

Darcyjev zakon

Ivan Hip

Geotehnički fakultet, Sveučilište u Zagrebu



Darcyjev zakon

- Darcyjev zakon opisuje tečenje kroz porozni medij, najčešće tlo

Uobičajeni zapis Darcyjevog zakona

$$v_D = k i$$

v_D – Darcyjeva ili prividna brzina

k – koeficijent procjeđivanja (koeficijent filtracije)

i – hidraulički gradijent

- razjasnit ćemo:
 - zašto naziv prividna brzina?
 - što je hidraulički gradijent?
 - zašto je brzina proporcionalna hidrauličkom gradijentu?

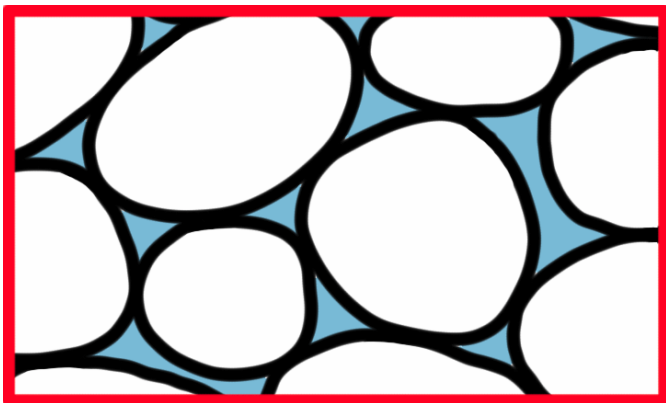
Zašto naziv prividna brzina?

- često se (i opravdano) umjesto v_D koristi oznaka q koja se interpretira kao protok po jediničnoj površini presjeka

$$v_D = q = \frac{Q}{S}$$

- ako je u eksperimentu izmjeren ukupni protok Q kroz površinu presjeka S prividna (Darcyjeva) brzina v_D je ona brzina s kojom treba pomnožiti ukupnu površinu presjeka poroznog materijala kroz koji je izmjeren protok Q
- međutim, jasno je da protok nije moguć kroz ukupnu površinu presjeka, jer se tekućina nalazi samo u porama poroznog materijala pa je stvarna brzina tečenja uvjetovana udjelom pora u poroznom materijalu

Tekućina u porama poroznog materijala



Poroznost

- *poroznost* je definirana kao omjer volumena pora i ukupnog volumena

$$n \equiv \frac{V_p}{V}.$$

- kod tečenja je relevantna prvenstveno površina presjeka pa je *efektivna poroznost* n_{eff} koja povezuje stvarnu, pravu srednju brzinu \bar{v} i prividnu brzinu v_D

$$\bar{v} = \frac{v_D}{n_{\text{ef}}}$$

općenito manja od poroznosti n , to jest, općenito je $n_{\text{ef}} \leq n$

Kako je (efektivna) poroznost uvijek manja od jedan, jasno je da je prava srednja brzina \bar{v} uvijek veća od prividne Darcyjeve brzine v_D !

Hidraulički potencijal

- da bi se moglo objasniti što je *hidraulički gradijent* prvo treba objasniti što je *hidraulički potencijal*
- općenito, *potencijal* je specifična potencijalna energija u pojedinoj točki prostora (specifična u smislu: po jediničnom naboju, po jediničnoj masi i sl.)
- pojam potencijala posebno važnu ulogu ima u elektrodinamici: napon je razlika električnih potencijala, te zbog te razlike potencijala (tj. napona) dolazi do tečenja električne struje
- analogija napona s hidrauličkim gradijentom: do tečenja tekućine dolazi zbog razlike hidrauličkog potencijala, tj. hidrauličkog gradijenta

Gravitacijski potencijal u polju sile teže

- gravitacijski potencijal je gravitacijska potencijalna energija tijela jedinične mase u gravitacijskom polju
- potencijalna energija tijela mase m u polju sile teže je

$$E_{p,G} = mgz$$

- gravitacijski potencijal u polju sile teže je potencijalna energija tijela jedinične mase u polju sile teže

$$\varphi_G \equiv \frac{E_{p,G}}{m} = gz$$

- može se pokazati da je hidraulički potencijal u direktnoj vezi sa specifičnom potencijalnom energijom tekućine u polju sile teže

Piezometarska visina je hidraulički potencijal

- ukupna energijska visina je

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

- suma prva dva člana, *tlačne* i *geodetske* visine, je *piezometarska* visina

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

zapravo potencijalna energija po jedinici težine tekućine

- gledano sa stanovišta fizike piezometarska visina je oblik potencijala te se za h koristi i naziv **hidraulički potencijal**
- poput gravitacijskog potencijala i hidraulički potencijal je u najopćenitijem obliku skalarna funkcija koordinata x , y i z

Hidraulički gradijent između dvije točke

Hidraulički gradijent između dvije točke A i B definiran je kao **razlika** piezometarskih visina u točkama A i B podijeljena s udaljenošću L između točaka

$$i \equiv \frac{\Delta h}{L} = \frac{h_A - h_B}{L}$$

- ako je specifična potencijalna energija tekućine u točkama A i B jednaka (tj. $i = 0$) nema razloga da bi tekućina tekla iz A u B , ili iz B u A
- tek kada postoji razlika hidrauličkih potencijala, tekućina teče s mjesta gdje ima veći potencijal prema mjestu gdje ima manji, tj. **tekućina teče u smjeru smanjenja specifične potencijalne energije!**

Hidraulički gradijent kod otvorenog toka

Kod jednolikog tečenja u otvorenim koritima ne mijenja se dubina toka, tj. $y_A = y_B$ pa slijedi

$$i = \frac{h_A - h_B}{L} = \frac{y_A + z_A - (y_B + z_B)}{L} = \frac{z_A - z_B}{L} = I$$

dakle, **hidraulički gradijent jednak je nagibu dna!**

- srednja brzina tečenja u otvorenim koritima proporcionalna je korijenu iz nagiba dna, tj. hidrauličkog gradijenta

$$\bar{v} \propto \sqrt{I} = \sqrt{i}$$

- međutim, hidraulički gradijent može se definirati i u svakoj pojedinoj točki prostora

Hidraulički gradijent u točki (1D primjer)

- najjednostavnije je promatrati jednodimenzionalan slučaj kad je hidraulički potencijal h funkcija samo jedne koordinate x
- udaljenost između točaka A i B je

$$L = x_B - x_A$$

- točka B može se proizvoljno približavati točki A , to jest udaljenost L smanjivati prema nuli ($L \rightarrow 0$) pa je hidraulički gradijent u točki A definiran kao

$$i(x_A) \equiv - \lim_{L \rightarrow 0} \frac{h(x_A + L) - h(x_A)}{L} = - \left. \frac{dh(x)}{dx} \right|_{x=x_A}$$

- negativan predznak uvodi se jer je tečenje uvijek s višeg prema nižem potencijalu!

Hidraulički gradijent je gradijent hidrauličkog potencijala

U dvije ili tri dimenzije hidraulički potencijal je funkcija dvije $h(x, y)$ ili tri $h(x, y, z)$ koordinate, a hidraulički gradijent je vektor

$$\vec{l} \equiv -\vec{\nabla} h$$

Vektorski zapis Darcyjevog zakona u tri dimenzije

$$\vec{v}_D = k \vec{l} = -k \vec{\nabla} h(x, y, z)$$

Za homogeno tlo $k = konst.$, ali ako je tlo nehomogeno k može biti različit u svakoj točki pa je k zapravo skalarna funkcija koordinata i

$$\vec{v}_D = -k(x, y, z) \vec{\nabla} h(x, y, z)$$

Koeficijent procjeđivanja

- u najopćenitijem slučaju tlo može biti nehomogeno i anizotropno pa k postaje simetrični tenzor

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

- ipak, u praksi je vrlo teško odrediti k u svakoj točki tla, tako da se uglavnom aproksimira s jednom skalarnom vrijednošću koja je tipična za pojedinu vrstu tla
- koeficijent procjeđivanja mjeri se u metrima u sekundi, a u literaturi se često koristi i naziv *koeficijent filtracije*

Tipične vrijednosti koeficijenta procjeđivanja vode

Vrsta tla	k [m/s]
čisti šljunak	10^{-2} i veće
čisti pijesak	10^{-2} do 10^{-4}
pijesak granulirani	10^{-4} do $5 \cdot 10^{-5}$
sitni pijesak	$5 \cdot 10^{-4}$ do 10^{-5}
prašinski do zamuljeni pijesak	$2 \cdot 10^{-5}$ do 10^{-6}
prašina i mulj	$5 \cdot 10^{-6}$ do 10^{-7}
glina	10^{-7} i manje

Izvor: Jović, V.: "Osnove hidromehanike", Element, Zagreb 2006.

Usporedba s tečenjem u otvorenim koritima

Kod usporedbe Darcyjevog zakona s tečenjem u otvorenim koritima upada u oči jedna na prvi pogled neobična i neočekivana razlika:

- brzina tečenja je u Darcyjevom zakonu proporcionalna hidrauličkom gradijentu

$$\bar{v} \propto i$$

- brzina tečenja kod tečenja u otvorenim koritima proporcionalna **korijenu** iz nagiba dna, tj. hidrauličkog gradijenta

$$\bar{v} \propto \sqrt{I} = \sqrt{i}$$

Sjetimo se: faktor \sqrt{I} pojavljuje se i u Chezyjevoj i u Manningovoj formuli, a direktno slijedi i iz Darcy-Weisbachove formule

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \Rightarrow I = \frac{h_f}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{2gD}{\lambda}} \sqrt{I}$$

Za porozni medij tipično je laminarno tečenje

Po čemu se tečenje u otvorenim koritima razlikuje od tečenja u poroznim materijalima?

- korita su mnogo puta veća od pora kroz koje teče voda u tlu!
- brzina tečenja u otvorenim koritima obično mnogo veća od brzine tečenja vode u tlu
- upravo su karakteristična dimenzija sustava D i srednja brzina tečenja \bar{v} ključni faktori kod izračunavanja Reynoldsovog broja

$$\text{Re} \equiv \frac{\bar{v} D}{\nu}$$

- za tečenje u otvorenim koritima tipične su velike vrijednosti Reynoldsovog broja \Rightarrow gotovo uvijek turbulentni režim tečenja
- međutim, male dimenzije pora i male brzine tečenja u tlu dovode do malih vrijednosti Reynoldsovog broja \Rightarrow za porozni medij tipično laminarno tečenje

Laminarno tečenje proporcionalno hidrauličkom gradijentu

- uvrštavanjem poznatog koeficijenta otpora kod laminarnog tečenja $\lambda = \frac{64}{Re}$ u Darcy-Weisbachovu formulu slijedi

$$h_f = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} = \frac{64\nu}{\bar{v}D} \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} = \frac{32\nu}{g} \frac{L}{D^2} \bar{v}$$

iz čega možemo izraziti srednju brzinu kao funkciju hidraličkog gradijenta

$$\bar{v} = \frac{g D^2}{32\nu} \frac{h_f}{L} = \frac{g D^2}{32\nu} I$$

Za laminarno tečenje tipično je da je srednja brzina tečenja proporcionalna hidrauličkom gradijentu, tj. tipična je linearna ovisnost $\bar{v} \propto I$, kao što je to slučaj u Darcyjevom zakonu!

Gornja granica valjanosti Darcyjevog zakona

Darcyjev zakon zapravo nije temeljni fizikalni zakon, već je manifestacija (posljedica) laminarnog režima tečenja tipičnog za materijale s malim dimenzijama pora.

Očigledno je ograničenje na valjanost i primjenu Darcyjevog zakona: kod većih dimenzija pora i sve veće brzine tečenje, tečenje prelazi iz laminarnog u turbulentno i Darcyjev zakon više ne vrijedi!

Općenito možemo pisati

$$\bar{v} = k I^\alpha$$

- za male vrijednosti Reynoldsovog broja $\alpha = 1$ (Darcyjev zakon)
- s porastom Reynoldsovog broja α se postepeno mijenja te za velike vrijednosti postaje $\frac{1}{2}$ ($\bar{v} \propto \sqrt{I}$) — što je tipično za sustave koji su duboko u turbulentnom režimu tečenja.

Donja granica valjanosti Darcyjevog zakona

- postoji i donja granica valjanosti Darcyjevog zakona: kod nekih materijala tečenja uopće neće biti dok hidraulički gradijent ne dosegne neku kritičnu vrijednost
- primjer takvih materijala, odnosno vrste tla, su gline

Literatura

- Jović, V.: *“Osnove hidromehanike”*, Element, Zagreb 2006. (9. poglavlje: *“Strujanje podzemnih voda”*)
- Miletić, P., Heinrich Miletić M.: *“Uvod u kvantitativnu hidrogeologiju”*, Varaždin 1981. (2. poglavlje: *“Voda u podzemlju”*)