

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GEOTEHNIČKI FAKULTET



---

# Zadaci s vježbi iz kolegija Fizika 1

---

AKADEMSKA GODINA 2021./2022.

doc. dr. sc. Ivan Hip  
dr. sc. Marko Petric  
doc. dr. sc. Davor Stanko

9. ožujka 2022.

<b>1</b>	<b>MATEMATIČKI TEMELJI</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>DNAMIKA MATERIJALNE TOČKE</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>ZAKONI OČUVANJA</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>KRUTO TIJELO</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>GRAVITACIJA</b>	<b>31</b>
<b>7</b>	<b>RJEŠENJA</b>	<b>35</b>
7.1	MATEMATIČKI TEMELJI . . . . .	35
7.2	KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE . . . . .	36

## Lista oznaka

Vektorske fizikalne veličine izlistane su samo kao vektori — ukoliko se pojavljuju bez "strelice" radi se o iznosu ili, ako imaju indeks  $x$ ,  $y$  ili  $z$ , o projekciji na odgovarajuću os (primjer:  $v$  je iznos trenutne brzine  $\vec{v}$ , a  $v_x$  je projekcija trenutne brzine  $\vec{v}$  na os  $x$ ).

$A, B, C, \dots$  - oznake za točke ili tijela

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  - oznake za vektore

$\vec{a}$  - trenutno ubrzanje

$\vec{a}_{cf}$  - centrifugalno ubrzanje

$\vec{a}_{cp}$  - centripetalno ubrzanje

$\vec{a}_r$  - radijalno ubrzanje

$\vec{a}_s$  - srednje ubrzanje

$\vec{a}_\tau$  - tangencijalno ubrzanje

$D$  - domet kosog hica

$d$  - udaljenost između paralelnih osi

$E$  - energija

$E_k$  - kinetička energija

$E_p$  - potencijalna energija

$E_{p,el}$  - elastična potencijalna energija

$E_{p,G}$  - potencijalna energija u polju sile teže

$E_{p,gr}$  - gravitacijska potencijalna energija

$E_{uk}$  - ukupna energija

$\vec{F}$  - sila

$\vec{F}_{AB}$  - sila kojom tijelo  $A$  djeluje na tijelo  $B$

$\vec{F}_{cf}$  - centrifugalna sila

$\vec{F}_{cp}$  - centripetalna sila

$\vec{F}_{el}$  - elastična sila

$\vec{F}_I$  - inercijska sila

$\vec{F}_R$  - rezultatna sila

$\vec{F}_{tr}$  - sila trenja

$\vec{F}_{tr,k}$  - sila kinematičkog trenja

$\vec{F}_{tr,s}$  - sila statičkog trenja

$\vec{F}_{tr,s,max}$  - maksimalna sila statičkog trenja

$\vec{F}_v$  - vanjska sila

$\vec{F}_\parallel$  - komponenta sile koja je paralelna s pomakom

$\vec{F}_\perp$  - sila koja djeluje okomito na podlogu

$\vec{G}$  - sila teža

$\vec{G}_\parallel$  - komponenta sile teže koja je paralelna s kosinom

$\vec{G}_\perp$  - komponenta sile teže koja je okomita na kosinu

$\vec{g}$  - jakost gravitacijskog polja

$\vec{g}$  - ubrzanja slobodnog pada, ujedno jakost polja sile teže

$\vec{g}_0$  - jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje

$H$  - visina valjka

$h$  - visina  
 $I$  - moment tromosti  
 $I_T$  - moment tromosti oko osi koja prolazi kroz težište  
 $\vec{i}$  - jedinični vektor na osi  $x$   
 $\vec{j}$  - jedinični vektor na osi  $y$   
 $K$  - konstanta elastičnosti opruge  
 $\vec{k}$  - jedinični vektor na osi  $z$   
 $M$  - ukupna masa sustava  
 $M_Z$  - masa Zemlje  
 $m$  - masa  
 $\vec{N}$  - moment sile  
 $\hat{n}$  - vektor normale  
 $O$  - ishodište  
 $P$  - trenutna snaga  
 $P_{AB}$  - srednja snaga  
 $\vec{p}$  - količina gibanja  
 $\vec{p}_{uk}$  - ukupna količina gibanja u zatvorenom sustavu  
 $R$  - polumjer kružnice kod kružnog gibanja  
 $R_Z$  - polumjer Zemlje  
 $\vec{R}$  - sila reakcije podloge  
 $r_{\perp}$  - krak sile  
 $\vec{r}$  - vektor položaja  
 $\vec{r}_0$  - početni položaj (položaj u trenutku  $t = 0$ )  
 $\vec{r}_{AB}$  - vektor koji spaja točke  $A$  i  $B$  (iznos tog vektora je udaljenost između točaka)  
 $\vec{r}_{cm}$  - vektor položaja centra mase  
 $\vec{r}_n$  - položaj u kojem je opruga nerastegnuta  
 $\vec{r}_{S'}$  - vektor položaja ishodišta referentnog sustava  $S'$   
 $\Delta\vec{r}$  - vektor pomaka, može ujedno biti i vektor deformacije  
 $\Delta\vec{r}_{AB}$  - vektor pomaka od točke  $A$  do točke  $B$   
 $S, S'$  - oznake za referentne sustave  
 $s$  -  $s$  koordinata  
 $s_A$  -  $s$  koordinata točke  $A$   
 $T$  - trajanje leta kod kosog hica / period rotacije Zemlje  
 $\vec{T}$  - težina / sila napetosti niti  
 $t$  - vrijeme  
 $\Delta t$  - vremenski interval  
 $\vec{u}$  - "ulazna" brzina (trenutna brzina tijela prije sudara)  
 $v_1$  - prva kozmička brzina  
 $v_2$  - druga kozmička brzina  
 $\vec{v}$  - trenutna brzina  
 $\vec{v}_0$  - početna brzina (trenutna brzina u trenutku  $t = 0$ )  
 $\vec{v}_s$  - srednja brzina  
 $\vec{v}_{S'}$  - trenutna brzina referentnog sustava  $S'$   
 $W$  - rad

$W_{AB}$  - rad sile na dijelu putanje između točaka  $A$  i  $B$

$W_G$  - rad sile teže

$W_{nk}$  - rad nekonzervativnih sila

$W_R$  - rad rezultantne sile

$W_{tr}$  - rad sile trenja

$x$  - projekcija vektora položaja na os  $x$  ( $x$  koordinata)

$y$  - projekcija vektora položaja na os  $y$  ( $y$  koordinata)

$z$  - projekcija vektora položaja na os  $z$  ( $z$  koordinata)

$\alpha$  - kut nagiba kosine / trenutno kutno ubrzanje

$\alpha_s$  - srednje kutno ubrzanje

$\alpha_k$  - kut nagiba kosine pri kojem se tijelo niz kosinu giba konstantnom brzinom

$\alpha_{max}$  - kut nagiba kosine za koji se postiže maksimalna sila statičkog trenja

$\gamma$  - gravitacijska konstanta

$\vartheta$  - nagib kosog hica / zemljopisna širina

$\mu_k$  - koeficijent kinematičkog trenja

$\mu_s$  - koeficijent statičkog trenja

$\rho$  - gustoća / polumjer zakrivljenosti putanje / udaljenost od osi rotacije

$\hat{\tau}$  - jedinični vektor tangencijalan na putanju

$\varphi$  - kut zakreta kod kružnog gibanja

$\omega$  - trenutna kutna brzina

$\omega_s$  - srednja kutna brzina

# MATEMATIČKI TEMELJI

**1.1.** Nacrtajte slijedeća tri vektora u  $xy$ -ravnini:  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  i izračunajte računski i grafički:

- Nacrtajte sva tri vektora u  $xy$ -ravnini.
- Koja dva vektora su okomita? Provjerite!
- Izračunajte računski i grafički  $\vec{a} + \vec{b}$ .
- Izračunajte računski i grafički  $\vec{b} - \vec{c}$ .

- $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$$
- $$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$$
- $$\vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$$

**1.2.** Zadani su vektori  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$  i  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Izračunajte:

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$
- $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
- Izračunajte  $|\vec{c}|$ , gdje je  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  i usporedite s rezultatom c).
- $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$  i usporedite s rezultatom d).

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73,4^\circ$$

c)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \sin(73,4^\circ)$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \approx 13,42$$

d)  $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6 - 6) - \vec{j}(3 - (-3)) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{144 + 36} \Rightarrow |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 + 6) - \vec{j}(-3 - 3) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{d} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

### 1.3. Pretvorite mjerene jedinice:

a)  $0,1746 \text{ rad} = \quad \quad \quad ^\circ$

b)  $18,3 \text{ MJ} = \quad \quad \quad J$

c)  $0,016 \text{ kN} = \quad \quad \quad mN$

d)  $100 \mu g = \quad \quad \quad kg$

e)  $8,2 \text{ kmh}^{-1} = \quad \quad \quad ms^{-1}$

f)  $36 \text{ dana} = \quad \quad \quad min$

g)  $2 \text{ cm}^2 = \quad \quad \quad m^2$

h)  $10 \text{ L} = \quad \quad \quad m^3$

a)  $0,1746 \text{ rad} = 0,1746 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 10,00^\circ$

b)  $0,016 \text{ kN} = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 N = 1,6 \cdot 10^1 N =$   
 $= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} N = 1,6 \cdot 10^4 mN$

c)  $18,3 \text{ MJ} = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6 J = 1,83 \cdot 10^7 J$

d)  $100 \mu g = 10^2 \cdot 10^{-6} g = 10^{-4} g =$   
 $= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 g = 10^{-7} kg$

e)  $8,2 \text{ kmh}^{-1} = 8,2 \frac{1000m}{3600s} = \frac{82}{36} ms^{-1} = 2,28 ms^{-1}$

f)  $36 \text{ dana} = 36 \cdot 24 h = 36 \cdot 24 \cdot 60 min = 51840 min$

g)  $2 \text{ cm}^2 = 2 (cm)^2 = 2 (10^{-2} m)^2 = 2 \cdot 10^{-4} m^2 = 0,0002 m^2$

h)  $10 \text{ L} = 10 dm^3 = 10 (dm)^3 = 10 (10^{-1} m)^3 = 10 \cdot 10^{-3} m^3 = 10^{-2} m^3 = 0,01 m^3$

## Zadaci za samostalni rad

1.4. Pretvorite mjerene jedinice:

- a)  $4,2 \cdot 10^{-8} \text{ m} = \quad \quad \quad \text{nm}$
- b)  $10^{-5} \text{ kg} = \quad \quad \quad \text{g}$
- c)  $23 \text{ dag} = \quad \quad \quad \text{t}$
- d)  $7,5 \text{ ms}^{-1} = \quad \quad \quad \text{kmh}^{-1}$
- e)  $0,072 \text{ kmh}^{-1} = \quad \quad \quad \text{cms}^{-1}$
- f)  $284 \text{ s} = \quad \quad \quad \text{god}$
- g)  $0,02 \text{ cm}^2 = \quad \quad \quad \text{mm}^2$
- h)  $15 \text{ cm}^3 = \quad \quad \quad \text{L}$

Rješenje:

- a)  $42 \text{ nm}$
- b)  $0,01 \text{ g}$
- c)  $2,3 \cdot 10^{-4} \text{ t}$
- d)  $27 \text{ ms}^{-1}$
- e)  $0,02 \text{ kmh}^{-1}$
- f)  $9,00 \cdot 10^{-6} \text{ god}$
- g)  $2 \text{ mm}^2$
- h)  $0,015 \text{ L}$

1.5. Zadani su vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$  i  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ . Izračunajte:

- a) duljine (iznose) svakog od njih;
- b) skalarni produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;
- c) kut koji zatvaraju;
- d) vektorski zbroj  $\vec{a} + \vec{b}$  i razliku  $\vec{a} - \vec{b}$ ;
- e) vektorski produkt  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;
- f) vektorski produkt  $\vec{b} \times \vec{a}$  i usporedite s rezultatom iz e).

Rješenje:

- a)  $|\vec{a}| = \sqrt{50}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{41}$
- b)  $-25$
- c)  $123,5^\circ$
- d)  $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$  i  $\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k}$
- e)  $34\vec{i} - 13\vec{j} + 10\vec{k}$

1.6. Zadani su vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$  i  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Izračunajte:

- a)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ;
- b)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  i usporedite s rezultatom iz a);
- c)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$  i  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$  te razmislite što znače dobiveni rezultati.



Rješenje: 93

---

**1.7.** Zadani su vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$  i  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Izračunajte  $\vec{a} \cdot [\vec{b} + (\vec{c} \times \vec{a})]$

Rješenje: -25

---

**1.8.** Zadani su vektori  $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$  i  $\vec{c} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ . Izračunajte  $[(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{c}] \cdot \vec{c}$

Rješenje: -5

---

**1.9.** Zadani su vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  i  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Izračunajte:

a)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

b)  $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$ .

Rješenje:

a) -150

b) 45

## KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

**2.1.** Gibanje materijalne točke (MT) opisano je vektorom položaja

$$\vec{r}(t) = (v_0 t) \vec{j} + (z_0 - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k}.$$

U trenutku  $t = 0$  s MT se nalazi na visini  $z_0 = 80$  m, a iznos početne brzine je  $v_0 = 30$   $\text{ms}^{-1}$ . Iznos ubrzanja slobodnog pada je  $g = 9,81$   $\text{ms}^{-2}$ , ali radi lakšeg računanja može se uzeti približna vrijednost  $g = 10$   $\text{ms}^{-2}$ .

- Izračunajte položaj MT svakih pola sekunde i skicirajte putanju u  $yz$ -ravnini.
- Odredite vektor trenutne brzine  $\vec{v}(t)$ .
- Izračunajte i skicirajte trenutnu brzinu u trenucima  $t_1 = 1$  s,  $t_2 = 2$  s,  $t_3 = 3$  s i  $t_4 = 4$  s.
- Odredite trenutno ubrzanje  $\vec{a}(t)$  i skicirajte ga u nekoliko točaka putanje.

Uvrstimo zadane vrijednosti u  $\vec{r}(t)$ .

$$\vec{r}(t) = (30 \text{ms}^{-1} t) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} t^2) \vec{k}$$

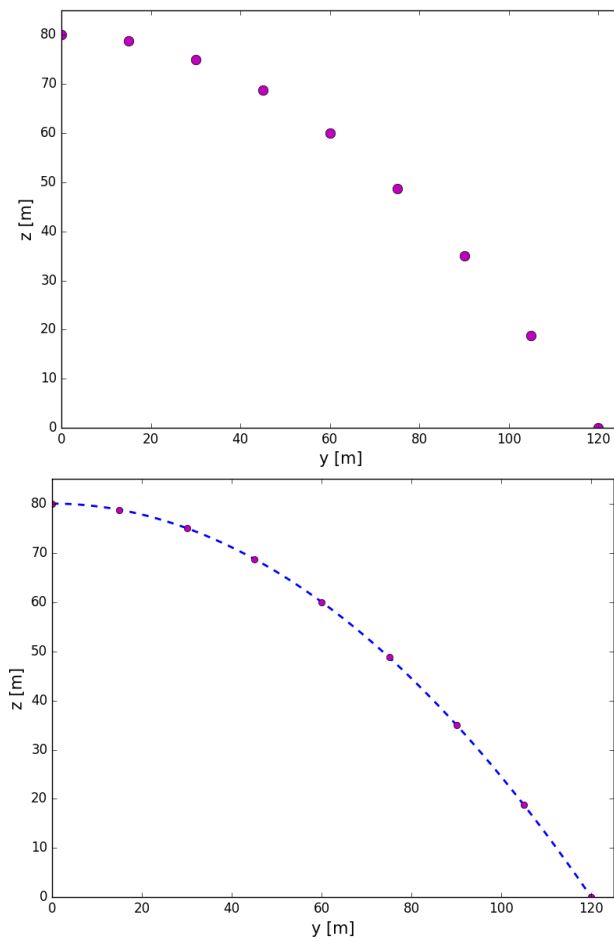
- $\vec{r}(t = 0, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (0 \text{s})^2) \vec{k} = 0 \text{m} \vec{j} + 80 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 0, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 0,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (0,5 \text{s})^2) \vec{k} = 15 \text{m} \vec{j} + 78,75 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 1, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 1,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (1,0 \text{s})^2) \vec{k} = 30 \text{m} \vec{j} + 75 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 1, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 1,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (1,5 \text{s})^2) \vec{k} = 45 \text{m} \vec{j} + 68,75 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 2, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 2,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (2,0 \text{s})^2) \vec{k} = 60 \text{m} \vec{j} + 60 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 2, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 2,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (2,5 \text{s})^2) \vec{k} = 75 \text{m} \vec{j} + 48,75 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 3, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 3,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (3,0 \text{s})^2) \vec{k} = 90 \text{m} \vec{j} + 35 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 3, 5 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 3,5 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (3,5 \text{s})^2) \vec{k} = 105 \text{m} \vec{j} + 18,75 \text{m} \vec{k}$   
 $\vec{r}(t = 4, 0 \text{s}) = (30 \text{ms}^{-1} 4,0 \text{s}) \vec{j} + (80 \text{m} - \frac{1}{2} 10 \text{ms}^{-2} (4,0 \text{s})^2) \vec{k} = 120 \text{m} \vec{j} + 0 \text{m} \vec{k}$

b)

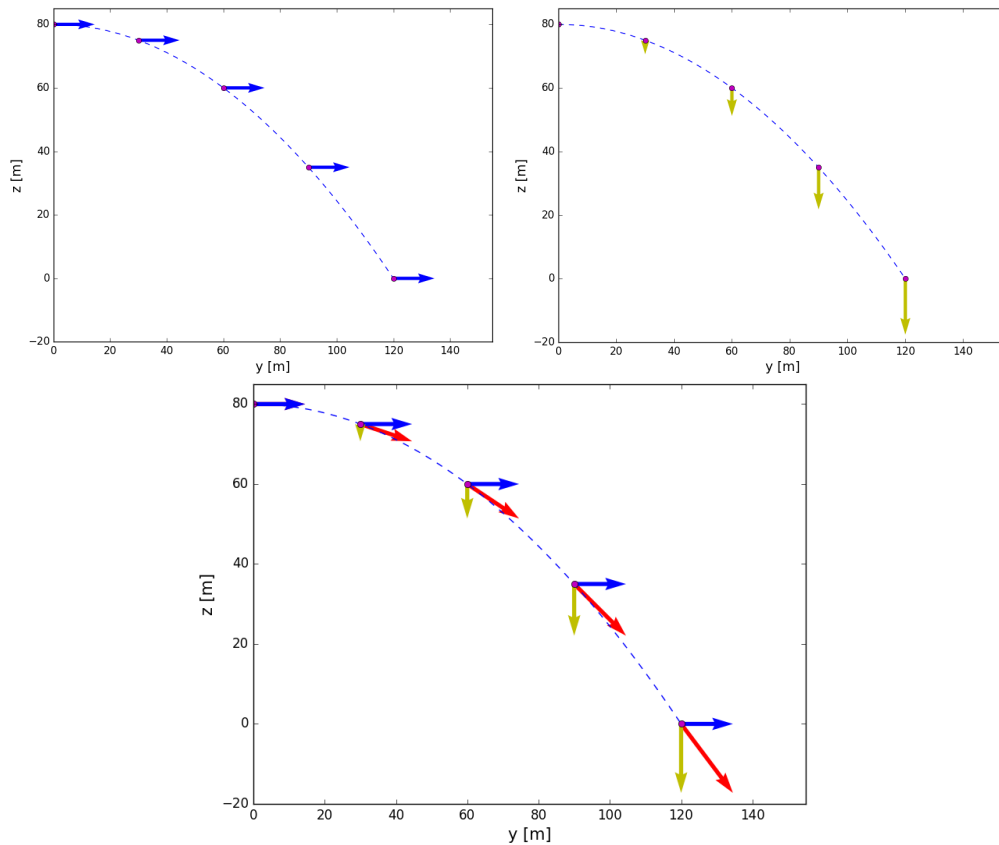
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left( z_0 \vec{k} + v_0 t \vec{j} - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k} \right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{j} - g t \vec{k}$$



Slika 2.1: (*lijevo*) Položaj MT za svakih 0,5 s. (*desno*) Putanja MT do udarca o tlo.



Slika 2.2: (gore-lijevo) Komponenta brzine u  $y$ -smjeru. (gore-desno) Komponenta brzine u  $z$ -smjeru. (dolje) Brzina tijela s komponentama.

$$c) \vec{v}(t) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2} t \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2} 1s \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 2s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 20 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 3s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 30 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 4s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 40 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-10 \text{ ms}^{-1})^2} = 31,623 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-20 \text{ ms}^{-1})^2} = 36,055 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-30 \text{ ms}^{-1})^2} = 42,43 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-40 \text{ ms}^{-1})^2} = 50,0 \text{ ms}^{-1}$$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (v_0 \vec{j} - gt \vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = -g \vec{k} = -9,81 \text{ ms}^{-2} \vec{k} \approx -10 \text{ ms}^{-2} \vec{k}$$

**2.2.** Materijalna točka (MT) giba se u prostoru tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu u skladu s relacijom

$$\vec{r}(t) = 6t^4 \vec{i} + 4t^2 \vec{j} + 3t \vec{k} \text{ [m]}.$$

Izračunajte:

(a) Vektor položaja MT u  $t = 0,5 \text{ s}$ .

- (b) Trenutnu brzinu i iznos trenutne brzine u  $t = 0,5$  s.  
 (c) Trenutno ubrzanje i iznos trenutnog ubrzanja u  $t = 0,5$  s.
- 

- a) U relaciju  $\vec{r}(t)$  potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4 \vec{i} + 4 \cdot 0,5^2 \vec{j} + 3 \cdot 0,5 \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375 \vec{i} + 1 \vec{j} + 1,5 \vec{k} [m].$$

- b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je derivirati po vremenu  $\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (6t^4 \vec{i} + 4t^2 \vec{j} + 3t \vec{k})$$

$$\vec{v}(t) = 24t^3 \vec{i} + 8t \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3 \vec{i} + 8 \cdot 0,5 \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 3 \vec{i} + 4 \vec{j} + 3 \vec{k} [ms]$$

$$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83 [ms]$$

- c)  $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (24t^3 \vec{i} + 8t \vec{j} + 3 \vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = 72t^2 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 18 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7 [ms^{-2}].$$

**2.3.** Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u  $xy$ -ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 4t \vec{i} + 3t^2 \vec{j} [ms^{-1}].$$

U trenutku  $t = 0$  s vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0s) = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} [m].$$

Izračunajte vektor položaja  $\vec{r}(t)$  materijalne točke  $t = 1,2$  s.

---

Rješavamo inverzni problem i tražimo  $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + \int_0^t (4\tau \vec{i} + 3\tau^2 \vec{j}) d\tau$$

Trebamo riješiti integral  $I = \int_0^t (4\tau \vec{i} + 3\tau^2 \vec{j}) d\tau$ .

$$I = \int_0^t 4\tau \vec{i} d\tau + \int_0^t 3\tau^2 \vec{j} d\tau = 4 \vec{i} \int_0^t \tau d\tau + 3 \vec{j} \int_0^t \tau^2 d\tau =$$

$$= 4 \frac{t^2}{2} \vec{i} + 3 \frac{t^3}{3} \vec{j} = 2t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}$$

Vratimo se u  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + 2t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} = 2(1 + t^2) \vec{i} + (3 + t^3) \vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2 \text{ s}) = 2(1 + 1,2^2) \vec{i} + (3 + 1,2^3) \vec{j} = 4,88 \vec{i} + 4,728 \vec{j} [m]$$

## Zadaci za samostalni rad

**2.4.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = te^{-2t}\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j} [m].$$

Izračunajte:

- a) Vektor i iznos trenutne brzine MT u trenutku  $t_1 = 0,3$  s.
- b) Vektor i iznos trenutnog ubrzanja MT u trenutku  $t_1 = 0,3$  s.

Rješenje:

- a)  $\vec{v}(t = 0,3 \text{ s}) = 0,220\vec{i} + 0,913\vec{j}$ ,  $|\vec{v}(t = 0,3 \text{ s})| = 0,939 [ms^{-1}]$
  - b)  $\vec{a}(t = 0,3 \text{ s}) = -1,537\vec{i} - 1,521\vec{j}$ ,  $|\vec{a}(t = 0,3 \text{ s})| = 2,162 [ms^{-1}]$
- 

**2.5.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = t \cos(3t)\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j} [m].$$

Koliki je iznos trenutnog ubrzanja materijalne točke u trenutku  $t_1 = 0,15$  s?

Rješenje:  $|\vec{a}(t = 0,15 \text{ s})| = 5,758 [ms^{-2}]$

---

**2.6.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = t^2 \sin(3t)\vec{i} + \sqrt[3]{t}\vec{j} [m].$$

Koliki je iznos trenutnog ubrzanja materijalne točke u trenutku  $t_1 = 0,2$  s?

Rješenje:  $|\vec{a}(t = 0,2 \text{ s})| = 4,359 [ms^{-2}]$

---

**2.7.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = \sqrt[5]{t}\vec{i} + t^2 \cos(3t)\vec{j} [m].$$

Koliki je iznos trenutnog ubrzanja materijalne točke u trenutku  $t_1 = 0,3$  s?

Rješenje:  $|\vec{a}(t = 0,3 \text{ s})| = 2,506 [ms^{-2}]$

---

**2.8.** Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u xy-ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 4\sqrt[3]{t}\vec{i} + 6e^{-2t}\vec{j} [ms^{-1}].$$

U trenutku  $t = 0$  s vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0 \text{ s}) = 2\vec{i} - 3\vec{j} [m]$$

Izračunajte vektor položaja  $\vec{r}(t)$  materijalne točke u trenutku  $t_1 = 0,5$  s.

Rješenje:  $\vec{r}(t = 0,5 \text{ s}) = 3,191\vec{i} - 1,104\vec{j} [m]$

---

**2.9.** Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u xy-ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 3e^{-3t}\vec{i} + 4\sqrt[4]{t}\vec{j} [ms^{-1}].$$

U trenutku  $t = 0$  vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0 \text{ s}) = -\vec{i} + 2\vec{j} \text{ [m]}$$

Izračunajte vektor položaja  $\vec{r}(t)$  materijalne točke u trenutku  $t_1 = 0,4 \text{ s}$ .

Rješenje:  $\vec{r}(t = 0,4 \text{ s}) = -0,301\vec{i} - 3,018\vec{j} \text{ [m]}$

**3.1.** Tijelo je bačeno koso prema gore pod kutom od  $30^\circ$  prema horizontali početnom brzinom iznosa  $20 \text{ ms}^{-1}$  s visine  $10 \text{ m}$  iznad tla. Izračunajte (zanemarite otpor zraka):

- Vrijeme udarca tijela o tlo.
- Domet tijela.
- Kolika je maksimalna visina koju tijelo postigne tijekom leta?

a)  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$

Početni uvjeti:  $\vec{r}_0 = z_0 \vec{k}$ ,  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{j} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$   $\vec{g} = -g \vec{k}$

$$\vec{r}(t) = z_0 \vec{k} + v_0 \cos \alpha \vec{j} t + v_0 \sin \alpha \vec{k} t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos \alpha \cdot t) \vec{j} + (z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = y \vec{j} + z \vec{k}, \text{ gdje je } y = v_0 \cos \alpha \cdot t \text{ i } z = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Vrijeme udarca tijela o tlo  $t = t_u$  kada je  $z = 0 \Rightarrow 0 = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2g z_0}}{g}.$$

Za navedene podatke rješenja su  $t_1 = 2,77 \text{ s}$  i  $t_2 = -0,74 \text{ s}$ , fizikalno rješenje je  $t_1 = 2,77 \text{ s}$ .

- b) Kako bismo dobili domet,  $D = v_y t$  tijela moramo znati komponentu brzine u  $y$ -smjeru i vrijeme udarca tijela o tlo. Vrijeme znamo iz prvog djela zadatka, a komponentu brzine možemo dobiti

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( (v_0 \cos \alpha \cdot t) \vec{j} + (z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k} \right).$$

Dobivamo komponente brzine su:  $v_y = v_0 \cos \alpha$  i  $v_z = v_0 \sin \alpha - gt$ .

$$D = y(t = t_1) = v_0 \cos \alpha \cdot t_1$$

$$D = y(t = 2,77 \text{ s}) = 20 \text{ ms}^{-1} \cos 30^\circ \cdot 2,77 \text{ s} = 47,98 \text{ m}$$

- c) Potražimo trenutak u kojem je komponenta brzine u  $z$ -smjeru  $v_z = 0$  jer je tada tijelo u na maksimalnoj visini  $z = z_{max}$ .

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos \alpha \vec{j} + (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{k}$$

komponente brzina su:  $v_y(t) = v_0 \cos \alpha$  i  $v_z(t) = v_0 \sin \alpha - gt$ . Nakon izjednačivanja komponente  $v_z$  s nulom izrazimo

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Potražimo maksimalnu visinu

$$z_{max} = z(t = t_H) = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t_H - \frac{1}{2} g t_H^2$$

$$z_{max} = z_0 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2$$

$$z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 15,1 \text{ m}$$

**3.2.** Položaj materijalne točke koja se giba po kružnici polumjera  $R = 2 \text{ m}$  opisuje funkcija

$$s(t) = s_0 + b(1 - e^{-ct}) \quad [m]$$

pri čemu su  $s_0 = 2 \text{ m}$ ,  $b = 8 \text{ m}$  i  $c = 0,2 \text{ s}^{-1}$ .

- Izračunajte  $s$  koordinatu i skicirajte položaj materijalne točke na kružnici u trenucima  $t = 0, 3, 6, 9, 30 \text{ s}$ .
- Gdje će se materijalna točka zaustaviti kad  $t \rightarrow \infty$ ?
- Izračunajte iznos i skicirajte vektor brzine u trenucima  $t = 3 \text{ s}$  i  $t = 6 \text{ s}$ .



a) Kako bismo izračunali  $s$  koordinatu uvrštavamo zadane trenutke u funkciju

$$s(t) = s_0 + b(1 - e^{-ct}).$$

$$s(t = 0 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 0s}) = 2 \text{ m}$$

$$s(t = 3 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 3s}) \approx 5,6095 \text{ m}$$

$$s(t = 6 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 6s}) \approx 7,5904 \text{ m}$$

$$s(t = 9 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 9s}) \approx 8,6776 \text{ m}$$

$$s(t = 30 \text{ s}) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot 30s}) \approx 9,9802 \text{ m}$$

b)  $s(t) = ?$  kada  $t \rightarrow \infty$

$$s(t \rightarrow \infty) = 2 \text{ m} + 8 \text{ m}(1 - e^{-0,2s^{-1} \cdot \infty})$$

c)

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

$$|\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(s_0 + b(1 - e^{-ct})) = bce^{-ct}$$

$$|\vec{v}(t = 3 \text{ s})| = 8 \text{ m} \cdot 0,2^{-1}e^{-0,6} \approx 0,8781 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 6 \text{ s})| = 8 \text{ m} \cdot 0,2^{-1}e^{-1,2} \approx 0,4819 \text{ ms}^{-1}$$

**3.3.** Za gibanje opisano u prethodnom zadatku izračunajte tangencijalno i radijalno ubrzanje te iznos ukupnog ubrzanja  $|\vec{a}(t)|$  materijalne točke u trenucima  $t = 3 \text{ s}$  i  $t = 6 \text{ s}$ .

Kako bismo mogli izračunati iznos ubrzanja moramo prvo izračunati tangencijalno  $\vec{a}_\tau$  i radijalno  $\vec{a}_r$  ubrzanje.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(s_0 + b(1 - e^{-ct})) = bce^{-ct}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(bce^{-ct}) = -bc^2e^{-ct}$$

$$\vec{a}_\tau = -bc^2e^{-ct}\vec{\tau}$$

Ostaje za izračunati radijalnu komponentu ubrzanja.

$$\vec{a}_r = \frac{1}{R} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{n}$$

$$\vec{a}_r = \frac{b^2c^2e^{-2ct}}{R} \vec{n}$$

Ukupno ubrzanje je:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_r = -bc^2e^{-ct}\vec{\tau} + \frac{b^2c^2e^{-2ct}}{R}\vec{n}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-bc^2e^{-ct})^2 + \left( \frac{b^2c^2e^{-2ct}}{R} \right)^2} = \sqrt{b^2c^4e^{-2ct} \left( 1 + \frac{b^2e^{-2ct}}{R^2} \right)}$$

$$|\vec{a}(t)| = bc^2e^{-ct} \sqrt{1 + \frac{b^2e^{-2ct}}{R^2}}$$

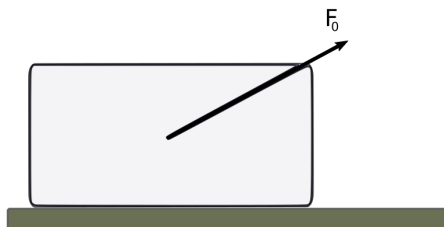
$$|\vec{a}(t = 3 \text{ s})| = 8 \text{ m} \cdot (0,2s^{-1})^2 \cdot e^{-0,2s^{-1} \cdot 3s} \sqrt{1 + \frac{(8 \text{ m})^2 e^{-2 \cdot 0,2s^{-1} \cdot 3s}}{(2 \text{ m})^2}} = 0,4236 \text{ ms}^{-2}$$

$$|\vec{a}(t = 6 \text{ s})| = 8m \cdot (0,2s^{-1})^2 \cdot e^{-0,2s^{-1} \cdot 6s} \sqrt{1 + \frac{(8m)^2 e^{-2 \cdot 0,2s^{-1} \cdot 6s}}{(2m)^2}} = 0,1509ms^{-2}$$



## DNAMIKA MATERIJALNE TOČKE

**4.1.** Vanjska sila iznosa  $\vec{F}_0 = 18 \text{ N}$  djeluje pod kutom od  $\alpha = 28^\circ$  prema horizontali na blok mase  $m = 3 \text{ kg}$ . Izračunajte iznos ubrzanja kada je kinetičko trenje između bloka i podloge  $\mu_k = 0,4$ .



$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Radimo projekcije na  $y$  i  $z$  os

$$\mathbf{y:} \quad \vec{F}_0 \cdot \vec{j} + \vec{G} \cdot \vec{j} + \vec{R} \cdot \vec{j} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{j} = m\vec{a} \cdot \vec{j} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{j}| \cos \alpha + |\vec{G}||\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} + |\vec{R}||\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} + |\vec{F}_{tr}||\vec{j}| \cos \pi = m|\vec{a}||\vec{j}| \cos 0$$

$$F_0 \cos \alpha + 0 + 0 - F_{tr} = ma \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z:} \quad \vec{F}_0 \cdot \vec{k} + \vec{G} \cdot \vec{k} + \vec{R} \cdot \vec{k} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{k} = m\vec{a} \cdot \vec{k} \quad / \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{k}| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + |\vec{G}||\vec{k}| \cos \pi + |\vec{R}||\vec{k}| \cos 0 + |\vec{F}_{tr}||\vec{k}| \cos \frac{\pi}{2} = m|\vec{a}||\vec{k}| \cos \frac{\pi}{2}$$

$$F_0 \sin \alpha - G + R = 0 \quad (3.2)$$

Iz gornjeg izraza možemo izraziti silu reakcije podloge  $R = mg - F_0 \sin \alpha$ , gdje smo za silu težu ( $G$ ) zapisali kao masu ( $m$ ) puta ubrzanje sile teže ( $g$ ).

Sila trenja koja nam se javlja u izrazu 3.1 možemo zapisati kao umnožak faktora kinetičkoga trenja i sili pritiska na podlogu, a sila pritiska na podlogu je jednaka težini tijela koja je po iznosu jednaka sili reakcije podloge tako pišemo:  $F_{tr} = \mu_k F_\perp = \mu_k T = \mu_k R$ . Silu reakcije podloge možemo zamjeniti izrazom koji smo dobili iz jednadžbe 3.2 i dobivamo konačni izraz:

$$F_0 \cos \alpha - \mu_k (mg - F_0 \sin \alpha) = ma$$

$$a = \frac{F_0}{m} (\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha) - \mu_k g$$

$$a = \frac{18N}{3kg} (\cos 28^\circ + 0,4 \sin 28^\circ) - 0,4 \cdot 9,81ms^{-2} = 2,5 ms^{-2}$$

**4.2.** Vanjska sila iznosa  $F_0 = 50 N$  djeluje na blok A mase  $m_A = 5 kg$  koji vuče blok B mase  $m_B = 3 kg$  (vidjeti skicu).

- Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga ako pretpostavimo da nema trenja.
- Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge  $\mu_k = 0,3$ .



Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A  
 $T = |\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}|$ .

- Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\text{blok B: } \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B = m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\text{blok A: } \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok B na os  $y$  i  $z$

$$\text{B,z: } 0 - G_B + R_B = 0 \Rightarrow R_B = G_B$$

$$\text{B,y: } T_{AB} + 0 + 0 = m_B a \Rightarrow T = m_B a$$

Isto radimo za blok A:

$$\text{A,z: } 0 + 0 + G_A + R_A = 0 \Rightarrow R_A = G_A$$

$$\text{A,y: } F_0 - T_{BA} + 0 + 0 = m_A a \Rightarrow F_0 - T = m_A a$$

U posljednji izraz možemo zamjeniti napetost niti  $T$  sa izrazom iz **B,y**

$$F_0 - m_B a = m_A a$$

$$m_A a + m_B a = F_0$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} = \frac{50N}{5kg + 3kg} = 6,25 ms^{-2}$$

$$T = m_B a = 3kg \cdot 6,25ms^{-2} = 18,75 N$$

- Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\text{blok A: } \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\text{blok B: } \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} = m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok A na os  $y$  i  $z$

$$\text{A,y: } F_0 - T_{BA} + 0 + 0 - F_{tr,A} = m_A a \Rightarrow F_0 - T - \mu_k R_A = m_A a$$

$$\text{A,z: } 0 + 0 + G_A + R_A + 0 = 0 \Rightarrow R_A = G_A$$

Dobivamo  $F_0 - T - \mu_k G_A = m_A a$ . Isto radimo za blok B:

$$\text{B,y: } T_{AB} + 0 + 0 - F_{tr,B} = m_B a \Rightarrow T - \mu_k R_B = m_B a$$

$$\mathbf{B, z:} \quad 0 - G_B + R_B = 0 \Rightarrow R_B = G_B$$

Dobivamo  $T = m_B a + \mu_k G_B$ .

$$F_0 - m_B a - \mu_k m_B g - \mu_k m_A g = m_A a$$

Posložimo i izrazimo ubrzanje

$$F_0 - \mu_k(m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g$$

$$a = \frac{50N}{5kg + 3kg} - 0,3 \cdot 9,81ms^{-2} = 3,307 \text{ ms}^{-2}$$

Još moramo izračunati napetost niti

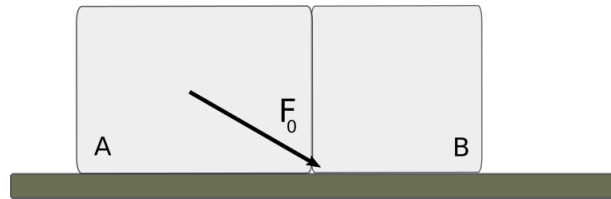
$$T = m_B(a + \mu_k g)$$

Ubrzanje možemo zamjeniti s dobivenim izrazom

$$T = m_B \left( \frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g + \mu_k g \right) = \frac{m_B F_0}{m_A + m_B}$$

$$T = 18,75 \text{ N}$$

**4.3.** Vanjska sila iznosa  $F_0 = 42 \text{ N}$  djeluje pod kutem od  $\vartheta = 30^\circ$  prema horizontali na blok A mase  $m_A = 5 \text{ kg}$  koji gura blok B mase  $m_B = 2 \text{ kg}$  (vidjeti skicu). Izračunajte iznos ubrzanja blokova A i B kada je kinetičko trenje između blokova i podloge  $\mu_k = 0,3$ .



Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A  
 $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}|$ .

Zapisujemo sve sile na tijelo A

$$\mathbf{A:} \quad \vec{F}_0 + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{F}_{BA} = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os  $z$  i  $y$ .

$$\mathbf{A, z:} \quad F_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) - m_A g + R_A + 0 + 0 = 0$$

Funkciju  $\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta)$  možemo raspisati preko funkcije zbroya

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \vartheta - \sin \frac{\pi}{2} \sin \vartheta = -\sin \vartheta$$

$$-F_0 \sin \vartheta - m_A g + R_A = 0 \Rightarrow R_A = m_A g + F_0 \sin \vartheta$$

Što ćemo ursti u izraz za  $y$  os.

$$\mathbf{A, y:} \quad F_0 \cos \vartheta + 0 + 0 - F_{tr,A} - F_{BA} = m_A a$$

$$F_0 \cos \vartheta - \mu_k R_A - F_{BA} = m_A a$$

$$F_0 \cos \vartheta - \mu_k(m_A g + F_0 \sin \vartheta) - F_{BA} = m_A a \quad (3.3)$$

Zapisujemo sve sile na tijelo B

$$\mathbf{B}: \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{F}_{AB} = m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os  $z$  i  $y$ .

$$\mathbf{B}, \mathbf{z}: -m_B g + R_B + 0 + 0 = 0 \Rightarrow R_B = m_B g$$

$$\mathbf{B}, \mathbf{y}: 0 + 0 - F_{tr,B} + F_{AB} = m_B a \Rightarrow F_{AB} = m_B a + \mu_k R_B$$

Spajanjem posljednja dva izraza dobivamo:

$$F_{AB} = m_B a + \mu_k m_B g. \quad (3.4)$$

U izraz 3.3 umjesto  $F_{BA}$  uvrstimo 3.4 dobivamo:

$$\begin{aligned} F_0 \cos \vartheta - \mu_k (m_A g + F_0 \sin \vartheta) - m_B a - \mu_k m_B g &= m_A a. \\ a(m_A + m_B) &= F_0 \cos \vartheta - \mu_k [(m_A + m_B)g + F_0 \sin \vartheta] \\ a &= \frac{F_0 \cos \vartheta - \mu_k [(m_A + m_B)g + F_0 \sin \vartheta]}{m_A + m_B} \\ a &= \frac{42N \cos 30^\circ - 0,3 [(5kg + 2kg)9,81ms^{-2} + 42N \sin 30^\circ]}{5kg + 2kg} = 1,353 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

**5.1.** Tijelo klizi po kosini nagiba  $\alpha = 35^\circ$ . Koeficijent kinetičkog trenja između tijela i kosine je  $\mu_k = 0,58$ . Izračunajte iznos ubrzanja tijela.

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m \vec{a}$$

Silu teže možemo rastaviti na dvije komponente okomito na kosinu  $\vec{G}_\perp = G \cos \alpha (-\vec{k})$  i paralelno  $\vec{G}_\parallel = G \sin \alpha \vec{j}$

$$G \sin \alpha \vec{j} - G \cos \alpha \vec{k} + R \vec{k} - F_{tr} \vec{j} = m a \vec{j} \quad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekcije na  $y$  i  $z$  os

$$G \sin \alpha - 0 + 0 - F_{tr} = m a \Rightarrow G \sin \alpha - \mu_k R = m a$$

$$0 - G \cos \alpha + R - 0 = 0 \Rightarrow R = G \cos \alpha$$

$$G \sin \alpha - \mu_k G \cos \alpha = m a$$

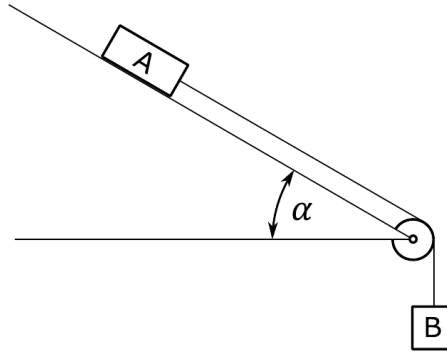
$$m g \sin \alpha - \mu_k m g \cos \alpha = m a$$

$$a = g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha)$$

$$a = 9,81ms^{-2}(\sin 35^\circ - 0,58 \cos 35^\circ) = 0,966 \text{ ms}^{-2}$$

**5.2.** Na slici dolje je sustav od dva utega mase  $m_A = 10 \text{ kg}$  i  $m_B = 5 \text{ kg}$ . Uteg B povezan je tankom nerastezljivom niti s utegom A. Kosina na kojoj se nalazi uteg A nagnuta je pod kutom  $\alpha = 30^\circ$ , a koeficijent kinetičkog trenja između kosine i utega A iznosi  $\mu_k = 0,2$ .

- Skicirajte problem i označite sve sile i smjer gibanja (vektor ubrzanja) cijelog sustava.
- Izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.
- Izračunajte iznos sile napetosti niti.



- a) Na tijelo A djeluju sila teže ( $\vec{G}_A$ ) prema dolje koju rastavljamo na dvije komponente: silu okomitu na kosinu ( $\vec{G}_{A,\perp}$ ) i silu usporednu s kosinom prema dolje ( $\vec{G}_{A,\parallel}$ ), zatim djeluje sila trenja ( $\vec{F}_{tr,A}$ ), sila reakcije podloge  $\vec{R}_A$  i sila kojom uteg B vuče uteg A (sila napetosti niti  $\vec{T}_{BA}$ ). Na uteg B djeluju samo dvije sile, sila teža prema dolje ( $\vec{G}_B$ ) i napetost niti prema gore ( $\vec{T}_{AB}$ ).

Sila napetosti niti kojom djeluje uteg A na uteg B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

- b) Za uteg B možemo pisati

$$\begin{aligned}\vec{G}_B + \vec{T}_{AB} &= m_B \vec{a}, \\ G_B - T &= m_B a \Rightarrow T = m_B(g - a).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na uteg A

$$\vec{G}_{A,\parallel} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A \vec{a}.$$

Radimo projekciju sila na smjer gibanja

$$G_{A,\parallel} - F_{tr,A} + T = m_A a$$

$$m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha + T = m_A a$$

Napetost niti možemo zamjeniti izrazom 3.5 i dobivamo

$$m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha + m_B g - m_B a = m_A a.$$

Nakom sređivanja dobivamo konačni izraz

$$(m_A \sin \alpha - \mu_k m_A \cos \alpha + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_A(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha) + m_B}{m_A + m_B} g.$$

Uvrstimo zadane vrijednosti

$$a = \frac{10 \text{ kg}(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ)}{10 \text{ kg} + 5 \text{ kg}} 9,81 \text{ ms}^{-2} = 5,41 \text{ ms}^{-2}$$

- c) Kako bismo dobili iznos sile napetosti niti uvrštavamo dobivenu akceleraciju u izrac 3.5

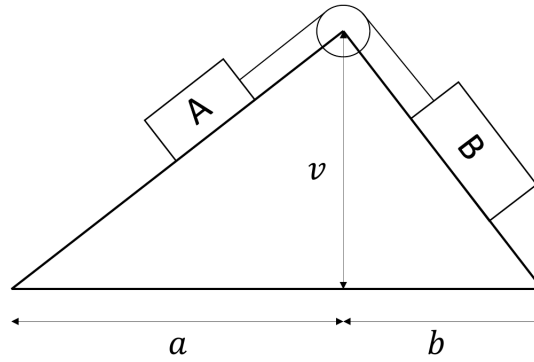
$$T = 5 \text{ kg}(9,81 \text{ ms}^{-2} - 5,41 \text{ ms}^{-2}) = 22 \text{ N}$$

**5.3.** Koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge je  $\mu_k = 0,2$ , a dimenzije i mase su:  $a = 5 \text{ m}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ,  $v = 4 \text{ m}$ ,  $m_A = 10 \text{ kg}$  i  $m_B = 15 \text{ kg}$ . Koliki je iznos ubrzanja blokova prikazanih na slici?

---

Sila napetosti niti kojom djeluje blok A na blok B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje





na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

Kako bismo mogli rastaviti sile moramo izračunati kuteve  $\alpha$  i  $\beta$

$$\tan \alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{4m}{5m} = 38,66^\circ,$$

$$\tan \beta = \frac{v}{b} \Rightarrow \beta = \arctan \frac{4m}{3m} = 53,13^\circ.$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na blok A i množimo skalarom s  $\vec{j}$

$$\vec{G}_{A,\parallel} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A \vec{a} \quad / \cdot \vec{j}$$

Dobivamo sile u usporedne s lijevim nagibom kosine

$$-m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha + T = m_A a.$$

Izrazimo napetosti niti

$$T = m_A g \sin \alpha + \mu_k m_A g \cos \alpha + m_A a. \quad (3.6)$$

Isto radimo za blok B

$$\begin{aligned} \vec{G}_{B,\parallel} + \vec{G}_{B,\perp} + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{T}_{AB} &= m_B \vec{a} \quad / \cdot \vec{j} \\ m_B g \sin \beta - \mu_k m_B g \cos \beta - T &= m_B a \end{aligned} \quad (3.7)$$

Uvrštavamo izraz 3.6 za napetost niti u izraz 3.7

$$m_B g \sin \beta - \mu_k m_B g \cos \beta - m_A g \sin \alpha - \mu_k m_A g \cos \alpha - m_A a = m_B a.$$

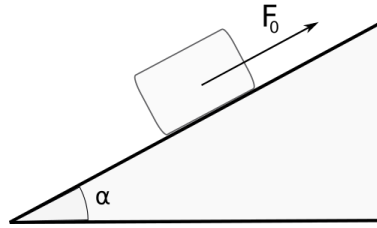
Sređujemo izraze:

$$\begin{aligned} g [m_B (\sin \beta - \mu_k \cos \beta) - m_A (\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)] &= (m_A + m_B) a \\ a &= \frac{m_B (\sin \beta - \mu_k \cos \beta) - m_A (\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)}{m_A + m_B} g \\ a &= \frac{15kg (\sin 53,13^\circ - 0,2 \cos 53,13^\circ) - 10kg (\sin 38,66^\circ + 0,2 \cos 38,66^\circ)}{10kg + 15kg} 9,81 \text{ ms}^{-2} \\ a &= 0,94 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

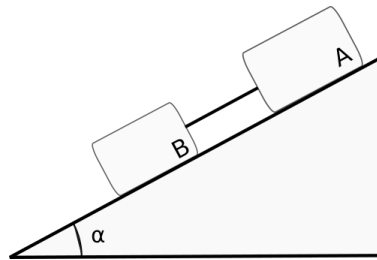
### Zadaci za samostalni rad

**5.4.** Na blok mase  $m = 2 \text{ kg}$  djelujemo silom  $F = 25,0 \text{ N}$  usporedno s nagibom kosine (kao na slici). Ako je kosina nagiba  $\alpha = 39^\circ$ , a koeficijent kinetičkog trenja između bloka i podloge  $\mu_k = 0,25$  koliko je ubrzanje bloka?

$$a = 4,420 \text{ ms}^{-2}$$



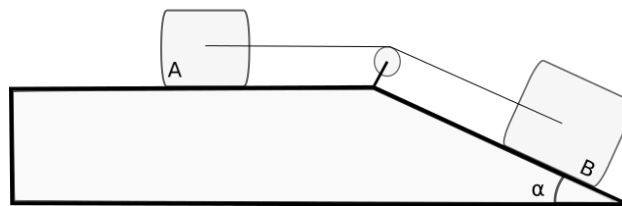
**5.5.** Dva bloka mase  $m_A = 10 \text{ kg}$  i  $m_B = 8 \text{ kg}$  spojena su nerastezljivim užetom i položena na kosinu nagiba  $\alpha = 33^\circ$  kao na slici. Ako je koeficijent kinetičkog trenja između bloka A i kosine je  $\mu_{kA} = 0,4$ , a između bloka B i kosine je  $\mu_{kB} = 0,2$  izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.



$$a = 2,783 \text{ m s}^{-2}$$

**5.6.** Blok  $m_A = 7 \text{ kg}$  položen je na ravni dio klina, a blok  $m_B = 15 \text{ kg}$  položen je na kosi dio klina nagiba  $\alpha = 37^\circ$ .

- Izračunajte iznos akceleracije sustava ako pretpostavimo da nema trenja.
- Izračunajte iznos akceleracije sustava kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge  $\mu_k = 0,1$ .



- $a = 4,025 \text{ m s}^{-2}$
- $a = 3,803 \text{ m s}^{-2}$



## ZAKONI OČUVANJA

**6.1.** Materijalna točka pomaknuta je u  $xy$ -ravnini iz točke A čiji je vektor položaja  $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j}$  [m] u točku B kojoj je vektor položaja  $\vec{r}_B = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  [m]. Tijekom pomaka na nju je djelovala stalna sila  $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  [N]. Izračunajte rad sile  $\vec{F}$ .

$$W_{F,AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \text{konst.} \Rightarrow W_{F,AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta\vec{r} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 5\vec{j}$$

$$W_{F,AB} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (\vec{i} - 5\vec{j}) = -17 \text{ J}$$

**6.2.** Tijelo počinje klizati iz stanja mirovanja na visini od 0,8 metara na vrhu kosine. Kolika je brzina tijela na dnu kosine ako je nagib kosine  $30^\circ$ , koeficijent kinetičkog trenja 0,43?

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,G}(B) = E_k(A) + E_{p,G}(A) + W_{AB}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$

Ostalo je za izračunati rad sile trenja

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}_{tr}| |\Delta\vec{r}| \cos \angle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r}) = F_{tr} \Delta r \cos(\pi)$$

Pomak tijela  $\Delta r$  možemo izraziti iz visine kosine i kuta  $\Delta r = H / \sin \vartheta$ . Potrebno je još zapisati silu trenja koja ovisi o kinematičkom koeficijentu trenja i sili kojom tijelo pritišće podlogu  $F_{tr} = \mu_k mg \cos \vartheta$ .

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = -\mu_k mg \cos \vartheta \frac{H}{\sin \vartheta} = -\mu_k mg H \cot \vartheta$$

Vraćamo se u zakon očuvanja energije

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH - \mu_k mg H \cot \vartheta$$

$$v = \sqrt{2gH(1 - \mu_k \cot \vartheta)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,8 \text{ m} (1 - 0,43 \cdot \cot 30^\circ)} = 2,0 \text{ ms}^{-1}$$

**6.3.** Konstanta opruge koja se koristi za ispucavanje kuglice flipera mase 80 grama je  $138 \text{ Nm}^{-1}$ . Ko-

liko centrimetara treba povući ručicu flipera (tj. stisnuti oprugu) da bi se kuglica ispalila brzinom iznosa  $5\text{ms}^{-1}$ ?

---

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,el}(B) = E_k(A) + E_{p,el}(A) + W_{AB}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2 + 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2$$

$$\Delta x = v\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\Delta x = 5\text{ms}^{-1}\sqrt{\frac{0,08\text{kg}}{138\text{Nm}^{-1}}} = 0,12\text{ m}$$

**6.4.** S vrha strme ceste dugačke  $100\text{ m}$ , visinske razlike  $20\text{ m}$ , spuštaju se saonice mase  $5\text{ kg}$ . Izračunajte iznos sile trenja koja se javlja pri spuštanju niz brijeg ako saonice na dnu brijega imaju brzinu  $16\text{ ms}^{-1}$ . Početna brzina saonice je nula.

---

$$F_{tr} = 3,41\text{ N}$$

**6.5.** Iz stanja mirovanja na visini  $h = 0,8\text{ m}$  na vrhu kosine tijelo počinje kliziti niz kosinu te kad dođe do dna kosine nastavi još četiri metra kliziti horizontalno prije nego se zaustavi. Koeficijent kinetičkog trenja  $\mu_k$  između tijela i podloge je isti kad tijelo klizi niz kosinu i horizontalno. Koliki je  $\mu_k$  ako je nagib kosine  $\vartheta = 20^\circ$ ?

---

$$\mu_k = 0,129$$

**6.6.** Materijalna točka mase  $m = 0,5\text{ kg}$  giba se u  $xy$ -ravnini iz točke A čiji je vektor položaja  $\vec{r}_A = 11\vec{i} - 9\vec{j}\text{ [m]}$  u točku B kojoj je vektor položaja  $\vec{r}_B = -7\vec{i} + 12\vec{j}\text{ [m]}$ . Na putanji do točke B na nju djeluje rezultantna sila  $\vec{F}_R = -3\vec{i} + \vec{j}\text{ [N]}$ . Izračunajte kolika će biti kinetička energija u točki B ako je brzina u točki A bila  $\vec{v}_A = 3\vec{i} + 4\vec{j}\text{ [ms}^{-1}\text{]}$ ?

---

$$E_k(B) = 81,25\text{ J}$$

**6.7.** Dječak s mosta visokog  $5\text{ m}$  iznad rijeke baci loptu vertikalno u zrak brzinom  $11\text{ kmh}^{-1}$ . Na kojoj visini iznad rijeke bi potencijalna energija bila jednaka kinetičkoj, kad bi mogli zanemariti otpor zraka?

---

$$h = 2,738\text{ m}$$

**6.8.** Tijelo mase  $10\text{ g}$  nalazi se na vertikalno postavljenoj opruzi u stanju ravnoteže. Konstanta opruge je  $100\text{ Nm}^{-1}$  pa se deformacija opruge zbog težine tijela (oko  $1\text{ mm}$ ) može slobodno zanemariti. Vanjska sila oprugu stisne za  $5\text{ cm}$ . Taj novi položaj tijela uzima se kao početna visina  $h_1 = 0$ . Do koje maksimalne visine  $h_2$  ovako stisnuta opruga može izbaciti tijelo? Otpor zraka se zanemaruje.

---


$$h_2 = 1,274$$

**7.1.** Automobil mase  $m = 2000 \text{ kg}$  giba se uz kosinu nagiba  $\vartheta = 15^\circ$  stalnom brzinom iznosa  $60 \text{ kmh}^{-1}$ . Ukupna sila otpora (trenje kotrljanja i otpor zraka) iznosi  $|\vec{F}_{otp}| = 2000 \text{ N}$ , a visina kosine je  $h = 60 \text{ m}$ . Izračunajte:

- a) pogonsku silu automobila;
  - b) rad pogonske sile od početka do kraja kosine;
  - c) snagu automobila.
- 

- a) Ako je brzina stalna tada je rezultantna sila na automobil jednaka je nuli;  $\vec{v} = \text{konstanta} \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{0}$ .

$$\vec{F} + \vec{F}_{otp} + \vec{G}_{||} + \vec{G}_{\perp} + \vec{R} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$F - F_{otp} - mg \sin \vartheta = 0$$

$$F = F_{otp} + mg \sin \vartheta$$

$$F = 2000 \text{ N} + 2000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \sin 15^\circ = 7078,03 \text{ N}$$

- b)

$$W = \vec{F} \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos 0^\circ$$

Pomak automobila možemo izraziti preko visine kosine i kuta

$$W = F \frac{h}{\sin \vartheta} = 7078,03 \frac{60 \text{ m}}{\sin 15^\circ} = 1640844 \text{ J}$$

- c)

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$$

$$\text{Iznos brzine automobila je } v = 60 \text{ kmh}^{-1} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16,67 \text{ m s}^{-1}$$

$$P = 7078,03 \text{ N} \cdot 16,67 \text{ m s}^{-1} = 117967 \text{ W}$$

**7.2.** Ledolomac mase 6000 tona s ugašenim motorom nalijeće brzinom  $30 \text{ kmh}^{-1}$  na santu leda koja se giba brzinom  $2 \text{ kmh}^{-1}$  u istom smjeru. Poslije sudara zajedno se kreću brzinom  $5 \text{ kmh}^{-1}$ . Kolika je masa sante leda?

---

Zapisujemo zakona očuvanja količine gibanja i izražavamo masu sante leda

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$m_2 v_2 - m_2 v' = m_1 v' - m_1 v_1$$

$$m_2 = \frac{v' - v_1}{v_2 - v'} m_1$$

$$m_2 = \frac{5 \text{ kmh}^{-1} - 30 \text{ kmh}^{-1}}{2 \text{ kmh}^{-1} - 5 \text{ kmh}^{-1}} 6000 \text{ t} = 50000 \text{ t}$$

**7.3.** Klizač mase  $70 \text{ kg}$  koji stoji na ledu odbacuje od sebe u horizontalnom smjeru predmet mase  $3 \text{ kg}$  brzinom od  $8 \text{ m s}^{-1}$ . Koliko će se klizač pomaknuti, ako je koeficijent kinetičkog trenja između leda i klizaljki 0,02?

---

Prije početka gibanja klizač miruje zajedno s predmetom  $v' = 0$  stoga možemo izraziti iz zakona očuvanja količine gibanja brzinu klizača na početku njegovog gibanja

$$(m_1 + m_2)v' = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2$$

Zapisujemo zakon očuvanja energije za klizača

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A) + W_{AB}.$$

Budući da nema promjene visine potencijalna energija klizača je jednaka nuli, a kako na kraju svojega gibanja staje njegova kinetička energija  $E_k(B)$  će također biti jednaka nuli

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + F_{tr}\Delta r \cos \angle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r})$$

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + F_{tr}\Delta r \cos \pi$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\mu_k g} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2\mu_k m_1^2 g}$$

$$\Delta r = \frac{(3 \text{ kg})^2 \cdot (8 \text{ ms}^{-1})^2}{2 \cdot 0,02 \cdot (70 \text{ kg})^2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = 0,3 \text{ m}$$

**7.4.** Kolikom se maksimalnom brzinom izraženom u kilometrima na sat može gibati automobil mase 1400 kg i snage 45 kW po cesti na kojoj je koeficijent kinetičkog trenja 0,08? (Otpor zraka se zanemaruje.)

$$v_{max} = 147,44 \text{ kmh}^{-1}$$

**7.5.** Automobil mase 1500 kg koji se gibao brzinom 45 kmh<sup>-1</sup> udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 kmh<sup>-1</sup>. U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

$$F_{tr} = 6093,75$$

**7.6.** Automobil mase 1500 kg koji se gibao brzinom 45 kmh<sup>-1</sup> udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 kmh<sup>-1</sup>. U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

$$F_{tr} = 6093,75$$

## KRUTO TIJELO

**8.1.** Kotač promjera  $40\text{ cm}$  vrti se oko nepomične osi tako da se kut zakreta mijenja u vremenu prema sljedećem izrazu:

$$\varphi(t) = 5t + 3t^2 + 4t^4 \text{ [rad]}.$$

Izračunajte:

- Kutnu brzinu vrtnje u trenutku  $t = 0,5\text{ s}$ .
- Obodnu brzinu ruba kotača u trenutku  $t = 0,5\text{ s}$ .
- Kutno ubrzanje u trenutku  $t = 0,5\text{ s}$ .
- Koliko okretaja napravi kotač od  $t = 0\text{ s}$  do  $t = 0,5\text{ s}$ .

- $$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 3t^2 + 4t^4)$$

$$\omega(t) = 5 + 6t + 16t^3$$

$$\omega(t = 0,5\text{ s}) = 5 + 6 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,5^3 = 10\text{ rads}^{-1}$$
- $$v(t) = \omega(t)r = (5 + 6t + 16t^3)r$$

$$v(t = 0,5\text{ s}) = \omega(t = 0,5)r = 10\text{ rads}^{-1}0,2\text{ m} = 2\text{ ms}^{-1}$$
- $$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 6t + 16t^3) = 6 + 48t^2$$

$$\alpha(t = 0,5\text{ s}) = 6 + 48 \cdot 0,5^2 = 18\text{ rads}^{-2}$$
- Označimo broj okretaja s  $n$

$$n2\pi = \Delta\varphi$$

$$n = \frac{1}{2\pi}(\varphi(0,5\text{ s}) - \varphi(0\text{ s}))$$

$$n = \frac{1}{2\pi}(5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2 + 4 \cdot 0,5^4 - 0) = 0,557\text{ okretaja}.$$

**8.2.** Homogeni aluminijski valjak polumjera  $8\text{ cm}$  i visine  $32\text{ cm}$  rotira oko osi koja je paralelna s osi valjka, a prolazi kroz plašt. Odredite kinetičku energiju rotacije ako napravi  $105$  okretaja u minuti. Gustoća aluminijske je  $2,7\text{ gcm}^{-3}$ .

Kako bismo izračunali kinetičku energiju rotacije  $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$  moramo znati moment tromosti oko osi rotacije i iznos kutne brzine. Kako bismo odredili moment tromosti koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I = I_T + Md^2$$

gdje je  $I_T$  moment tromosti oko osi koja prolazi kroz centar mase i za valjak iznosi  $I_T = \frac{1}{2}MR^2$ ,  $M$  je u ovom slučaju masa valjka, a  $d$  je udaljenost između osi koja prolazi centrom mase i osi rotacije. Tako da moment tromosti možemo pisati

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$



Masu valjka možemo izraziti preko gustoće i volumena valjka ( $V = R^2\pi h$ ),

$$I = \frac{3}{2}\pi\rho h R^4.$$

Ostalo je izračunati kutnu brzinu koja je broj okretaja u sekunti puta  $2\pi$

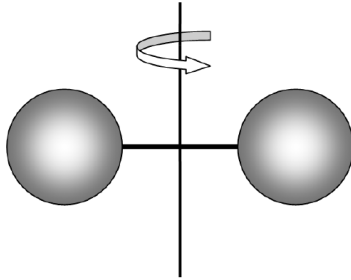
$$\omega = \frac{105}{60} 2\pi \text{ rad} = 10,995 \text{ rads}^{-1} \simeq 11 \text{ rads}^{-1}$$

. Sada možemo izračunati kinetičku energiju rotacije:

$$E_k = \frac{3}{4}\pi\rho h R^4 \omega^2 = \frac{3}{4}\pi 2700 \text{ kgm}^{-3} (0,08 \text{ m})^4 0,32 \text{ m} (11 \text{ rads}^{-1})^2$$

$$E_k = 10,0895 \text{ J}$$

**8.3.** Dvije homogene kugle gustoće  $2700 \text{ kgm}^{-3}$  i polumjera  $4 \text{ cm}$  spojene su štapom zanemarive mase i duljine  $10 \text{ cm}$  (vidi skicu). Koliki je moment susutava oko osi koja prolazi polovištem štapa? Moment tromosti kugle oko osi koja prolazi kroz središte je  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .



Moment tromosti sustava  $I$  je zbroj momenta tromosti svake kugle,  $I = 2I_{kugla}$ . Kako bismo odredili moment tromosti kugle koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I_{kugla} = I_T + Md^2$$

$$I_{kugla} = \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{L}{2} + R\right)^2$$

gdje je  $M$  masa jedne kugle,  $R$  je njezin radijus, a  $L$  je udaljenost između kugli. Udaljenost osi rotacije od centra mase kugle je  $d = \frac{L}{2} + R$ . Izrazimo masu pomoću gustoće i volumena kugle ( $V = \frac{4}{3}R^3\pi$ ) i dobivamo moment tromosti jedne kugle:

$$I_{kugle} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \left[ \frac{2}{5}R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2 \right].$$

Moment tromosti sustava je:

$$I = 2I_{kugle} = \frac{8}{3}\pi 2700 \text{ kgm}^{-3} (0,04 \text{ m})^3 \left[ \frac{2}{5}(0,04 \text{ m})^2 + \left(\frac{0,1 \text{ m}}{2} + (0,04 \text{ m})\right)^2 \right]$$

$$I = 0,01265 \text{ kgm}^2.$$

**8.4.** Kotač se vrti oko nepomične osovine tako da mu se kut zakreta mijenja u vremenu prema izrazu

$$\varphi(t) = te^{-0,1t} [\text{rad}].$$

Izračunajte:

- a) Kutnu brzinu vrtnje u trenutku  $t = 3 \text{ s}$ .
- b) Kutno ubrzanje u trenutku  $t = 3 \text{ s}$ .

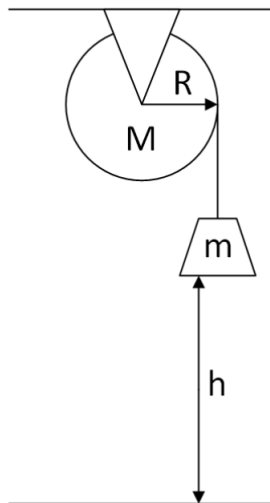
a)  $\omega(t = 3 \text{ s}) = 0,519 \text{ rad/s}$

b)  $\alpha(t = 3 \text{ s}) = -0,126 \text{ rad/s}^2$

**8.5.** Koliko okretaja u minuti treba rotirati homogeni mjedeni valjak oko osi koja je paralelna s osi valjka a prolazi kroz plašt, da bi mu kinetička energija rotacije bila  $40 \text{ J}$ ? Visina valjka je  $30 \text{ cm}$ , a polumjer  $10 \text{ cm}$ . Gustoća mjedi je  $8,5 \text{ g/cm}^3$ .

$\nu = 77,92 \text{ okr/min}$

**8.6.** Na valjak polumjera  $R$  i mase  $M$  koji se može rotirati oko horizontalne osi namotana je nit na koju je obješen uteg mase  $m$  (vidi skicu). Kolika će biti kutna brzina valjka u trenutku kad uteg padne s visine  $h$ ?



$$\omega = \sqrt{\frac{4mgh}{R(2m+M)}}$$



Kod rješavanja zadataka koristite se sljedećim numeričkim vrijednostima:

- gravitacijska konstanta:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
- masa Zemlje:  $M_Z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- polumjer Zemlje:  $R_Z = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
- iznos ubrzanja slobodnog pada:  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

**9.1.** Odredite visinu iznad površine Zemlje na kojoj će na astronauta djelovati jakost gravitacijskog polja po iznosu jednaka iznosu ubrzanja  $a = 0,3g$ .

Jakost gravitacijskog polja Zemlje na visini  $h$  možemo zapisati

$$G(h) = \gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Tražimo za koju visinu  $h$  vrijedi  $G(h) = 0,3g$ .

$$\gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = 0,3g$$

$$(R_Z + h)^2 = \frac{\gamma M_Z}{0,3g}$$

$$h = \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{0,3g}} - R_Z$$

$$h = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{0,3 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}} - 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 5,271 \cdot 10^6 \text{ m}$$

**9.2.** Umjetni satelit giba se oko Zemlje po kružnoj putanji s periodom vrtnjem  $T = 132 \text{ min}$ . Koliki je polumjer putanje satelita?

$$F_{cp} = F_{gr}$$

$$ma_{cp} = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

Centripetalnu akceleraciju možemo zapisati preko perioda vrtnje

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma M_Z \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \left(\frac{7920 \text{ s}}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = 8\,589\,592,25 \text{ m}$$

**9.3.** Izračunajte period kruženja satelita po kružnoj putanji oko Zemlje, ako je iznos jakosti gravitacijskog polja Zemlje na putanji satelita  $3 \text{ ms}^{-2}$ ?

---

$$G = \gamma \frac{M_Z}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}$$

Gravitacijsko polje drži satelit na kružnom gibanju

$$G = a_{cp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{G}}$$

Uvrštavanjem prvog izraza u drugi dobivamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G} \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3 \text{ ms}^{-2}} \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{3 \text{ ms}^{-2}}}}$$

$$T = 12\,318,16 \text{ s} = 205 \text{ min } 18,16 \text{ s}$$

**9.4.** Na pravcu koji povezuje zvijezdu A i zvijezdu B, koja ima pet puta manju masu od zvijezde A, postoji točka u kojoj bi na svemirski brod djelovale po iznosu iste privlačne sile od zvijezde A i od zvijezde B. Na kojoj udaljenosti od zvijezde A je ta točka, ako je udaljenost među zvijezdama  $9,46 \cdot 10^{12} \text{ m}$ ?

---

$$r = 6,537 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

**9.5.** Jakost gravitacijskog polja na površini Marsa je  $3,71 \text{ ms}^{-2}$ . Izračunajte srednju gustoću Marsa pod pretpostavkom da je Mars homogena kugla polumjera  $3389 \text{ km}$ .

---

$$\rho = 3918,2 \text{ kgm}^{-3}$$

**9.6.** Koliki je period satelita koji kruži  $300 \text{ km}$  iznad Zemljine površine?

---

$$T = 90 \text{ min} 20,7 \text{ s}$$

**10.1.** Izračunajte gravitacijsku potencijalnu energiju  $E_{p,gr}$  i potencijalnu energiju u polju sile teže  $E_{p,G}$  mase  $m = 1 \text{ kg}$  u gravitacijskom polju Zemlje kada se:

- a) masa  $m$  nalazi na površini Zemlje;
- b) masa  $m$  je na visini  $1 \text{ km}$  nad površinom Zemlje;
- c) masa  $m$  je na visini  $1000 \text{ km}$  nad površinom Zemlje;
- d) usporedite rezultate!

- a)  $h = 0$

$$E_{p,g}(A) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z}$$

$$E_{p,g}(A) = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,371 \cdot 10^6 \text{ m}} = -62 \ 606 \ 498,2 \text{ J}$$

$$E_{p,G} = mgh = 0 \text{ J}$$

- b)  $h = 10^3 \text{ m}$

$$E_{p,g}(B) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(B) = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,372 \cdot 10^6 \text{ m}} = -62 \ 596 \ 672,9 \text{ J}$$

$$E_{p,g}(B) - E_{p,g}(A) = 9 \ 825,3$$

$$E_{p,G} = mgh = 9 \ 810 \text{ J}$$

- c)  $h = 10^6 \text{ m}$

$$E_{p,g}(C) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(C) = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,372 \cdot 10^6 \text{ m}} = -54 \ 112 \ 874,8 \text{ J}$$

$$E_{p,g}(C) - E_{p,g}(A) = 8 \ 493 \ 623,4$$

$$E_{p,G} = mgh = 9 \ 810 \ 000 \text{ J}$$

**10.2.** Do koje maksimalne visine će se dići metak ispaljen s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa  $715 \text{ ms}^{-1}$ ? Masa Mjeseca je  $7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ , a polumjer Mjeseca  $1737 \text{ km}$ .

Koristimo zakon očuvanja energije. Metak na površini Mjeseca ima gravitacijsku potencijalnu energiju i kinetičku energiju, kada se popne na visinu  $h$  ima samo gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{p,g}(h=0) + E_k(h=0) = E_{p,g}(h) + E_k(h)$$

$$-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\gamma \frac{M_M m}{R_M + h} + 0$$

$$R_M + h = \frac{-\gamma M_M m}{-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} v_0^2}$$

$$h = \frac{-2\gamma M_M R_M}{-2\gamma M_M + v_0^2 R_M} - R_M$$

$$h = \frac{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg} 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}}{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg} + (715 \text{ ms}^{-1})^2 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}} - 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 173\,239,9\text{ m}$$

**10.3.** Prema Zemlji se iz velike ("beskonačne") udaljenosti početnom brzinom iznosa  $v_0 = 3\text{ km s}^{-1}$  duž pravca koji prolazi njezinim središtem giba meteor. Koliki će biti iznos brzine meteora u trenutku kada se meteor nađe na udaljenosti  $r = 6R_Z$  od središta Zemlje? Što se događa s njegovom brzinom u odnosu na početnu? Koji je razlog tome?

---

Zapisujemo zakon očuvanja energije

$$E_{p,g}(\infty) + E_k(\infty) = E_{p,g}(6R) + E_k(6R).$$

U beskonačnosti tijelo nema gravitacijsku potencijalnu energiju tako da pišemo

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma\frac{M_Z m}{6R_Z} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = v_0^2 + \gamma\frac{M_Z}{3R_Z}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \gamma\frac{M_Z}{3R_Z}}$$

$$v = \sqrt{(3000\text{ m s}^{-1})^2 + 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{3 \cdot 6,371 \cdot 10^6\text{ m}}} = 5465,2\text{ m s}^{-1}$$

**10.4.**

Izračunajte 2. kozmičku brzinu Merkura pod pretpostavkom da je Merkur homogena kugla polumjera  $2440\text{ km}$  i srednje gustoće  $5,43\text{ g/cm}^3$ . Gravitacijska konstanta je  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ .

---

$$v_2 = 4,25\text{ km s}^{-1}$$

**10.5.**

Tijelo je ispaljeno s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa  $3\text{ km s}^{-1}$ . Koliki će biti iznos brzine toga tijela kada se ono nađe u „beskonačnosti“? Masa Mjeseca je  $7,34 \cdot 10^{22}\text{ kg}$ , a polumjer  $1737\text{ km}$ .

---

$$v = 1833,8\text{ m s}^{-1}$$

**10.6.**

Izračunajte iznos brzine kojom bi predmet pušten iz stanja mirovanja na visini od  $10^4\text{ km}$  iznad površine Zemlje udario o tlo (kada ne bi bilo atmosfere)?

---

$$v = 8745,5\text{ m s}^{-1}$$

## 7.1 MATEMATIČKI TEMELJI

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$$

$$\text{b) } \vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{c) } \vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73,4^\circ$$

$$\text{c) } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \sin(73,4^\circ)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \approx 13,42$$

d)  $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6 - 6) - \vec{j}(3 - (-3)) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$



e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{144 + 36} \Rightarrow |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 + 6) - \vec{j}(-3 - 3) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

a)  $0,1746 \text{ rad} = 0,1746 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 10,00^\circ$

b)  $0,016 \text{ kN} = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \text{ N} = 1,6 \cdot 10^1 \text{ N} =$   
 $= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ mN}$

c)  $18,3 \text{ MJ} = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,83 \cdot 10^7 \text{ J}$

d)  $100 \mu\text{g} = 10^2 \cdot 10^{-6} \text{ g} = 10^{-4} \text{ g} =$   
 $= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \text{ g} = 10^{-7} \text{ kg}$

e)  $8,2 \text{ kmh}^{-1} = 8,2 \cdot \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{82}{36} \text{ ms}^{-1} = 2,28 \text{ ms}^{-1}$

f)  $36 \text{ dana} = 36 \cdot 24 \text{ h} = 36 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 51840 \text{ min}$

g)  $2 \text{ cm}^2 = 2 (\text{cm})^2 = 2 (10^{-2}\text{m})^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,0002 \text{ m}^2$

h)  $10 \text{ L} = 10 \text{ dm}^3 = 10 (\text{dm})^3 = 10 (10^{-1}\text{m})^3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^{-2} \text{ m}^3 = 0,01 \text{ m}^3$

## 7.2 KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

Uvrstimo zadane vrijednosti u  $\vec{r}(t)$ .

$$\vec{r}(t) = (30\text{ms}^{-1}t)\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}t^2)\vec{k}$$

a)  $\vec{r}(t = 0, 0\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}0\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(0\text{s})^2)\vec{k} = 0\text{m}\vec{j} + 80\text{m}\vec{k}$

$$\vec{r}(t = 0, 5\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}0,5\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(0,5\text{s})^2)\vec{k} = 15\text{m}\vec{j} + 78,75\text{m}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 1, 0\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}1,0\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(1,0\text{s})^2)\vec{k} = 30\text{m}\vec{j} + 75\text{m}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 1, 5\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}1,5\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(1,5\text{s})^2)\vec{k} = 45\text{m}\vec{j} + 68,75\text{m}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 2, 0\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}2,0\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(2,0\text{s})^2)\vec{k} = 60\text{m}\vec{j} + 60\text{m}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 2, 5\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}2,5\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(2,5\text{s})^2)\vec{k} = 75\text{m}\vec{j} + 48,75\text{m}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 3, 0\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}3,0\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(3,0\text{s})^2)\vec{k} = 90\text{m}\vec{j} + 35\text{m}\vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 3, 5\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}3,5\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(3,5\text{s})^2)\vec{k} = 105\text{m}\vec{j} + 18,75\text{m}\vec{k}$$

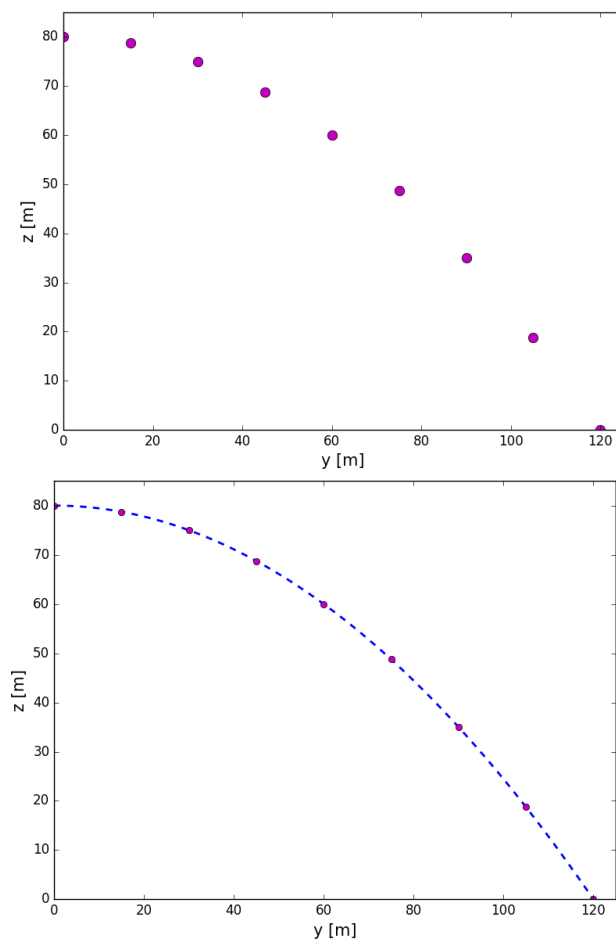
$$\vec{r}(t = 4, 0\text{s}) = (30\text{ms}^{-1}4,0\text{s})\vec{j} + (80\text{m} - \frac{1}{2}10\text{ms}^{-2}(4,0\text{s})^2)\vec{k} = 120\text{m}\vec{j} + 0\text{m}\vec{k}$$

b)

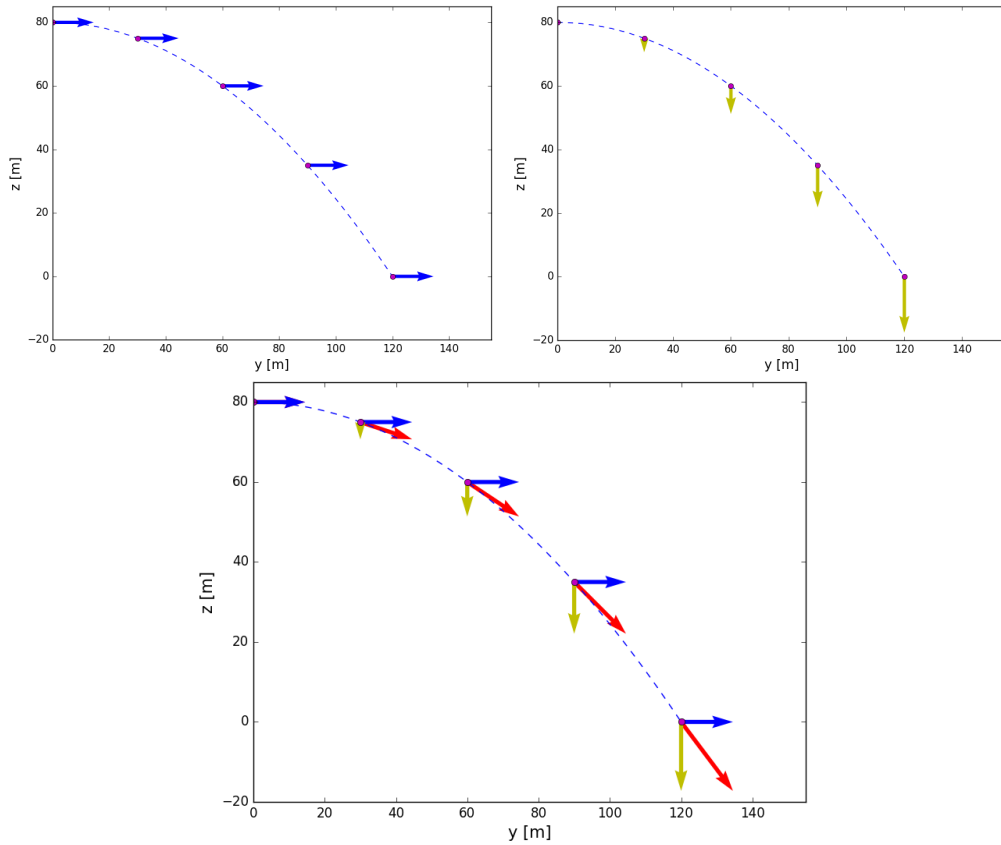
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left( z_0\vec{k} + v_0t\vec{j} - \frac{1}{2}gt^2\vec{k} \right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$



Slika 7.1: (*lijevo*) Položaj MT za svakih 0,5 s. (*desno*) Putanja MT do udarca o tlo.



Slika 7.2: (gore-lijevo) Komponenta brzine u  $y$ -smjeru. (gore-desno) Komponenta brzine u  $z$ -smjeru. (dolje) Brzina tijela s komponentama.

$$c) \vec{v}(t) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2} t \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-2} 1s \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 1s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 10 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 2s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 20 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 3s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 30 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 4s) = 30 \text{ ms}^{-1} \vec{j} - 40 \text{ ms}^{-1} \vec{k}$$

$$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-10 \text{ ms}^{-1})^2} = 31,623 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-20 \text{ ms}^{-1})^2} = 36,055 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-30 \text{ ms}^{-1})^2} = 42,43 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30 \text{ ms}^{-1})^2 + (-40 \text{ ms}^{-1})^2} = 50,0 \text{ ms}^{-1}$$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (v_0 \vec{j} - gt \vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = -g \vec{k} = -9,81 \text{ ms}^{-2} \vec{k} \approx -10 \text{ ms}^{-2} \vec{k}$$

a) U relaciju  $\vec{r}(t)$  potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4 \vec{i} + 4 \cdot 0,5^2 \vec{j} + 3 \cdot 0,5 \vec{k}$$

$$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375 \vec{i} + 1 \vec{j} + 1,5 \vec{k} \text{ [m]}.$$

b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je derivirati po vremenu  $\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k})$$

$$\vec{v}(t) = 24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3\vec{i} + 8 \cdot 0,5\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v}(t = 0,5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} [ms]$$

$$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83 [ms]$$

c)  $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = 72t^2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{a}(t = 0,5) = 18\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7 [ms^{-2}].$$

Rješavamo inverzni problem i tražimo  $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j}) d\tau$$

Trebamo riješiti integral  $I = \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j}) d\tau$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t 4\tau\vec{i} d\tau + \int_0^t 3\tau^2\vec{j} d\tau = 4\vec{i} \int_0^t \tau d\tau + 3\vec{j} \int_0^t \tau^2 d\tau = \\ &= 4\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\frac{t^3}{3}\vec{j} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} \end{aligned}$$

Vratimo se u  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = 2(1 + t^2)\vec{i} + (3 + t^3)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2 \text{ s}) = 2(1 + 1,2^2)\vec{i} + (3 + 1,2^3)\vec{j} = 4,88\vec{i} + 4,728\vec{j} [m]$$