Sveučilište u Zagrebu
Geotehnički fakultet

# Zadaci s vježbi iz kolegija Fizika 1

Akademska godina 2023./2024.

doc. dr. sc. Ivan Hip
doc. dr. sc. Marko Petric

21. siječnja 2024.

# Sadržaj

# Lista oznaka

Vektorske fizikalne veličine izlistane su samo kao vektori — ukoliko se pojavljuju bez "strelice" radi se o iznosu ili, ako imaju indeks $x$, $y$ ili $z$, o projekciji na odgovarajuću os (primjer: $v$ je iznos trenutne brzine $\vec{v}$, a $v_x$ je projekcija trenutne brzine $\vec{v}$ na os $x$).

$A, B, C, ...$ - oznake za točke ili tijela

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...$ - oznake za vektore

$\vec{a}$ - trenutno ubrzanje

$\vec{a}_{cf}$ - centrifugalno ubrzanje

$\vec{a}_{cp}$ - centripetalno ubrzanje

$\vec{a}_r$ - radijalno ubrzanje

$\vec{a}_s$ - srednje ubrzanje

$\vec{a}_\tau$ - tangencijalno ubrzanje

$D$ - domet kosog hica

$d$ - udaljenost između paralelnih osi

$E$ - energija

$E_k$ - kinetička energija

$E_p$ - potencijalna energija

$E_{p,el}$ - elastična potencijalna energija

$E_{p,G}$ - potencijalna energija u polju sile teže

$E_{p,gr}$ - gravitacijska potencijalna energija

$E_{uk}$ - ukupna energija

$\vec{F}$ - sila

$\vec{F}_{AB}$ - sila kojom tijelo $A$ djeluje na tijelo $B$

$\vec{F}_{cf}$ - centrifugalna sila

$\vec{F}_{cp}$ - centripetalna sila

$\vec{F}_{el}$ - elastična sila

$\vec{F}_I$ - inercijska sila

$\vec{F}_R$ - rezultantna sila

$\vec{F}_{tr}$ - sila trenja

$\vec{F}_{tr,k}$ - sila kinematičkog trenja

$\vec{F}_{tr,s}$ - sila statičkog trenja

$\vec{F}_{tr,s,max}$ - maksimalna sila statičkog trenja

$\vec{F}_v$ - vanjska sila

$\vec{F}_\parallel$ - komponenta sile koja je paralelna s pomakom

$\vec{F}_\perp$ - sila koja djeluje okomito na podlogu

$\vec{G}$ - sila teža

$\vec{G}_\parallel$ - komponenta sile teže koja je paralelna s kosinom

$\vec{G}_\perp$ - komponenta sile teže koja je okomita na kosinu

$\vec{\mathcal{G}}$ - jakost gravitacijskog polja

$\vec{g}$ - ubrzanja slobodnog pada, ujedno jakost polja sile teže

$\vec{g}_0$ - jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje

$H$ - visina valjka

$h$ - visina

$I$ - moment tromosti

$I_T$ - moment tromosti oko osi koja prolazi kroz težište

$\vec{i}$ - jedinični vektor na osi $x$

$\vec{j}$ - jedinični vektor na osi $y$

$K$ - konstanta elastičnosti opruge

$\vec{k}$ - jedinični vektor na osi $z$

$M$ - ukupna masa sustava

$M_Z$ - masa Zemlje

$m$ - masa

$\vec{N}$ - moment sile

$\hat{n}$ - vektor normale

$O$ - ishodište

$P$ - trenutna snaga

$P_{AB}$ - srednja snaga

$\vec{p}$ - količina gibanja

$\vec{p}_{uk}$ - ukupna količina gibanja u zatvorenom sustavu

$R$ - polumjer kružnice kod kružnog gibanja

$R_Z$ - polumjer Zemlje

$\vec{R}$ - sila reakcije podloge

$r_\perp$ - krak sile

$\vec{r}$ - vektor položaja

$\vec{r}_0$ - početni položaj (položaj u trenutku $t = 0$)

$\vec{r}_{AB}$ - vektor koji spaja točke $A$ i $B$ (iznos tog vektora je udaljenost između točaka)

$\vec{r}_{cm}$ - vektor položaja centra mase

$\vec{r}_n$ - položaj u kojem je opruga nerastegnuta

$\vec{r}_{S'}$ - vektor položaja ishodišta referentnog sustava $S'$

$\Delta\vec{r}$ - vektor pomaka, može ujedno biti i vektor deformacije

$\Delta\vec{r}_{AB}$ - vektor pomaka od točke $A$ do točke $B$

$S, S'$ - oznake za referentne sustave

$s$ - $s$ koordinata

$s_A$ - $s$ koordinata točke $A$

$T$ - trajanje leta kod kosog hica / period rotacije Zemlje

$\vec{T}$ - težina / sila napetosti niti

$t$ - vrijeme

$\Delta t$ - vremenski interval

$\vec{u}$ - "ulazna" brzina (trenutna brzina tijela prije sudara)

$v_1$ - prva kozmička brzina

$v_2$ - druga kozmička brzina

$\vec{v}$ - trenutna brzina

$\vec{v}_0$ - početna brzina (trenutna brzina u trenutku $t = 0$)

$\vec{v}_s$ - srednja brzina

$\vec{v}_{S'}$ - trenutna brzina referentnog sustava $S'$

$W$ - rad

$W_{AB}$ - rad sile na dijelu putanje između točaka $A$ i $B$

$W_G$ - rad sile teže

$W_{nk}$ - rad nekonzervativnih sila

$W_R$ - rad rezultantne sile

$W_{tr}$ - rad sile trenja

$x$ - projekcija vektora položaja na os $x$ ($x$ koordinata)

$y$ - projekcija vektora položaja na os $y$ ($y$ koordinata)

$z$ - projekcija vektora položaja na os $z$ ($z$ koordinata)

$\alpha$ - kut nagiba kosine / trenutno kutno ubrzanje

$\alpha_s$ - srednje kutno ubrzanje

$\alpha_k$ - kut nagiba kosine pri kojem se tijelo niz kosinu giba konstantnom brzinom

$\alpha_{max}$ - kut nagiba kosine za koji se postiže maksimalna sila statičkog trenja

$\gamma$ - gravitacijska konstanta

$\vartheta$ - nagib kosog hica / zemljopisna širina

$\mu_k$ - koeficijent kinematičkog trenja

$\mu_s$ - koeficijent statičkog trenja

$\rho$ - gustoća / polumjer zakrivljenosti putanje / udaljenost od osi rotacije

$\hat{\tau}$ - jedinični vektor tangencijalan na putanju

$\varphi$ - kut zakreta kod kružnog gibanja

$\omega$ - trenutna kutna brzina

$\omega_s$ - srednja kutna brzina

# 1

# MATEMATIČKI TEMELJI

**1.1.** Nacrtajte slijedeća tri vektora u $xy$-ravnini: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i izračunajte računski i grafički:

a) Nacrtajte sva tri vektora u $xy$-ravnini.

b) Koja dva vektora su okomita? Provjerite!

c) Izračunajte računski i grafički $\vec{a} + \vec{b}$.

d) Izračunajte računski i grafički $\vec{b} - \vec{c}$.

---

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$
$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$
$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$

**1.2.** Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Izračunajte:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

c) $|\vec{a} \times \vec{b}|$

d) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

e) Izračunajte $|\vec{c}|$, gdje je $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ i usporedite s rezultatom c).

f) $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$ i usporedite s rezultatom d).

---

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 73,4^\circ$$

c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \sin(73,4^\circ)$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \approx 13,42$$

d) $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6-6) - \vec{j}(3-(-3)) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{144+36} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6+6) - \vec{j}(-3-3) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

`Matematicki_temelji/Zadatak_M802`

**1.3.** Pretvorite mjerene jedinice:

a) $0,1746\ rad = \qquad\qquad ^\circ$

b) $18,3\ MJ = \qquad\qquad J$

c) $0,016\ kN = \qquad\qquad mN$

d) $100\ \mu g = \qquad\qquad kg$

e) $8,2\ kmh^{-1} = \qquad\qquad ms^{-1}$

f) $36\ dana = \qquad\qquad min$

g) $2\ cm^2 = \qquad\qquad m^2$

h) $10\ L = \qquad\qquad m^3$

---

a) $0,1746\ rad = 0,1746\ rad\ \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 10,00^\circ$

b) $0,016\ kN = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 N = 1,6 \cdot 10^1 N =$

$= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} N = 1.6 \cdot 10^4\ mN$

c) $18,3\ MJ = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6\ J = 1,83 \cdot 10^7\ J$

d) $100\ \mu g = 10^2 \cdot 10^{-6}\ g = 10^{-4}\ g =$

$= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3\ g = 10^{-7}\ kg$

e) $8,2\ kmh^{-1} = 8,2 \frac{1000m}{3600s} = \frac{82}{36}\ ms^{-1} = 2,28\ ms^{-1}$

f) $36\ dana = 36 \cdot 24\ h = 36 \cdot 24 \cdot 60\ min = 51840\ min$

g) $2\ cm^2 = 2\ (cm)^2 = 2\ (10^{-2} m)^2 = 2 \cdot 10^{-4} m^2 = 0,0002\ m^2$

h) $10\ L = 10\ dm^3 = 10\ (dm)^3 = 10\ (10^{-1} m)^3 = 10 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 10^{-2}\ m^3 = 0.01\ m^3$

## Zadaci za samostalni rad

---

**1.4.** Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$. Izračunajte:

a) duljine (iznose) svakog od njih;

b) skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

c) kut koji zatvaraju;

d) vektorski zbroj $\vec{a} + \vec{b}$ i razliku $\vec{a} - \vec{b}$;

e) vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$;

f) vektorski produkt $\vec{b} \times \vec{a}$ i usporedite s rezultatom iz e).

Rješenje:

a) $|\vec{a}| = \sqrt{50}$, $|\vec{b}| = \sqrt{41}$

b) $-25$

c) $123,5°$

d) $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k}$

e) $34\vec{i} - 13\vec{j} + 10\vec{k}$

---

**1.5.** Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Izračunajte:

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$;

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ i usporedite s rezultatom iz a);

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ te razmislite što znače dobiveni rezultati.

Rješenje: 93

---

`Matematicki_temelji/Zadatak_M324`
Koristili na: P-2017, P-2018

**1.6.** Zadani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Izračunajte kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje: Kut $47,048°$, $0,82114\ rad$

---

**1.7.** Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Izračunajte $\vec{a} \cdot [\vec{b} + (\vec{c} \times \vec{a})]$

Rješenje: $-25$

---

**1.8.** Zadani su vektori $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Izračunajte $[(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{c}] \cdot \vec{c}$

Rješenje: $-5$

---

**1.9.** Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Izračunajte:

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

b) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$.

Rješenje:

a) $-150$
b) $45$

---

**1.10.** Pretvorite mjerene jedinice:

a) $4,2 \cdot 10^{-8}\ m =$ $nm$
b) $10^{-5}\ kg =$ $g$
c) $23\ dag =$ $t$
d) $7,5\ ms^{-1} =$ $kmh^{-1}$
e) $0,072\ kmh^{-1} =$ $cms^{-1}$
f) $284\ s =$ $god$
g) $0,02\ cm^2 =$ $mm^2$
h) $15\ cm^3 =$ $L$

Rješenje:

a) $42\ nm$
b) $0,01\ g$
c) $2,3 \cdot 10^{-4}\ t$
d) $27\ ms^{-1}$
e) $0,02\ kmh^{-1}$
f) $9,00 \cdot 10^{-6} god$
g) $2\ mm^2$
h) $0,015\ L$

---

`Matematicki_temelji/Zadatak_M850` *Novi zdatak*
**1.11.** Ako automobil ima prosječnu potrošnju $7,5$ litara na sto kilometara, a cijena benzina iznosi $1,48$ EUR. Koliko centi košta prijeđeni kilometar?

Rj: $\frac{7,5l}{100km} \cdot 1,48$ EUR $l^{-1} = 0,111$ EUR $km^{-1} = 11,1$ cent $km^{-1}$

---

`Matematicki_temelji/Zadatak_M851`
*Novi zdatak*
**1.12.** Potrošnja goriva automobila iznosi $0,051\frac{l}{km}$

a) Kolika je potrošnja goriva izražena u $cm^3m^{-1}$?
b) Ako je u spremniku ostalo $38,25$ litara goriva koliko kilometara možemo proći s tim automobilom?
c) Ako je gustoća benzina $0,8\ gcm^{-3}$ koliko grama benzina potroši automobil po kilometru?

a) $0,051\frac{cm^3}{m}$?
b) $\frac{38,25l}{0.051\ \ km-1} = 750\ km$
c) Po metru potrošimo $0,051\ cm^3$ benzina, što je $0,051\frac{cm^3}{m} \cdot 0,8\frac{g}{cm^3} = 0,0408\frac{g}{m}$, pretvorimo metre u kilograme i dobivamo $40,8\frac{g}{km}$.

---

`Matematicki_temelji/Zadatak_M855`
*Novi zdatak*
**1.13.** Ako izgaranjem jedne litre benzina nastaje $2,534\ kg\ CO_2$ koliko je to grama $CO_2$ po kilometru ako je prosječna potrošnja automobila iznosi $7,5\frac{l}{100\ km}$?

Rj: $0,075\ \frac{l}{km} \cdot 2534\ \frac{g}{l} = 190\frac{g}{km}$

# 2

# KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K401`

**2.1.** Gibanje materijalne točke (MT) opisano je vektorom položaja

$$\vec{r}(t) = (v_0 t)\vec{j} + (z_0 - \frac{1}{2}gt^2)\vec{k}.$$

U trenutku $t = 0\ s$ MT se nalazi na visini $z_0 = 80\ m$, a iznos početne brzine je $v_0 = 30\ ms^{-1}$. Iznos ubrzanja slobodnog pada je $g = 9,81\ ms^{-2}$, ali radi lakšek računanja može se uzeti približna vrijednost $g = 10\ ms^{-2}$.

a) Izračunajte položaj MT svakih pola sekunde i skicirajte putanju u $yz$-ravnini.

b) Odredite vektor trenutne brzine $\vec{v}(t)$.

c) Izračunajte i skicirajte trenutnu brzinu u trenucima $t_1 = 1\ s$, $t_2 = 2\ s$, $t_3 = 3\ s$ i $t_4 = 4\ s$.

d) Odredite trenutno ubrzanje $\vec{a}(t)$ i skicirajte ga u nekoliko točaka putanje.

---

Uvrstimo zadane vrijednosti u $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (30ms^{-1}t)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}t^2)\vec{k}$$

a) $\vec{r}(t = 0,0s) = (30ms^{-1}0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0s)^2)\vec{k} = 0m\vec{j} + 80m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 0,5s) = (30ms^{-1}0,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0,5s)^2)\vec{k} = 15m\vec{j} + 78,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 1,0s) = (30ms^{-1}1,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,0s)^2)\vec{k} = 30m\vec{j} + 75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 1,5s) = (30ms^{-1}1,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,5s)^2)\vec{k} = 45m\vec{j} + 68,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 2,0s) = (30ms^{-1}2,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,0s)^2)\vec{k} = 60m\vec{j} + 60m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 2,5s) = (30ms^{-1}2,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,5s)^2)\vec{k} = 75m\vec{j} + 48,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 3,0s) = (30ms^{-1}3,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,0s)^2)\vec{k} = 90m\vec{j} + 35m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 3,5s) = (30ms^{-1}3,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,5s)^2)\vec{k} = 105m\vec{j} + 18,75m\vec{k}$

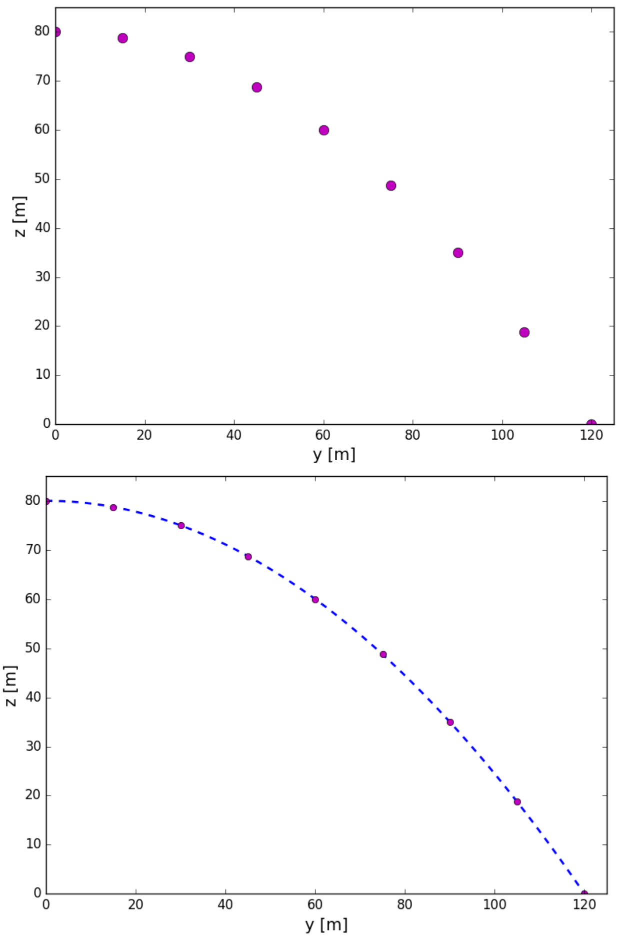
$\vec{r}(t = 4,0s) = (30ms^{-1}4,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(4,0s)^2)\vec{k} = 120m\vec{j} + 0m\vec{k}$

b)

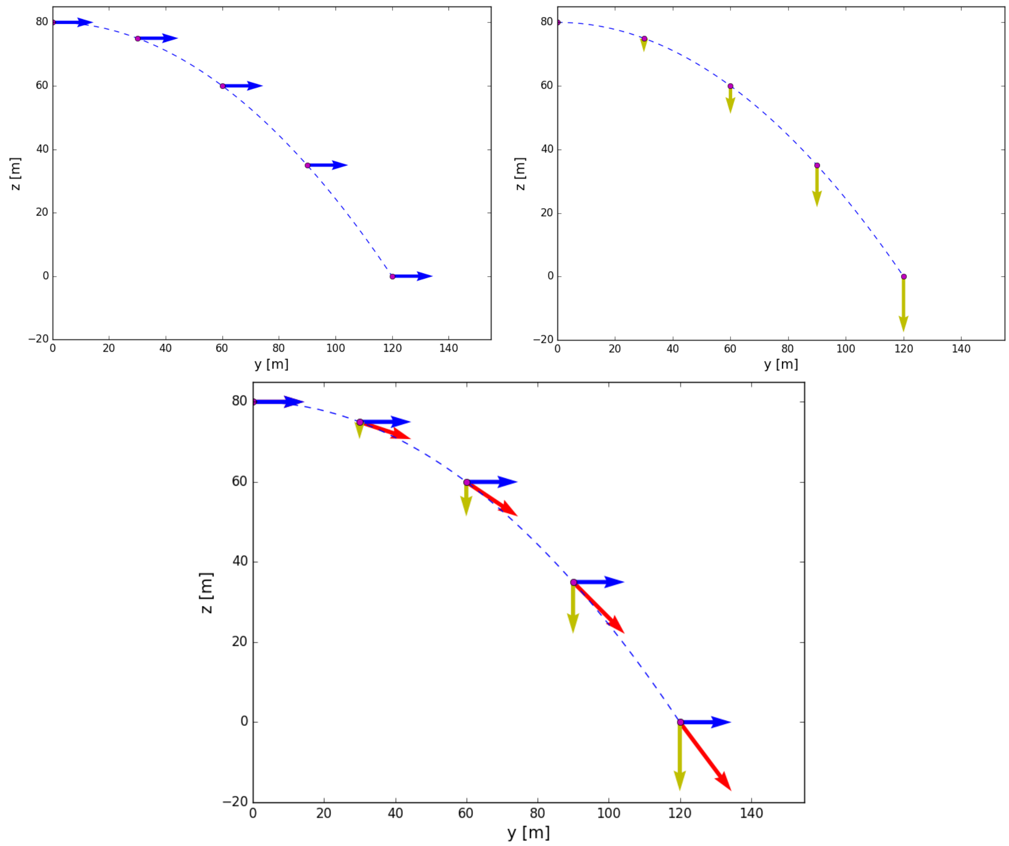
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(z_0\vec{k} + v_0 t\vec{j} - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$




Slika 2.1: *(lijevo)* Položaj MT za svakih $0,5$ $s$. *(desno)* Putanja MT do udarca o tlo.




Slika 2.2: *(gore-lijevo)* Komponenta brzine u $y$-smjeru. *(gore-desno)* Komponenta brzine u $z$-smjeru.*(dolje)* Brzina tijela s komponentama.

c) $\vec{v}(t) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}t\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}1s\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 2s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 20\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 3s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 30\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 4s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 40\ ms^{-1}\vec{k}$

$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-10\ ms^{-1})^2} = 31,623\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-20\ ms^{-1})^2} = 36,055\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-30\ ms^{-1})^2} = 42,43\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-40\ ms^{-1})^2} = 50,0\ ms^{-1}$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_0\vec{j} - gt\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}(t) = -g\vec{k} = -9,81\ ms^{-2}\vec{k} \approx -10\ ms^{-2}\vec{k}$$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K442` slično [Mikuličić10:1.177.,str.55]
2015-L2, 2016-L2, 2017-L3, 2018-L3, 2019-L3, 2019-P1

**2.2.** Tijelo je bačeno koso prema gore pod kutom od 30° prema horizontali početnom brzinom iznosa 20 $ms^{-1}$ s visine 10 $m$ iznad tla. Izračunajte (zanemarite otpor zraka):

a) Vrijeme udarca tijela o tlo.

b) Domet tijela.

c) Kolika je maksimalna visina koju tijelo postigne tijekom leta?

Verzija za ispite

**2.3.** Terezija je bacila loptu koso prema gore pod kutom od $\vartheta = 30°$ prema horizontali početnom brzinom iznosa $v_0 = 20\ ms^{-1}$ s garaže visine $z_0 = 10\ m$ iznad tla. Kolika dugo je trajao let lopte?

---

a) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Početni uvijeti: $\vec{r}_0 = z_0\vec{k}$, $\quad \vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\vec{j} + v_0 \sin\alpha\vec{k} \quad \vec{g} = -g\vec{k}$

$\vec{r}(t) = z_0\vec{k} + v_0 \cos\alpha\vec{j}t + v_0 \sin\alpha\vec{k}t - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}$

$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\alpha \cdot t)\vec{j} + (z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{k}$

$\vec{r}(t) = y\vec{j} + z\vec{k}$, gdje je $y = v_0 \cos\alpha \cdot t$ i $z = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

Vrijeme udarca tijela o tlo $t = t_u$ kada je $z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gz_0}}{g}.$$

Za navedene podatke rješenja su $t_1 = 2,77\ s$ i $t_2 = -0,74\ s$, fizikalno rješenje je $t_1 = 2,77\ s$.

b) Kako bismo dobili domet, $D = v_y t$ tijela moramo znati komponentu brzine u $y$-smjeru i vrijeme udarca tijala o tlo. Vrijeme znamo iz prvog djela zadatka, a komponentu brzine možemo dobiti

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left((v_0 \cos\alpha \cdot t)\vec{j} + (z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{k}\right).$$

Dobivamo komponente brzine su: $v_y = v_0 \cos\alpha \quad$ i $\quad v_z = v_0 \sin\alpha - gt.$

$D = y(t = t_1) = v_0 \cos\alpha \cdot t_1$

$D = y(t = 2,77\ s) = 20\ ms^{-1} \cos 30° \cdot 2,77\ s = 47,98\ m$

c) Potražimo trenutak u kojem je komponenta brzine u $z$-smjeru $v_z = 0$ jer je tada tijelo u na maksimalnoj visini $z = z_{max}$.

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha\vec{j} + (v_0 \sin\alpha - gt)\vec{k}$$

komponente brzina su: $v_y(t) = v_0 \cos\alpha$ i $v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt$. Nakom izjednačivanja komponete $v_z$ s nulom izrazimo

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Potražimo maksimalnu visinu

$$z_{max} = z(t = t_H) = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t_H - \frac{1}{2}gt_H^2$$

$$z_{max} = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 15,1\ m$$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K502`

**2.4.** Materijalna točka (MT) giba se u prostoru tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu u skladu s relacijom

$$\vec{r}(t) = 6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k}\ [m].$$

Izračunajte:

(a) Vektor položaja MT u $t = 0,5\ s$.

(b) Trenutnu brzinu i iznos trenutne brzine u $t = 0,5\ s$.

(c) Trenutno ubrzanje i iznos trenutnog ubrzanja u $t = 0,5\ s$.

a) U relaciju $\vec{r}(t)$ potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$\vec{r}(t=0,5s) = 6 \cdot 0,5^4\vec{i} + 4 \cdot 0,5^2\vec{j} + 3 \cdot 0,5\vec{k}$

$\vec{r}(t=0,5s) = 0,375\vec{i} + 1\vec{j} + 1,5\vec{k}$ $[m]$.

b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je $\vec{r}(t)$ derivirati po vremenu

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k}\right)$

$\vec{v}(t) = 24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t=0,5) = 24 \cdot 0,5^3\vec{i} + 8 \cdot 0,5\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t=0,5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ $[ms]$

$|\vec{v}(t=0,5)| = \sqrt{3^2+4^2+3^2} = 5,83$ $[ms]$

c) $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

$\vec{a}(t) = 72t^2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{a}(t=0,5) = 72 \cdot 0,5^2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{a}(t=0,5) = 18\vec{i} + 8\vec{j}$

$|\vec{a}(t=0,5)| = \sqrt{18^2+8^2} = 19,7$ $[ms^{-2}]$.

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K601`

**2.5.** Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u $xy$-ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} \ [ms^{-1}].$$

U trenutku $t = 0$ $s$ vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t=0s) = 2\vec{i} + 3\vec{j} \ [m].$$

Izračunajte vektor položaja $\vec{r}(t)$ materijalne točke $t = 1,2$ $s$.

---

Rješavamo inverzni problem i tražimo $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$$

Trebamo riješiti integral $I = \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$.

$$I = \int_0^t 4\tau\vec{i}d\tau + \int_0^t 3\tau^2\vec{j}d\tau = 4\vec{i}\int_0^t \tau d\tau + 3\vec{j}\int_0^t \tau^2 d\tau =$$

$$= 4\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\frac{t^3}{3}\vec{j} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$$

Vratimo se u $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = 2(1+t^2)\vec{i} + (3+t^3)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t=1,2\ s) = 2(1+1,2^2)\vec{i} + (3+1,2^3)\vec{j} = 4,88\vec{i} + 4,728\vec{j} \quad [m]$$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K802`

**2.6.** Položaj materijalne točke koja se giba po kružnici polumjera $R = 2$ $m$ opisuje funkcija

$$s(t) = s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct}) \quad [m]$$

pri čemu su $s_0 = 2\ m$, $b = 8\ m$ i $c = 0.2s^{-1}\ s$.

a) Izračunajte $s$ koordinatu i skicirajte položaj materijalne točke na kružnici u trenucima $t = 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 30\ s$.

b) Gdje će se materijalna točka zaustaviti kad $t \to \infty$?

c) Izračunajte iznos i skicirajte vektor brzine u trenucima $t = 3\ s$ i $t = 6\ s$.

---

a) Kako bismo izračunali $s$ koordinatu uvrštavamo zadane trenutke u funkciju

$$s(t) = s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct}).$$

$$s(t = 0\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2s^{-1}\cdot 0s}) = 2\ m$$
$$s(t = 3\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2s^{-1}\cdot 3s}) \approx 5{,}6095\ m$$
$$s(t = 6\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2s^{-1}\cdot 6s}) \approx 7{,}5904\ m$$
$$s(t = 9\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2s^{-1}\cdot 9s}) \approx 8{,}6776\ m$$
$$s(t = 30\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2s^{-1}\cdot 30s}) \approx 9{,}9802\ m$$

b) $s(t) =?$ kada $t \to \infty$

$$s(t \to \infty) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2s^{-1}\cdot \infty})$$

c)

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

$$|\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct})\right) = bc\mathrm{e}^{-ct}$$

$$|\vec{v}(t = 3\ s)| = 8\ m \cdot 0{,}2\ ^{-1}\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}8781 ms^{-1}$$
$$|\vec{v}(t = 6\ s)| = 8\ m \cdot 0{,}2\ ^{-1}\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}4819 ms^{-1}$$

**2.7.** Za gibanje opisano u prethodnom zadatku izračunajte tangencijalno i radijalno ubrzanje te iznos ukupnog ubrzanja $|\vec{a}(t)|$ materijalne točke u trenucima $t = 3\ s$ i $t = 6\ s$.

---

Kako bismo mogli izračunati iznos ubrzanja moramo prvo izračunati tangencijalno $\vec{a}_\tau$ i radijalno $\vec{a}_r$ ubrzanje.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct})\right) = bc\mathrm{e}^{-ct}$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(bc\mathrm{e}^{-ct}\right) = -bc^2\mathrm{e}^{-ct}$$
$$\vec{a}_\tau = -bc^2\mathrm{e}^{-ct}\vec{\tau}$$

Ostaje za izračunati radijalnu komponentu ubrzanja.

$$\vec{a}_r = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n}$$

$$\vec{a}_r = \frac{b^2c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R}\vec{n}$$

Ukupno ubrzanje je:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_r = -bc^2\mathrm{e}^{-ct}\vec{\tau} + \frac{b^2c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R}\vec{n}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-bc^2 \mathrm{e}^{-ct})^2 + \left(\frac{b^2c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R}\right)^2} = \sqrt{b^2c^4\mathrm{e}^{-2ct}\left(1+\frac{b^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R^2}\right)}$$

$$|\vec{a}(t)| = bc^2\mathrm{e}^{-ct}\sqrt{1+\frac{b^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R^2}}$$

$$|\vec{a}(t=3\ s)| = 8m\cdot(0,2s^{-1})^2\cdot\mathrm{e}^{-0,2s^{-1}\cdot 3s}\sqrt{1+\tfrac{(8m)^2\mathrm{e}^{-2\cdot 0,2s^{-1}\cdot 3s}}{(2m)^2}} = 0,4236ms^{-2}$$
$$|\vec{a}(t=6\ s)| = 8m\cdot(0,2s^{-1})^2\cdot\mathrm{e}^{-0,2s^{-1}\cdot 6s}\sqrt{1+\tfrac{(8m)^2\mathrm{e}^{-2\cdot 0,2s^{-1}\cdot 6s}}{(2m)^2}} = 0,1509ms^{-2}$$

## Zadaci za samostalni rad

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K301`

**2.8.** Lopta koje se u početnom trenutku $t = 0$ nalazi u točki A: $\vec{r_A} = 3\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ bačena je vertikalno prema gore brzinom iznosa $14ms^{-1}$. Kolika je udaljenost lopte od ishodišta koordinatnog sustava u trenutku $t_1 = 1,7$? (Otpor zraka se zanemaruje!)

---

Rj: $d = 8,3m$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K304`

**2.9.** Dvije su lopte bačene istovremeno vertikalno prema gore. Lopta A ima početnu brzinu iznosa 20 $ms^{-1}$, a lopta B iznosa 24 $ms^{-1}$. Kolika je razlika njihovih $z$ koordinata kada je lopta A na maksimalnoj visini, ako su se obje lopte u trenutku izbacivanja nalazile na visini $z = 0\ m$?

---

Za lopte A i B možemo zapisati $z(t)$ koordinatu:

$$z_A(t) = v_{A0}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \& \quad z_B(t) = v_{B0}t + \frac{1}{2}gt^2.$$

U trenutku kada lopta A dosegne maksimalnu vrijednost, derivacije funkcija $z_A(t)$ je jednaka nuli, iz čega možemo izraziti potrebno vrijeme:

$$t_1 = \frac{v_{A0}}{g}.$$

Dobiveno vrijeme uvrstimo u $z(t)$ koordinate te izračunamo razliku.

$$\Delta z = z_B(t_1) - z_A(t_1)$$

$$\Delta z = v_{B0}\frac{v_{A0}}{g} + \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{A0}}{g}\right)^2 - v_{A0}\frac{v_{A0}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{A0}}{g}\right)^2$$

$$\Delta z = \frac{v_{B0}v_{A0}}{g} - \frac{v_{A0^2}}{g}$$

$$\Delta z = 8,155\ m$$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K305`

**2.10.** Dvije su lopte bačene istovremeno vertikalno prema gore. Lopta A ima početnu brzinu iznosa 20 $ms^{-1}$, a lopta B iznosa 24 $ms^{-1}$. U početnom trenutku lopta A se nalazi u točki: $\vec{r_A} = 6\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$, a lopta B u točki: $\vec{r_B} = 2\vec{i}-\vec{j}+0\vec{k}$ Kolika je razlika njihovih $z$ koordinata kada je lopta A na maksimalnoj visini?

---

Rj: $9,566\ m$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K402` [Wolkenstein80:1.27(4),str.23]
2015-I1, 2016-S2, 2017-L2

**2.11.** Kamen bačen horizontalno pada na tlo poslije pola sekunde na udaljenosti od 5 metara. Pod kojim kutom prema horizontali kamen udara u tlo? (Otpor zraka se zanemaruje!)

---

Rj: $\alpha = 26,13°$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K440`
2018-K1, 2021-I3, 2021-I4
**2.12.** Tijelo je bačeno koso prema gore pod kutom od 30° prema horizontali početnom brzinom iznosa 20 $ms^{-1}$ s površine tla. Odredite vektor brzine i izračunajte iznos brzine u trenutku $t_1 = 0,45\ s$ (zanemarite otpor zraka).

---

Rj: $\vec{v}(t = 0,45\ s) = 17,32\vec{j} + 5,59\vec{k}$;
$|\vec{v}(t = 0,45\ s)| = 18,20\ ms^{-1}$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K443`
2020-S3,...
**2.13.** Andrija je udario nogometnu loptu tako da je odletjela početnom brzinom iznosa 20 $ms^{-1}$ pod kutom od $\vartheta = 40°$ prema horizontali. Izračunajte koliko daleko od Andrije je lopta pala. (Otpor zraka zanemarite.)

---

Rj: $40,155\ m$

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K444`
2020-S3,...
**2.14.** Tijelo je bačeno koso prema gore pod kutom od $\vartheta = 60°$ prema horizontali početnom brzinom iznosa $v_0 = 30\ ms^{-1}$ s površine tla. Odredite vektor položaja u trenutku kada tijelo postigne maksimalnu visinu (zanemarite otpor zraka).

---

Rj: $\vec{r}(t = 2,648\ s) = 39,726\vec{j} + 34,404\vec{k}$

---

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K500`
**2.15.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = t\mathrm{e}^{-2t}\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j}\ [m].$$

Izračunajte:

a) Vektor i iznos trenutne brzine MT u trenutku $t_1 = 0,3\ s$.
b) Vektor i iznos trenutnog ubrzanja MT u trenutku $t_1 = 0,3\ s$.

Rješenje:

a) $\vec{v}(t = 0,3\ s) = 0,220\vec{i} + 0,913\vec{j}$, $|\vec{v}(t = 0,3\ s)| = 0,939\ [ms^{-1}]$
b) $\vec{a}(t = 0,3\ s) = -1,537\vec{i} - 1.521\vec{j}$, $|\vec{a}(t = 0,3\ s)| = 2,162\ [ms^{-1}]$

---

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K501`
**2.16.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = t\cos{(3t)}\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j}\ [m].$$

Koliki je iznos trenutnog ubrzanja materijalne točke u trenutku $t_1 = 0,15\ s$?

Rješenje: $|\vec{a}(t = 0,15\ s)| = 5,758\ [ms^{-2}]$

---

`Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K503`
**2.17.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = t^2\sin{(3t)}\vec{i} + \sqrt[3]{t}\vec{j}\ [m].$$

Koliki je iznos trenutnog ubrzanja materijalne točke u trenutku $t_1 = 0,2\ s$?

Rješenje: $|\vec{a}(t=0,2\ s)| = 4,359\ [ms^{-2}]$

---

Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K504

**2.18.** Materijalna točka (MT) giba se u xy-ravnini tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu prema izrazu

$$\vec{r}(t) = \sqrt[5]{t}\vec{i} + t^2\cos(3t)\vec{j}\ [m].$$

Koliki je iznos trenutnog ubrzanja materijalne točke u trenutku $t_1 = 0,3\ s$?

Rješenje: $|\vec{a}(t=0,3\ s)| = 2,506\ [ms^{-2}]$

---

Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K607

**2.19.** Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u xy-ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 4\sqrt[3]{t}\vec{i} + 6e^{-2t}\vec{j}\ [ms^{-1}].$$

U trenutku $t = 0\ s$ vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t=0\ s) = 2\vec{i} - 3\vec{j}\ [m]$$

Izračunajte vektor položaja $\vec{r}(t)$ materijalne točke u trenutku $t_1 = 0,5\ s$.

Rješenje: $\vec{r}(t=0,5\ s) = 3,191\vec{i} - 1,104\vec{j}\ [m]$

---

Kinematika_materijalne_tocke/Zadatak_K610

**2.20.** Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u xy-ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 3e^{-3t}\vec{i} + 4\sqrt[4]{t}\vec{j}\ [ms^{-1}].$$

U trenutku $t = 0$ vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t=0\ s) = -\vec{i} + 2\vec{j}\ [m]$$

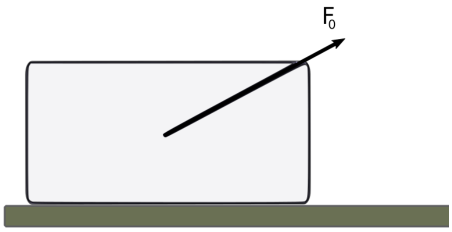
Izračunajte vektor položaja $\vec{r}(t)$ materijalne točke u trenutku $t_1 = 0,4\ s$.

Rješenje: $\vec{r}(t=0,4\ s) = -0,301\vec{i} - 3,018\vec{j}\ [m]$

# 3

## DNAMIKA MATERIJALNE TOČKE

**3.1.** Vanjska sila iznosa $\vec{F_0} = 18\ N$ djeluje pod kutom od $\alpha = 28°$ prema horizontali na blok mase $m = 3\ kg$. Izračunajte iznos ubrzanja kada je kinetičko trenje između bloka i podloge $\mu_k = 0,4$.




---

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Radimo projekcije na $y$ i $z$ os

$$\mathbf{y:}\quad \vec{F}_0 \cdot \vec{j} + \vec{G} \cdot \vec{j} + \vec{R} \cdot \vec{j} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{j} = m\vec{a} \cdot \vec{j} \qquad / \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{j}| \cos\alpha + |\vec{G}||\vec{j}| \cos\frac{\pi}{2} + |\vec{R}||\vec{j}| \cos\frac{\pi}{2} + |\vec{F}_{tr}||\vec{j}| \cos\pi = m|\vec{a}||\vec{j}| \cos 0$$

$$F_0 \cos\alpha + 0 + 0 - F_{tr} = ma \tag{3.1}$$

$$\mathbf{z:}\quad \vec{F}_0 \cdot \vec{k} + \vec{G} \cdot \vec{k} + \vec{R} \cdot \vec{k} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{k} = m\vec{a} \cdot \vec{k} \qquad / \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{k}| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + |\vec{G}||\vec{k}| \cos\pi + |\vec{R}||\vec{k}| \cos 0 + |\vec{F}_{tr}||\vec{k}| \cos\frac{\pi}{2} = m|\vec{a}||\vec{k}| \cos\frac{\pi}{2}$$

$$F_0 \sin\alpha - G + R = 0 \tag{3.2}$$

Iz gornjeg izraza možemo izraziti silu reakcije podloge $R = mg - F_0 \sin\alpha$, gdje smo za silu težu $(G)$ zapisali kao masa $(m)$ puta ubrzanje sile teže $(g)$.
Sila trenja koja nam se javlja u izrazu 3.1 možemo zapisati kao umonožak faktura kinetičkoga trenja i sili pritiska na podlogu, a sila pritiska na podlugu je jednaka težini tijela koja je po iznosu jednaka sili reakcije podloge tako pišemo: $F_{tr} = \mu_k F_\perp = \mu_k T = \mu_k R$. Silu reakcije podloge možemo zamjeniti izrazom koji smo dobili iz jednadžbe 3.2 i dobivamo konačni izraz:

$$F_0 \cos\alpha - \mu_k(mg - F_0 \sin\alpha) = ma$$

$$a = \frac{F_0}{m}(\cos\alpha + \mu_k \sin\alpha) - \mu_k g$$

$$a = \frac{18N}{3kg}(\cos 28^\circ + 0,4 \sin 28^\circ) - 0,4 \cdot 9,81 ms^{-2} = 2,5\ ms^{-2}$$

**3.2.** Vanjska sila iznosa $F_0 = 50\ N$ djeluje na blok A mase $m_A = 5\ kg$ koji vuče blok B mase $m_B = 3\ kg$ (vidjeti skicu).

a) Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga ako pretpostavimo da nema trenja.

b) Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge $\mu_k = 0,3$.


---

Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A $T = |\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}|$.

a) Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\textbf{blok B:}\quad \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B = m_B\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\textbf{blok A:}\quad \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A = m_A\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok B na os $y$ i $z$

$$\textbf{B,z:}\quad 0 - G_B + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = G_B$$

$$\textbf{B,y:}\quad T_{AB} + 0 + 0 = m_B a \quad \Rightarrow \quad T = m_B a$$

Isto radimo za blok A:

$$\textbf{A,z:}\quad 0 + 0 + G_A + R_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = G_A$$

$$\textbf{A,y:}\quad F_0 - T_{BA} + 0 + 0 = m_A a \quad \Rightarrow \quad F_0 - T = m_A a$$

U poslijednji izraz možemo zamjeniti napetost niti $T$ sa izrazom iz **B,y**

$$F_0 - m_B a = m_A a$$

$$m_A a + m_B a = F_0$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} = \frac{50N}{5kg + 3kg} = 6,25\ ms^{-2}$$

$$T = m_B a = 3kg \cdot 6,25 ms^{-2} = 18,75\ N$$

b) Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\textbf{blok A:}\quad \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} = m_A\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\textbf{blok B:}\quad \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} = m_B\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok A na os $y$ i $z$

$$\textbf{A,y:}\quad F_0 - T_{BA} + 0 + 0 - F_{tr,A} = m_A a \quad \Rightarrow \quad F_0 - T - \mu_k R_A = m_A a$$

$$\textbf{A,z:}\quad 0 + 0 + G_A + R_A + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = G_A$$

Dobivamo $F_0 - T - \mu_k G_A = m_A a$. Isto radimo za blok B:

$$\textbf{B,y:}\quad T_{AB} + 0 + 0 - F_{tr,B} = m_B a \quad \Rightarrow \quad T - \mu_k R_B = m_B a$$

$$\textbf{B,z:} \quad 0 - G_B + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = G_B$$

Dobivamo $T = m_B a + \mu_k G_B$.

$$F_0 - m_B a - \mu_k m_B g - \mu_k m_A g = m_A a$$

Posložimo i izrazimo ubrzanje

$$F_0 - \mu_k (m_A + m_B) g = (m_A + m_B) a$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g$$

$$a = \frac{50N}{5kg + 3kg} - 0,3 \cdot 9,81 ms^{-2} = 3,307\ ms^{-2}$$

Još moramo izračunati napetost niti

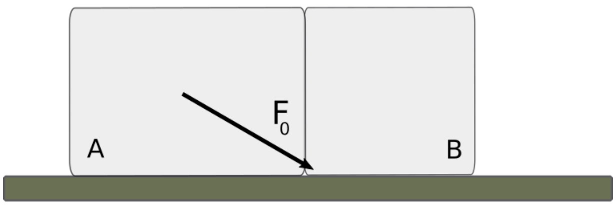
$$T = m_B (a + \mu_k g)$$

Ubrzanje možemo zamjeniti s dobivenim izrazom

$$T = m_B \left(\frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g + \mu_k g\right) = \frac{m_B F_0}{m_A + m_B}$$

$$T = 18,75\ N$$

**3.3.** Vanjska sila iznosa $F_0 = 42\ N$ djeluje pod kutem od $\vartheta = 30°$ prema horizontali na blok $A$ mase $m_A = 5\ kg$ koji gura blok $B$ mase $m_B = 2\ kg$ (vidjeti skicu). Izračunajte iznos ubrzanja blokova A i B kada je kinetičko trenje između blokova i podloge $\mu_k = 0,3$.




---

Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}|$.
Zapisujemo sve sile na tijelo A

$$\textbf{A:} \quad \vec{F}_0 + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{F}_{BA} = m_A \vec{a} \qquad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os $z$ i $y$.

$$\textbf{A,z:} \quad F_0 \cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta) - m_A g + R_A + 0 + 0 = 0$$

Funkciju $\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta)$ možemo raspisati preko funkcije zbroja

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\vartheta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\vartheta = -\sin\vartheta$$

$$-F_0 \sin\vartheta - m_a g + R_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = m_A g + F_0 \sin\vartheta$$

Što ćemo ursti u izraz za $y$ os.

$$\textbf{A,y:} \quad F_0 \cos\vartheta + 0 + 0 - F_{tr,A} - F_{BA} = m_A a$$

$$F_0 \cos\vartheta - \mu_k R_A - F_{BA} = m_A a$$

$$F_0 \cos\vartheta - \mu_k (m_A g + F_0 \sin\vartheta) - F_{BA} = m_A a \tag{3.3}$$

Zapisujemo sve sile na tijelo B

$$\textbf{B:}\quad \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{F}_{AB} = m_B\vec{a} \qquad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os $z$ i $y$.

$$\textbf{B,z:}\quad -m_B g + R_B + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = m_B g$$

$$\textbf{B,y:}\quad 0 + 0 - F_{tr,B} + F_{AB} = m_B a \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = m_B a + \mu_k R_B$$

Spajanjem posljednja dva izraza dobivamo:

$$F_{AB} = m_B a + \mu_k m_B g. \tag{3.4}$$

U izraz 3.3 umjesto $F_{BA}$ uvrstimo 3.4 dobivamo:

$$F_0 \cos\vartheta - \mu_k(m_A g + F_0 \sin\vartheta) - m_B a - \mu_k m_B g = m_A a.$$

$$a(m_A + m_B) = F_0 \cos\vartheta - \mu_k \left[(m_A + m_B)g + F_0 \sin\vartheta\right]$$

$$a = \frac{F_0 \cos\vartheta - \mu_k \left[(m_A + m_B)g + F_0 \sin\vartheta\right]}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{42N \cos 30^\circ - 0,3\left[(5kg + 2kg)9,81ms^{-2} + 42N \sin 30^\circ\right]}{5kg + 2kg} = 1,353\ ms^{-2}$$

**4.1.** Tijelo klizi po kosini nagiba $\alpha = 35^\circ$. Koeficijent kinetičkog trenja između tijela i kosine je $\mu_k = 0,58$. Izračunajete iznos ubrzanja tijela.

---

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Silu teže možemo rastaviti na dvije komponente okomito na kosinu $\vec{G}_\perp = G\cos\alpha(-\vec{k})$ i paralelno $\vec{G}_{||} = G\sin\alpha\vec{j}$

$$G\sin\alpha\vec{j} - G\cos\alpha\vec{k} + R\vec{k} - F_{tr}\vec{j} = ma\vec{j} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekcije na $y$ i $z$ os

$$G\sin\alpha - 0 + 0 - F_{tr} = ma \quad \Rightarrow \quad G\sin\alpha - \mu_k R = ma$$

$$0 - G\cos\alpha + R - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = G\cos\alpha$$

$$G\sin\alpha - \mu_k G\cos\alpha = ma$$

$$mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = ma$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

$$a = 9,81ms^{-2}(\sin 35^\circ - 0,58\cos 35^\circ) = 0,966\ ms^{-2}$$

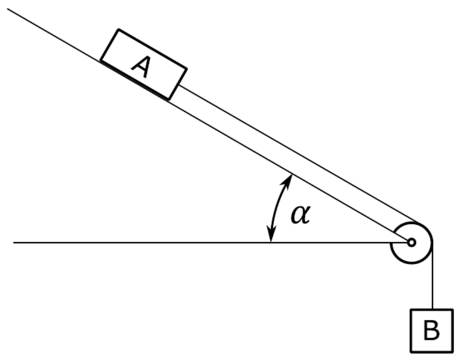
**4.2.** Na slici dolje je sustav od dva utega mase $m_A = 10\ kg$ i $m_B = 5\ kg$. Uteg B povezan je tankom nerastezljivom niti s utegom A. Kosina na kojoj se nalazi uteg A nagnuta je pod kutom $\alpha = 30^\circ$, a koeficijent kinetičkog trenja između kosine i utega A iznosi $\mu_k = 0,2$.

a) Skicirajte problem i označite sve sile i smjer gibanja (vektor ubrzanja) cijelog sustava.

b) Izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.

c) Izračunajte iznos sile napetosti niti.

---




a) Na tijelo A djeluju sila teže ($\vec{G}_A$) prema dolje koju rastavljamo na dvije komponente: silu okomitu na kosinu ($\vec{G}_{A,\perp}$) i silu usporednu s kosinom prema dolje ($\vec{G}_{A,||}$), zatim djeluje sila trenja ($\vec{F}_{tr,A}$), sila reakcije podloge $\vec{R}_A$ i sila kojom uteg B vuče uteg A (sila napetosti niti $\vec{T}_{BA}$). Na uteg B djeluju samo dvije sile, sila teža prema dolje ($\vec{G}_B$) i napetost niti prema gore ($\vec{T}_{AB}$).

   Sila napetosti niti kojom djeluje uteg A na uteg B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

b) Za uteg B možemo pisati

$$\vec{G}_B + \vec{T}_{AB} = m_B\vec{a},$$

$$G_B - T = m_B a \quad \Rightarrow \quad T = m_B(g - a). \tag{3.5}$$

   Zapisujemo sve sile koje djeluju na uteg A

$$\vec{G}_{A,||} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A\vec{a}.$$

   Radimo projekciju sila na smjer gibanja

$$G_{A,||} - F_{tr,A} + T = m_A a$$

$$m_A g \sin\alpha - \mu_k m_A g \cos\alpha + T = m_A a$$

   Napetost niti možemo zamjeniti izrazom 3.5 i dobivamo

$$m_A g \sin\alpha - \mu_k m_A g \cos\alpha + m_B g - m_B a = m_A a.$$

   Nakom sređivanja dobivamo konačni izraz

$$(m_A \sin\alpha - \mu_k m_A \cos\alpha + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_A(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha) + m_B}{m_A + m_B}\, g.$$

   Uvrstimo zadane vrijednosti

$$a = \frac{10\ kg(\sin 30^\circ - 0,2\cos 30^\circ)}{10\ kg + 5\ kg}\, 9,81\ ms^{-2} = 5,41\ ms^{-2}$$

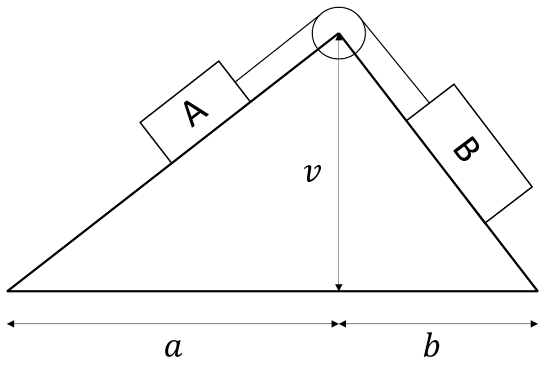
c) Kako bismo dobili iznos sile napetosti niti uvrštavamo dobivenu akceleraciju u izrac 3.5

$$T = 5\ kg(9,81\ ms^{-2} - 5,41\ ms^{-2}) = 22\ N$$

**4.3.** Koeficijent kinetičkog trena između blokova i podloge je $\mu_k = 0,2$, a dimenzije i mase su: $a = 5\ m$, $b = 3\ m$, $v = 4\ m$, $m_A = 10\ kg$ i $m_B = 15\ kg$. Koliki je iznos ubrzanja blokova prikazanih na slici?

---

Sila napetosti niti kojom djeluje blok A na blok B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje




na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

Kako bismo mogli rastaviti sile moramo izračunati kuteve $\alpha$ i $\beta$

$$\tan\alpha = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{4m}{5m} = 38,66^\circ,$$

$$\tan\beta = \frac{v}{b} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\frac{4m}{3m} = 53,13^\circ.$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na blok A i množimo skalarno s $\cdot\vec{j}$

$$\vec{G}_{A,||} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A\vec{a} \quad / \cdot \vec{j}$$

Dobivamo sile u usporedne s lijevim nagibom kosine

$$-m_A g\sin\alpha - \mu_k m_A g\cos\alpha + T = m_A a.$$

Izrazimo napetosti niti

$$T = m_A g\sin\alpha + \mu_k m_A g\cos\alpha + m_A a. \tag{3.6}$$

Isto radimo za blok B

$$\vec{G}_{B,||} + \vec{G}_{B,\perp} + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{T}_{AB} = m_B\vec{a} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$m_B g\sin\beta - \mu_k m_B g\cos\beta - T = m_B a \tag{3.7}$$

Uvrštavamo izraz 3.6 za napetost niti u izraz 3.7

$$m_B g\sin\beta - \mu_k m_B g\cos\beta - m_A g\sin\alpha - \mu_k m_A g\cos\alpha - m_A a = m_B a.$$

Sređujemo izraze:

$$g\left[m_B(\sin\beta - \mu_k\cos\beta) - m_A(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)\right] = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_B(\sin\beta - \mu_k\cos\beta) - m_A(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)}{m_A + m_B}\, g$$

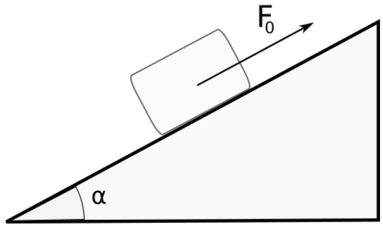
$$a = \frac{15kg(\sin 53,13^\circ - 0,2\cos 53,13^\circ) - 10kg(\sin 38,66^\circ + 0,2\cos 38,66^\circ)}{10kg + 15kg}\, 9,81\ ms^{-2}$$

$$a = 0,94\ ms^{-2}$$

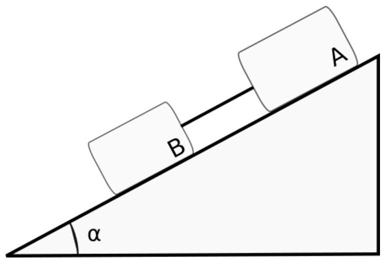
## Zadaci za samostalni rad

**4.4.** Na blok mase $m = 2\ kg$ djelujemo silom $F = 25,0\ N$ usporedno s nagibom kosine (kao na slici). Ako je kosina nagiba $\alpha = 39^\circ$, a koeficijent kinetičkog trenja između bloka i podloge $\mu_k = 0,25$ koliko je ubrzanje bloka?

$a = 4,420\ ms^{-2}$




**4.5.** Dva bloka mase $m_A = 10\ kg$ i $m_B = 8\ kg$ spojena su nerastezljivim užetom i položena na kosinu nagiba $\alpha = 33°$ kao na slici. Ako je koeficijent kinetičkog trenja između bloka A i kosine je $\mu_{kA} = 0,4$, a između bloka B i kosine je $\mu_{kB} = 0,2$ izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.

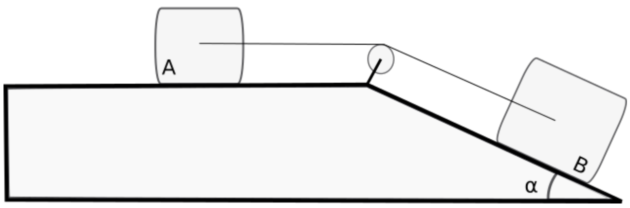



$a = 2,783\ ms^{-2}$

---

**4.6.** Blok $m_A = 7\ kg$ položen je na ravni dio klina, a blok $m_B = 15\ kg$ položen je na kosi dio klina nagiba $\alpha = 37°$.

a) Izračunajte iznos akceleracije sustava ako pretpostavimo da nema trenja.
b) Izračunajte iznos akceleracije sustava kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge $\mu_k = 0,1$.




a) $a = 4,025\ ms^{-2}$
b) $a = 3,803\ ms^{-2}$

# 4

# ZAKONI OČUVANJA

**5.1.** Materijalna točka pomaknuta je u $xy-$ravnini iz točke A čiji je vektor položaja $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j}$ $[m]$ u točku B kojoj je vektor položaja $\vec{r}_B = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ $[m]$. Tijekom pomaka na nju je djelovala stalna sila $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ $[N]$. Izračunajte rad sile $\vec{F}$.

---

$$W_{F,AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = konst. \quad \Rightarrow \quad W_{F,AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta\vec{r} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 5\vec{j}$$

$$W_{F,AB} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (\vec{i} - 5\vec{j}) = -17\ J$$

**5.2.** Tijelo počinje klizati iz stanja mirovanja na visini od $0,8$ metara na vrhu kosine. Kolika je brzina tijela na dnu kosine ako je nagib kosine $30°$, koeficijent kinetičkog trenja $0,43$?

---

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,G}(B) = E_k(A) + E_{p,G}(A) + W_{AB}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$

Ostalo je za izračunati rad sile trenja

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}_{tr}||\Delta\vec{r}| \cos\sphericalangle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r}) = F_{tr}\Delta r \cos(\pi)$$

Pomak tijela $\Delta r$ možemo izaraziti iz visine kosine i kuta $\Delta r = H/\sin\vartheta$. Potrebno je još zapisati silu trenja koja ovisi o kinematičkom koeficijentu trenja i sili kojom tijelo pritišće podlogu $F_{tr} = \mu_k mg\cos\vartheta$.

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = -\mu_k mg\cos\vartheta \frac{H}{\sin\vartheta} = -\mu_k mgH\cot\vartheta$$

Vraćamo se u zakon očuvanja energije

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH - \mu_k mgH\cot\vartheta$$

$$v = \sqrt{2gH(1 - \mu_k \cot\vartheta)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81\ ms^{-2} \cdot 0,8\ m(1 - 0,43 \cdot \cot 30°)} = 2,0\ ms^{-1}$$

**5.3.** Konstanta opruge koja se koristi za ispucavanje kuglice flipera mase 80 grama je 138 $Nm^{-1}$. Koliko centrimetara treba povući ručicu flipera (tj. stisnuti oprugu) da bi se kuglica ispalila brzinom iznosa $5ms^{-1}$?

---

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,el}(B) = E_k(A) + E_{p,el}(A) + W_{AB}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2 + 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2$$

$$\Delta x = v\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\Delta x = 5ms^{-1}\sqrt{\frac{0,08kg}{138Nm^{-1}}} = 0,12\ m$$

**5.4.** S vrha strme ceste dugačke 100 $m$, visinske razlike 20 $m$, spuštaju se saonice mase 5 $kg$. Izračunajte iznos sile trenja koja se javlja pri spuštanju niz brijeg ako saonice na dnu brijega imaju brzinu 16 $ms^{-1}$. Početna brzina saonica je nula.

---

$F_{tr} = 3,41\ N$

**5.5.** Iz stanja mirovanja na visini $h = 0,8\ m$ na vrhu kosine tijelo počinje kliziti niz kosinu te kad dođe do dna kosine nastavi još četiri metra kliziti horizontalno prije nego se zaustavi. Koeficijent kinetičkog trenja $\mu_k$ između tijela i podloge je isti kad tijelo klizi niz kosinu i horizontalno. Koliki je $\mu_k$ ako je nagib kosine $\vartheta = 20°$?

---

$\mu_k = 0,129$

**5.6.** Materijalna točka mase $m = 0,5\ kg$ giba se u $xy$-ravnini iz točke A čiji je vektor položaja $\vec{r}_A = 11\vec{i} - 9\vec{j}\ [m]$ u točku B kojoj je vektor položaja $\vec{r}_B = -7\vec{i} + 12\vec{j}\ [m]$. Na putanji do točke B na nju djeluje rezultantna sila $\vec{F}_R = -3\vec{i} + \vec{j}\ [N]$. Izračunajte kolika će biti kinetička energija u točki B ako je brzina u točki A bila $\vec{v}_A = 3\vec{i} + 4\vec{j}\ [ms^{-1}]$?

---

$E_k(B) = 81,25\ J$

**5.7.** Dječak s mosta visokog 5 $m$ iznad rijeke baci loptu vertikalno u zrak brzinom 11 $kmh^{-1}$. Na kojoj visini iznad rijeke bi potencijalna energija bila jednaka kinetičkoj, kad bi mogli zanemariti otpor zraka?

---

$h = 2,738\ m$

**5.8.** Tijelo mase 10 $g$ nalazi se na vertikalno postavljenoj opruzi u stanju ravnoteže. Konstanta opruge je 100 $Nm^{-1}$ pa se deformacija opruge zbog težine tijela (oko 1 $mm$) može slobodno zanemariti. Vanjska sila oprugu stisne za 5 $cm$. Taj novi položaj tijela uzima se kao početna visina $h_1 = 0$. Do koje maksimalne visine $h_2$ ovako stisnuta opruga može izbaciti tijelo? Otpor zraka se zanemaruje.

$h_2 = 1,274$

**6.1.** Automobil mase $m = 2000\ kg$ giba se uz kosinu nagiba $\vartheta = 15°$ stalnom brzinom iznosa 60 $kmh^{-1}$. Ukupna sila otpora (trenje kotrljanja i otpor zraka) iznosi $|\vec{F}_{otp}| = 2000\ N$, a visina kosine je $h = 60\ m$. Izračunajte:

a) pogonsku silu automobila;

b) rad pogonske sile od početka do kraja kosine;

c) snagu automobila.

---

a) Ako je brzina stalna tada je rezultantna sila na automobil jednaka je nuli; $\vec{v} = konstanta \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_R = \vec{0}$.

$$\vec{F} + \vec{F}_{otp} + \vec{G}_{||} + \vec{G}_{\perp} + \vec{R} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{j}$$
$$F - F_{otp} - mg\sin\vartheta = 0$$
$$F = F_{otp} + mg\sin\vartheta$$
$$F = 2000N + 2000kg\ 9,81ms^{-2}\ \sin 15° = 7078,03\ N$$

b)
$$W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos 0°$$

Pomak automobila možemo izraziti preko visine kosine i kuta

$$W = F\frac{h}{\sin\vartheta} = 7078,03\frac{60m}{\sin 15°} = 1640844\ J$$

c)
$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv$$

Iznos brzine automobila je $v = 60\ kmh^{-1} = 60\frac{1000\ m}{3600\ s} = 16,67\ ms^{-1}$

$$P = 7078,03\ N16,67\ ms^{-1} = 117967\ W$$

**6.2.** Ledolomac mase 6000 tona s ugašenim motorom nalijeće brzinom 30 $kmh^{-1}$ na santu leda koja se giba brzinom 2 $kmh^{-1}$ u istom smjeru. Poslije sudara zajedno se kreću brzinom 5 $kmh^{-1}$. Kolika je masa sante leda?

---

Zapisujemo zakona očuvanja količine gibanja i izražavamo masu sante leda

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$
$$m_2v_2 - m_2v' = m_1v' - m_1v_1$$
$$m_2 = \frac{v' - v_1}{v_2 - v'}m_1$$
$$m_2 = \frac{5\ kmh^{-1} - 30\ kmh^{-1}}{2\ kmh^{-1} - 5\ kmh^{-1}}6000\ t = 50000\ t$$

**6.3.** Klizač mase 70 $kg$ koji stoji na ledu odbacuje od sebe u horizontalnom smjeru predmet mase 3 $kg$ brzinom od 8 $ms^{-1}$. Koliko će se klizač pomaknuti, ako je koeficijent kinetičkog trenja između leda i klizaljki 0,02?

---

Prije početka gibanja klizač miruje zajedno s predmetom $v' = 0$ stoga možemo izraziti iz zakona očuvanja količine gibanja brzinu klizača na početku njegovog gibanja

$$(m_1 + m_2)v' = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

Zapisujemo zakon očuvanja energije za klizača

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A) + W_{AB}.$$

Budući da nema promjene visine potencijalna energija klizača je jednaka nuli, a kako na kraju svojega gibanja staje njegova kinetička energija $E_k(B)$ će također biti jednaka nuli

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + F_{tr} \Delta r \cos \sphericalangle(\vec{F}_{tr}, \Delta \vec{r})$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + F_{tr} \Delta r \cos \pi$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\mu_k g} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2 \mu_k m_1^2 g}$$

$$\Delta r = \frac{(3\ kg)^2 \cdot (8\ ms^{-1})^2}{2 \cdot 0,02 \cdot (70\ kg)^2 \cdot 9,81\ ms^{-2}} = 0,3\ m$$

**6.4.** Kolikom se maksimalnom brzinom izraženom u kilometrima na sat može gibati automobil mase 1400 $kg$ i snage 45 $kW$ po cesti na kojoj je koeficijent kinetičkog trenja 0,08? (Otpor zraka se zanemaruje.)

---

$v_{max} = 147,44\ kmh^{-1}$

**6.5.** Automobil mase 1500 $kg$ koji se gibao brzinom 45 $kmh^{-1}$ udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 $kmh^{-1}$. U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

---

$F_{tr} = 6093,75$

**6.6.** Automobil mase 1500 $kg$ koji se gibao brzinom 45 $kmh^{-1}$ udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 $kmh^{-1}$. U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

---

$F_{tr} = 6093,75$

5

# KRUTO TIJELO

**7.1.** Kotač promjera 40 $cm$ vrti se oko nepomične osi tako da se kut zakreta mijenja u vremenu prema sljedećem izrazu:

$$\varphi(t) = 5t + 3t^2 + 4t^4 \ [rad].$$

Izračunajte:

a) Kutnu brzinu vrtnje u trenutku $t = 0,5\ s$.

b) Obodnu brzinu ruba kotača u trenutku $t = 0,5\ s$.

c) Kutno ubrzanje u trenutku $t = 0,5\ s$.

d) Koliko okretaja napravi kotač od $t = 0\ s$ do $t = 0,5\ s$.

---

a) $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 3t^2 + 4t^4)$

$\omega(t) = 5 + 6t + 16t^3$

$\omega(t = 0,5\ s) = 5 + 6 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,5^3 = 10\ rads^{-1}$

b) $v(t) = \omega(t)r = (5 + 6t + 16t^3)r$

$v(t = 0,5\ s) = \omega(t = 0,5)r = 10\ rads^{-1} 0,2\ m = 2\ ms^{-1}$

c) $\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 6t + 16t^3) = 6 + 48t^2$

$\alpha(t = 0,5\ s) = 6 + 48 \cdot 0,5^2 = 18\ rads^{-2}$

d) Označimo broj okretaja s $n$

$n2\pi = \Delta\varphi$

$n = \frac{1}{2\pi}(\varphi(0,5\ s) - \varphi(0\ s))$

$n = \frac{1}{2\pi}(5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2 + 4 \cdot 0,5^4 - 0) = 0,557$ okretaja.

**7.2.** Homogeni aluminijski valjak polumjera 8 i visine 32 $cm$ rotira oko osi koja je paralelna s osi valjka, a prolazi kroz plašt. Odredite kinetičku energiju rotacije ako napravi 105 okretaja u minuti. Gustoća aluminija je $2,7\ gcm^{-3}$.

---

Kako bismo izračunali kinetičku energiju rotacije $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ moramo znati moment tromosti oko osi rotacije i iznos kutne brzine. Kako bismo odredili moment tromosti koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I = I_T + Md^2$$

gdje je $I_T$ moment tromosti oko osi koja prolazi kroz centar mase i za valjak iznosi $I_T = \frac{1}{2}MR^2$, $M$ je u ovom slučaju masa valjka, a $d$ je udaljenost između osi koja prolazi centrom mase i osi rotacije. Tako da moment tromosti možemo pisati

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Masu valjka možemo izraziti preko gustoće i volumena valjka ($V = R^2\pi h$),

$$I = \frac{3}{2}\pi\rho h R^4.$$

Ostalo je izračunati kutnu brzinu koja je broj okretaja u sekunti puta $2\pi$

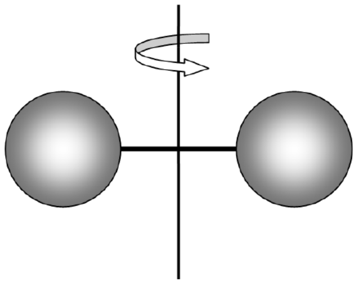
$$\omega = \frac{105}{60\ s}2\pi\ rad = 10,995\ rads^{-1} \simeq 11\ rads^{-1}$$

. Sada možemo izračunati kinetičku energiju rotacije:

$$E_k = \frac{3}{4}\pi\rho h R^4\omega^2 = \frac{3}{4}\pi 2700\ kgm^{-3}(0,08\ m)^4 0,32\ m(11\ rads^{-1})^2$$

$$E_k = 10,0895\ J$$

**7.3.** Dvije homogene kugle gustoće 2700 $kgm^{-3}$ i polumjera 4 $cm$ spojene su štapom zanemarive mase i duljine 10 $cm$ (vidi skicu). Koliki je moment susutava oko osi koja prolazi polovištem štapa? Moment tromosti kugle oko osi koja prolazi kroz središte je $I = \frac{2}{5}MR^2$.



---

Moment tromosti sustava $I$ je zbroj momenta tromosti svake kugel, $I = 2I_{kugla}$ Kako bismo odredili moment tromosti kugle koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I_{kugla} = I_T + Md^2$$

$$I_{kugla} = \frac{2}{5}MR^2 + M(\frac{L}{2} + R)^2$$

gdje je $M$ masa jedne kugle, $R$ je njezin radijus, a $L$ je udaljenost između kugli. Udaljenost osi rotacije od centra mase kugle je $d = \frac{L}{2} + R$. Izrazimo masu pomoću gustoće i volumena kugle ($V = \frac{4}{3}R^3\pi$) i dobivamo moment tromosti jedne kugle:

$$I_{kugle} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\left[\frac{2}{5}R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2\right].$$

Moment tromosti sustava je:

$$I = 2I_{kugle} = \frac{8}{3}\pi 2700\ kgm^{-3}(0,04\ m)^3\left[\frac{2}{5}(0,04\ m)^2 + \left(\frac{0,1\ m}{2} + (0,04\ m)\right)^2\right]$$

$$I = 0,01265\ kgm^2.$$

**7.4.** Kotač se vrti oko nepomične osovine tako da mu se kut zakreta mijenja u vremenu prema izrazu

$$\varphi(t) = te^{-0,1t}[rad].$$

Izračunajte:

a) Kutnu brzinu vrtnje u trenutku $t = 3\ s$.

b) Kutno ubrzanje u trenutku $t = 3\ s$.

---

a) $\omega(t = 3\ s) = 0,519\ rad/s$

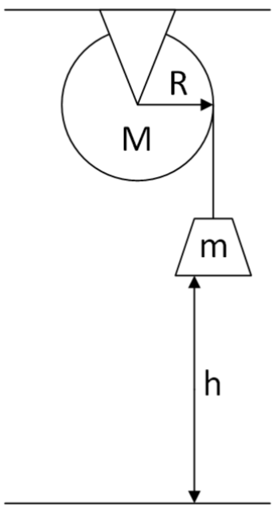
b) $\alpha(t = 3\ s) = -0,126\ rad/s^2$

**7.5.** Koliko okretaja u minuti treba rotirati homogeni mjedeni valjak oko osi koja je paralelna s osi valjka a prolazi kroz plašt, da bi mu kinetička energija rotacije bila 40 $J$? Visina valjka je 30 $cm$, a polumjer 10 $cm$. Gustoća mjedi je $8,5\ g/cm^3$.

---

$\nu = 77,92\ okr/min$

**7.6.** Na valjak polumjera $R$ i mase $M$ koji se može rotirati oko horizontalne osi namotana je nit na koju je obješen uteg mase $m$ (vidi skicu). Kolika će biti kutna brzina valjka u trenutku kad uteg padne s visine $h$?




---

U početnom trenutku uteg mase $m$ ima potencijalnu energiju u polju sile teže $E_{p,G}(A) = mgh$. Neposredno prije udara o tlo uteg ima kinetičku energiju $E_k(B) = \frac{mv^2}{2}$ i valjak se zavrtio kutnom brzinom $\omega$ te ima kinetičku energiju rotacije $E_{k,R}(B) = \frac{I\omega^2}{2}$. Iskoristimo zakon očuvanja energije:

$$E_p(B) + E_k(B) = E_p(A) + E_k(A)$$

$$0 + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgh + 0.$$

Moment tromosti valjka koji rotira oko svoje osi iznosi $I = \frac{MR^2}{2}$. Također, obodna brzina ruba valjaka jednaka je brzini kojom uteg pada:

$$v = \omega R.$$

Ddobivamo:

$$\omega = \sqrt{\frac{4mgh}{R^2(2m + M)}}.$$

*Isto rješenje, drugi pristup.*
Zadatak je moguće riješiti pomoću jednadžbi gibanja. Kod rotacije krutog tijela moment sile jednak je produktu momenta tromosti i kutnog ubrzanja $N = I\alpha$. Budući da sila napetosti niti $T$ djeluje na obodu valjka, krak sile je jednak polumjeru utega $N = RT$. Za uteg na koji djeluju sila teža $G$ i napetost niti $T$ pišemo drugi Newtonov zakon $G - T = ma$. Sve zajedno dobivamo:

$$R(G - ma) = I\alpha.$$

Brzina utega jednaka je obodnoj brzini ruba valjka $v = \omega R$, isto vrijedi i za ubrzanje $a = \alpha R$. Uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo:

$$\alpha(I + mR^2) = RG,$$

$$\alpha = \frac{Rmg}{I + mR^2} = konst.$$

Za konstantno ubrzanja vrijedi $\omega = \alpha t$ i $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2$. Kut $\varphi$ ovisit će o visini s koje pada uteg $\varphi R = h$, ako to iskoristimo dobivamo:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha R}}.$$

Na kraju se dobije:

$$\omega = \alpha t = \frac{Rmg}{I + mR^2}\sqrt{\frac{2h}{\alpha R}} = \sqrt{\frac{4mgh}{R^2(2m + M)}}.$$

# 6 GRAVITACIJA

*Kod rješavanja zadataka koristite se sljedećim numeričkim vrijednostima:*

- *gravitacijska konstanta:* $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
- *masa Zemlje:* $M_Z = 5,98 \cdot 10^{24}\ kg$
- *polumjer Zemlje:* $R_Z = 6,371 \cdot 10^6\ m$
- *iznos ubrzanja slobodnog pada:* $g = 9,81\ ms^{-2}$

**8.1.** Odredite visinu iznad površine Zemlje na kojoj će na astronauta djelovati jakost gravitacijskog polja po iznosu jednaka iznosu ubrzanja $a = 0,3g$.

---

Jakost gravitacijskog polja Zemlje na visini $h$ možemo zapisati

$$G(h) = \gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Tražimo za koju visinu $h$ vrijedi $G(h) = 0,3g$.

$$\gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = 0,3g$$

$$(R_Z + h)^2 = \frac{\gamma M_z}{0,3g}$$

$$h = \sqrt{\gamma \frac{M_z}{0,3g}} - R_Z$$

$$h = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg}{0,3 \cdot 9,81\ ms^{-2}}} - 6,371 \cdot 10^6\ m$$

$$h = 5,271 \cdot 10^6\ m$$

**8.2.** Umjetni satelit giba se oko Zemlje po kružnoj putanji s periodom vrtnjem $T = 132\,\mathrm{min}$. Koliki je polumjer putanje satelita?

---

$$F_{cp} = F_{gr}$$

$$ma_{cp} = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

Centripetalnu akceleraciju možemo zapisati preko perioda vrtnje

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma M_Z \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} 5,98 \cdot 10^{24}\ kg \left(\frac{7920\ s}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = 8\ 589\ 592,25\ m$$

**8.3.** Izračunajte period kruženja satelita po kružnoj putanji oko Zemlje, ako je iznos jakosti gravitacijskog polja Zemlje na putanji satelita 3 $ms^{-2}$?

---

$$G = \gamma \frac{M_Z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}$$

Gravitacijsko polje drži satelit na kružnom gibanju

$$G = a_{cp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{G}}$$

Uvrštavanjem prvog izraza u drugi dobivamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G} \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3\ ms^{-2}} \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg}{3\ ms^{-2}}}}$$

$$T = 12\ 318,16\ s = 205\ min\ 18,16\ s$$

**8.4.** Na pravcu koji povezuje zvijezdu A i zvijezdu B, koja ima pet puta manju masu od zvijezde A, postoji točka u kojoj bi na svemirski brod djelovale po iznosu iste privlačne sile od zvijezde A i od zvijezde B. Na kojoj udaljenosti od zvijezde A je ta točka, ako je udaljenost među zvijezdama $9,46 \cdot 10^{12}\ m$?

---

$r = 6,537 \cdot 10^{12}\ m$

**8.5.** Jakost gravitacijskog polja na površini Marsa je $3,71\ ms^{-2}$ . Izračunajte srednju gustoću Marsa pod pretpostavkom da je Mars homogena kugla polumjera 3389 $km$.

---

$\rho = 3918,2\ kgm^{-3}$

**8.6.** Koliki je period satelita koji kruži 300 $km$ iznad Zemljine površine?

---

$T = 90\ min 20,7\ s$

**9.1.** Izračunajte gravitacijsku potencijalnu energiju $E_{p,gr}$ i potencijalnu energiju u polju sile teže $E_{p,G}$ mase $m = 1\ kg$ u gravitacijskom polju Zemlje kada se:

a) masa $m$ nalazi na površini Zemlje;
b) masa $m$ je na visini $1\ km$ nad površinom Zemlje;
c) masa $m$ je na visini $1000\ km$ nad površinom Zemlje;
d) usporedite rezultate!

---

a) $h = 0$

$$E_{p,g}(A) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z}$$

$$E_{p,g}(A) = -6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\ \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\ kg}{6,371 \cdot 10^6\ m} = -62\ 606\ 498,2\ J$$

$$E_{p,G} = mgh = 0\ J$$

b) $h = 10^3\ m$

$$E_{p,g}(B) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(B) = -6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\ \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\ kg}{6,372 \cdot 10^6\ m} = -62\ 596\ 672,9\ J$$

$$E_{p,g}(B) - E_{p,g}(A) = 9\ 825,3$$

$$E_{p,G} = mgh = 9\ 810\ J$$

c) $h = 10^6\ m$

$$E_{p,g}(C) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(C) = -6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\ \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\ kg}{6,372 \cdot 10^6\ m} = -54\ 112\ 874,8\ J$$

$$E_{p,g}(C) - E_{p,g}(A) = 8\ 493\ 623,4$$

$$E_{p,G} = mgh = 9\ 810\ 000\ J$$

**9.2.** Do koje maksimalne visine će se dići metak ispaljen s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa $715\ ms^{-1}$? Masa Mjeseca je $7,34 \cdot 10^{22}\ kg$, a polumjer Mjeseca $1737\ km$.

---

Koristimo zakon očuvanja energije. Metak na površini Mjeseca ima gravitacijsku potencijalnu energiju i kinetiču energiju, kada se popne na visinu $h$ ima samo gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{p,g}(h = 0) + E_k(h = 0) = E_{p,g}(h) + E_k(h)$$

$$-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\gamma \frac{M_M m}{R_M + h} + 0$$

$$R_M + h = \frac{-\gamma M_M}{-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} v_0^2}$$

$$h = \frac{-2\gamma M_M R_M}{-2\gamma M_M + v_0^2 R_M} - R_M$$

$$h = \frac{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} 7,34 \cdot 10^{22}\ kg 1,737 \cdot 10^6\ m}{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} 7,34 \cdot 10^{22}\ kg + (715\ ms^{-1})^2 1,737 \cdot 10^6\ m} - 1,737 \cdot 10^6\ m$$

$$h = 173\ 239,9\ m$$

**9.3.** Prema Zemlji se iz velike ("beskonačne") udaljenosti početnom brzinom iznosa $v_0 = 3\ kms^{-1}$ duž pravca koji prolazi njezinim središtem giba meteor. Koliki će biti iznos brzine meteora u trenutku kada se meteor nađe na udaljenosti $r = 6R_Z$ od središta Zemlje? Što se događa s njegovom brzinom u odnosu na početnu? Koji je razlog tome?

---

Zapisujemo zakon očuvanja energije

$$E_{p,g}(\infty) + E_k(\infty) = E_{p,g}(6R) + E_k(6R).$$

U beskonačnosti tijelo nema gravitacijsku potencijalnu energiju tako da pišemo

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma\frac{M_Z m}{6R_Z} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = v_0^2 + \gamma\frac{M_Z}{3R_Z}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \gamma\frac{M_Z}{3R_Z}}$$

$$v = \sqrt{(3000\ ms^{-1})^2 + 6,67\cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\frac{5,98\cdot 10^{24}\ kg}{3\cdot 6,371\cdot 10^6\ m}} = 5465,2\ ms^{-1}$$

**9.4.**
Izračunajte 2. kozmičku brzinu Merkura pod pretpostavkom da je Merkur homogena kugla polumjera 2440 $km$ i srednje gustoće $5,43 g/cm^3$ . Gravitacijska konstanta je $\gamma = 6,67\cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

---

$v_2 = 4,25\ kms^{-1}$

**9.5.**
Tijelo je ispaljeno s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa 3 $kms^{-1}$ . Koliki će biti iznos brzine toga tijela kada se ono nađe u „beskonačnosti“? Masa Mjeseca je $7,34\cdot 10^{22}\ kg$, a polumjer 1737 $km$.

---

$v = 1833,8\ ms^{-1}$

**9.6.**
Izračunajte iznos brzine kojom bi predmet pušten iz stanja mirovanja na visini od $10^4$ $km$ iznad površine Zemlje udario o tlo (kada ne bi bilo atmosfere)?

---

$v = 8745,5 ms^{-1}$

# 7 RJEŠENJA

## 7.1 MATEMATIČKI TEMELJI

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{i}+3\vec{j})\cdot(-3\vec{i}-2\vec{j}) = -9$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = (\vec{i}+3\vec{j})\cdot(2\vec{i}-3\vec{j}) = -7$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = (-3\vec{i}-2\vec{j})\cdot(2\vec{i}-3\vec{j}) = 0$

b) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{i}+3\vec{j}-3\vec{i}-2\vec{j} = -2\vec{i}+\vec{j}$

c) $\vec{b}-\vec{c} = -3\vec{i}-2\vec{j}-(2\vec{i}-3\vec{j}) = -5\vec{i}+\vec{j}$

---

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 2+3\cdot 3 = 4$

b)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 73,4^\circ$$

c) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha = \sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\sin(73,4^\circ)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| \approx 13,42$$

d) $\vec{c} =?$

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) - \vec{j}(a_xb_z - a_zb_x) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6-6) - \vec{j}(3-(-3)) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{144+36} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6+6) - \vec{j}(-3-3) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

---

a) $0,1746\ rad = 0,1746\ rad\ \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 10,00^\circ$

b) $0,016\ kN = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 N = 1,6 \cdot 10^1 N =$

$= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} N = 1.6 \cdot 10^4\ mN$

c) $18,3\ MJ = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6\ J = 1,83 \cdot 10^7\ J$

d) $100\ \mu g = 10^2 \cdot 10^{-6}\ g = 10^{-4}\ g =$

$= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3\ g = 10^{-7}\ kg$

e) $8,2\ kmh^{-1} = 8,2 \frac{1000m}{3600s} = \frac{82}{36}\ ms^{-1} = 2,28\ ms^{-1}$

f) $36\ dana = 36 \cdot 24\ h = 36 \cdot 24 \cdot 60\ min = 51840\ min$

g) $2\ cm^2 = 2\ (cm)^2 = 2\ (10^{-2}m)^2 = 2 \cdot 10^{-4}m^2 = 0,0002\ m^2$

h) $10\ L = 10\ dm^3 = 10\ (dm)^3 = 10\ (10^{-1}m)^3 = 10 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 10^{-2}\ m^3 = 0.01\ m^3$

## 7.2 KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

---

Uvrstimo zadane vrijednosti u $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (30ms^{-1}t)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}t^2)\vec{k}$$

a) $\vec{r}(t=0,0s) = (30ms^{-1}0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0s)^2)\vec{k} = 0m\vec{j} + 80m\vec{k}$

$\vec{r}(t=0,5s) = (30ms^{-1}0,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0,5s)^2)\vec{k} = 15m\vec{j} + 78,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t=1,0s) = (30ms^{-1}1,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,0s)^2)\vec{k} = 30m\vec{j} + 75m\vec{k}$

$\vec{r}(t=1,5s) = (30ms^{-1}1,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,5s)^2)\vec{k} = 45m\vec{j} + 68,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t=2,0s) = (30ms^{-1}2,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,0s)^2)\vec{k} = 60m\vec{j} + 60m\vec{k}$

$\vec{r}(t=2,5s) = (30ms^{-1}2,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,5s)^2)\vec{k} = 75m\vec{j} + 48,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t=3,0s) = (30ms^{-1}3,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,0s)^2)\vec{k} = 90m\vec{j} + 35m\vec{k}$

$\vec{r}(t=3,5s) = (30ms^{-1}3,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,5s)^2)\vec{k} = 105m\vec{j} + 18,75m\vec{k}$

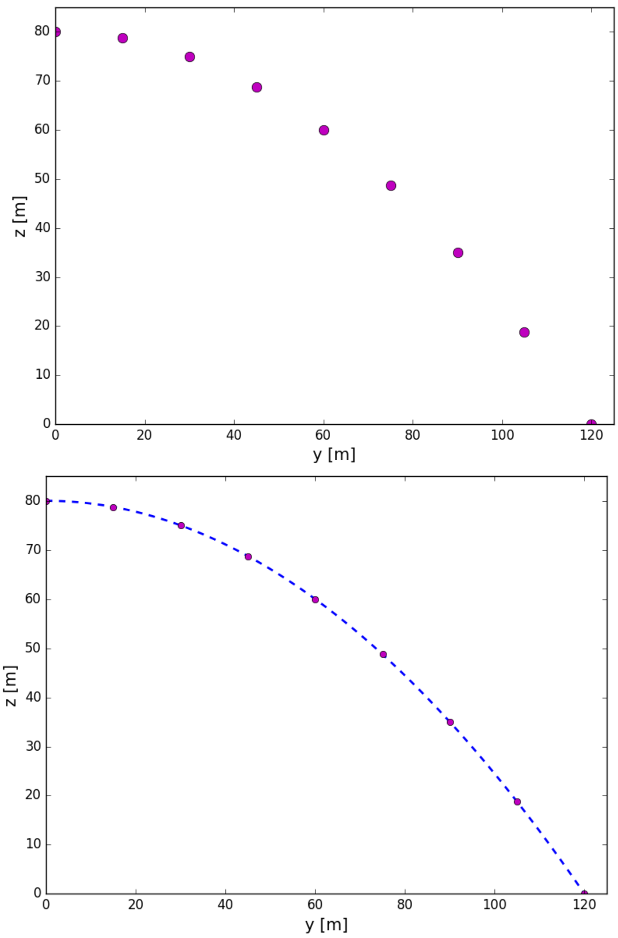
$\vec{r}(t=4,0s) = (30ms^{-1}4,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(4,0s)^2)\vec{k} = 120m\vec{j} + 0m\vec{k}$

b)

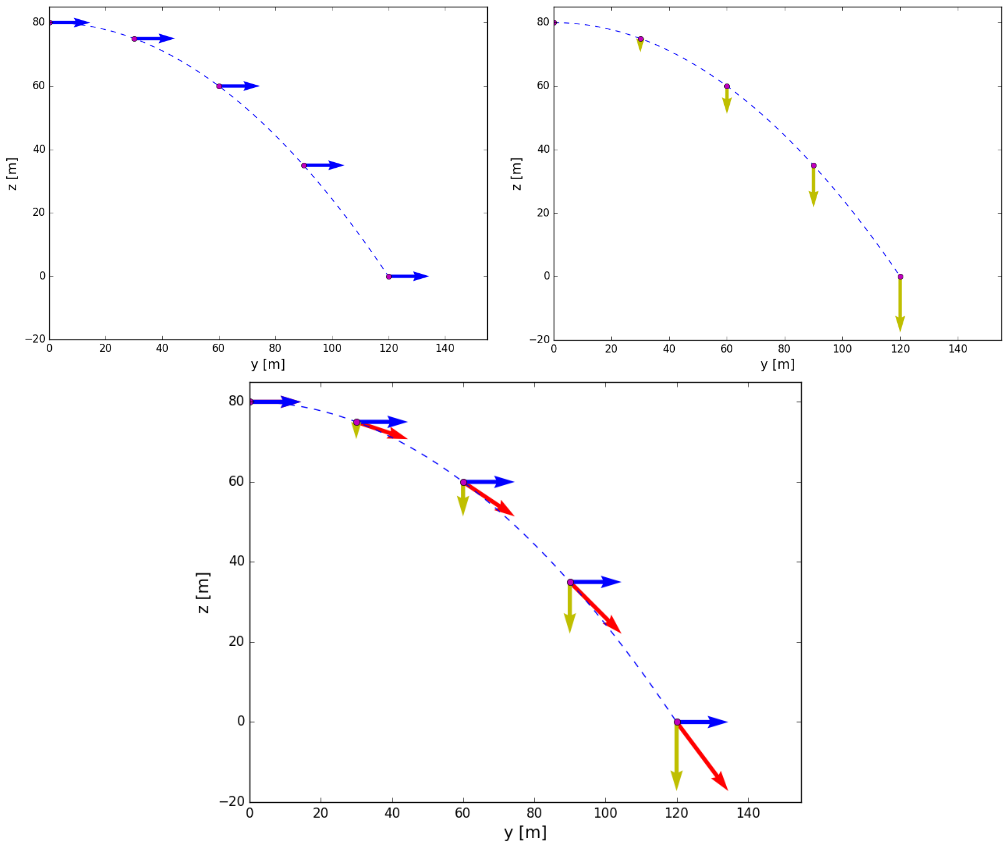
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(z_0\vec{k} + v_0t\vec{j} - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$




Slika 7.1: *(lijevo)* Položaj MT za svakih $0,5$ $s$. *(desno)* Putanja MT do udarca o tlo.




Slika 7.2: *(gore-lijevo)* Komponenta brzine u $y$-smjeru. *(gore-desno)* Komponenta brzine u $z$-smjeru. *(dolje)* Brzina tijela s komponentama.

c) $\vec{v}(t) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}t\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}1s\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 2s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 20\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 3s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 30\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 4s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 40\ ms^{-1}\vec{k}$

$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-10\ ms^{-1})^2} = 31,623\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-20\ ms^{-1})^2} = 36,055\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-30\ ms^{-1})^2} = 42,43\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-40\ ms^{-1})^2} = 50,0\ ms^{-1}$

d)
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_0\vec{j} - gt\vec{k}\right)$$
$$\vec{a}(t) = -g\vec{k} = -9,81\ ms^{-2}\vec{k} \approx -10\ ms^{-2}\vec{k}$$

---

a) U relaciju $\vec{r}(t)$ potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4\vec{i} + 4 \cdot 0,5^2\vec{j} + 3 \cdot 0,5\vec{k}$

$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375\vec{i} + 1\vec{j} + 1,5\vec{k}\ [m].$

b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je $\vec{r}(t)$ derivirati po vremenu

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k}\right)$

$\vec{v}(t) = 24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3\vec{i} + 8 \cdot 0,5\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t = 0,5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ $[ms]$

$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83$ $[ms]$

c) $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

$\vec{a}(t) = 72t^2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{a}(t = 0,5) = 18\vec{i} + 8\vec{j}$

$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7$ $[ms^{-2}]$.

---

Rješavamo inverzni problem i tražimo $\vec{r}(t) =?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$$

Trebamo riješiti integral $I = \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$.

$$I = \int_0^t 4\tau\vec{i}d\tau + \int_0^t 3\tau^2\vec{j}d\tau = 4\vec{i}\int_0^t \tau d\tau + 3\vec{j}\int_0^t \tau^2 d\tau =$$

$$= 4\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\frac{t^3}{3}\vec{j} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$$

Vratimo se u $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = 2(1 + t^2)\vec{i} + (3 + t^3)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2\ s) = 2(1 + 1,2^2)\vec{i} + (3 + 1,2^3)\vec{j} = 4,88\vec{i} + 4,728\vec{j} \quad [m]$$