadratiques (P1–P3) convergent rapidement, tandis que le problème de Rosenbrock (P6) atteint le nombre maximal d'itérations, illustrant la lenteur de la convergence sur des vallées étroites.

Conclusion

La méthode du gradient à pas optimal est efficace pour les fonctionnelles quadratiques bien conditionnées : les directions successives sont orthogonales et la convergence est rapide. Lorsque le conditionnement augmente (P3) ou que la fonction n'est plus convexe (P5, P6), la méthode devient lente ou divergente. L'usage de `fminbnd` assure une bonne stabilité dans le cas général, mais augmente le coût de calcul. Ces expériences montrent que la méthode reste performante pour les problèmes convexes, mais doit être remplacée (gradient conjugué, quasi-Newton) dans les situations non linéaires difficiles.

Annexes

Annexe A : Conditionnement et convergence quadratique (P1) et (P3)

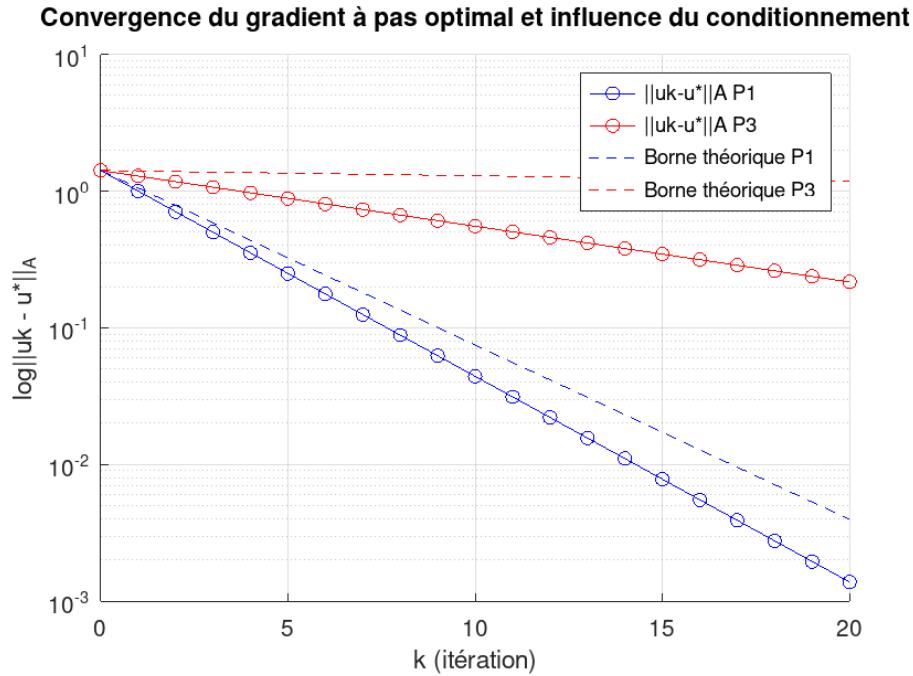


FIGURE 1 – Courbes $\log(\|u_k - u^*\|_A)$ pour (P1) et (P3)

Annexe B : Trajectoire pour (P4)

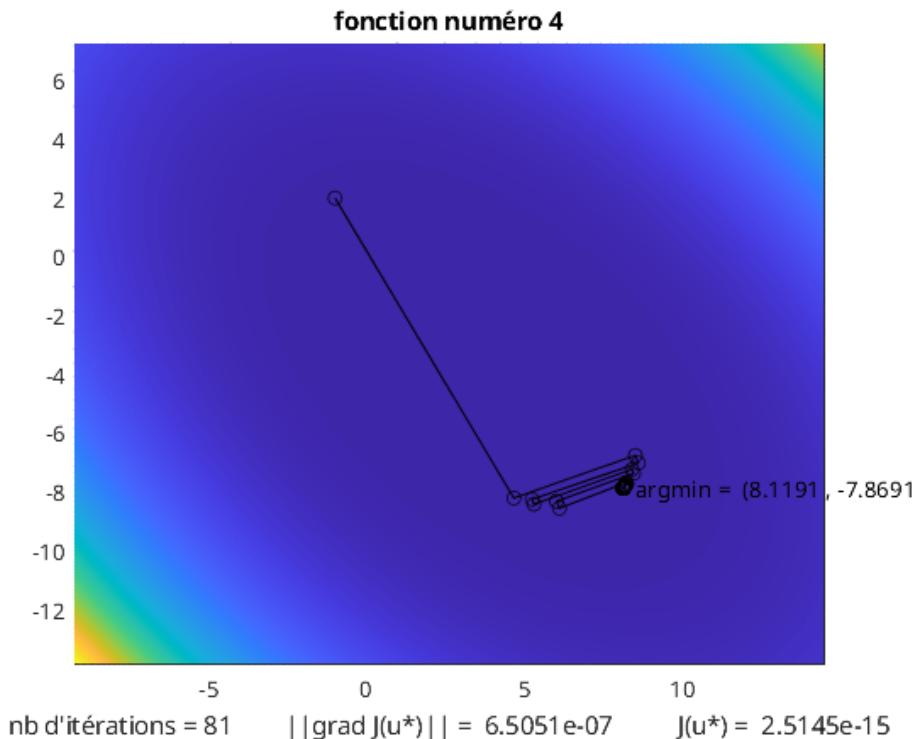


FIGURE 2 – Suite (u_k) et directions de descente pour (P4)

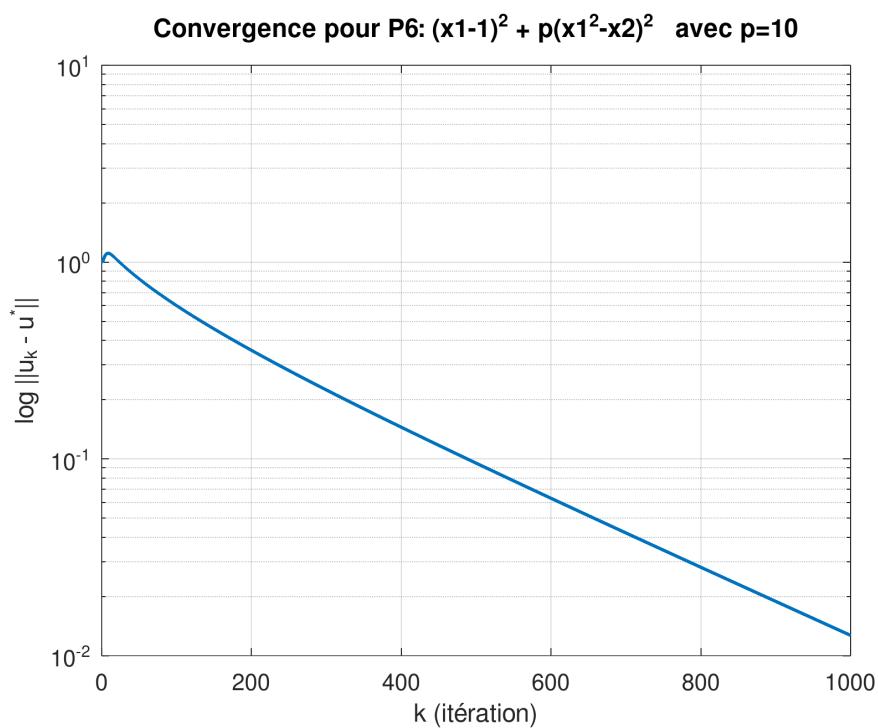
Annexe C : Étude du problème de Rosenbrock (P6)

FIGURE 3 – Convergence logarithmique pour le problème (P6)