SESSION DE JUIN 2012

Epreuve: MATHEMATIQUES

Durée: 3h

COEFFICIENT: 3

SECTION: Sciences de l'Informatique

SESSION PRINCIPALE

Le sujet comporte 3 pages. La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4,5 points)

Soit z un nombre complexe quelconque.

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives 1+3i , z^2 et iz .

- 1) Montrer que B est le milieu du segment [AC] si et seulement si z est solution de l'équation (E): $-2z^2 + iz + 1 + 3i = 0$.
- **2)** a) Calculer $(4 + 3i)^2$.
 - b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble C des nombres complexes.
- 3) On prend $z = -1 \frac{1}{2}i$.
 - a) Calculer iz.
 - b) Sans calculer z², placer les points A, B et C.

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite u définie sur $\,\mathbb{N}\,$ par $\left\{\begin{array}{l} u_0=-\frac{1}{2}\\ u_n=u_{n-1}^2+2u_{n-1}\ ,\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}^*. \end{array}\right.$

- 1) a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 + u_n = (1 + u_{n-1})^2$.
 - b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N};\ u_n>-1.$
- 2) Soit v la suite définie sur $\mathbb N$ par $v_n = \ln{(1+u_n)}$.
 - a) Montrer que v est une suite géométrique de raison 2.
 - b) Exprimer \boldsymbol{v}_n puis \boldsymbol{u}_n en fonction de n.
 - c) Calculer la limite de $\,u_n\,$ quand n tend vers + ∞ .

Exercice 3 (4,5 points)

1) On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer AxB.
- b) En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1} .
- 2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x$ où a, b et c sont des réels et (C) sa courbe représentative dans un repère $(0, \vec{1}, \vec{1})$ du plan. On suppose que:
 - la tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation y = 4x-4,
 - (C) admet un point d'inflexion d'abscisse -1.
 - a) Montrer que a, b et c vérifient le système (S): $\begin{cases} a+b+c=0\\ 3a+2b+c=4\\ -3a+b=0 \end{cases}$
 - b) Résoudre, dans IR³, le système (S) puis en déduire l'expression de f(x).

Exercice 4 (6 points)

Dans la feuille annexe, est représentée une fonction f définie, dérivable sur IR et vérifiant :

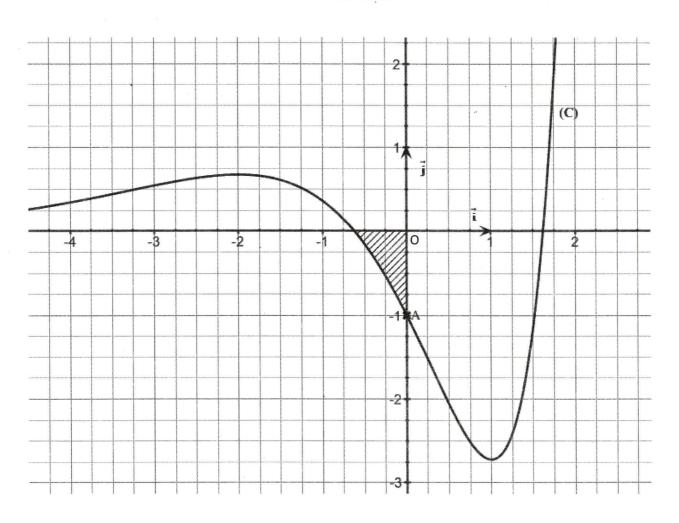
- sa fonction dérivée f' ne s'annule qu'en -2 et 1,
- sa courbe (C) admet la droite d'équation y = 0 comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de +∞,
- la tangente à (C) au point A(0,-1) est la droite T d'équation y = -2x-1.
- 1) Tracer, dans la feuille annexe, la droite T.
- 2) Par lecture graphique:

 - a) Donner f(0) et f'(0). b) Préciser $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 - c) Donner le tableau de variation de f. (On ne précisera pas les valeurs de f(-2) et f(1)).
- 3) On désigne par \mathcal{A} l'aire du domaine hachuré.
 - a) Placer les points B($-\frac{1}{2}$, 0) et C($-\frac{3}{4}$, 0).
 - b) Calculer les aires des triangles OAB et OAC,
 - c) En déduire que $2 \le 8A \le 3$.

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique

Annexe à rendre avec la copie

Annexe



www.devoirat.net 2015