

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GEOTEHNIČKI FAKULTET



Zadaci s vježbi iz kolegija Fizika 1

AKADEMSKA GODINA 2018./2019.

doc. dr. sc. Ivan Hip
dr. sc. Marko Petric
dr. sc. Davor Stanko

18. kolovoza 2021.

1	MATEMATIČKI TEMELJI	1
1.1	Vektori	1
1.2	Mjerne jedinice	2
2	KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE	5
3	DNAMIKA MATERIJALNE TOČKE	13
4	ZAKONI OČUVANJA	21
5	KRUTO TIJELO	25
6	GRAVITACIJA	29
7	RJEŠENJA	33
7.1	MATEMATIČKI TEMELJI	33
7.2	KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE	34

Lista oznaka

Vektorske fizikalne veličine izlistane su samo kao vektori — ukoliko se pojavljuju bez "strelice" radi se o iznosu ili, ako imaju indeks x , y ili z , o projekciji na odgovarajuću os (primjer: v je iznos trenutne brzine \vec{v} , a v_x je projekcija trenutne brzine \vec{v} na os x).

A, B, C, \dots - oznake za točke ili tijela

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ - oznake za vektore

\vec{a} - trenutno ubrzanje

\vec{a}_{cf} - centrifugalno ubrzanje

\vec{a}_{cp} - centripetalno ubrzanje

\vec{a}_r - radijalno ubrzanje

\vec{a}_s - srednje ubrzanje

\vec{a}_τ - tangencijalno ubrzanje

D - domet kosog hica

d - udaljenost između paralelnih osi

E - energija

E_k - kinetička energija

E_p - potencijalna energija

$E_{p,el}$ - elastična potencijalna energija

$E_{p,G}$ - potencijalna energija u polju sile teže

$E_{p,gr}$ - gravitacijska potencijalna energija

E_{uk} - ukupna energija

\vec{F} - sila

\vec{F}_{AB} - sila kojom tijelo A djeluje na tijelo B

\vec{F}_{cf} - centrifugalna sila

\vec{F}_{cp} - centripetalna sila

\vec{F}_{el} - elastična sila

\vec{F}_I - inercijska sila

\vec{F}_R - rezultatna sila

\vec{F}_{tr} - sila trenja

$\vec{F}_{tr,k}$ - sila kinematičkog trenja

$\vec{F}_{tr,s}$ - sila statičkog trenja

$\vec{F}_{tr,s,max}$ - maksimalna sila statičkog trenja

\vec{F}_v - vanjska sila

\vec{F}_\parallel - komponenta sile koja je paralelna s pomakom

\vec{F}_\perp - sila koja djeluje okomito na podlogu

\vec{G} - sila teža

\vec{G}_\parallel - komponenta sile teže koja je paralelna s kosinom

\vec{G}_\perp - komponenta sile teže koja je okomita na kosinu

\vec{g} - jakost gravitacijskog polja

\vec{g} - ubrzanja slobodnog pada, ujedno jakost polja sile teže

\vec{g}_0 - jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje

H - visina valjka

h - visina
 I - moment tromosti
 I_T - moment tromosti oko osi koja prolazi kroz težište
 \vec{i} - jedinični vektor na osi x
 \vec{j} - jedinični vektor na osi y
 K - konstanta elastičnosti opruge
 \vec{k} - jedinični vektor na osi z
 M - ukupna masa sustava
 M_Z - masa Zemlje
 m - masa
 \vec{N} - moment sile
 \hat{n} - vektor normale
 O - ishodište
 P - trenutna snaga
 P_{AB} - srednja snaga
 \vec{p} - količina gibanja
 \vec{p}_{uk} - ukupna količina gibanja u zatvorenom sustavu
 R - polumjer kružnice kod kružnog gibanja
 R_Z - polumjer Zemlje
 \vec{R} - sila reakcije podloge
 r_{\perp} - krak sile
 \vec{r} - vektor položaja
 \vec{r}_0 - početni položaj (položaj u trenutku $t = 0$)
 \vec{r}_{AB} - vektor koji spaja točke A i B (iznos tog vektora je udaljenost između točaka)
 \vec{r}_{cm} - vektor položaja centra mase
 \vec{r}_n - položaj u kojem je opruga nerastegnuta
 $\vec{r}_{S'}$ - vektor položaja ishodišta referentnog sustava S'
 $\Delta\vec{r}$ - vektor pomaka, može ujedno biti i vektor deformacije
 $\Delta\vec{r}_{AB}$ - vektor pomaka od točke A do točke B
 S, S' - oznake za referentne sustave
 s - s koordinata
 s_A - s koordinata točke A
 T - trajanje leta kod kosog hica / period rotacije Zemlje
 \vec{T} - težina / sila napetosti niti
 t - vrijeme
 Δt - vremenski interval
 \vec{u} - "ulazna" brzina (trenutna brzina tijela prije sudara)
 v_1 - prva kozmička brzina
 v_2 - druga kozmička brzina
 \vec{v} - trenutna brzina
 \vec{v}_0 - početna brzina (trenutna brzina u trenutku $t = 0$)
 \vec{v}_s - srednja brzina
 $\vec{v}_{S'}$ - trenutna brzina referentnog sustava S'
 W - rad

W_{AB} - rad sile na dijelu putanje između točaka A i B

W_G - rad sile teže

W_{nk} - rad nekonzervativnih sila

W_R - rad rezultantne sile

W_{tr} - rad sile trenja

x - projekcija vektora položaja na os x (x koordinata)

y - projekcija vektora položaja na os y (y koordinata)

z - projekcija vektora položaja na os z (z koordinata)

α - kut nagiba kosine / trenutno kutno ubrzanje

α_s - srednje kutno ubrzanje

α_k - kut nagiba kosine pri kojem se tijelo niz kosinu giba konstantnom brzinom

α_{max} - kut nagiba kosine za koji se postiže maksimalna sila statičkog trenja

γ - gravitacijska konstanta

ϑ - nagib kosog hica / zemljopisna širina

μ_k - koeficijent kinematičkog trenja

μ_s - koeficijent statičkog trenja

ρ - gustoća / polumjer zakrivljenosti putanje / udaljenost od osi rotacije

$\hat{\tau}$ - jedinični vektor tangencijalan na putanju

φ - kut zakreta kod kružnog gibanja

ω - trenutna kutna brzina

ω_s - srednja kutna brzina

1.1 Vektori

1.1. Nacrtajte slijedeća tri vektora u xy -ravnini: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i izračunajte računski i grafički:

- Nacrtajte sva tri vektora u xy -ravnini.
- Koja dva vektora su okomita? Provjerite!
- Izračunajte računski i grafički $\vec{a} + \vec{b}$.
- Izračunajte računski i grafički $\vec{b} - \vec{c}$.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$
 $\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$
 $\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$
- $\vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$

1.2. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Izračunajte:

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Kut između vektora \vec{a} i \vec{b} .
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$
- $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
- Izračunajte $|\vec{c}|$, gdje je $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ i usporedite s rezultatom c).
- $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$ i usporedite s rezultatom d).

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$
-

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}\right) \Rightarrow \alpha = 73,4^\circ$$

c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \sin(73,4^\circ)$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \approx 13,42$$

d) $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6 - 6) - \vec{j}(3 - (-3)) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{144 + 36} \Rightarrow |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 + 6) - \vec{j}(-3 - 3) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

1.2 Mjerne jedinice

1.3. Pretvorite mjerene jedinice:

a) $0,1746 \text{ rad} = \quad \quad \quad ^\circ$

b) $18,3 \text{ MJ} = \quad \quad \quad J$

c) $0,016 \text{ kN} = \quad \quad \quad mN$

d) $100 \mu g = \quad \quad \quad kg$

e) $8,2 \text{ kmh}^{-1} = \quad \quad \quad ms^{-1}$

f) $36 \text{ dana} = \quad \quad \quad min$

g) $2 \text{ cm}^2 = \quad \quad \quad m^2$

h) $10 \text{ L} = \quad \quad \quad m^3$

a) $0,1746 \text{ rad} = 0,1746 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 10,00^\circ$

b) $0,016 \text{ kN} = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 N = 1,6 \cdot 10^1 N =$
 $= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} N = 1,6 \cdot 10^4 mN$

c) $18,3 \text{ MJ} = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6 J = 1,83 \cdot 10^7 J$

d) $100 \mu g = 10^2 \cdot 10^{-6} g = 10^{-4} g =$
 $= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 g = 10^{-7} kg$

e) $8,2 \text{ kmh}^{-1} = 8,2 \frac{1000m}{3600s} = \frac{82}{36} ms^{-1} = 2,28 ms^{-1}$

f) $36 \text{ dana} = 36 \cdot 24 \text{ h} = 36 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 51840 \text{ min}$

g) $2 \text{ cm}^2 = 2 (\text{cm})^2 = 2 (10^{-2} \text{ m})^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,0002 \text{ m}^2$

h) $10 \text{ L} = 10 \text{ dm}^3 = 10 (\text{dm})^3 = 10 (10^{-1} \text{ m})^3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^{-2} \text{ m}^3 = 0.01 \text{ m}^3$

KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

2.1. Gibanje materijalne točke (MT) opisano je vektorom položaja

$$\vec{r}(t) = (v_0 t) \vec{j} + (z_0 - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k}.$$

U trenutku $t = 0$ s MT se nalazi na visini $z_0 = 80$ m, a iznos početne brzine je $v_0 = 30$ ms^{-1} . Iznos ubrzanja slobodnog pada je $g = 9,81$ ms^{-2} , ali radi lakšeg računanja može se uzeti približna vrijednost $g = 10$ ms^{-2} .

- Izračunajte položaj MT svakih pola sekunde i skicirajte putanju u yz -ravnini.
- Odredite vektor trenutne brzine $\vec{v}(t)$.
- Izračunajte i skicirajte trenutnu brzinu u trenucima $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s i $t_4 = 4$ s.
- Odredite trenutno ubrzanje $\vec{a}(t)$ i skicirajte ga u nekoliko točaka putanje.

Uvrstimo zadane vrijednosti u $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (30 \text{ms}^{-1} t) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} t^2) \vec{k}$$

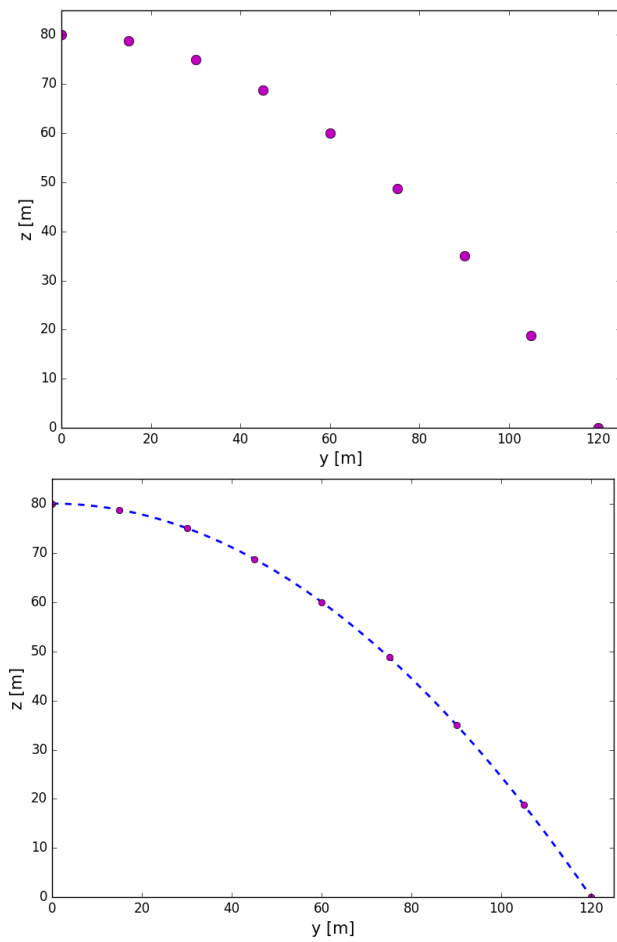
- $\vec{r}(t = 0, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (0 \text{s})^2) \vec{k} = 0 \text{m} \vec{j} + 80 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 0, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 0,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (0,5 \text{s})^2) \vec{k} = 15 \text{m} \vec{j} + 78,75 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 1, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 1,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (1,0 \text{s})^2) \vec{k} = 30 \text{m} \vec{j} + 75 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 1, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 1,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (1,5 \text{s})^2) \vec{k} = 45 \text{m} \vec{j} + 68,75 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 2, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 2,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (2,0 \text{s})^2) \vec{k} = 60 \text{m} \vec{j} + 60 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 2, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 2,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (2,5 \text{s})^2) \vec{k} = 75 \text{m} \vec{j} + 48,75 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 3, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 3,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (3,0 \text{s})^2) \vec{k} = 90 \text{m} \vec{j} + 35 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 3, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 3,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (3,5 \text{s})^2) \vec{k} = 105 \text{m} \vec{j} + 18,75 \text{m} \vec{k}$
 $\vec{r}(t = 4, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 4,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (4,0 \text{s})^2) \vec{k} = 120 \text{m} \vec{j} + 0 \text{m} \vec{k}$

b)

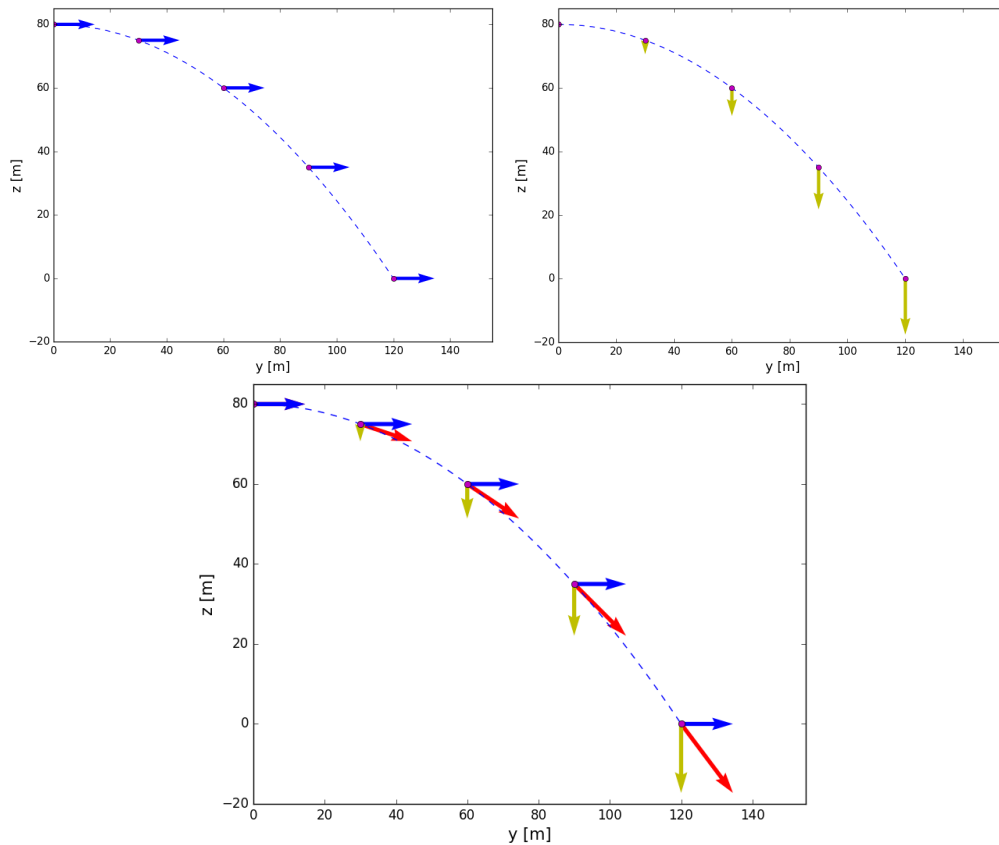
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left(z_0 \vec{k} + v_0 t \vec{j} - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k} \right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{j} - g t \vec{k}$$



Slika 2.1: (*lijevo*) Položaj MT za svakih 0,5 s. (*desno*) Putanja MT do udarca o tlo.



Slika 2.2: (gore-lijevo) Komponenta brzine u y -smjeru. (gore-desno) Komponenta brzine u z -smjeru. (dolje) Brzina tijela s komponentama.

c) $\vec{v}(t) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2} t \vec{k}$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2} 1s \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 2s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 20 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 3s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 30 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 4s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 40 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-10 \text{ ms}^{-1})^2} = 31,623 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-20 \text{ ms}^{-1})^2} = 36,055 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-30 \text{ ms}^{-1})^2} = 42,43 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-40 \text{ ms}^{-1})^2} = 50,0 \text{ ms}^{-1}$$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (v_0 \vec{j} - gt \vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = -g \vec{k} = -9,81 \text{ ms}^{-2} \vec{k} \approx -10 \text{ ms}^{-2} \vec{k}$$

2.2. Materijalna točka (MT) giba se u prostoru tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu u skladu s relacijom

$$\vec{r}(t) = 6t^4 \vec{i} + 4t^2 \vec{j} + 3t \vec{k} \text{ [m]}.$$

Izračunajte:

- (a) Vektor položaja MT u $t = 0,5$ s.
 (b) Trenutnu brzinu i iznos trenutne brzine u $t = 0,5$ s.
 (c) Trenutno ubrzanje i iznos trenutnog ubrzanja u $t = 0,5$ s.
-

- a) U relaciju $\vec{r}(t)$ potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4 \vec{i} + 4 \cdot 0,5^2 \vec{j} + 3 \cdot 0,5 \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375 \vec{i} + 1 \vec{j} + 1,5 \vec{k} [m].$$

- b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je derivirati po vremenu $\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (6t^4 \vec{i} + 4t^2 \vec{j} + 3t \vec{k})$$

$$\vec{v}(t) = 24t^3 \vec{i} + 8t \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3 \vec{i} + 8 \cdot 0,5 \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 3 \vec{i} + 4 \vec{j} + 3 \vec{k} [ms]$$

$$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83 [ms]$$

- c) $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (24t^3 \vec{i} + 8t \vec{j} + 3 \vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = 72t^2 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 18 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7 [ms^{-2}].$$

2.3. Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u xy -ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 4t \vec{i} + 3t^2 \vec{j} [ms^{-1}].$$

U trenutku $t = 0$ s vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0s) = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} [m].$$

Izračunajte vektor položaja $\vec{r}(t)$ materijalne točke $t = 1,2$ s.

Rješavamo inverzni problem i tražimo $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + \int_0^t (4\tau \vec{i} + 3\tau^2 \vec{j}) d\tau$$

Trebamo riješiti integral $I = \int_0^t (4\tau \vec{i} + 3\tau^2 \vec{j}) d\tau$.

$$I = \int_0^t 4\tau \vec{i} d\tau + \int_0^t 3\tau^2 \vec{j} d\tau = 4 \vec{i} \int_0^t \tau d\tau + 3 \vec{j} \int_0^t \tau^2 d\tau =$$

$$= 4 \frac{t^2}{2} \vec{i} + 3 \frac{t^3}{3} \vec{j} = 2t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}$$

Vratimo se u $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + 2t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} = 2(1 + t^2) \vec{i} + (3 + t^3) \vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2 \text{ s}) = 2(1 + 1,2^2) \vec{i} + (3 + 1,2^3) \vec{j} = 4,88 \vec{i} + 4,728 \vec{j} [m]$$

3.1. Tijelo je bačeno koso prema gore pod kutom od 30° prema horizontali početnom brzinom iznosa 20 ms^{-1} s visine 10 m iznad tla. Izračunajte (zanemarite otpor zraka):

- Vrijeme udarca tijela o tlo.
- Domet tijela.
- Kolika je maksimalna visina koju tijelo postigne tijekom leta?

a) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$

Početni uvjeti: $\vec{r}_0 = z_0 \vec{k}$, $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{j} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$ $\vec{g} = -g \vec{k}$

$$\vec{r}(t) = z_0 \vec{k} + v_0 \cos \alpha \vec{j} t + v_0 \sin \alpha \vec{k} t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos \alpha \cdot t) \vec{j} + (z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = y \vec{j} + z \vec{k}, \text{ gdje je } y = v_0 \cos \alpha \cdot t \text{ i } z = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Vrijeme udarca tijela o tlo $t = t_u$ kada je $z = 0 \Rightarrow 0 = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2g z_0}}{g}.$$

Za navedene podatke rješenja su $t_1 = 2,77 \text{ s}$ i $t_2 = -0,74 \text{ s}$, fizikalno rješenje je $t_1 = 2,77 \text{ s}$.

- b) Kako bismo dobili domet, $D = v_y t$ tijela moramo znati komponentu brzine u y -smjeru i vrijeme udarca tijela o tlo. Vrijeme znamo iz prvog djela zadatka, a komponentu brzine možemo dobiti

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left((v_0 \cos \alpha \cdot t) \vec{j} + (z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k} \right).$$

Dobivamo komponente brzine su: $v_y = v_0 \cos \alpha$ i $v_z = v_0 \sin \alpha - gt$.

$$D = y(t = t_1) = v_0 \cos \alpha \cdot t_1$$

$$D = y(t = 2,77 \text{ s}) = 20 \text{ ms}^{-1} \cos 30^\circ \cdot 2,77 \text{ s} = 47,98 \text{ m}$$

- c) Potražimo trenutak u kojem je komponenta brzine u z -smjeru $v_z = 0$ jer je tada tijelo u na maksimalnoj visini $z = z_{max}$.

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos \alpha \vec{j} + (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{k}$$

komponente brzina su: $v_y(t) = v_0 \cos \alpha$ i $v_z(t) = v_0 \sin \alpha - gt$. Nakon izjednačivanja komponente v_z s nulom izrazimo

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Potražimo maksimalnu visinu

$$z_{max} = z(t = t_H) = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t_H - \frac{1}{2} g t_H^2$$

$$z_{max} = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2$$

$$z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 15,1 \text{ m}$$

3.2. Položaj materijalne točke koja se giba po kružnici polumjera $R = 2 \text{ m}$ opisuje funkcija

$$s(t) = s_0 + b(1 - e^{-ct}) \quad [m]$$

pri čemu su $s_0 = 2 \text{ m}$, $b = 8 \text{ m}$ i $c = 0,2 \text{ s}^{-1}$.

- Izračunajte s koordinatu i skicirajte položaj materijalne točke na kružnici u trenucima $t = 0, 3, 6, 9, 30 \text{ s}$.
- Gdje će se materijalna točka zaustaviti kad $t \rightarrow \infty$?

c) Izračunajte iznos i skicirajte vektor brzine u trenucima $t = 3 \text{ s}$ i $t = 6 \text{ s}$.

a) Kako bismo izračunali s koordinatu uvrštavamo zadane trenutke u funkciju

$$s(t) = s_0 + b(1 - e^{-ct}).$$

$$s(t = 0 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 0s}) = 2 \text{ m}$$

$$s(t = 3 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 3s}) \approx 5,6095 \text{ m}$$

$$s(t = 6 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 6s}) \approx 7,5904 \text{ m}$$

$$s(t = 9 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 9s}) \approx 8,6776 \text{ m}$$

$$s(t = 30 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 30s}) \approx 9,9802 \text{ m}$$

b) $s(t) = ?$ kada $t \rightarrow \infty$

$$s(t \rightarrow \infty) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot \infty})$$

c)

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

$$|\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(s_0 + b(1 - e^{-ct})) = bce^{-ct}$$

$$|\vec{v}(t = 3 \text{ s})| = 8 \text{ m} \cdot 0,2^{-1}e^{-0,6} \approx 0,8781ms^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 6 \text{ s})| = 8 \text{ m} \cdot 0,2^{-1}e^{-1,2} \approx 0,4819ms^{-1}$$

3.3. Za gibanje opisano u prethodnom zadatku izračunajte tangencijalno i radijalno ubrzanje te iznos ukupnog ubrzanja $|\vec{a}(t)|$ materijalne točke u trenucima $t = 3 \text{ s}$ i $t = 6 \text{ s}$.

Kako bismo mogli izračunati iznos ubrzanja moramo prvo izračunati tangencijalno \vec{a}_τ i radijalno \vec{a}_r ubrzanje.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(s_0 + b(1 - e^{-ct})) = bce^{-ct}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(bce^{-ct}) = -bc^2e^{-ct}$$

$$\vec{a}_\tau = -bc^2e^{-ct}\vec{\tau}$$

Ostaje za izračunati radijalnu komponentu ubrzanja.

$$\vec{a}_r = \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{n}$$

$$\vec{a}_r = \frac{b^2c^2e^{-2ct}}{R} \vec{n}$$

Ukupno ubrzanje je:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_r = -bc^2e^{-ct}\vec{\tau} + \frac{b^2c^2e^{-2ct}}{R}\vec{n}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-bc^2e^{-ct})^2 + \left(\frac{b^2c^2e^{-2ct}}{R} \right)^2} = \sqrt{b^2c^4e^{-2ct} \left(1 + \frac{b^2e^{-2ct}}{R^2} \right)}$$

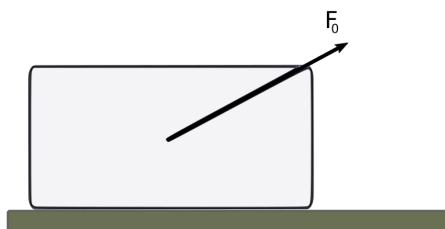
$$|\vec{a}(t)| = bc^2 e^{-ct} \sqrt{1 + \frac{b^2 e^{-2ct}}{R^2}}$$

$$|\vec{a}(t = 3 \text{ s})| = 8m \cdot (0, 2s^{-1})^2 \cdot e^{-0,2s^{-1} \cdot 3s} \sqrt{1 + \frac{(8m)^2 e^{-2 \cdot 0,2s^{-1} \cdot 3s}}{(2m)^2}} = 0,4236ms^{-2}$$

$$|\vec{a}(t = 6 \text{ s})| = 8m \cdot (0, 2s^{-1})^2 \cdot e^{-0,2s^{-1} \cdot 6s} \sqrt{1 + \frac{(8m)^2 e^{-2 \cdot 0,2s^{-1} \cdot 6s}}{(2m)^2}} = 0,1509ms^{-2}$$

DNAMIKA MATERIJALNE TOČKE

4.1. Vanjska sila iznosa $\vec{F}_0 = 18 \text{ N}$ djeluje pod kutom od $\alpha = 28^\circ$ prema horizontali na blok mase $m = 3 \text{ kg}$. Izračunajte iznos ubrzanja kada je kinetičko trenje između bloka i podloge $\mu_k = 0,4$.



$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Radimo projekcije na y i z os

$$\mathbf{y:} \quad \vec{F}_0 \cdot \vec{j} + \vec{G} \cdot \vec{j} + \vec{R} \cdot \vec{j} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{j} = m\vec{a} \cdot \vec{j} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{j}| \cos \alpha + |\vec{G}||\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} + |\vec{R}||\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} + |\vec{F}_{tr}||\vec{j}| \cos \pi = m|\vec{a}||\vec{j}| \cos 0$$

$$F_0 \cos \alpha + 0 + 0 - F_{tr} = ma \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z:} \quad \vec{F}_0 \cdot \vec{k} + \vec{G} \cdot \vec{k} + \vec{R} \cdot \vec{k} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{k} = m\vec{a} \cdot \vec{k} \quad / \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{k}| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + |\vec{G}||\vec{k}| \cos \pi + |\vec{R}||\vec{k}| \cos 0 + |\vec{F}_{tr}||\vec{k}| \cos \frac{\pi}{2} = m|\vec{a}||\vec{k}| \cos \frac{\pi}{2}$$

$$F_0 \sin \alpha - G + R = 0 \quad (3.2)$$

Iz gornjeg izraza možemo izraziti silu reakcije podloge $R = mg - F_0 \sin \alpha$, gdje smo za silu težu (G) zapisali kao masu (m) puta ubrzanje sile teže (g).

Sila trenja koja nam se javlja u izrazu 3.1 možemo zapisati kao umnožak faktora kinetičkoga trenja i sili pritiska na podlogu, a sila pritiska na podlogu je jednaka težini tijela koja je po iznosu jednaka sili reakcije podloge tako pišemo: $F_{tr} = \mu_k F_\perp = \mu_k T = \mu_k R$. Silu reakcije podloge možemo zamjeniti izrazom koji smo dobili iz jednadžbe 3.2 i dobivamo konačni izraz:

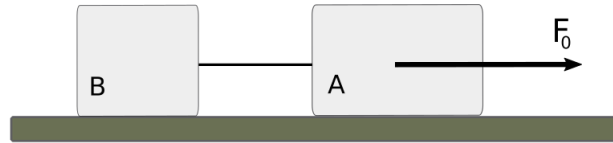
$$F_0 \cos \alpha - \mu_k (mg - F_0 \sin \alpha) = ma$$

$$a = \frac{F_0}{m} (\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha) - \mu_k g$$

$$a = \frac{18N}{3kg} (\cos 28^\circ + 0,4 \sin 28^\circ) - 0,4 \cdot 9,81ms^{-2} = 2,5 ms^{-2}$$

4.2. Vanjska sila iznosa $F_0 = 50 N$ djeluje na blok A mase $m_A = 5 kg$ koji vuče blok B mase $m_B = 3 kg$ (vidjeti skicu).

- Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga ako pretpostavimo da nema trenja.
- Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge $\mu_k = 0,3$.



Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A $T = |\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}|$.

- Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\text{blok B: } \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B = m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\text{blok A: } \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok B na os y i z

$$\text{B,z: } 0 - G_B + R_B = 0 \Rightarrow R_B = G_B$$

$$\text{B,y: } T_{AB} + 0 + 0 = m_B a \Rightarrow T = m_B a$$

Isto radimo za blok A:

$$\text{A,z: } 0 + 0 + G_A + R_A = 0 \Rightarrow R_A = G_A$$

$$\text{A,y: } F_0 - T_{BA} + 0 + 0 = m_A a \Rightarrow F_0 - T = m_A a$$

U posljednji izraz možemo zamjeniti napetost niti T sa izrazom iz **B,y**

$$F_0 - m_B a = m_A a$$

$$m_A a + m_B a = F_0$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} = \frac{50N}{5kg + 3kg} = 6,25 ms^{-2}$$

$$T = m_B a = 3kg \cdot 6,25ms^{-2} = 18,75 N$$

- Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\text{blok A: } \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\text{blok B: } \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} = m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok A na os y i z

$$\text{A,y: } F_0 - T_{BA} + 0 + 0 - F_{tr,A} = m_A a \Rightarrow F_0 - T - \mu_k R_A = m_A a$$

$$\text{A,z: } 0 + 0 + G_A + R_A + 0 = 0 \Rightarrow R_A = G_A$$

Dobivamo $F_0 - T - \mu_k G_A = m_A a$. Isto radimo za blok B:

$$\mathbf{B}, \mathbf{y}: T_{AB} + 0 + 0 - F_{tr,B} = m_B a \Rightarrow T - \mu_k R_B = m_B a$$

$$\mathbf{B}, \mathbf{z}: 0 - G_B + R_B = 0 \Rightarrow R_B = G_B$$

Dobivamo $T = m_B a + \mu_k G_B$.

$$F_0 - m_B a - \mu_k m_B g - \mu_k m_A g = m_A a$$

Posložimo i izrazimo ubrzanje

$$F_0 - \mu_k(m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g$$

$$a = \frac{50N}{5kg + 3kg} - 0,3 \cdot 9,81ms^{-2} = 3,307 ms^{-2}$$

Još moramo izračunati napetost niti

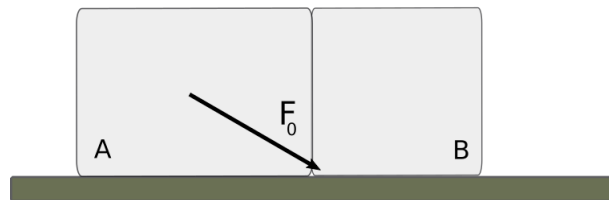
$$T = m_B(a + \mu_k g)$$

Ubrzanje možemo zamjeniti s dobivenim izrazom

$$T = m_B \left(\frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g + \mu_k g \right) = \frac{m_B F_0}{m_A + m_B}$$

$$T = 18,75 N$$

4.3. Vanjska sila iznosa $F_0 = 42 N$ djeluje pod kutem od $\vartheta = 30^\circ$ prema horizontali na blok A mase $m_A = 5 kg$ koji gura blok B mase $m_B = 2 kg$ (vidjeti skicu). Izračunajte iznos ubrzanja blokova A i B kada je kinetičko trenje između blokova i podloge $\mu_k = 0,3$.



Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}|$.

Zapisujemo sve sile na tijelo A

$$\mathbf{A}: \vec{F}_0 + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{F}_{BA} = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os z i y .

$$\mathbf{A}, \mathbf{z}: F_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) - m_A g + R_A + 0 + 0 = 0$$

Funkciju $\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta)$ možemo raspisati preko funkcije zbroja

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos \vartheta - \sin\frac{\pi}{2} \sin \vartheta = -\sin \vartheta$$

$$-F_0 \sin \vartheta - m_A g + R_A = 0 \Rightarrow R_A = m_A g + F_0 \sin \vartheta$$

Što ćemo ursti u izraz za y os.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}, \mathbf{y}: \quad & F_0 \cos \vartheta + 0 + 0 - F_{tr,A} - F_{BA} = m_A a \\ & F_0 \cos \vartheta - \mu_k R_A - F_{BA} = m_A a \\ & F_0 \cos \vartheta - \mu_k (m_A g + F_0 \sin \vartheta) - F_{BA} = m_A a\end{aligned}\quad (3.3)$$

Zapisujemo sve sile na tijelo B

$$\mathbf{B}: \quad \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{F}_{AB} = m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os z i y .

$$\mathbf{B}, \mathbf{z}: \quad -m_B g + R_B + 0 + 0 = 0 \Rightarrow R_B = m_B g$$

$$\mathbf{B}, \mathbf{y}: \quad 0 + 0 - F_{tr,B} + F_{AB} = m_B a \Rightarrow F_{AB} = m_B a + \mu_k R_B$$

Spajanjem posljednja dva izraza dobivamo:

$$F_{AB} = m_B a + \mu_k m_B g. \quad (3.4)$$

U izraz 3.3 umjesto F_{BA} uvrstimo 3.4 dobivamo:

$$\begin{aligned}F_0 \cos \vartheta - \mu_k (m_A g + F_0 \sin \vartheta) - m_B a - \mu_k m_B g &= m_A a. \\ a(m_A + m_B) &= F_0 \cos \vartheta - \mu_k [(m_A + m_B)g + F_0 \sin \vartheta] \\ a &= \frac{F_0 \cos \vartheta - \mu_k [(m_A + m_B)g + F_0 \sin \vartheta]}{m_A + m_B} \\ a &= \frac{42N \cos 30^\circ - 0,3 [(5kg + 2kg)9,81ms^{-2} + 42N \sin 30^\circ]}{5kg + 2kg} = 1,353 \text{ ms}^{-2}\end{aligned}$$

5.1. Tijelo klizi po kosini nagiba $\alpha = 35^\circ$. Koeficijent kinetičkog trenja između tijela i kosine je $\mu_k = 0,58$. Izračunajte iznos ubrzanja tijela.

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Silu teže možemo rastaviti na dvije komponente okomito na kosinu $\vec{G}_\perp = G \cos \alpha (-\vec{k})$ i paralelno $\vec{G}_\parallel = G \sin \alpha \vec{j}$

$$G \sin \alpha \vec{j} - G \cos \alpha \vec{k} + R \vec{k} - F_{tr} \vec{j} = m a \vec{j} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekcije na y i z os

$$G \sin \alpha - 0 + 0 - F_{tr} = m a \Rightarrow G \sin \alpha - \mu_k R = m a$$

$$0 - G \cos \alpha + R - 0 = 0 \Rightarrow R = G \cos \alpha$$

$$G \sin \alpha - \mu_k G \cos \alpha = m a$$

$$mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha = m a$$

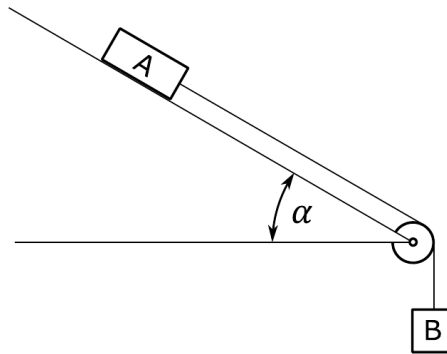
$$a = g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha)$$

$$a = 9,81ms^{-2}(\sin 35^\circ - 0,58 \cos 35^\circ) = 0,966 \text{ ms}^{-2}$$

5.2. Na slici dolje je sustav od dva utega mase $m_A = 10 \text{ kg}$ i $m_B = 5 \text{ kg}$. Uteg B povezan je tankom

nerastezljivom niti s utegom A. Kosina na kojoj se nalazi uteg A nagnuta je pod kutom $\alpha = 30^\circ$, a koeficijent kinetičkog trenja između kosine i utega A iznosi $\mu_k = 0,2$.

- Skicirajte problem i označite sve sile i smjer gibanja (vektor ubrzanja) cijelog sustava.
- Izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.
- Izračunajte iznos sile napetosti niti.



- Na tijelo A djeluju sile teže (\vec{G}_A) prema dolje koju rastavljamo na dvije komponente: silu okomitu na kosinu ($\vec{G}_{A,\perp}$) i silu usporednu s kosinom prema dolje ($\vec{G}_{A,\parallel}$), zatim djeluje sila trenja ($\vec{F}_{tr,A}$), sila reakcije podloge \vec{R}_A i sila kojom uteg B vuče uteg A (sila napetosti niti \vec{T}_{BA}). Na uteg B djeluju samo dvije sile, sila teža prema dolje (\vec{G}_B) i napetost niti prema gore (\vec{T}_{AB}).

Sila napetosti niti kojom djeluje uteg A na uteg B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

- Za uteg B možemo pisati

$$\begin{aligned} \vec{G}_B + \vec{T}_{AB} &= m_B \vec{a}, \\ G_B - T &= m_B a \Rightarrow T = m_B(g - a). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na uteg A

$$\vec{G}_{A,\parallel} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A \vec{a}.$$

Radimo projekciju sila na smjer gibanja

$$G_{A,\parallel} - F_{tr,A} + T = m_A a$$

$$m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha + T = m_A a$$

Napetost niti možemo zamjeniti izrazom 3.5 i dobivamo

$$m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha + m_B g - m_B a = m_A a.$$

Nakom sređivanja dobivamo konačni izraz

$$(m_A \sin \alpha - \mu_k m_A \cos \alpha + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_A(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha) + m_B}{m_A + m_B} g.$$

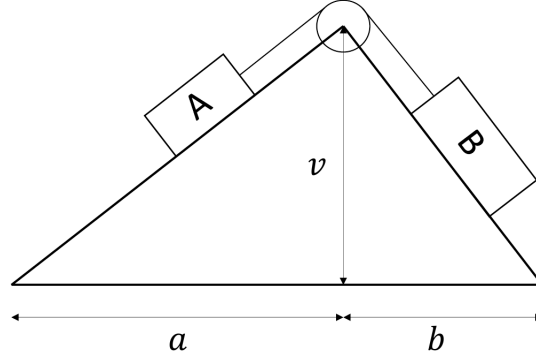
Uvrstimo zadane vrijednosti

$$a = \frac{10 \text{ kg}(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ)}{10 \text{ kg} + 5 \text{ kg}} 9,81 \text{ m s}^{-2} = 5,41 \text{ m s}^{-2}$$

c) Kako bismo dobili iznos sile napetosti niti uvrštavamo dobivenu akceleraciju u izrac 3.5

$$T = 5 \text{ kg}(9,81 \text{ ms}^{-2} - 5,41 \text{ ms}^{-2}) = 22 \text{ N}$$

5.3. Koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge je $\mu_k = 0,2$, a dimenzije i mase su: $a = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $v = 4 \text{ m}$, $m_A = 10 \text{ kg}$ i $m_B = 15 \text{ kg}$. Koliki je iznos ubrzanja blokova prikazanih na slici?



Sila napetosti niti kojom djeluje blok A na blok B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

Kako bismo mogli rastaviti sile moramo izračunati kuteve α i β

$$\tan \alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{4\text{m}}{5\text{m}} = 38,66^\circ,$$

$$\tan \beta = \frac{v}{b} \Rightarrow \beta = \arctan \frac{4\text{m}}{3\text{m}} = 53,13^\circ.$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na blok A i množimo skalarom s \vec{j}

$$\vec{G}_{A,\parallel} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{j}$$

Dobivamo sile u usporedne s lijevim nagibom kosine

$$-m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha + T = m_A a.$$

Izrazimo napetosti niti

$$T = m_A g \sin \alpha + \mu_k m_A g \cos \alpha + m_A a. \quad (3.6)$$

Isto radimo za blok B

$$\begin{aligned} \vec{G}_{B,\parallel} + \vec{G}_{B,\perp} + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{T}_{AB} &= m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} \\ m_B g \sin \beta - \mu_k m_B g \cos \beta - T &= m_B a \end{aligned} \quad (3.7)$$

Uvrštavamo izraz 3.6 za napetost niti u izraz 3.7

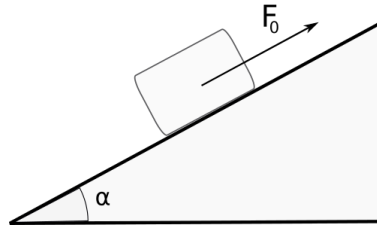
$$m_B g \sin \beta - \mu_k m_B g \cos \beta - m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha - m_A a = m_B a.$$

Sređujemo izraze:

$$\begin{aligned} g [m_B (\sin \beta - \mu_k \cos \beta) - m_A (\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)] &= (m_A + m_B) a \\ a &= \frac{m_B (\sin \beta - \mu_k \cos \beta) - m_A (\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)}{m_A + m_B} g \\ a &= \frac{15\text{kg}(\sin 53,13^\circ - 0,2 \cos 53,13^\circ) - 10\text{kg}(\sin 38,66^\circ + 0,2 \cos 38,66^\circ)}{10\text{kg} + 15\text{kg}} 9,81 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

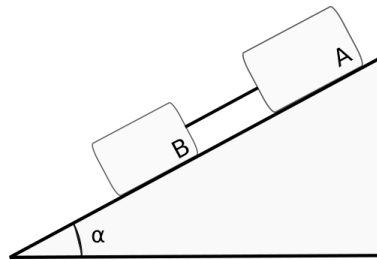
$$a = 0,94 \text{ m s}^{-2}$$

5.4. Na blok mase $m = 2 \text{ kg}$ djelujemo silom $F = 25,0 \text{ N}$ usporedno s nagibom kosine (kao na slici). Ako je kosina nagiba $\alpha = 39^\circ$, a koeficijent kinetičkog trenja između bloka i podloge $\mu_k = 0,25$ koliko je ubrzanje bloka?



$$a = 4,420 \text{ m s}^{-2}$$

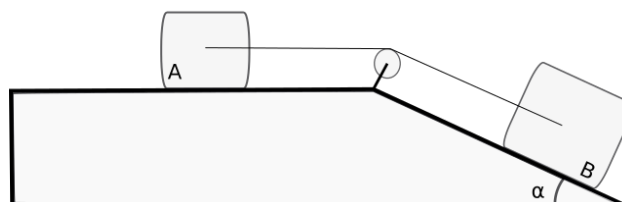
5.5. Dva bloka mase $m_A = 10 \text{ kg}$ i $m_B = 8 \text{ kg}$ spojena su nerastezljivim užetom i položena na kosinu nagiba $\alpha = 33^\circ$ kao na slici. Ako je koeficijent kinetičkog trenja između bloka A i kosine je $\mu_{kA} = 0,4$, a između bloka B i kosine je $\mu_{kB} = 0,2$ izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.



$$a = 2,783 \text{ m s}^{-2}$$

5.6. Blok $m_A = 7 \text{ kg}$ položen je na ravni dio klina, a blok $m_B = 15 \text{ kg}$ položen je na kosi dio klina nagiba $\alpha = 37^\circ$.

- Izračunajte iznos akceleracije sustava ako pretpostavimo da nema trenja.
- Izračunajte iznos akceleracije sustava kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge $\mu_k = 0,1$.



a) $a = 4,025 \text{ ms}^{-2}$

b) $a = 3,803 \text{ ms}^{-2}$

ZAKONI OČUVANJA

6.1. Materijalna točka pomaknuta je u xy -ravnini iz točke A čiji je vektor položaja $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j}$ [m] u točku B kojoj je vektor položaja $\vec{r}_B = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ [m]. Tijekom pomaka na nju je djelovala stalna sila $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ [N]. Izračunajte rad sile \vec{F} .

$$W_{F,AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = konst. \Rightarrow W_{F,AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta\vec{r} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 5\vec{j}$$

$$W_{F,AB} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (\vec{i} - 5\vec{j}) = -17 \text{ J}$$

6.2. Tijelo počinje klizati iz stanja mirovanja na visini od 0,8 metara na vrhu kosine. Kolika je brzina tijela na dnu kosine ako je nagib kosine 30° , koeficijent kinetičkog trenja 0,43?

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,G}(B) = E_k(A) + E_{p,G}(A) + W_{AB}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$

Ostalo je za izračunati rad sile trenja

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}_{tr}| |\Delta\vec{r}| \cos \angle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r}) = F_{tr} \Delta r \cos(\pi)$$

Pomak tijela Δr možemo izraziti iz visine kosine i kuta $\Delta r = H / \sin \vartheta$. Potrebno je još zapisati silu trenja koja ovisi o kinematičkom koeficijentu trenja i sili kojom tijelo pritišće podlogu $F_{tr} = \mu_k mg \cos \vartheta$.

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = -\mu_k mg \cos \vartheta \frac{H}{\sin \vartheta} = -\mu_k mg H \cot \vartheta$$

Vraćamo se u zakon očuvanja energije

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH - \mu_k mg H \cot \vartheta$$

$$v = \sqrt{2gH(1 - \mu_k \cot \vartheta)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,8 \text{ m} (1 - 0,43 \cdot \cot 30^\circ)} = 2,0 \text{ ms}^{-1}$$

6.3. Konstanta opruge koja se koristi za ispucavanje kuglice flipera mase 80 grama je 138 Nm^{-1} . Koliko centrimetara treba povući ručicu flipera (tj. stisnuti oprugu) da bi se kuglica ispalila brzinom iznosa 5 ms^{-1} ?

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,el}(B) = E_k(A) + E_{p,el}(A) + W_{AB}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2 + 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2$$

$$\Delta x = v\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\Delta x = 5 \text{ ms}^{-1} \sqrt{\frac{0,08 \text{ kg}}{138 \text{ Nm}^{-1}}} = 0,12 \text{ m}$$

6.4. S vrha strme ceste dugačke 100 m, visinske razlike 20 m, spuštaju se saonice mase 5 kg. Izračunajte iznos sile trenja koja se javlja pri spuštanju niz brijeg ako saonice na dnu brijega imaju brzinu 16 ms^{-1} . Početna brzina saonica je nula.

$$F_{tr} = 3,41 \text{ N}$$

6.5. Iz stanja mirovanja na visini $h = 0,8 \text{ m}$ na vrhu kosine tijelo počinje kliziti niz kosinu te kad dođe do dna kosine nastavi još četiri metra kliziti horizontalno prije nego se zaustavi. Koeficijent kinetičkog trenja μ_k između tijela i podloge je isti kad tijelo klizi niz kosinu i horizontalno. Koliki je μ_k ako je nagib kosine $\vartheta = 20^\circ$?

$$\mu_k = 0,129$$

6.6. Materijalna točka mase $m = 0,5 \text{ kg}$ giba se u xy -ravnini iz točke A čiji je vektor položaja $\vec{r}_A = 11\vec{i} - 9\vec{j} \text{ [m]}$ u točku B kojoj je vektor položaja $\vec{r}_B = -7\vec{i} + 12\vec{j} \text{ [m]}$. Na putanji do točke B na nju djeluje rezultantna sila $\vec{F}_R = -3\vec{i} + \vec{j} \text{ [N]}$. Izračunajte kolika će biti kinetička energija u točki B ako je brzina u točki A bila $\vec{v}_A = 3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ [ms}^{-1}\text{]}$?

$$E_k(B) = 81,25 \text{ J}$$

6.7. Dječak s mosta visokog 5 m iznad rijeke baci loptu vertikalno u zrak brzinom 11 kmh^{-1} . Na kojoj visini iznad rijeke bi potencijalna energija bila jednaka kinetičkoj, kad bi mogli zanemariti otpor zraka?

$$h = 2,738 \text{ m}$$

6.8. Tijelo mase 10 g nalazi se na vertikalno postavljenoj opruzi u stanju ravnoteže. Konstanta opruge je 100 Nm^{-1} pa se deformacija opruge zbog težine tijela (oko 1 mm) može slobodno zanemariti. Vanjska sila oprugu stisne za 5 cm. Taj novi položaj tijela uzima se kao početna visina $h_1 = 0$. Do koje maksimalne visine h_2 ovako stisnuta opruga može izbaciti tijelo? Otpor zraka se zanemaruje.

$$h_2 = 1,274$$

7.1. Automobil mase $m = 2000 \text{ kg}$ giba se uz kosinu nagiba $\vartheta = 15^\circ$ stalnom brzinom iznosa 60 kmh^{-1} . Ukupna sila otpora (trenje kotrljanja i otpor zraka) iznosi $|\vec{F}_{otp}| = 2000 \text{ N}$, a visina kosine je $h = 60 \text{ m}$. Izračunajte:

- a) pogonsku silu automobila;
- b) rad pogonske sile od početka do kraja kosine;
- c) snagu automobila.

- a) Ako je brzina stalna tada je resultantna sila na automobil jednaka je nuli; $\vec{v} = \text{konstanta} \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{0}$.

$$\vec{F} + \vec{F}_{otp} + \vec{G}_{||} + \vec{G}_{\perp} + \vec{R} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$F - F_{otp} - mg \sin \vartheta = 0$$

$$F = F_{otp} + mg \sin \vartheta$$

$$F = 2000 \text{ N} + 2000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \sin 15^\circ = 7078,03 \text{ N}$$

- b)

$$W = \vec{F} \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos 0^\circ$$

Pomak automobila možemo izraziti preko visine kosine i kuta

$$W = F \frac{h}{\sin \vartheta} = 7078,03 \frac{60 \text{ m}}{\sin 15^\circ} = 1640844 \text{ J}$$

- c)

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$$

Iznos brzine automobila je $v = 60 \text{ kmh}^{-1} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16,67 \text{ ms}^{-1}$

$$P = 7078,03 \text{ N} \cdot 16,67 \text{ ms}^{-1} = 117967 \text{ W}$$

7.2. Ledolomac mase 6000 tona s ugašenim motorom nalijeće brzinom 30 kmh^{-1} na santu leda koja se giba brzinom 2 kmh^{-1} u istom smjeru. Poslije sudara zajedno se kreću brzinom 5 kmh^{-1} . Kolika je masa sante leda?

Zapisujemo zakona očuvanja količine gibanja i izražavamo masu sante leda

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$m_2 v_2 - m_2 v' = m_1 v' - m_1 v_1$$

$$m_2 = \frac{v' - v_1}{v_2 - v'} m_1$$

$$m_2 = \frac{5 \text{ kmh}^{-1} - 30 \text{ kmh}^{-1}}{2 \text{ kmh}^{-1} - 5 \text{ kmh}^{-1}} 6000 \text{ t} = 50000 \text{ t}$$

7.3. Klizač mase 70 kg koji stoji na ledu odbacuje od sebe u horizontalnom smjeru predmet mase 3 kg brzinom od 8 ms^{-1} . Koliko će se klizač pomaknuti, ako je koeficijent kinetičkog trenja između leda i klizaljki $0,02$?

Prije početka gibanja klizač miruje zajedno s predmetom $v' = 0$ stoga možemo izraziti iz zakona očuvanja količine gibanja brzinu klizača na početku njegovog gibanja

$$(m_1 + m_2)v' = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2$$

Zapisujemo zakon očuvanja energije za klizača

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A) + W_{AB}.$$

Budući da nema promjene visine potencijalna energija klizača je jednaka nuli, a kako na kraju svojega gibanja staje njegova kinetička energija $E_k(B)$ će također biti jednaka nuli

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + F_{tr}\Delta r \cos \angle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r})$$

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + F_{tr}\Delta r \cos \pi$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\mu_k g} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2\mu_k m_1^2 g}$$

$$\Delta r = \frac{(3 \text{ kg})^2 \cdot (8 \text{ ms}^{-1})^2}{2 \cdot 0,02 \cdot (70 \text{ kg})^2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = 0,3 \text{ m}$$

7.4. Kolikom se maksimalnom brzinom izraženom u kilometrima na sat može gibati automobil mase 1400 kg i snage 45 kW po cesti na kojoj je koeficijent kinetičkog trenja $0,08$? (Otpor zraka se zanemaruje.)

$$v_{max} = 147,44 \text{ kmh}^{-1}$$

7.5. Automobil mase 1500 kg koji se gibao brzinom 45 kmh^{-1} udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 kmh^{-1} . U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

$$F_{tr} = 6093,75$$

7.6. Automobil mase 1500 kg koji se gibao brzinom 45 kmh^{-1} udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 kmh^{-1} . U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

$$F_{tr} = 6093,75$$

KRUTO TIJELO

8.1. Kotač promjera 40 cm vrti se oko nepomične osi tako da se kut zakreta mijenja u vremenu prema sljedećem izrazu:

$$\varphi(t) = 5t + 3t^2 + 4t^4 \text{ [rad]}.$$

Izračunajte:

- Kutnu brzinu vrtnje u trenutku $t = 0,5 \text{ s}$.
- Obodnu brzinu ruba kotača u trenutku $t = 0,5 \text{ s}$.
- Kutno ubrzanje u trenutku $t = 0,5 \text{ s}$.
- Koliko okretaja napravi kotač od $t = 0 \text{ s}$ do $t = 0,5 \text{ s}$.

- $$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 3t^2 + 4t^4)$$

$$\omega(t) = 5 + 6t + 16t^3$$

$$\omega(t = 0,5 \text{ s}) = 5 + 6 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,5^3 = 10 \text{ rads}^{-1}$$
- $$v(t) = \omega(t)r = (5 + 6t + 16t^3)r$$

$$v(t = 0,5 \text{ s}) = \omega(t = 0,5)r = 10 \text{ rads}^{-1}0,2 \text{ m} = 2 \text{ ms}^{-1}$$
- $$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 6t + 16t^3) = 6 + 48t^2$$

$$\alpha(t = 0,5 \text{ s}) = 6 + 48 \cdot 0,5^2 = 18 \text{ rads}^{-2}$$
- Označimo broj okretaja s n

$$n2\pi = \Delta\varphi$$

$$n = \frac{1}{2\pi}(\varphi(0,5 \text{ s}) - \varphi(0 \text{ s}))$$

$$n = \frac{1}{2\pi}(5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2 + 4 \cdot 0,5^4 - 0) = 0,557 \text{ okretaja}.$$

8.2. Homogeni aluminijski valjak polumjera 8 i visine 32 cm rotira oko osi koja je paralelna s osi valjka, a prolazi kroz plašt. Odredite kinetičku energiju rotacije ako napravi 105 okretaja u minuti. Gustoća aluminijske je $2,7 \text{ gcm}^{-3}$.

Kako bismo izračunali kinetičku energiju rotacije $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ moramo znati moment tromosti oko osi rotacije i iznos kutne brzine. Kako bismo odredili moment tromosti koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I = I_T + Md^2$$

gdje je I_T moment tromosti oko osi koja prolazi kroz centar mase i za valjak iznosi $I_T = \frac{1}{2}MR^2$, M je u ovom slučaju masa valjka, a d je udaljenost između osi koja prolazi centrom mase i osi rotacije. Tako da moment tromosti možemo pisati

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Masu valjka možemo izraziti preko gustoće i volumena valjka ($V = R^2\pi h$),

$$I = \frac{3}{2}\pi\rho h R^4.$$

Ostalo je izračunati kutnu brzinu koja je broj okretaja u sekunti puta 2π

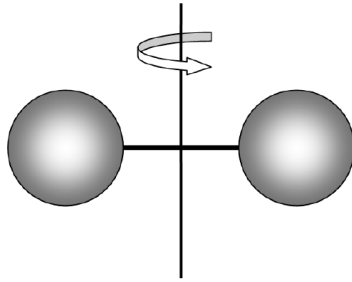
$$\omega = \frac{105}{60} 2\pi \text{ rad} = 10,995 \text{ rads}^{-1} \simeq 11 \text{ rads}^{-1}$$

. Sada možemo izračunati kinetičku energiju rotacije:

$$E_k = \frac{3}{4}\pi\rho h R^4 \omega^2 = \frac{3}{4}\pi 2700 \text{ kgm}^{-3} (0,08 \text{ m})^4 0,32 \text{ m} (11 \text{ rads}^{-1})^2$$

$$E_k = 10,0895 \text{ J}$$

8.3. Dvije homogene kugle gustoće 2700 kgm^{-3} i polumjera 4 cm spojene su štapom zanemarive mase i duljine 10 cm (vidi skicu). Koliki je moment susutava oko osi koja prolazi polovištem štapa? Moment tromosti kugle oko osi koja prolazi kroz središte je $I = \frac{2}{5}MR^2$.



Moment tromosti sustava I je zbroj momenta tromosti svake kugle, $I = 2I_{kugla}$. Kako bismo odredili moment tromosti kugle koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I_{kugla} = I_T + Md^2$$

$$I_{kugla} = \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{L}{2} + R\right)^2$$

gdje je M masa jedne kugle, R je njezin radijus, a L je udaljenost između kugli. Udaljenost osi rotacije od centra mase kugle je $d = \frac{L}{2} + R$. Izrazimo masu pomoću gustoće i volumena kugle ($V = \frac{4}{3}R^3\pi$) i dobivamo moment tromosti jedne kugle:

$$I_{kugle} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \left[\frac{2}{5}R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2 \right].$$

Moment tromosti sustava je:

$$I = 2I_{kugle} = \frac{8}{3}\pi 2700 \text{ kgm}^{-3} (0,04 \text{ m})^3 \left[\frac{2}{5}(0,04 \text{ m})^2 + \left(\frac{0,1 \text{ m}}{2} + (0,04 \text{ m})\right)^2 \right]$$

$$I = 0,01265 \text{ kgm}^2.$$

8.4. Kotač se vrti oko nepomične osovine tako da mu se kut zakreta mijenja u vremenu prema izrazu

$$\varphi(t) = te^{-0,1t}[\text{rad}].$$

Izračunajte:

- a) Kutnu brzinu vrtnje u trenutku $t = 3 \text{ s}$.
- b) Kutno ubrzanje u trenutku $t = 3 \text{ s}$.

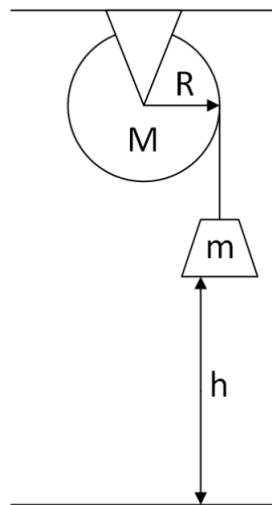
a) $\omega(t = 3 \text{ s}) = 0,519 \text{ rad/s}$

b) $\alpha(t = 3 \text{ s}) = -0,126 \text{ rad/s}^2$

8.5. Koliko okretaja u minuti treba rotirati homogeni mjedeni valjak oko osi koja je paralelna s osi valjka a prolazi kroz plašt, da bi mu kinetička energija rotacije bila 40 J ? Visina valjka je 30 cm , a polumjer 10 cm . Gustoća mjedi je $8,5 \text{ g/cm}^3$.

$$\nu = 77,92 \text{ okr/min}$$

8.6. Na valjak polumjera R i mase M koji se može rotirati oko horizontalne osi namotana je nit na koju je obješen uteg mase m (vidi skicu). Kolika će biti kutna brzina valjka u trenutku kad uteg padne s visine h ?



$$\omega = \sqrt{\frac{4mgh}{R(2m+M)}}$$

Kod rješavanja zadataka koristite se sljedećim numeričkim vrijednostima:

- gravitacijska konstanta: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
- masa Zemlje: $M_Z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- polumjer Zemlje: $R_Z = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
- iznos ubrzanja slobodnog pada: $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

9.1. Odredite visinu iznad površine Zemlje na kojoj će na astronauta djelovati jakost gravitacijskog polja po iznosu jednaka iznosu ubrzanja $a = 0,3g$.

Jakost gravitacijskog polja Zemlje na visini h možemo zapisati

$$G(h) = \gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Tražimo za koju visinu h vrijedi $G(h) = 0,3g$.

$$\gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = 0,3g$$

$$(R_Z + h)^2 = \frac{\gamma M_Z}{0,3g}$$

$$h = \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{0,3g}} - R_Z$$

$$h = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{0,3 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}} - 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 5,271 \cdot 10^6 \text{ m}$$

9.2. Umjetni satelit giba se oko Zemlje po kružnoj putanji s periodom vrtnjem $T = 132 \text{ min}$. Koliki je polumjer putanje satelita?

$$F_{cp} = F_{gr}$$

$$ma_{cp} = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

Centripetalnu akceleraciju možemo zapisati preko perioda vrtnje

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma M_Z \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \left(\frac{7920 \text{ s}}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = 8\,589\,592,25 \text{ m}$$

9.3. Izračunajte period kruženja satelita po kružnoj putanji oko Zemlje, ako je iznos jakosti gravitacijskog polja Zemlje na putanji satelita 3 ms^{-2} ?

$$G = \gamma \frac{M_Z}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}$$

Gravitacijsko polje drži satelit na kružnom gibanju

$$G = a_{cp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{G}}$$

Uvrštavanjem prvog izraza u drugi dobivamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G} \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3 \text{ ms}^{-2}} \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{3 \text{ ms}^{-2}}}}$$

$$T = 12\,318,16 \text{ s} = 205 \text{ min } 18,16 \text{ s}$$

9.4. Na pravcu koji povezuje zvijezdu A i zvijezdu B, koja ima pet puta manju masu od zvijezde A, postoji točka u kojoj bi na svemirski brod djelovale po iznosu iste privlačne sile od zvijezde A i od zvijezde B. Na kojoj udaljenosti od zvijezde A je ta točka, ako je udaljenost među zvijezdama $9,46 \cdot 10^{12} \text{ m}$?

$$r = 6,537 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

9.5. Jakost gravitacijskog polja na površini Marsa je $3,71 \text{ ms}^{-2}$. Izračunajte srednju gustoću Marsa pod pretpostavkom da je Mars homogena kugla polumjera 3389 km .

$$\rho = 3918,2 \text{ kgm}^{-3}$$

9.6. Koliki je period satelita koji kruži 300 km iznad Zemljine površine?

$$T = 90 \text{ min } 20,7 \text{ s}$$

10.1. Izračunajte gravitacijsku potencijalnu energiju $E_{p,gr}$ i potencijalnu energiju u polju sile teže $E_{p,G}$ mase $m = 1 \text{ kg}$ u gravitacijskom polju Zemlje kada se:

- a) masa m nalazi na površini Zemlje;
- b) masa m je na visini 1 km nad površinom Zemlje;
- c) masa m je na visini 1000 km nad površinom Zemlje;
- d) usporedite rezultate!

- a) $h = 0$

$$E_{p,g}(A) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z}$$

$$E_{p,g}(A) = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,371 \cdot 10^6 \text{ m}} = -62 \ 606 \ 498,2 \text{ J}$$

$$E_{p,G} = mgh = 0 \text{ J}$$

- b) $h = 10^3 \text{ m}$

$$E_{p,g}(B) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(B) = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,372 \cdot 10^6 \text{ m}} = -62 \ 596 \ 672,9 \text{ J}$$

$$E_{p,g}(B) - E_{p,g}(A) = 9 \ 825,3$$

$$E_{p,G} = mgh = 9 \ 810 \text{ J}$$

- c) $h = 10^6 \text{ m}$

$$E_{p,g}(C) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(C) = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,372 \cdot 10^6 \text{ m}} = -54 \ 112 \ 874,8 \text{ J}$$

$$E_{p,g}(C) - E_{p,g}(A) = 8 \ 493 \ 623,4$$

$$E_{p,G} = mgh = 9 \ 810 \ 000 \text{ J}$$

10.2. Do koje maksimalne visine će se dići metak ispaljen s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa 715 ms^{-1} ? Masa Mjeseca je $7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, a polumjer Mjeseca 1737 km .

Koristimo zakon očuvanja energije. Metak na površini Mjeseca ima gravitacijsku potencijalnu energiju i kinetičku energiju, kada se popne na visinu h ima samo gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{p,g}(h=0) + E_k(h=0) = E_{p,g}(h) + E_k(h)$$

$$-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\gamma \frac{M_M m}{R_M + h} + 0$$

$$R_M + h = \frac{-\gamma M_M}{-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} v_0^2}$$

$$h = \frac{-2\gamma M_M R_M}{-2\gamma M_M + v_0^2 R_M} - R_M$$

$$h = \frac{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}}{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg} + (715 \text{ ms}^{-1})^2 \cdot 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}} - 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 173\,239,9 \text{ m}$$

10.3. Prema Zemlji se iz velike ("beskonačne") udaljenosti početnom brzinom iznosa $v_0 = 3 \text{ kms}^{-1}$ duž pravca koji prolazi njezinim središtem giba meteor. Koliki će biti iznos brzine meteora u trenutku kada se meteor nađe na udaljenosti $r = 6R_Z$ od središta Zemlje? Što se događa s njegovom brzinom u odnosu na početnu? Koji je razlog tome?

Zapisujemo zakon očuvanja energije

$$E_{p,g}(\infty) + E_k(\infty) = E_{p,g}(6R) + E_k(6R).$$

U beskonačnosti tijelo nema gravitacijsku potencijalnu energiju tako da pišemo

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma \frac{M_Z m}{6R_Z} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = v_0^2 + \gamma \frac{M_Z}{3R_Z}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \gamma \frac{M_Z}{3R_Z}}$$

$$v = \sqrt{(3000 \text{ ms}^{-1})^2 + 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{3 \cdot 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 5465,2 \text{ ms}^{-1}$$

10.4.

Izračunajte 2. kozmičku brzinu Merkura pod pretpostavkom da je Merkur homogena kugla polumjera 2440 km i srednje gustoće $5,43 \text{ g/cm}^3$. Gravitacijska konstanta je $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

$$v_2 = 4,25 \text{ kms}^{-1}$$

10.5.

Tijelo je ispaljeno s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa 3 kms^{-1} . Koliki će biti iznos brzine toga tijela kada se ono nađe u „beskonačnosti“? Masa Mjeseca je $7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, a polumjer 1737 km .

$$v = 1833,8 \text{ ms}^{-1}$$

10.6.

Izračunajte iznos brzine kojom bi predmet pušten iz stanja mirovanja na visini od 10^4 km iznad površine Zemlje udario o tlo (kada ne bi bilo atmosfere)?

$$v = 8745,5 \text{ ms}^{-1}$$

7.1 MATEMATIČKI TEMELJI

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$$

$$\text{b) } \vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{c) } \vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73,4^\circ$$

$$\text{c) } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \sin(73,4^\circ)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \approx 13,42$$

d) $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6 - 6) - \vec{j}(3 - (-3)) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{144 + 36} \Rightarrow |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 + 6) - \vec{j}(-3 - 3) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

a) $0,1746 \text{ rad} = 0,1746 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 10,00^\circ$

b) $0,016 \text{ kN} = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \text{ N} = 1,6 \cdot 10^1 \text{ N} =$
 $= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ mN}$

c) $18,3 \text{ MJ} = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,83 \cdot 10^7 \text{ J}$

d) $100 \mu\text{g} = 10^2 \cdot 10^{-6} \text{ g} = 10^{-4} \text{ g} =$
 $= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \text{ g} = 10^{-7} \text{ kg}$

e) $8,2 \text{ kmh}^{-1} = 8,2 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{82}{36} \text{ ms}^{-1} = 2,28 \text{ ms}^{-1}$

f) $36 \text{ dana} = 36 \cdot 24 \text{ h} = 36 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 51840 \text{ min}$

g) $2 \text{ cm}^2 = 2 (\text{cm})^2 = 2 (10^{-2} \text{ m})^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,0002 \text{ m}^2$

h) $10 \text{ L} = 10 \text{ dm}^3 = 10 (\text{dm})^3 = 10 (10^{-1} \text{ m})^3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^{-2} \text{ m}^3 = 0,01 \text{ m}^3$

7.2 KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

Uvrstimo zadane vrijednosti u $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (30 \text{ ms}^{-1} t) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} t^2) \vec{k}$$

a) $\vec{r}(t = 0, 0 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 0 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (0 \text{ s})^2) \vec{k} = 0 \text{ m} \vec{j} + 80 \text{ m} \vec{k}$

$$\vec{r}(t = 0, 5 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 0,5 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (0,5 \text{ s})^2) \vec{k} = 15 \text{ m} \vec{j} + 78,75 \text{ m} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 1, 0 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 1,0 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (1,0 \text{ s})^2) \vec{k} = 30 \text{ m} \vec{j} + 75 \text{ m} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 1, 5 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 1,5 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (1,5 \text{ s})^2) \vec{k} = 45 \text{ m} \vec{j} + 68,75 \text{ m} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 2, 0 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 2,0 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (2,0 \text{ s})^2) \vec{k} = 60 \text{ m} \vec{j} + 60 \text{ m} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 2, 5 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 2,5 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (2,5 \text{ s})^2) \vec{k} = 75 \text{ m} \vec{j} + 48,75 \text{ m} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 3, 0 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 3,0 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (3,0 \text{ s})^2) \vec{k} = 90 \text{ m} \vec{j} + 35 \text{ m} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 3, 5 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 3,5 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (3,5 \text{ s})^2) \vec{k} = 105 \text{ m} \vec{j} + 18,75 \text{ m} \vec{k}$$

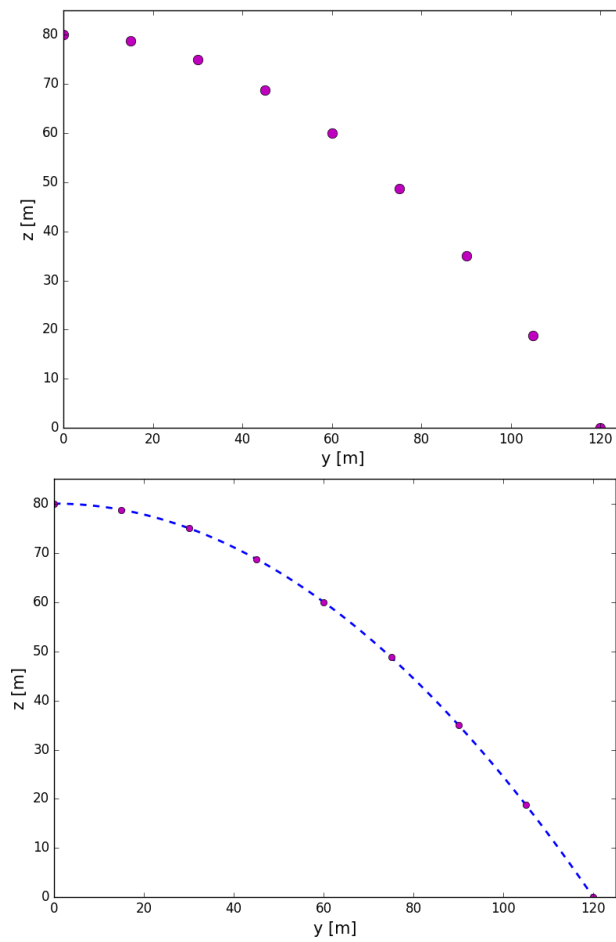
$$\vec{r}(t = 4, 0 \text{ s}) = (30 \text{ ms}^{-1} 4,0 \text{ s}) \vec{j} + (80 \text{ m} - \frac{1}{2} 10 \text{ ms}^{-2} (4,0 \text{ s})^2) \vec{k} = 120 \text{ m} \vec{j} + 0 \text{ m} \vec{k}$$

b)

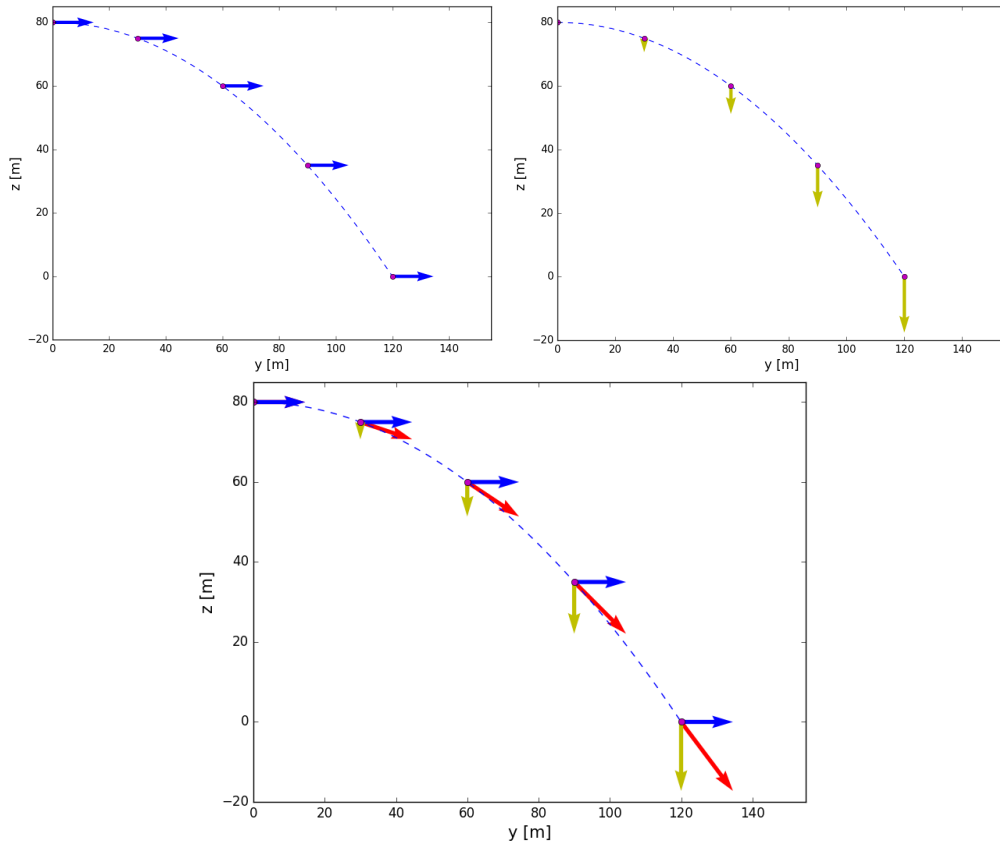
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left(z_0 \vec{k} + v_0 t \vec{j} - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k} \right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{j} - g t \vec{k}$$



Slika 7.1: (*lijevo*) Položaj MT za svakih 0,5 s. (*desno*) Putanja MT do udarca o tlo.



Slika 7.2: (gore-lijevo) Komponenta brzine u y -smjeru. (gore-desno) Komponenta brzine u z -smjeru. (dolje) Brzina tijela s komponentama.

c) $\vec{v}(t) = 30 \text{ ms}^{-1}\vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2}t\vec{k}$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1}\vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2}1s\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1}\vec{j} - 10 \text{ ms}^{-1}\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 2s) = 30 \text{ ms}^{-1}\vec{j} - 20 \text{ ms}^{-1}\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 3s) = 30 \text{ ms}^{-1}\vec{j} - 30 \text{ ms}^{-1}\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 4s) = 30 \text{ ms}^{-1}\vec{j} - 40 \text{ ms}^{-1}\vec{k}$$

$$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-10 \text{ ms}^{-1})^2} = 31,623 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-20 \text{ ms}^{-1})^2} = 36,055 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-30 \text{ ms}^{-1})^2} = 42,43 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-40 \text{ ms}^{-1})^2} = 50,0 \text{ ms}^{-1}$$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (v_0\vec{j} - gt\vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = -g\vec{k} = -9,81 \text{ ms}^{-2}\vec{k} \approx -10 \text{ ms}^{-2}\vec{k}$$

a) U relaciju $\vec{r}(t)$ potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4\vec{i} + 4 \cdot 0,5^2\vec{j} + 3 \cdot 0,5\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375\vec{i} + 1\vec{j} + 1,5\vec{k} \text{ [m]}.$$

b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je derivirati po vremenu $\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k})$$

$$\vec{v}(t) = 24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3\vec{i} + 8 \cdot 0,5\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} [ms]$$

$$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83 [ms]$$

c) $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = 72t^2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 18\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7 [ms^{-2}].$$

Rješavamo inverzni problem i tražimo $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j}) d\tau$$

Trebamo riješiti integral $I = \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j}) d\tau$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t 4\tau\vec{i} d\tau + \int_0^t 3\tau^2\vec{j} d\tau = 4\vec{i} \int_0^t \tau d\tau + 3\vec{j} \int_0^t \tau^2 d\tau = \\ &= 4\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\frac{t^3}{3}\vec{j} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} \end{aligned}$$

Vratimo se u $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = 2(1 + t^2)\vec{i} + (3 + t^3)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2 \text{ s}) = 2(1 + 1,2^2)\vec{i} + (3 + 1,2^3)\vec{j} = 4,88\vec{i} + 4,728\vec{j} [m]$$