

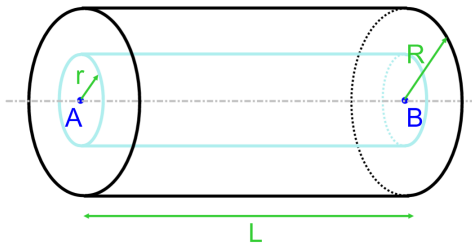
# Energijska jednadžba

Ivan Hip

Geotehnički fakultet, Sveučilište u Zagrebu



# Ponavljanje: Laminarno tečenje kroz horizontalnu cijev



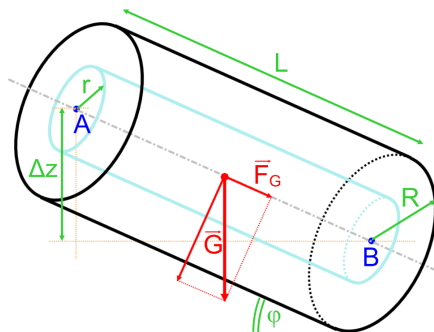
- zbog razlike tlakova na bazama valjka javlja se sila iznosa

$$F_{\Delta p} = p_A S_A - p_B S_B = (p_A - p_B) S_{baze} = \Delta p \pi r^2$$

- zbog viskoznog trenja javlja se posmično naprezanje  $\tau$  na plaštu valjka te je iznos ukupne sile viskoznog trenja

$$F_{vt} = \tau S_{plašta} = \tau 2\pi rL$$

# Laminarno tečenje kroz nagnutu cijev



- duž osi cijevi javlja se i treća sila — komponenta sile teže koja djeluje na cilindrični element tekućine

$$F_G = G \sin \varphi = mg \sin \varphi = \rho V g \sin \varphi = \rho \pi r^2 L g \sin \varphi$$

## Kod jednolikog tečenja sile su u ravnoteži

- sinus kuta  $\varphi$  može se izraziti kao omjer razlike geodetskih visina točaka A i B na krajevima cijevi i duljine segmenta cijevi

$$\sin \varphi = \frac{z_A - z_B}{L} = \frac{\Delta z}{L}$$

pa je projekcija sile teže duž osi cijevi

$$F_G = \rho \pi r^2 L g \frac{\Delta z}{L} = \rho g \Delta z \pi r^2$$

- kod jednolikog tečenja sve sile duž osi cijevi su u ravnoteži, a kako je sila viskoznog trenja koja se opire tečenju suprotne orijentacije, slijedi

$$F_{\Delta p} + F_G = F_{vt} \quad \Rightarrow \quad \Delta p \pi r^2 + \rho g \Delta z \pi r^2 = \tau 2\pi r L$$

# Ukupna razlika tlakova

- ponovo dobivamo da je ovisnost posmičnog naprezanja  $\tau$  o  $r$  linearna kao što je bilo i kod horizontalne cijevi

$$\tau(r) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p + \rho g \Delta z}{L} r = \frac{1}{2} \frac{\widehat{\Delta p}}{L} r$$

- međutim, u nazivniku je suma hidrauličkog i hidrostatskog tlaka

$$\widehat{\Delta p} \equiv \Delta p + \rho g \Delta z$$

što predstavlja ukupnu razliku tlakova između točaka A i B

- daljnji postupak rješavanja je isti kao i kod horizontalne cijevi, a rezultati su ekvivalentni, osim što se umjesto  $\Delta p$  uvrštava ukupna razlika tlakova  $\widehat{\Delta p}$

# Ovisnost brzine o $r$

- najprije izjednačimo izraze za posmično naprezanje

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \frac{\widehat{\Delta p}}{L} r$$

- pa razdvajamo (separiramo) varijable

$$dv = -\frac{\widehat{\Delta p}}{2\mu L} r dr$$

- i ovisnost brzine o  $r$  dobivamo integriranjem

$$v(r) = -\frac{\widehat{\Delta p}}{2\mu L} \int r dr = -\frac{\widehat{\Delta p}}{2\mu L} \frac{r^2}{2} + C = -\frac{\widehat{\Delta p}}{4\mu L} r^2 + C$$

# Parabolična raspodjela brzina

- konstanta integracije  $C$  određuje se iz uvjeta  $v(R) = 0$  (*"no-slip condition"*) i ponovo dobivamo paraboličnu raspodjelu brzina

$$v(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

samo što je maksimalna brzina  $v(r=0) = v_0$  ovisna o ukupnoj razlici tlakova  $\widehat{\Delta p}$

$$v_0 = \frac{\widehat{\Delta p}}{4\mu L} R^2$$

- srednja brzina opet je  $\bar{v} = v_0/2$  pa je protok

$$Q = \bar{v}S = \frac{v_0}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{8} \frac{\widehat{\Delta p}}{\mu L} R^4 = \frac{\pi}{128} \frac{\widehat{\Delta p}}{\mu L} D^4$$

a to je dobro nam poznati **Hagen-Poiseuilleov zakon**

# Hagen-Poiseuilleov zakon

- ako okrenemo Hagen-Poiseuilleov zakon

$$\widehat{\Delta p} = \frac{128}{\pi} \frac{\mu L}{D^4} Q = \frac{128}{\pi} \frac{\mu L}{D^4} \frac{v_0}{2} \pi \frac{D^2}{4} = 16 \frac{\mu L}{D^2} v_0$$

- to možemo kombinirati s

$$\widehat{\Delta p} = \Delta p + \rho g \Delta z = p_A - p_B + \rho g (z_A - z_B)$$

pa preslagivanjem članova

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B + 16 \frac{\mu L}{D^2} v_0$$

dobijemo nešto što počinje ličiti na Bernoullijevu jednačbu



# Modificirana Bernoullijeva jednačba

- na strujnici koja prolazi središtem cijevi ( $r = 0$ ) vrijedi  $v_A = v_B = v_0$  pa možemo dodati i dinamičke tlakove koji nedostaju

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + 16 \frac{\mu L}{D^2} v_0$$

i sličnost s Bernoullijevom jednačbom je potpuna

- međutim, s desne strane pojavio se još jedan dodatni član koji opisuje **gubitak specifične energije zbog viskoznog trenja**

Dakle, da bi se opisalo tečenje realne (stvarne, viskozne) tekućine nužno je modificirati Bernoullijevu jednačbu!

# Ponavljanje: Ograničenja u primjeni Bernoullijeve jednažbe

**Bernoullijeva jednažba** je izvedena uz sljedeća ograničenja:

- neviskozno tečenje (opisuje tečenje idealne, neviskozne tekućine) — zanemareno je viskozno trenje!
- stacionarno tečenje
- tečenje nestlačivog fluida (zapravo nije problem — tekućine su praktički nestlačive)
- tečenje duž strujnice

**Energijska jednažba** je modificirana Bernoullijeva jednažba koja opisuje stacionarno tečenje stvarne, viskozne tekućine u cjevovodu. Povezuje dva presjeka cijevi i služi za proračun cjevovoda.

# Energijska jednažba

## Energijska jednažba

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \alpha_A \frac{\bar{v}_A^2}{2g} + h_P - h_T = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + \alpha_B \frac{\bar{v}_B^2}{2g} + h_F$$

$h_P$  – visina dobave pumpe ( $m$ )

$h_T$  – pad visine na turbini ( $m$ )

$\bar{v}_A, \bar{v}_B$  – srednje brzine na presjecima cijevi A i B ( $ms^{-1}$ )

$\alpha_A, \alpha_B$  – Coriolisovi koeficijenti (bezdimenzionalni)

$h_F$  – ukupna visina gubitaka, zbroj svih linijskih i lokalnih gubitaka u cjevovodu ( $m$ )

# Linijski i lokalni gubici

- **linijski gubici** su gubici u cijevima i računaju se pomoću Darcy-Weisbachove formule

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

- **lokalni gubici** tlaka javljaju se u manjoj ili većoj mjeri na suženjima, proširenjima, koljenima, ventilima i svim drugim elementima cjevovoda i proporcionalni su kvadratu srednje brzine, tj. brzinskoj visini

$$h_{fm} = K_L \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

pri čemu je  $K_L$  **lokalni koeficijent otpora** karakterističan za pojedini element cjevovoda

# Ukupna visina gubitaka

**Ukupna visina gubitaka u cjevovodu** je zbroj svih linijskih i lokalnih gubitaka u cjevovodu

$$h_F = \sum_{i=1}^{N_C} h_{f,i} + \sum_{j=1}^{N_L} h_{fm,j}$$

pri čemu je

$N_C$  – broj cijevi koje su serijski spojene u cjevovod

$N_L$  – broj elemenata u cjevovodu na kojima dolazi do lokalnih gubitaka

## Specifična kinetička energija na presjeku cijevi

- u Bernoullijevoj jednažbi brzinska visina predstavlja specifičnu kinetičku energiju po jedinici težine tekućine koja prolazi kroz jednu određenu točku
- u energijskoj jednažbi više se ne promatra jedna točka na strujnici već čitav presjek cijevi
- detaljni proračun pokazuje da za srednji protok specifične kinetičke energije kroz presjek cijevi vrijedi

$$\bar{\rho}_{Ek} \geq \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$$

- znak jednakosti  $\bar{\rho}_{Ek} = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$  realiziran je samo za specijalni slučaj kad je brzina na cijelom presjeku cijevi ista, tj. kada je  $v = konst. = \bar{v}$

# Coriolisov koeficijent

- kada brzine na presjeku cijevi znatno odstupaju od srednje brzine  $\bar{v}$  tada i  $\bar{\rho}_{Ek}$  postaje znatno veća od  $\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2$  pa je to potrebno korigirati odgovarajućim koeficijentom koji se označava s  $\alpha$ , a naziva **Coriolisov koeficijent**
  - iz poznate parabolične raspodjele brzina kod laminarnog tečenja može se izračunati da je za laminarno tečenje  $\alpha = 2$
  - međutim, kod turbulentnog tečenja tekućina se (osim tankog rubnog sloja) zbog transverzalnih komponenti brzine stalno miješa pa se gotovo sva tekućina na presjeku cijevi giba brzinom koja je približno jednaka srednjoj brzini — u tom slučaju Coriolisov koeficijent je samo malo veći od jedan
- za turbulentno tečenje najčešće se uzima  $\alpha = 1$

# Primjena energijske jednažbe: proračun cjevovoda

## Energijska jednažba služi za proračun cjevovoda

- to je modificirana Bernoullijeva jednažba za tečenje stvarne, viskozne tekućine u cjevovodu
- uobičajeno je da je u visinskom obliku
- disipacija mehaničke energije zbog viskoznog trenja uzima se u obzir kroz visinu linijskih i lokalnih gubitaka
- za razliku od Bernoullijeve jednažbe koja je relacija između dvije točke na strujnici, energijska jednažba je relacija između dva presjeka cijevi duž cjevovoda
- opisuje stacionarno tečenje



# Proračun cjevovoda: vrste problema

Kod proračuna cjevovoda tipično se javljaju tri vrste problema:

- poznati su geometrija i elementi cjevovoda: treba izračunati gubitke
- poznati su geometrija i elementi cjevovoda: treba izračunati protok (ili, ekvivalentno, srednju brzinu tečenja na nekom presjeku cjevovoda)
- tipičan inženjerski problem: treba odabrati i dimenzionirati elemente cjevovoda kako bi se dobio željeni protok (poželjno je i da se to realizira uz minimalne troškove)

Drugi i treći tip problema su nešto složeniji — do rješenje se dolazi iteracijom.

# Tečenje u cijevima proizvoljnog presjeka

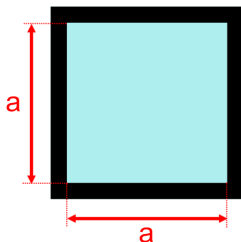
- cijev kružnog presjeka moguće je opisati jednim parametrom: to je polumjer cijevi  $R$
- pokazalo se da je cijevi proizvoljnog presjeka također moguće opisati jednim parametrom, takozvanim *hidrauličkim polumjerom*  $R_h$

## Definicija: Hidraulički polumjer

$$R_h \equiv \frac{S}{O} \equiv \frac{\text{površina presjeka}}{\text{omočeni obod}}$$

- definicija je univerzalna, vrijedi i za cijevi koje nisu u potpunosti ispunjene tekućinom, kao i za sve vrste otvorenih kanala i korita, pa se zato spominje *omočeni obod*

# Primjer 1: Cijev kvadratičnog presjeka

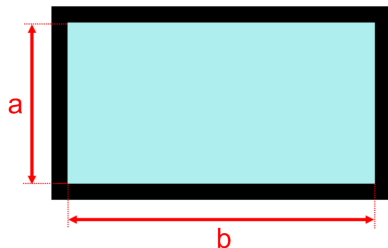


## Primjer

Cijev kvadratičnog presjeka duljine stranica  $a$

$$R_h = \frac{\text{površina kvadrata}}{\text{opseg kvadrata}} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

## Primjer 2: Cijev pravokutnog presjeka

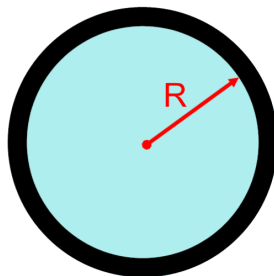


### Primjer

Cijev pravokutnog presjeka duljina stranica  $a$  i  $b$

$$R_h = \frac{\text{površina pravokutnika}}{\text{opseg pravokutnika}} = \frac{a b}{2(a + b)}$$

## Primjer 3: Cijev kružnog presjeka



### Primjer

Cijev kružnog presjeka polumjera  $R$

$$R_h = \frac{\text{površina kruga}}{\text{opseg kružnice}} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$$

# Hidraulički promjer

- nelogičan rezultat da je hidraulički polumjer  $R_h$  cijevi kružnog presjeka pola od stvarnog polumjera cijevi  $R$  potencijalno komplicira stvari pa se to popravljja sljedećom definicijom

## Definicija: Hidraulički promjer

$$D_h \equiv 4R_h$$

- tako je hidraulički promjer za cijev kružnog presjeka  $D_h = 4R_h = 4R/2 = 2R$ , tj.  $D_h = D$  pa je moguće poopćiti definicije i formule koje sadrže promjer cijevi  $D$  zamjenom  $D \rightarrow D_h$ , tj. umjesto promjera  $D$  uvrštava se hidraulički promjer  $D_h$

# Poopćenja za cijev proizvoljnog presjeka

## Reynoldsov broj

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho \bar{v} D_h}{\mu} = \frac{\bar{v} D_h}{\nu}$$

- isto vrijedi i za Darcy-Weisbachovu formulu: promjer kružne cijevi  $D$  zamijeni se hidrauličkim promjerom  $D_h$  i dobije se visina gubitaka pri tečenju kroz cijev proizvoljnog presjeka

## Darcy-Weisbachova formula za cijev proizvoljnog presjeka

$$h_f = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$