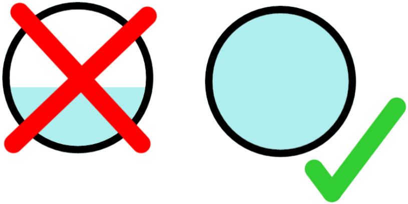
Tečenje u cijevima

Ivan Hip

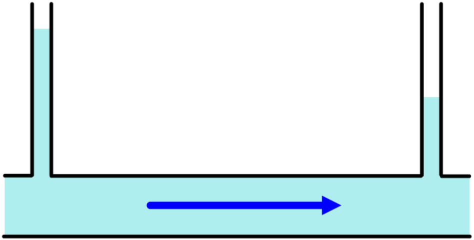
Geotehnički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Tečenje u cijevima (engl. *pipe flow*)



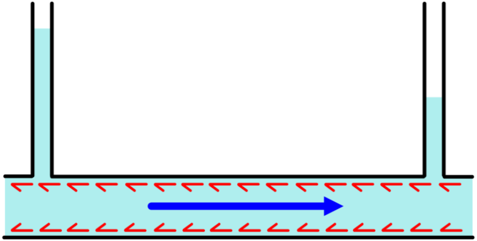
- kod tečenja u cijevima podrazumijevamo da je cijev u potpunosti ispunjena tekućinom kako bi se na njenim krajevima mogla uspostaviti razlika tlakova
- u početku ćemo se baviti samo cijevima kružnog presjeka
- radi jednostavnosti bavit ćemo se samo stacionarnim tečenjem

Razlika tlakova na krajevima cijevi



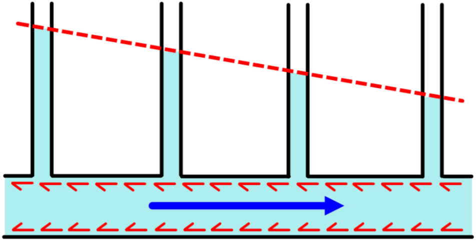
- za tečenje u horizontalnoj cijevi nužna je razlika tlakova na krajevima cijevi
- ukoliko je razlika tlakova stalna dolazi do stacionarnog tečenja, a ukoliko je i promjer cijevi stalan tečenje je jednoliko, tj. na svakom presjeku cijevi ista je srednja brzina tekućine $\bar{v}$

Viskozno trenje



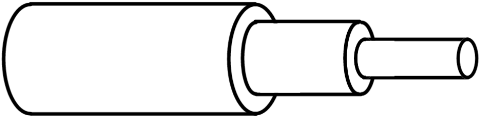
- pad tlačne visine ujedno znači da se smanjila specifična elastična potencijalna energija tekućine, međutim, kako nije došlo do povećanja brzine, jasno je da se ona nije pretvorila u kinetičku energiju, već je na neki način izgubljena
- kod tečenja stvarnih (realnih) tekućina nužno se javlja viskozno trenje zbog kojeg se dio mehaničke energije tekućine pretvara u toplinu, tj. unutarnju energiju tekućine

Gubitak tlačne visine zbog viskoznog trenja



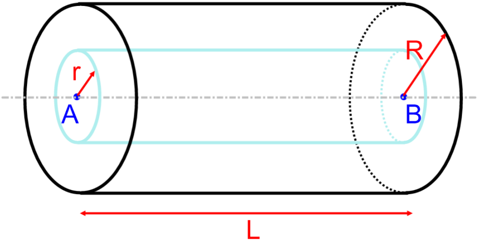
- kod jednolikog tečenja sila viskoznog trenja koja se opire tečenju je istog iznosa (ali suprotne orijentacije) kao i sila koja se javlja uslijed razlike tlakova na krajevima cijevi i uzrokuje tečenje
- pad visine po jedinici duljine cijevi $\Delta h/L$ je kod jednolikog tečenja konstantan, a time je i $\Delta p/L = konst.$

Jednoliko tečenje u slojevima



- zbog lijepljenja tekućine za stijenke cijevi (*no-slip condition!*) logično je pretpostaviti da će brzina strujanja uz stijenke cijevi biti manja od brzine u unutrašnjosti cijevi
- za cijev kružnog presjeka prirodno je na presjeku koristiti polarni koordinatni sustav s ishodištem u centru (na osi) cijevi i koordinatom r koja se kreće od 0 (os cijevi) do ruba (stijenke) cijevi na udaljenosti R od osi (R je polumjer cijevi)
- zbog kružne simetrije razumno je pretpostaviti da će brzina ovisiti samo o udaljenosti od osi cijevi, tj. o parametru r

Sile na valjkasti element tekućine



- zbog razlike tlakova na bazama valjka javlja se sila iznosa

$$F_{\Delta p} = p_A S_A - p_B S_B = (p_A - p_B) S_{baze} = \Delta p \, \pi r^2$$

- zbog viskoznog trenja javlja se posmično naprezanje τ na plaštu valjka te je iznos ukupne sile viskoznog trenja

$$F_{vt} = \tau \, S_{plašta} = \tau \, 2\pi r L$$

Ovisnost posmičnog naprezanja o r

Ako je gibanje duž cijevi jednoliko, to znači da su sile u ravnoteži

$$\vec{F}_{\Delta p} + \vec{F}_{vt} = \vec{0}$$

to jest sile $\vec{F}_{\Delta p}$ i $\vec{F}_{vt}$ su suprotno orijentirane, ali imaju isti iznos

$$F_{\Delta p} = F_{vt} \quad \Rightarrow \quad \Delta p \, \pi r^2 = \tau \, 2\pi r L \quad \Rightarrow \quad \tau(r) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} r$$

Kako je omjer $\Delta p / L = konst.$ posmično naprezanje τ ovisi linearno o udaljenosti od osi cijevi: na osi je nula, a najveće naprezanje je na stijenki cijevi kada je $r = R$

$$\tau(r = R) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} R$$

Veza koordinata y i r

- posmično naprezanje uzrokovano viskoznim trenjem je

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

- koordinata y mjeri se od kontaktne površine između tekućine i cijevi, dakle od stijenke cijevi prema unutrašnjosti
- mi trebamo obrnuti koordinatni sustav gdje se r mjeri od osi cijevi prema stijenki pa nam treba veza između tih koordinata
- za svaku točku T mora vrijediti $y_T + r_T = R$ pa je općenita veza među koordinatama y i r

$$y + r = R \quad \Rightarrow \quad r(y) = R - y \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dy} = -1$$

- to možemo iskoristiti za transformaciju

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \frac{dv}{dy}\frac{dr}{dr} = \mu \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dy} = -\mu \frac{dv}{dr}$$

Posmično naprezanje

Za jednoliko tečenje u slojevima dobili smo da posmično naprezanje τ linearno ovisi o udaljenosti r od osi cijevi

$$\tau(r) = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L} r$$

Međutim, za posmično naprezanje uslijed viskoznog trenja mora vrijediti

$$\tau(r) = -\mu \frac{dv(r)}{dr}$$

Izjednačavanjem ova dva izraza dobivamo

$$-\mu \frac{dv(r)}{dr} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L} r$$

Ovisnost brzine o r

Izjednačavanjem smo dobili diferencijalnu jednadžbu

$$-\mu \frac{dv(r)}{dr} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} r$$

iz koje metodom razdvajanja (separacije) varijabli možemo izračunati funkciju $v(r)$, tj. ovisnost brzine strujanja o udaljenosti od osi cijevi

$$dv(r) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} r dr$$

Integriranjem dobivamo

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} \int r dr = -\frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2} + C = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C$$

Kako odrediti konstantu C?

Određivanje konstante C

Konstantu C odredit ćemo uzimajući u obzir *no-slip condition:*

- tanki sloj tekućine zalijepljen je za stijenku cijevi, tako da mora vrijediti $v(r = R) = 0$
- uvrštavanjem tog uvjeta dobivamo

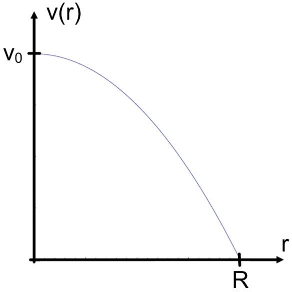
$$v(r = R) = -\frac{\Delta p}{4\mu L}R^2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\Delta p}{4\mu L}R^2$$

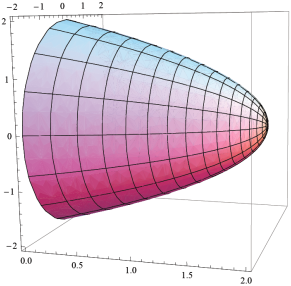
Dakle

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4\mu L}R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

pri čemu je $v_0 \equiv \frac{\Delta p}{4\mu L}R^2$ brzina strujanja u središtu cijevi.

Parabolična raspodjela brzina





Raspodjela brzina kod laminarnog tečenja je parabolična

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Protok kroz cijev

- u praksi nas najčešće zanima protok kroz cijev
- za cijev kružnog presjeka protok je

$$Q = \int_{\Omega} v dS = \int_{\Omega} v(r) r dr d\varphi = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{R} v(r) r dr = 2\pi \int_{0}^{R} v(r) r dr$$

- pošto znamo $v(r)$ možemo izračunati protok
- protok je usko vezan sa srednjom brzinom

$$\bar{v} \equiv \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \quad Q = \bar{v} S$$

- dakle, zapravo je svejedno da li računamo protok ili srednju brzinu

$$\bar{v} = \frac{Q}{S} = \frac{1}{S} \int_{\Omega} v dS = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_{0}^{R} v(r) r dr = \frac{2}{R^2} \int_{0}^{R} v(r) r dr$$

Srednja brzina kod laminarnog tečenja

Da bi dobili srednju brzinu kod laminarnog tečenja treba provesti integraciju za paraboličnu raspodjelu brzina $v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

$$\bar{v} = \frac{2}{R^2}\int_0^R v(r) r dr = \frac{2}{R^2}\int_0^R v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr =$$

$$= \frac{2v_0}{R^2}\left(\int_0^R r dr - \frac{1}{R^2}\int_0^R r^3 dr\right) = \frac{2v_0}{R^2}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^2}\frac{R^4}{4}\right) =$$

$$= 2v_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{v_0}{2}$$

Protok kod laminarnog tečenja: Hagen-Poiseuilleov zakon

$$Q = \bar{v}S = \frac{v_0}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}\frac{\Delta p}{4\mu L}R^2 R^2 = \frac{\pi}{8}\frac{\Delta p}{\mu L}R^4$$

- u praksi je uobičajeno umjesto polumjera cijevi R koristiti promjer cijevi $D = 2R$

Hagen-Poiseuilleov zakon

$$Q = \frac{\pi}{128}\frac{\Delta p}{\mu L}D^4$$

- protok je proporcionalan razlici tlakova Δp
- obrnuto je proporcionalan duljini cijevi L i dinamičkoj viskoznosti μ
- ovisi o četvrtoj potenciji promjera D!

Visina gubitaka kod laminarnog tečenja

- Hagen-Poiseuilleov zakon možemo okrenuti i pitati kolika je razlika tlakova Δp potrebna da se dobije željeni protok Q

$$Q = \frac{\pi}{128}\frac{\Delta p}{\mu L}D^4 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{128}{\pi}\frac{\mu L}{D^4}Q$$

- razlika tlakova zapravo je gubitak specifične energije tekućine zbog viskoznog trenja
- gubitke je u praksi uobičajeno iskazivati preko srednje brzine i takozvane visine gubitaka

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{1}{\rho g}\frac{128}{\pi}\frac{\mu L}{D^4}\bar{v}\frac{\pi}{4}D^2 = \frac{32\mu L}{\rho g D^2}\bar{v}$$

Kod laminarnog tečenja visina gubitaka h_f proporcionalna je srednjoj brzini $\bar{v}$.

Turbulentno tečenje

- tečenje više nije u slojevima — javljaju se poprečne komponente brzine koje su okomite na smjer tečenja i miješaju različite slojeve
- samo tanki, takozvani rubni sloj (engl. *boundary layer*) ostaje "zalijepljen" za rub cijevi, a ostala tekućina se miješa i kroz cijeli profil cijevi prolazi praktički istom brzinom koja približno odgovara srednjoj brzini tečenja $\bar{v}$
- zbog izuzetno male viskoznosti vode (kinematička viskoznost vode na $20^\circ C$ je $10^{-6}\ m^2/s$) tečenje vode je najčešće turbulentno
- prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim tečenja vidljiv je u Reynoldsovom eksperimentu

Reynoldsov broj

Definicija

Reynoldsov broj

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{\bar{v} D}{\nu}$$

Reynoldsov broj je bezdimenzionalna veličina i predstavlja omjer fizikalnih veličina koje su karakteristične za proces tečenja:

- gustoća ρ i dinamička viskoznost μ su relevantne karakteristike tekućine koje utječu na svojstva tečenja
- $\bar{v}$ je srednja brzina tečenja
- D predstavlja karakterističnu, tipičnu dimenziju sustava (za slučaj cijevi kružnog presjeka to je upravo promjer D)

Interpretacija Reynoldsovog broja

Provjera da je Reynoldsov broj doista bezdimenzionalna veličina:

$$[\mathrm{Re}] = \frac{[\rho][\bar{v}][D]}{[\mu]} = \frac{kg\; m^{-3} m\, s^{-1} m}{Pa\, s} = \frac{kg\; m^{-1} s^{-2}}{N m^{-2}} = \frac{kg\; ms^{-2}}{N} = 1$$

Reynoldsov broj karakterizira različite režime (modalitete) tečenja:

- kad je $\mathrm{Re} < 2100$ tečenje je LAMINARNO
- kad je $\mathrm{Re} > 4000$ tečenje je TURBULENTNO

- područje vrijednosti Reynoldsovog broja između 2100 i 4000 naziva se *prijelazno područje* i u njemu se izmjenjuju laminarno i turbulentno tečenje

Visina gubitaka kod turbulentnog tečenja

- visinu gubitaka za turbulentno tečenje nije moguće jednostavno izvesti iz osnovnih principa Newtonove mehanike kao što je to bio slučaj za laminarno tečenje
- naravno da se tekućina i dalje giba u skladu sa zakonima klasične mehanike, ali je zbog miješanja slojeva precizan matematički opis suviše kompliciran (danas je moguć proračun pomoću računala: *CFD - Computational Fluid Dynamics*)
- no zbog ogromnog značenja koje tečenje u cijevima ima u praktičnoj primjeni, kroz povijest su se u inženjerskoj praksi koristile razne fenomenološke formule (formule izvedene iz praktičnog inženjerskog iskustva)
- polovicom 19. stoljeća prevladala je takozvana Darcy-Weisbachova formula

Darcy-Weisbachova formula

Darcy-Weisbachova formula za visinu gubitaka u cijevima

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

h_f - visina gubitaka (m)

L - duljina cijevi (m)

D - promjer cijevi (m)

$\bar{v}$ - srednja brzina (ms^{-1})

g - ubrzanje slobodnog pada (ms^{-2})

λ - koeficijent otpora trenja (bezdimenzionalan)

Koeficijent otpora trenja za laminarno tečenje

Visinu gubitaka iz Hagen-Poiseuilleovog zakona za laminarno tečenje u cijevi izjednačimo s Darcy-Weisbachovom formulom

$$h_f = \frac{32\mu L}{\rho g D^2}\bar{v} = \lambda \frac{L}{D}\frac{\bar{v}^2}{2g}$$

i riješimo po λ

$$\lambda = \frac{32\mu L\bar{v}}{\rho g D^2}\frac{D}{L}\frac{2g}{\bar{v}^2} = 64\frac{\mu}{\rho\bar{v}D} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

- kod laminarnog tečenja koeficijent otpora trenja λ ovisi samo o Reynoldsovom broju
- relaciju $\lambda = 64/\mathrm{Re}$ lako je zapamtiti pa nema potrebe pamtiti Hagen-Poiseuilleov zakon

Koeficijent otpora trenja za turbulentno tečenje

- u turbulentnom režimu tečenja koeficijent otpora trenja λ ovisi o Reynoldsovom broju i relativnoj hrapavosti
- apsolutna hrapavost mjeri se u metrima i označava s ε
- relativna hrapavost definirana je kao omjer apsolutne hrapavosti i promjera cijevi, dakle ε/D
- ovisnost $\lambda(\mathrm{Re}, \varepsilon/D)$ je vrlo složena i određena je eksperimentalnim mjerenjima te se može prikazati u takozvanom Moodyjevom dijagramu ili parametrizirati različitim formulama od kojih se najtočnijom smatra Colebrookova formula
- Colebrookova formula je iterativna pa je za upotrebu praktičnija približna formula koju su predložili Swamee i Jain

Colebrookova i formula Swamee-Jain

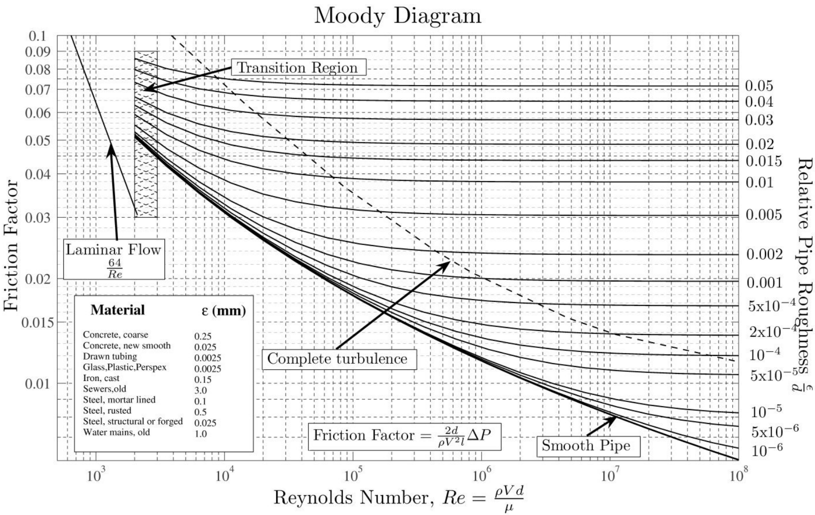
Colebrookova iterativna formula

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$$

Formula Swamee-Jain

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{\mathrm{Re}^{0,9}}\right)\right]^2}$$

Moodyjev dijagram



Preuzeto sa https://en.wikipedia.org/wiki/Moody_chart#/media/File:Moody_diagram.jpg