Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

Educación a Distancia

ÁLGEBRA

MATRICIAL

Universidad Nacional de San Luis
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales

Índice

REFERENCIAS

Concepto o definición importante

Curiosidad o comentario sobre un tema

Resumen para recordar y tener en cuenta

Preguntas de reflexión

Libro electrónico para descargar

Video de YouTube

Actividad práctica para realizar

Situación problemática

Página de internet

Síntesis de ideas o conclusiones

UNIDAD 2

Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1 Introducción

Como analizamos en Introducción al Álgebra, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones es uno de los temas de mayor importancia del álgebra Lineal. Multitud de fenómenos naturales y sociales se comportan linealmente. Por ejemplo, una causa doblemente intensa produce un efecto doblemente intenso, o una misma causa que actúa por un espacio de tiempo dos veces más largo produce un efecto dos veces mayor. Y aun cuando muchos fenómenos se comportan así tan sólo aproximadamente, se tratan como si fueran lineales para facilitar su estudio inicial.

Un ejemplo concreto de lo que hablamos podría ser el siguiente: si el precio del kilo de azúcar es de U$S 3,00, es claro que, a menos que haya una oferta especial, por dos kilos se tendrá que pagar U$S 6,00.

Esto explica que la Matemática de las aplicaciones a los fenómenos naturales y sociales sea fundamentalmente lineal, en un primer acercamiento, a estos fenómenos y que los sistemas de ecuaciones lineales, en particular, constituyan el esqueleto básico de estas aplicaciones. En este capítulo, estudiaremos la incorporación de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

2.2 Sistemas Lineales

Recordemos que una **ecuación lineal** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen elementos conocidos y desconocidos (denominados variables), y que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia. Sin embargo, esta definición da lugar a algunas malas interpretaciones y se hace necesario ajustar la misma.

En general, una ecuación lineal en n variables (x_i) elevadas a la potencia 1con sus correspondientes coeficientes (a_i) puede escribirse como sigue:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la Matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal, así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

Un **sistema lineal** es un conjunto de m ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$; es decir, con n incógnitas al que llamamos sistema lineal $m \times n$. La solución de un sistema lineal, si la tiene, es una sucesión de números $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ de tal forma que son una solución de todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones tenga solución (compatible) o no tenerla (incompatible). Y a su vez los sistemas compatibles pueden tener una solución (determinados) o infinitas (indeterminados). Resolver un sistema entonces es dar sus soluciones o concluir que no tiene solución.
El método básico para resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en sustituir el

sistema dado por uno nuevo que tenga el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver (en el sentido de que sea más fácil leer la solución; para ello, de ser posible, en cada ecuación debería haber un solo coeficiente distinto de cero).Este nuevo sistema puede obtenerse, en una serie de pasos, mediante la aplicación de tres tipos de operaciones llamadas operaciones elementales destinadas a eliminar incógnitas de manera sistemática. Al proceso por el cual eliminamos algunos términos se le suele llamar hacer ceros. Justamente, para conseguir hacer ceros hasta llegar a un sistema sencillo, efectuamos con las ecuaciones del sistema las operaciones mencionadas anteriormente. Ellas son:

- Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero.
- Intercambiar dos ecuaciones.
- Sumar a una ecuación otra ecuación distinta, previamente multiplicada por una constante distinta de cero.

Así planteadas, estas operaciones son reversibles (es decir que es posible retornar a ecuación inicial haciendo otra operación elemental) y garantizan la equivalencia entre los sistemas; en el sentido de transportar la solución a lo largo del proceso.

Te invitamos a ver un video donde se aborda los conceptos que mencionamos.

Descripción	Dirección URL
Matrices equivalentes	https://youtu.be/c0JXSEkwuBU

2.3 Matrices y sistemas lineales

En Introducción al Álgebra, cuando trabajamos en la resolución de sistemas de ecuaciones, si observamos con atención, las ecuaciones y las incógnitas se mantenían en su sitio. Sólo se modificaban los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. Por tanto, todas las modificaciones se podrían haber hecho trabajando exclusivamente con estos números.
Estas cajas de números (o arreglos rectangulares de números) son las matrices (como ya las definimos en nuestra unidad anterior). Los números o entradas correspondientes a cada ecuación están en las filas de la matriz. Los coeficientes de cada incógnita, en las columnas.

Para asociar una matriz a un sistema lineal, las incógnitas siempre deben escribirse en el mismo orden en cada ecuación.
Siempre es conveniente que el primer elemento de la primera fila sea un 1 (uno principal), para que sea más sencillo luego comenzar a aplicar las operaciones elementales tomando a esta fila como referencia (pivotando sobre ella).

Del mismo modo, tratamos de que en cada fila, el primer elemento distinto de cero sea un 1 (para pivotar sobre dicha fila, con la finalidad de hacer ceros por encima y por debajo de ese 1).

Te invitamos a ver un video donde se aborda este método.

Descripción	Dirección URL
Método de Gauss Jordan – Ejemplo 1	https://youtu.be/dFmGzr1j6eY

Sistematicemos ahora la información recabada en el video en la resolución de un ejercicio. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Determinamos la matriz ampliada (matriz de coeficientes con la matriz de términos independientes).

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{matrix}$$

Nuestro objetivo es obtener una matriz de la forma:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{matrix}$$

Donde a, b y c son números por determinar. Comencemos con el proceso:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{matrix}$$

Como tenemos que hacer 0 en el 2 y el 3, realizamos las siguientes operaciones:

- A la segunda fila le sumamos la primera, previamente multiplicada por -2
- A la tercera fila le sumamos la primera, previamente multiplicada por -3

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{matrix}$$

Tenemos que lograr que en el lugar del 2 nos aparezca un 1. Para ello dividimos a la segunda fila entre 2

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -3.5 & -8.5 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{matrix}$$

Nuestra siguiente meta será que aparezca un cero por encima y también por debajo del 1 principal de la 2° fila (números indicados en color azul). Haciendo operaciones elementales entre filas resulta la matriz que ponemos a continuación

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5.5 & 17.5 \\ 0 & 1 & -3.5 & -8.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{matrix}$$

Ya tenemos dos 2 principal. Nos queda el último 1 principal ubicado en la tercera fila. Dividimos la última fila entre -0.5, obteniendo la matriz que sigue.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5.5 & 17.5 \\ 0 & 1 & -3.5 & -8.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Nos queda hacer combinaciones entre filas para que el 5.5 y el -3.5(valores ubicados por encima del tercer 1) sean iguales a cero. Haciendo operaciones elementales correspondientes resulta la matriz siguiente

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Si reconstruimos el sistema tenemos:

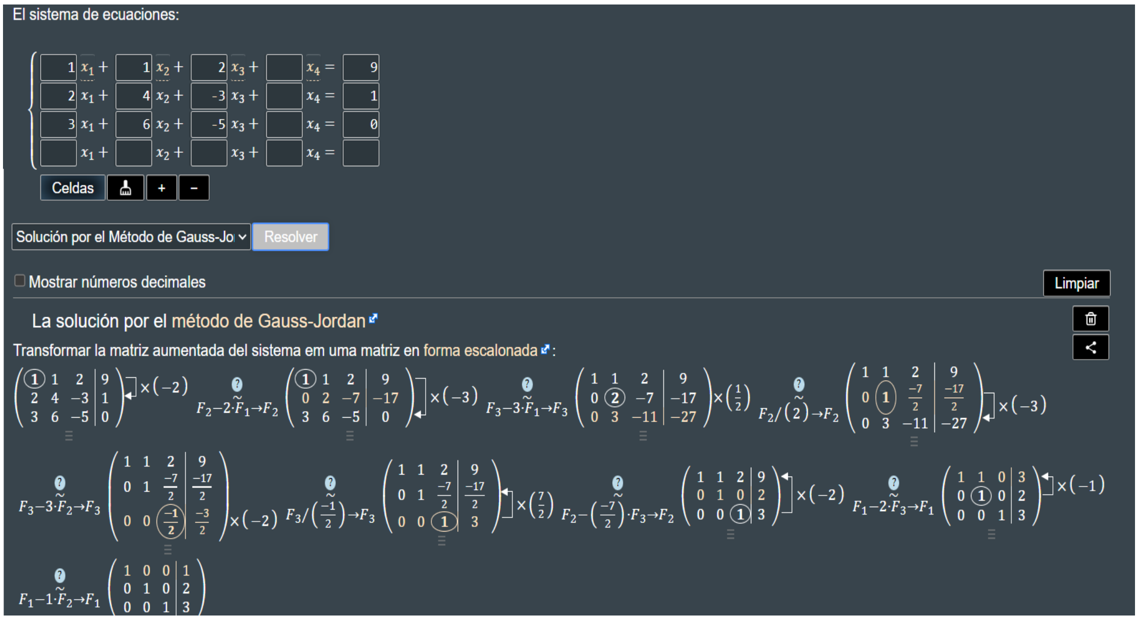
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

También podríamos haber trabajado con GeoGebra, en la hoja de cálculo, y habríamos obtenido las mismas matrices.

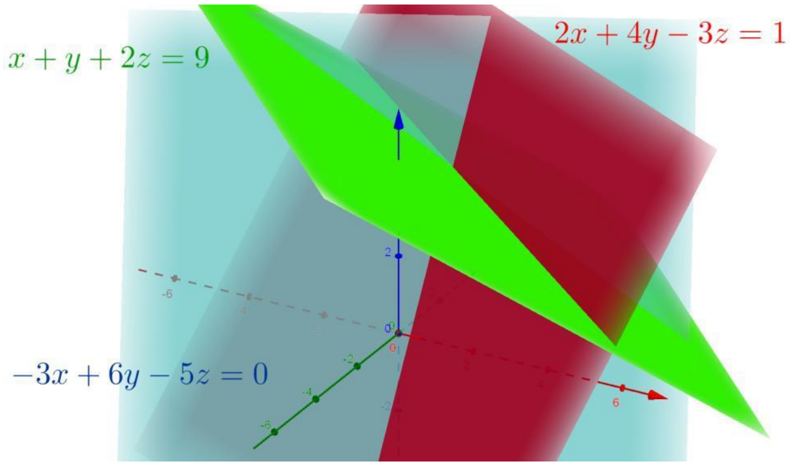
Hoja de Cálculo

	A	B	C	D
1	1	1	2	9
2	2	4	-3	1
3	3	6	-5	0
4	1	1	2	9
5	0	2	-7	-17
6	0	3	-11	-27
7	1	1	2	9
8	0	1	-3.5	-8.5
9	0	3	-11	-27
10	1	0	5.5	17.5
11	0	1	-3.5	-8.5
12	0	0	-0.5	-1.5
13	1	0	5.5	17.5
14	0	1	-3.5	-8.5
15	0	0	1	3
16	1	0	0	**1**
17	0	1	0	**2**
18	0	0	1	**3**

O utilizando matrixcal, donde también habríamos obtenido las mismas matrices



Gráficamente tendríamos los siguientes planos en el espacio tridimensional



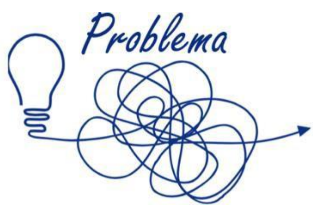
En consecuencia, el conjunto solución es S = {(1, 2, 3)}. ¡Ojo! El sistema NO tiene tres soluciones, sino UNA. Es una terna de valores.

Te invitamos a ver un video donde se resuelve otro ejemplo.

Descripción	Dirección URL
Método de Gauss Jordan – Ejemplo 2	https://youtu.be/a5FOMHC5ZNc

Tené presente que nos interesa que aprendas a usar planillas de cálculo, más que resolver manualmente estos ejercicios. Si bien te mostramos cómo trabajar con GeoGebra (básicamente porque nos permite graficar los planos en el

Pasemos a la resolución de otro ejercicio más donde aplicamos esta técnica (método de Gauss- Jordan).



Resolver el siguiente sistema de ecuaciones aplicando eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

Si el sistema tiene infinitas soluciones, dar dos soluciones particulares

Solución: La matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales tendremos:

$$\begin{array}{l} \\ f_2+f_1\cdot(-2) \\ \\ f_4+f_1\cdot(-2) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f_1+f_2\cdot(-2) \\ f_2\cdot(-1) \\ f_3+f_2\cdot(5) \\ f_4+f_2\cdot(4) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} f_1+f_4\cdot(-1) \\ f_2+f_4\cdot(-1/2) \\ f_3 \leftrightarrow f_4 \\ f_4\cdot(1/6) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondientes es

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_4+2x_5=0 \\ x_3+2x_4=0 \\ x_6=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Al despejar las variables se obtiene:

$$x_1=-3x_2-4x_4-2x_5$$
$$x_3=-2x_4$$
$$x_6=1/3$$

El conjunto solución será:

$$S=\{(-3x_2-4x_4-2x_5, x_2, -2x_4, x_4, x_5, 1/3)\ con\ x_2, x_4\ \ y\ x_5 \in R\}$$

Encontrar soluciones particulares implica dar valores a $x_2, x_4\ \ y\ x_5$. En este caso resulta:

(0,0,0,0,0,1/3) para $x_2 = x_4 = \ x_5 = 0$

(8,0,-2,1,2,1/3) para $x_2 = 0, x_4\ = 1\ y\ x_5 = 2$

Si observamos la última matriz de coeficientes que obtuvimos al final del proceso, veremos que tiene ciertas características particulares.

Si una fila no consta completamente de ceros, entonces el primer número distinto de cero en la fila es un 1 (uno principal).

Si hay filas que constan completamente de ceros, se agrupan en la parte inferior de la matriz. En dos filas consecutivas cualesquiera, que no consten completamente de ceros, el 1 principal de la fila inferior aparece más a la derecha que el 1 principal en la fila superior. Cada columna que tenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Una matriz con estas características recibe el nombre de **matriz reducida y escalonada.** La reducida de una matriz es única. Si la matriz sólo cumple con las tres primeras condiciones, pero no necesariamente la última, se dice que está en forma escalonada.

Al procedimiento por el cual obtenemos la forma escalonada y reducida de una matriz, se lo denomina **Método de Gauss-Jordan**.

Como ya dijéramos anteriormente, las operaciones elementales son reversibles. Es decir, podemos partir de una matriz cualquiera obtener su reducida mediante la aplicación de operaciones elementales y luego, aplicando operaciones elementales inversas, obtener nuevamente la matriz original. Por esta razón, entre las operaciones elementales nunca se considera:

- El producto de una fila por cero.
- La suma de una fila con un múltiplo de ella misma.

2.4 Rango de una matriz

El **rango de una matriz** se lo define como el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes. Básicamente es el número de filas no nulas de su reducida. Ahora bien ¿qué significa que las filas o columnas de una matriz sean linealmente independientes? Significa que ninguna de ellas puede obtenerse como una combinación lineal de las otras, ya sea que una fila o columna se la multiplicó por un número distinto de cero, o porque a una línea se le sumó otra, previamente multiplicada por un número.

Analicemos el rango de las siguientes matrices, teniendo en cuenta que están reducidas y escalonadas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Rango 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rango 3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rango 2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rango 0}$$

Te invitamos a ver un video donde se resuelve otro ejemplo.

Descripción	Dirección URL
Rango de una matriz	https://youtu.be/klCbWxqlXRo

2.5 Teorema de Rouché-Fröbenius

Con el enunciado del teorema debido al francés Eugène Rouché y al alemán Georg Ferdinand Fröbenius se hace posible determinar la naturaleza de las soluciones de cualquier tipo de sistema de ecuaciones de primer grado. En esencia, este teorema se basa en el análisis del rango de las matrices representativas del sistema.

Enunciado del **teorema de Rouché-Fröbenius**: Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya expresión general sería:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se pueden definir su matriz de coeficientes A y su matriz ampliada A | b como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A \mid b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.

Como consecuencia de la aplicación del teorema de Rouché-Fröbenius, los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas se pueden discutir y resolver con cierta rapidez. Así, se tiene que:

- Si los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada son iguales, el sistema es compatible (tiene solución).
- Si el número de incógnitas es igual a dicho rango, será determinado (una solución), y
- Si el número de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es indeterminado (infinitas soluciones).
- Cuando los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada son distintos, el sistema es incompatible (no tiene solución).

Te invitamos a ver un video donde se resuelve otro ejemplo.

Descripción	Dirección URL
Teorema de Rouché-Fröbenius	https://youtu.be/JnutYsGpKIE

2.6 Método o regla de Cramer para sistemas lineales

Antes de enunciar formalmente el Método o la Regla de Cramer, te invitamos a ver un video donde se aplica la misma.

Descripción	**Dirección URL**
Método de Cramer	https://youtu.be/jZIk90KQo6s

En consecuencia, formalmente el **Método o Regla de Cramer** lo enunciamos así:

Si A**x** = **b** es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tal que det(A)≠0, entonces la solución del sistema es única (por teorema que viéramos anteriormente). Esta solución

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \; x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}, \; \ldots, \; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

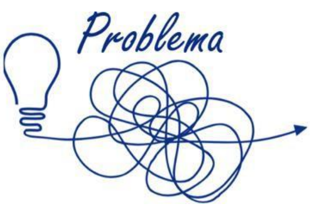
donde A_j es la matriz que se obtiene al sustituir los elementos de la columna j de A por los elementos de la matriz

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

es decir, por los términos independientes.

Si $det(A) = 0$, pero $det(A_j) \neq 0$ entonces el sistema es incompatible.

Si $det(A) = 0$ y $det(A_j) = 0$, entonces el sistema es compatible indeterminado. Por este método no es posible encontrar el conjunto solución.



Resolver el siguiente sistema utilizando el Método o Regla de Cramer.

$$\begin{cases} x - 4y + z = 6 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 2y - 3z = -20 \end{cases}$$

Solución: Hacemos los cálculos de los determinantes necesarios.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 8 - 16 + 2 - 4 - 48 = -55$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -20 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 2 + 160 - 20 - 24 + 12 = 144$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -20 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 80 + 24 + 2 + 40 + 72 = 61$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -20 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 8 + 12 + 2 - 320 = 230$$

Por lo que $x = \frac{144}{-55} = -\frac{144}{55}$, $y = \frac{61}{-55} = -\frac{61}{55}$ y $z = \frac{230}{-55} = -\frac{230}{55}$

2.7 Sistemas homogéneos

Anteriormente trabajamos con sistemas lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son iguales a cero, esto es:

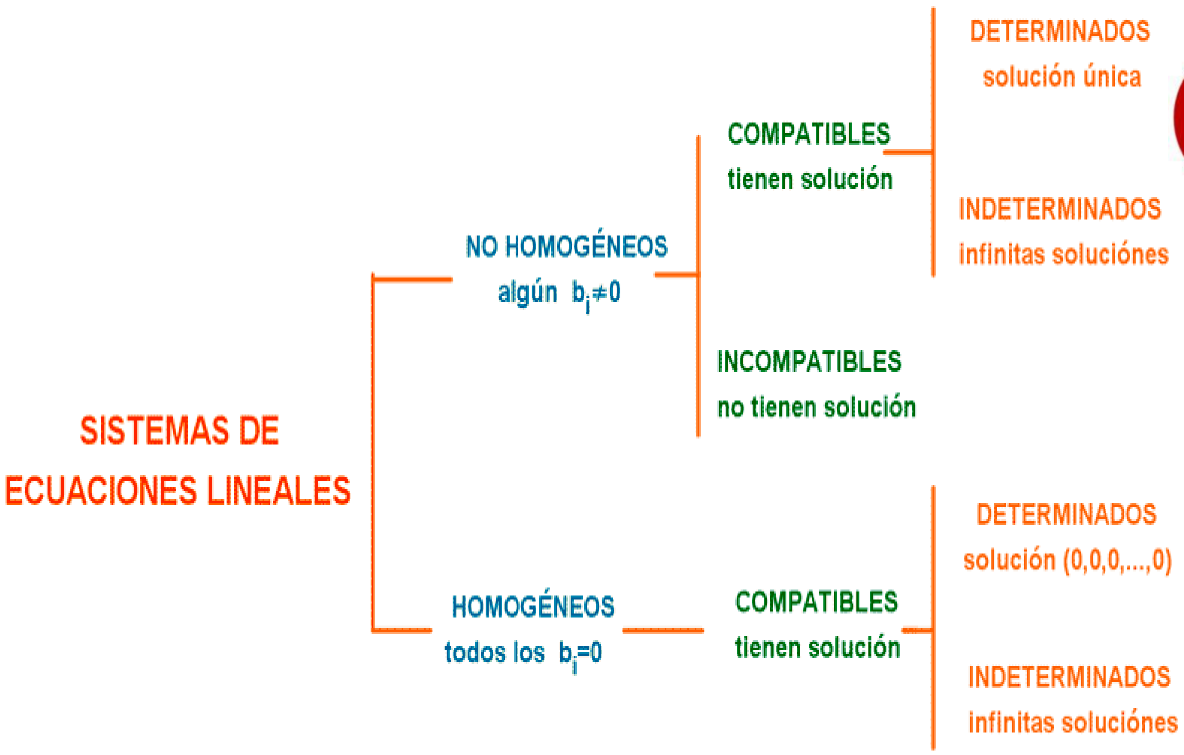
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

diremos que el sistema lineal es homogéneo. Geométricamente, cada ecuación corresponde a una recta, plano o hiperplano, que pasa por el origen, pues se satisfacen las ecuaciones para cuando las variables son todas iguales a cero. En estos sistemas, la matriz de coeficientes tiene siempre el mismo rango que la matriz ampliada, por lo que son compatibles (tienen solución).

Ahora bien:

- Si el rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado (admite sólo la solución trivial).
- Si el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (admite infinitas soluciones, entre las que se encuentra la trivial).

Para finaliza, hagamos una síntesis de los sistemas lineales:



Para pensar y reflexionar: Al resolver un sistema lineal, las ecuaciones se modifican hasta encontrar otro sistema lineal más fácil de resolver. ¿Por qué se ha de esperar que estos sistemas distintos tengan las mismas soluciones?

¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente tres

Trabajo Práctico N° 2

Problema 1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando método de reducción de **Gauss-Jordan usando una planilla de cálculo**. Asimismo, **muestra la representación gráfica del sistema que avale la solución** que encontraste, si es que la tiene. ¿Qué ventajas y/o desventajas tiene este método? (No dejes de responder esta última pregunta porque son las que te preguntamos en un examen). Asimismo, para cada sistema de ecuaciones muestra una representación gráfica que ponga en evidencias si tiene solución única, si no la tiene o si son infinitas.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 4 \\ x - y - 5z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + y + 3z = 5 \\ 2x - y - 4z = -8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y - 3z = 5 \\ 3x + y - 4z = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = -1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

Problema 2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por **determinantes (Regla de Cramer) y por método de la inversa**. En todos los casos, ofrece como evidencias los **cálculos realizados, incluyendo la representación gráfica**. ¿Qué ventajas y/o desventajas tienen estos métodos para estos casos? (No dejes de responder esta última pregunta porque son las que te preguntamos en un examen)

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ x - y - 5z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + y + 3z = 2 \\ x - y - z = -2 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$

Problema 3. Se quieren mezclar vino de U$S 60 con otro de U$S 35, de modo que resulte vino con un precio de U$S 50 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla? Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 4. Para la Unidad de Sistemas de Ecuaciones Lineales se les hace un test a los estudiantes con 30 problemas. Por cada problema correctamente resuelto se le dan 5 puntos y por cada problema incorrecto o no resuelto se le quitan 2 puntos. Un estudiante obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente? Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 5. Wildcat Oil Company tiene dos refinerías, una en Houston y otra en Tulsa. La refinería de Houston embarca 60% de su petróleo a un distribuidor de Chicago y 40% a uno de Los Ángeles. La refinería de Tulsa embarca 30% de su petróleo al distribuidor de Chicago y 70% al de Los Ángeles. Suponga que, durante todo el año, el distribuidor de Chicago recibió 240,000 galones de petróleo y el de Los Ángeles 460,000. Calcule la cantidad de petróleo producido en cada una de las refinerías de Wildcat. Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 6. Una Compañía ofrece dos alternativas de salario para sus empleados.

Plan A: Un salario mensual de $15.500 más una comisión del 4% sobre el total de ventas.

Plan B: Un salario mensual de $17.500 más una comisión de 5% sobre las ventas que superen los $200.000.

¿Para qué monto de ventas totales da lo mismo cualquiera de los planes, suponiendo que el total de ventas siempre sea superior a $ 200.000? Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 7. Un viajero que acaba de regresar de un viaje por Europa gastó 30 euros diarios en Inglaterra, 20 euros diarios en Francia y 20 en Italia por concepto de hospedaje. En comida gastó 20 euros diarios en Inglaterra, 30 en Francia y 20 en Italia. Sus gastos adicionales fueron de 10 euros diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de 340 euros en hospedaje, 320 en comida y 140 en gastos adicionales durante el viaje. Calcula el número de días que pasó en cada país. Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 8. Se le ha pedido a Bob, un nutricionista que trabaja para el Centro Médico de la universidad, que prepare dietas especiales para dos pacientes, Susan y Tom. Bob ha decidido que los alimentos de Susan deben contener por lo menos 400 mg de calcio, 20 mg de hierro y 50 mg de vitamina C, mientras que los alimentos de Tom deben contener por lo menos 350 mg de calcio, 15 mg de hierro y 40 mg de vitamina C. Bob también ha decidido que los alimentos deben ser preparados a partir de tres comidas básicas: comida A, comida B y comida C. El contenido nutricional especial de estas comidas se resume en la tabla adjunta. Calcule cuántas onzas de cada tipo de alimento se deben utilizar en una comida de modo que se cumplan los requerimientos mínimos de calcio, hierro y vitamina C en las comidas de cada paciente.

	Contenido (mg/oz)		
	Calcio	Hierro	Vitamina C
Comida A	30	1	2
Comida B	25	1	5
Comida C	20	2	4

Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 9. En las fiestas de un determinado lugar había tres espectáculos (A, B y C) cada uno de ellos con un precio distinto. Una adolescente fue dos veces a A, una vez a B y una vez a C y gastó $ 1300; otro asistió tres veces a A y una vez a B, y gastó $1800. Una tercera adolescente entró una vez a cada espectáculo, lo que le costó $800. ¿Cuánto valía la entrada a cada uno de ellos? Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.

Problema 10. En una máquina hay tres posibles jugadas; dos de ellas suman puntos y la otra resta. Un jugador obtuvo 5 puntos realizando dos veces la primera jugada, una vez la segunda y dos la tercera. Otro realizó tres veces la primera y dos la segunda, obteniendo de este modo 12 puntos; y un último hizo una vez la primera, una la segunda y tres la última, con lo que obtuvo 2 puntos. ¿Cuál es la puntuación de cada jugada? Fundamenta la respuesta aplicando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y mostrando su representación gráfica que ponga en relieve si tiene solución única, infinitas soluciones o no la tiene.