Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

Educación a Distancia

ÁLGEBRA

MATRICIAL

Universidad Nacional de San Luis
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales

FCEJS

Índice

REFERENCIAS

Concepto o definición importante

Curiosidad o comentario sobre un tema

Resumen para recordar y tener en cuenta

Preguntas de reflexión

Libro electrónico para descargar

Video de YouTube

Actividad práctica para realizar

Situación problemática

Página de internet

Síntesis de ideas o conclusiones

UNIDAD 3

Espacios vectoriales y subespacios

3.1 Espacios Vectoriales

3.1.1 Definición de espacio vectorial

Introduciremos el concepto fundamental de espacio vectorial, el cual es la base de gran parte del Álgebra Lineal y tiene aplicaciones significativas en la gestión y análisis de datos. Un espacio vectorial es una estructura matemática que nos permite trabajar con conjuntos de elementos llamados vectores y realizar operaciones que conservan ciertas propiedades.

¿Qué es un Espacio Vectorial?

En matemáticas, un espacio vectorial es una estructura abstracta formada por un conjunto de elementos llamados vectores y dos operaciones: la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar (un número real o complejo). La combinación de estas operaciones debe cumplir ciertas propiedades, que son las que caracterizan a un espacio vectorial.

Un espacio vectorial se caracteriza por las siguientes propiedades:

Clausura de la suma: Si tomamos dos vectores cualesquiera en el espacio, su suma también será un vector en el mismo espacio.

Conmutativa de la suma. Si tomamos dos vectores cualesquiera en el espacio u y $v,$ se cumple

$$(u + v) = (v + u).$$

Asociatividad de la suma: La suma de vectores es asociativa, es decir, la suma de tres vectores no depende del orden en que se realice la operación. Matemáticamente lo escribimos de la siguiente manera:

$(u + v) + w = u +(v + w)$ para todos los vectores u, v y w del espacio

Existencia de elemento neutro: Existe un vector especial, llamado vector cero, que actúa como el elemento neutro de la suma. La suma de cualquier vector con el vector cero da como resultado el mismo vector. Matemáticamente lo escribimos de la siguiente manera:

$u + 0 = u$ para cualquier vector u del espacio, siendo 0 el vector nulo

Existencia de inverso aditivo: Cada vector tiene un vector opuesto, tal que su suma con dicho vector da como resultado el vector cero. Esto es,

cada vector u tiene un vector opuesto $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.

Clausura de la multiplicación por un escalar: Si multiplicamos cualquier vector del espacio por un número escalar, el resultado será otro vector en el mismo espacio.

Distributiva de un vector respecto a la suma de escalares:

$(a +b)u = au + bu$, donde a y b son escalares y u es un vector del espacio.

Distributiva de la multiplicación de escalares respecto a la suma de vectores:

$a(u + v) = au + av$, donde a es un escalar y u , v son vectores del espacio.

Asociatividad de la multiplicación por escalares:

$(ab)u = a(bu)$, donde a y b son escalares y u es un vector del espacio.

Identidad multiplicativa: El número 1 actúa como el elemento neutro de la multiplicación por un escalar, es decir,

$1u = u$ para cualquier vector u del espacio.

Este elemento puede ser el número 1 de los números reales o el número 1 de los números complejos, dependiendo del conjunto al que pertenezcan los escalares del espacio vectorial. La multiplicación de cualquier vector por este elemento neutro da como resultado el mismo vector.

Es importante señalar que, en el contexto de los **espacios vectoriales**, los vectores no están limitados a ser representados por flechas o segmentos dirigidos. En matemáticas, los vectores **pueden tener diversas representaciones**, como listas de números, matrices, funciones, y más. Esta flexibilidad permite abordar una amplia gama de problemas en diferentes áreas, incluyendo la gestión y análisis de datos.

¿Por qué se le llama "Espacio" Vectorial?

El término "**espacio**" en "espacio vectorial" proviene de la idea de que los vectores pueden formar conjuntos organizados y estructurados, de manera similar a como los puntos en un espacio geométrico tridimensional se organizan formando una estructura matemática conocida como espacio tridimensional. En el contexto de los espacios vectoriales, esta "organización" está dada por las propiedades algebraicas que cumplen los vectores y las operaciones definidas en el conjunto.

Un **espacio vectorial** es una estructura matemática que generaliza el concepto tradicional de vectores y proporciona un marco sólido para trabajar con conjuntos de elementos que cumplen ciertas propiedades algebraicas. Estos espacios vectoriales permiten modelar y resolver problemas en diversas áreas, incluyendo la gestión y análisis de datos, lo que los convierte en una herramienta poderosa para los licenciados en Análisis y Gestión de Datos.

3.1.2 Ejemplos de espacios vectoriales

En el apasionante mundo del análisis y gestión de datos, una de las herramientas fundamentales que nos permite representar, operar y entender diferentes conjuntos de información son los **Espacios Vectoriales**. Estos espacios, lejos de ser solo una abstracción matemática, tienen aplicaciones concretas y relevantes en nuestro campo profesional. En este sentido, veremos cómo podemos aplicar conceptos matemáticos a situaciones del mundo real, permitiéndonos abordar desafíos cada vez más complejos y multidimensionales, lo que será de gran relevancia en nuestro futuro profesional.

01 **Espacio Vectorial de datos numéricos:** Consideremos el conjunto de datos numéricos que representan las ventas diarias de una empresa durante una semana. Cada dato es una cantidad numérica, y podemos organizarlos en un vector donde cada entrada corresponde a una venta diaria. Si llamamos a este vector "ventas diarias", podemos realizar operaciones con él, como sumar los datos de dos semanas distintas o multiplicar las ventas por un factor de escala.

02 **Espacio Vectorial de imágenes**: Consideremos el conjunto de imágenes digitales en blanco y negro. Cada imagen puede representarse mediante una matriz, donde cada entrada de la matriz corresponde a un píxel y tiene un valor entre 0 (negro) y 1 (blanco). Podemos realizar operaciones con estas imágenes, como sumar dos imágenes para obtener una nueva imagen combinada o multiplicar una imagen por un factor para ajustar su brillo. Este conjunto de imágenes en blanco y negro forma un espacio vectorial, donde las operaciones se realizan de acuerdo con las propiedades de los espacios vectoriales.

03 **Espacio Vectorial de series temporales**: Consideremos un conjunto de datos que representa la evolución de variables a lo largo del tiempo, como las ventas diarias de un producto durante un año o los precios de acciones en el mercado financiero. Cada serie temporal puede representarse mediante un vector, donde cada entrada corresponde a una observación en un momento específico. Podemos realizar operaciones con estas series, como calcular la media de varias series temporales o encontrar patrones comunes en diferentes series.

04 **Espacio Vectorial de documentos textuales**: Supongamos que tenemos un conjunto de documentos en formato de texto, como reseñas de productos, artículos de noticias o comentarios en redes sociales. Cada documento puede ser representado mediante un vector de características, donde cada entrada corresponde a una palabra o término específico y su valor indica la frecuencia o relevancia de esa palabra en el documento. Podemos realizar operaciones con estos vectores, como calcular la similitud entre dos documentos basándonos en sus términos o encontrarla combinación lineal de términos que mejor discrimine diferentes categorías de documentos.

05 **Espacio Vectorial de datos geoespaciales**: Consideremos un conjunto de datos que contiene información geoespacial, como ubicaciones geográficas, altitudes, y atributos asociados a diferentes puntos en la superficie terrestre. Cada punto se puede representar mediante un vector, donde cada entrada corresponde a una coordenada o atributo específico. Podemos realizar operaciones con estos vectores, como calcular la distancia entre dos puntos geoespaciales o identificar patrones espaciales en los datos.

06 **Espacio Vectorial de características de clientes**: Supongamos que tenemos información sobre diferentes clientes de una empresa, donde cada cliente está caracterizado por diversas variables, como edad, género, historial de compras, preferencias, entre otros. Podemos organizar estos datos en un vector donde cada entrada corresponde a una característica específica del cliente. Luego, podemos realizar operaciones con estos vectores, como calcular la similitud entre dos clientes basándonos en sus características o identificar grupos de clientes con características similares.

Espacio Vectorial de características de datos: Supongamos que tenemos un conjunto de datos que representa información de diferentes productos en una tienda en línea. Cada producto se describe mediante una lista de características, como precio, tamaño, categoría, y otras variables relevantes. Podemos organizar estos datos en un vector donde cada entrada corresponde a una característica específica del producto. Luego, podemos realizar operaciones con estos vectores, como calcular la distancia entre dos productos basada en sus características o encontrar la combinación lineal de características que mejor se ajusta a ciertos criterios.

3.1.3 Operaciones en espacios vectoriales

En los espacios vectoriales, una de las características fundamentales y poderosas es la posibilidad de realizar operaciones algebraicas que nos permiten combinar y manipular los vectores de manera significativa. Estas operaciones son clave para el análisis y gestión de datos, ya que nos brindan la flexibilidad necesaria para realizar cálculos, comparaciones y transformaciones en conjuntos de información multidimensionales. En esta sección, exploraremos las dos operaciones esenciales en los espacios vectoriales: la suma y la multiplicación por un escalar, observando el caso particular de vectores de R^n donde ellos están representados por sus componentes $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Suma de Vectores: La suma de vectores es una operación fundamental que nos permite combinar dos o más vectores para obtener un nuevo vector, que representa la combinación de las magnitudes y direcciones de los vectores originales. En términos matemáticos, si tenemos dos vectores u y v, la suma de ambos se representa como $u + v$ y se define como un nuevo vector w, cuyas componentes son la suma de las componentes correspondientes de u y v. En otras palabras:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Esta operación tiene una interpretación geométrica importante: la suma de vectores se corresponde con el desplazamiento de un punto en el espacio mediante la combinación de dos o más desplazamientos individuales.

En el ámbito del análisis y gestión de datos, la **suma de vectores** es especialmente útil para combinar datos, como por ejemplo, sumar las ventas de diferentes sucursales de una empresa para obtener el total de ventas globales. También nos permite realizar operaciones como promediar datos o identificar relaciones entre variables que contribuyen a un comportamiento específico en el conjunto de datos.

Multiplicación por un escalar: La multiplicación por un escalar es otra operación esencial en los espacios vectoriales, que nos permite escalar o redimensionar un vector manteniendo su dirección. Si tenemos un vector u y un número real λ, la multiplicación de u por λ se representa como λu y se define como un nuevo vector v, cuyas componentes son el producto de cada componente de u por el escalar λ. En términos matemáticos:

$$\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$$

Esta operación nos permite ajustar la magnitud del vector según el valor del escalar. Si λ es positivo, el vector resultante se alargará o encogerá según el valor de λ, mientras que si λ es negativo, el vector se invertirá en sentido, pero mantendrá su dirección.

En el contexto del análisis y gestión de datos, la **multiplicación por un escalar** es útil para realizar ajustes y normalizaciones en los datos. Por ejemplo, podemos multiplicar los datos de una variable por un factor de escala para estandarizarlos y compararlos en la misma escala. También podemos utilizar la multiplicación por un escalar para realizar transformaciones en el espacio de características de los datos, lo que puede ser relevante en técnicas de reducción de dimensionalidad y análisis de componentes principales.

Las operaciones en espacios vectoriales, como la suma y la multiplicación por un escalar, nos proporcionan herramientas poderosas para manipular, transformar y comparar conjuntos de datos multidimensionales. Estas operaciones son esenciales en el análisis y gestión de datos, ya que nos permiten realizar cálculos significativos y extraer información valiosa para la toma de decisiones informadas en diversas áreas. Dominar estas operaciones nos brinda una base sólida para enfrentar desafíos cada vez más complejos en nuestro campo profesional y nos permite aprovechar al máximo el potencial de los espacios vectoriales en el fascinante mundo de los datos.

3.2 Subespacios Vectoriales

3.2.1 Definición de subespacio vectorial.

Uno de los objetivos principales consiste en determinar si un conjunto es o no un espacio vectorial. Por lo general es bastante laborioso comprobar si solo nos quedamos con lo visto en la sección anterior. Por ello vamos a sumar algunos conceptos que nos permitirán detectar lo de modo sencillo y rápido.

Un **subespacio vectorial** es una estructura cuyos elementos son un subconjunto de un espacio vectorial que cuenta con las propiedades de tener entre sus elementos al elemento neutro, la clausura de la suma y la clausura de la multiplicación por un escalar.

Así, si bien parece un trabalenguas, cada subespacio es un espacio vectorial. Por el contrario, todo espacio vectorial es un subespacio (de sí mismo y, posiblemente, de otros espacios más grandes). El término subespacio se utiliza cuando al menos dos espacios vectoriales están en mente, con uno dentro del otro, y la frase subespacio de V identifica a V como el espacio más grande. Observemos también el hecho de que el conjunto que cuenta con tan solo el elemento neutro es un subespacio vectorial. Este subespacio tan particular lo llamaremos **subespacio nulo o cero.**

3.2.2 Propiedades y ejemplos de subespacios vectoriales.

Cuando estamos trabajando en un conjunto de vectores, es muy conveniente saber si estamos en **un subespacio** ya que, si esto ocurre, todas las propiedades que observamos para espacios vectoriales serían válidas en este subconjunto.

Dentro del espacio vectorial de las matrices de 2x1 analicemos que ocurre con el conjunto de matrices 2x1 con la operación suma y producto por un escalar que hemos definido para matrices y donde la entrada 2,1 es cero, es decir, matrices del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$. Como no tenemos restricción sobre a_{11} ese puede ser cero por lo que el elemento neutro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ está en el conjunto. Además, si tenemos dos matrices de este conjunto la suma de ellas da una matriz cuya entrada 2,1 es cero, por lo tanto,

también está en el conjunto. Matemáticamente eso se puede expresar del siguiente modo:
Si $A = \binom{u}{0}$ y $B = \binom{v}{0}$ dos matrices cuya entrada 2,1 es cero entonces
$A + B = \binom{u+v}{0+0} = \binom{u+v}{0}$ que es una matriz cuya entrada 2,1 es cero.
Si $A = \binom{u}{0}$ y a es un escalar a.A = a$\binom{u}{0}$ = $\binom{au}{0}$ que es una matriz cuya entrada 2,1 es cero:
Luego podemos afirmar que el conjunto de las matrices del tipo $\binom{u}{0}$ forman un subespacio del espacio de todas las matrices de orden 2x1.
Geométricamente si identificamos a las matrices de orden 2x1 con los vectores en R^2 los vectores cuya segunda componente es cero no son más que los vectores situados sobre el eje de las x. La suma de dos vectores sobre el eje de las x es otro vector sobre el eje de las x, y al multiplicar cualquier vector sobre el eje x por un escalar obtenemos un vector sobre el mismo eje. Esto puede visualizarlo realizando acciones en el Geogebra.

3.2.3 Subespacios generados por conjuntos de vectores.

En la sección anterior obtuvimos las condiciones para verificar cuándo un subconjunto H de un espacio vectorial V cumple las condiciones para ser un espacio vectorial, entonces surge la inquietud de conocer cómo es posible construir un espacio vectorial y cuáles serían sus elementos.
Para tal efecto, primero vamos a formalizar cómo generar un espacio vectorial H a partir de un conjunto de vectores v_1 , v_2,…v_n pertenecientes al espacio vectorial V. Luego con el espacio vectorial generado H, vamos a determinar si todos los vectores utilizados v_1 , v_2,…v_n son indispensables para generar a H. Es decir, se requiere conocer la cantidad mínima de vectores que son necesarios para generar a H, en otras palabras, elegir los vectores de v_1 , v_2,…v_nϵV que son independientes. Y por último, si se logra lo anterior, se formaliza el concepto de base para el espacio vectorial H. Es decir, se reconocen los vectores independientes de v_1 , v_2,…v_nϵV que generan a H.

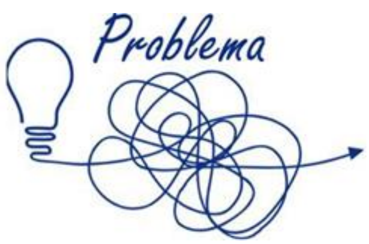
Comencemos observamos que entenderemos por combinación lineal.
Sea V un espacio vectorial y v ϵV se dice que v es una **combinación lineal** de los vectores v_1 , v_2,…v_nϵV, si existen escalares c_1 , c_2,…c_n tales que:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = \text{v}$$

Esto indica que para determinar si un vector v se puede representar como una combinación lineal de un conjunto de vectores v_1 , v_2,…v_nϵV, basta con resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = \text{v}$$

Si el sistema tiene solución ya sea única o infinidad de soluciones, entonces v es una combinación lineal de v_1 , v_2,…v_nϵV. En caso contrario, v no es una combinación lineal.



Sea v = (3,4,9) y los vectores v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,-1,0) y v_3 = (-1,-3,-3). Determinar si es posible representar el vector v como una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3. En caso de ser una combinación calcular los valores de c_1, c_2 y c_3 que hacen posible la combinación.

Solución

Primero, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\overbrace{c_1\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}+c_3\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\\9\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}}^{\text{Representación vectorial del sistema}}$$

Este sistema de ecuaciones lineales no homogéneo se resuelve al plantear la matriz ampliada y escalonar para determinar si tiene solución.

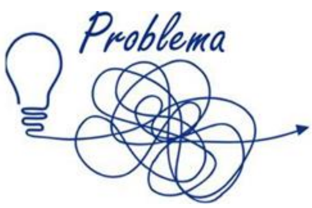
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\2&-1&-3&4\\3&0&-3&9\end{array}\right)\underset{\substack{R_2\mapsto R_2-2R_1\\R_3\mapsto R_3-3R_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&-1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)\underset{R_2\mapsto(-1)R_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Con esta matriz se concluye que el sistema tiene solución múltiple (3 incógnitas > 2 ecuaciones). Por tanto, $\mathbf{v}=(3,4,9)$ sí es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{v}_2=(0,-1,0)$ y $\mathbf{v}_3=(-1,-3,-3)$. Para determinar la combinación lineal se debe proponer una solución particular. De la matriz escalonada reducida se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r}c_1-c_3=3\\c_2+c_3=2\\c_3\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\text{si } c_3=1,\ \text{entonces}\quad\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Por último, se concluye que:

$$\mathbf{v}=4\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\Rightarrow(3,4,9)=4(1,2,3)+(0,-1,0)+(-1,-3,-3).$$



Sea v = (1,2,3,4) y los vectores v_1 = (2,1,0,-3) y v_2 = (0,0,-1,0). Determinar si es posible representar el vector v como una combinación lineal de los vectores v_1 y v_2. En caso de ser una combinación calcular los valores de c_1 y c_2 que hacen posible la combinación.

Solución

Primero se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\overbrace{c_1\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}}^{\text{Representación vectorial del sistema}}.$$

Este sistema de ecuaciones lineales no homogéneo se resuelve al plantear la matriz ampliada y escalonar para determinar si tiene solución.

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&0&1\\1&0&2\\0&-1&3\\-3&0&4\end{array}\right)\underset{R_2\rightleftarrows R_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\2&0&1\\0&-1&3\\-3&0&4\end{array}\right)\underset{\substack{R_2\mapsto R_2+(-2)R_1\\R_4\mapsto R_4+3R_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&0&-3\\0&-1&-1\\0&0&10\end{array}\right)\underset{R_2\rightleftarrows R_3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&-1&-3\\0&0&-3\\0&0&10\end{array}\right).$$

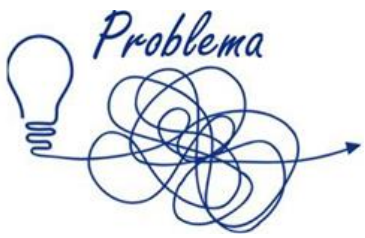
Con esta matriz se concluye que el sistema no tiene solución. Por tanto, $\mathbf{v}=(1,2,3,4)$ no es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1=(2,1,0,-3)$ y $\mathbf{v}_2=(0,0,-1,0)$.

A continuación, es posible dar respuesta a la pregunta referente al conjunto de todos los vectores que pueden ser generados o representados como una combinación lineal de dichos vectores. Para ello definimos al **conjunto H generado v_1 , v_2,...v_nϵV** como aquel para el cual cualquier elemento se puede expresar como combinación lineal de dichos vectores. Es decir, si u es un vector de H, entonces existen escalares c_1 , c_2,...c_n tales que:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = \text{u}$$

Con esta definición, aceptaremos el hecho que el conjunto generado por vectores v_1 , v_2,...v_nϵV es un subespacio de espacio V.

Para determinar el espacio generado se tiene que resolver el sistema con respecto c_1,c_2,...c_n: $(v_1 \;\; v_2 \dots v_n | \; u)$ donde u es un elemento en forma general, por ejemplo, para R^n, $u = (x_1 \; , \, x_2, \dots x_n)$. Al resolver el sistema de ecuaciones lineales, se encuentran las condiciones que deben cumplir las componentes u para que pertenezca al espacio vectorial generado.



Determinar cuál es el espacio generado por los vectores v_1 = (2,1), v_2 = (-9,5) y v_3 = (1,0).

Solución

Primero se plantea el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ con $\mathbf{u} = (x, y)$:

$$\overbrace{c_1\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2\underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + c_3\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}}}^{\text{Representación vectorial del sistema}}.$$

Este sistema de ecuaciones lineales se resuelve al plantear la matriz ampliada y escalonar para determinar la(s) condición(es) de las componentes del vector **u** para que el sistema tenga solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -9 & 1 & x \\ -1 & 5 & 0 & y \end{array}\right) \underset{R_2 \rightleftarrows R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 0 & y \\ 2 & -9 & 1 & x \end{array}\right) \underset{R_1 \mapsto (-1)R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & -y \\ 2 & -9 & 1 & x \end{array}\right) \underset{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 1 & x+2y \end{array}\right).$$

Con esta matriz se concluye que el sistema tiene solución múltiple (3 incógnitas > 2 ecuaciones) sin importar los valores que tomen x y y. Por tanto, los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (-9, 5)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 0)$ generan a $\mathbb{R}^2$ (x y y son cualquier valor en $\mathbb{R}$).

3.3 Independencia lineal

3.3.1 Definición de independencia y dependencia lineal

Como próxima tarea queremos determinar la cantidad mínima de vectores que son necesarios para generar a H, es decir, queremos saber si el conjunto de vectores v_1 , v_2,…v_nϵV es el menor conjunto que genera a H. Esto va a ser así si ningún vector en combinación lineal de los restantes, en este caso diremos que los n vectores son linealmente independientes.
En general diremos que:
En un espacio vectorial V el conjunto de vectores v_1 , v_2,…v_nϵV son **linealmente independientes** (LI) si la combinación

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = \mathbf{0}$$

se cumple solo para $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$
En caso contrario diremos que los vectores v_1 , v_2,…v_nϵV son **linealmente dependientes** (LD).

Es decir, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = \mathbf{0},$$

si tiene solución única trivial se concluye que son L.I., en caso de solución múltiple se concluye que son L.D.
Analicemos un par de ejemplos

Determinar si los vectores v_1 =(2,4,6), v_2 =(1,2,4) son LI o LD

Solución
Primero se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\overbrace{c_1\underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}}}^{\text{Representación vectorial del sistema}}$$

Para resolver el sistema recurrimos al matrixcalculator

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Celdas + −

Solución por el Método de Gauss-Jo Resolver

☐ Mostrar números decimales

La solución por el método de Gauss-Jordan

Transformar la matriz aumentada del sistema em uma matriz en forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{1}{2}\right) \underset{F_1/(2)\to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \times(-4) \underset{F_2-4\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \times(-6)$$

$$\underset{F_3-6\cdot F_1\to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3\leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{2}\right) \underset{F_1-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F_2\to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La respuesta:

$x_1=0$

$x_2=0$

La solución general: $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como el sistema homogéneo tiene solución única, $c_1 = c_2 = 0$, los vectores v_1 = (2, 4, 6) y v_2 = (1, 2, 4) son linealmente independientes.

¿Las matrices del siguiente conjunto son LI o LD?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución: Para poder responder a esto debemos considerar la combinación

$$c_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y resolver esta ecuación en c_i, ecuación que es equivalente a

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad + 2c_3 &= 0 \\ 2c_2 + 6c_3 &= 0 \\ 3c_1 + c_2 + 9c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nos valemos de Matrixcalculator para resolver el sistema

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1\,x_1 + (-1)\,x_2 + (-1)\,x_3 + \;\; x_4 = 0 \\ 1\,x_1 + 0\,x_2 + 2\,x_3 + \;\; x_4 = 0 \\ 0\,x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 + \;\; x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 1\,x_2 + 9\,x_3 + \;\; x_4 = 0 \end{cases}$$

Celdas + −

Solución por el Método de Gauss-Jo Resolver

☐ Mostrar números decimales

La solución por el método de Gauss-Jordan

Transformar la matriz aumentada del sistema em uma matriz en forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \quad \underset{F_2-1\cdot F_1\to F_2}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \times(-3) \quad \underset{F_4-3\cdot F_1\to F_4}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \times(-2) \quad \underset{F_3-2\cdot F_2\to F_3}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \times(-4) \quad \underset{F_4-4\cdot F_2\to F_4}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(1) \quad \underset{F_1-(-1)\cdot F_2\to F_1}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\equiv \begin{cases} x_1 \qquad + 2\cdot x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 3\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:

  $x_2 = -3x_3$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1 = -2x_3$

La respuesta:

$x_1 = -2x_3$

$x_2 = -3x_3$

$x_3 = x_3$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\left\{x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

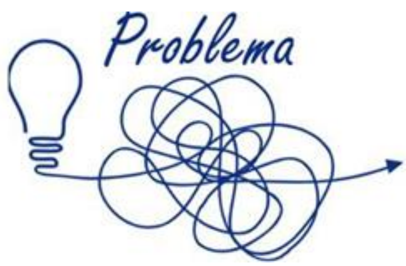
Y encontramos infinitas soluciones ya que para cada valor que le demos a x_3 tendremos una solución para la ecuación. Por lo tanto, como existen otras soluciones además de la nula este conjunto de matrices es linealmente dependiente (LD)

En algunas situaciones, verificar si un conjunto de vectores es linealmente independientes o dependientes puede realizarse de manera sencilla teniendo en cuenta el teorema:

Si V = R^n con n un número finito y los vectores v_1 , v_2,...v_nϵV entonces:

a) Son linealmente dependientes si m > n. Más vectores que componentes del vector.

b) En caso de que m = n el proceso para determinar si los vectores son linealmente independientes, se reduce a
calcular el determinante formado por los vectores, $\det(v_1 \ \ v_2 \ldots v_n)$.
Si el determinante es diferente de cero, entonces los vectores son linealmente independientes.
Si el determinante es cero, entonces los vectores son linealmente dependientes
Empleando este teorema determinemos si lo conjuntos de vectores son LI o LD



Analizar en cada uno de los siguientes conjuntos de vectores si son LI o LD

1. $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 7)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, -1, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 8, 4)$ y $\mathbf{v}_4 = (2, 0, 4)$.

   Solución

   Como el espacio vectorial es $\mathbb{R}^3$ y se tienen más de tres vectores, entonces estos son L.D.

2. $\mathbf{v}_1 = (2, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 8)$.

   Solución

   Como solo se tiene dos vectores y $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$, entonces los vectores son L.D.

3. $\mathbf{v}_1 = (-1, 3, 5)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 4, -8)$.

Solución

Como solo se tiene dos vectores y no existe un escalar α tal que $\alpha\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, entonces estos vectores son L.I.

4. $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 1)$.

Solución

Como se tienen tres vectores en $\mathbb{R}^3$, se procede a calcular su determinante:

$$|\mathbf{A}| = \underset{C_1 \mapsto C_1 - 3C_3}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (+1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = 5(1) - (-10)(4) = 45.$$

5. $\mathbf{v}_1 = (4, -1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 4)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 5, -6)$.

Solución

Como se tienen tres vectores en $\mathbb{R}^3$, se procede a calcular su determinante:

$$|\mathbf{A}| = \underset{\substack{R_1 \mapsto R_1 + 4R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 + 2R_2}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 0 & -10 & 20 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -10 & 20 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -40 + 40 = 0.$$

Como $|\mathbf{A}| = 0$ entonces los vectores son linealmente dependientes.

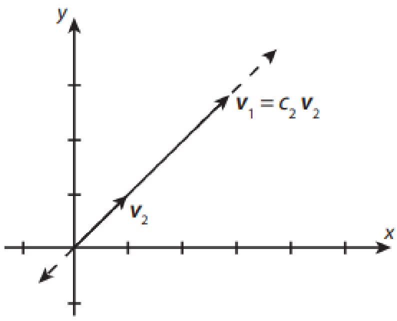
3.3.2 Interpretación geométrica de independencia y dependencia lineal

Observemos geométricamente para el caso del plano, es decir, R^2, que ocurre en el caso de tener vectores LD y LI.

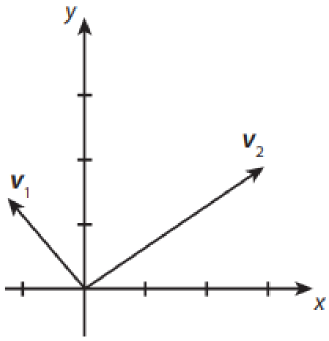
- Si tenemos 2 vectores v_1, v_2 que son LD esto significa que uno de ellos se puede escribir como una combinación del otro, es decir

$$v_1 = c_2 v_2$$

Gráficamente esto indica que los vectores están sobre la misma recta



- Si tenemos 2 vectores v_1, v_2 que son LI esto significa que ninguno de los vectores se puede escribir como una combinación del otro por lo tanto no están sobre la misma recta



3.4 Bases y dimensión

Por último, vamos a formalizar el concepto de base para un espacio vectorial V. Es decir, vamos a reconocer los vectores independientes de v_1 , $v_2,\ldots v_n \epsilon$V que generan a V. Llegó el momento de unir los dos conceptos anteriores, el de espacio generado y el de vectores independientes.
Estamos en condiciones de conocer uno de los conceptos más importantes del estudio de conjuntos que cuentan con una estructura bajo dos operaciones. Este es el concepto de base.

¿Qué es una base?

Una base es el menor conjunto de vectores del espacio V a partir del cual puedo obtener todos los elementos del espacio.
Presentamos la definición formal de base diciendo que:
En un espacio vectorial V, llamamos **base del espacio vectorial V** al conjunto de vectores v_1 , $v_2,\ldots v_n \epsilon$V para los cuales se cumple que ellos son linealmente independientes y además el espacio generado por ellos es V
El número de vectores que forman este conjunto es un dato de relevancia por lo que le daremos el nombre de **dimensión del espacio V** (dim(V))
Esto nos está indicando que en el caso de tener una base B = $\{v_1 \ , \ v_2,\ldots v_n\}$ en un espacio vectorial V, **cada elemento u del espacio puede ser representado como combinación lineal de esa base en forma única**

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n$$

Determinar si el conjunto de vectores del espacio R^2

$$B = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Forman una base para R^2.

Solución:

Estos vectores son LI ya como tenemos dos vectores, estamos en R^2 (n=2) y si calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

A continuación, para determinar el espacio que genera tomamos u vector genérico $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y resolvemos el sistema en c_1, c_2 que nos permita expresar el vector genérico como combinación de los dos vectores LI

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1\,x_1 + 0\,x_2 = x \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = y \end{cases}$$

Celdas + −

Solución por el Método de Gauss-Jo Resolver

☐ Mostrar números decimales

La solución por el método de Gauss-Jordan

Transformar la matriz aumentada del sistema em uma matriz en forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right)$$

$$\equiv$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \quad (1)$$

$$\equiv$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $x_2 = y$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1 = x$

La respuesta:

$x_1 = x$

$x_2 = y$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Por lo que $c_1 = x$, $c_2 = y$. Hemos encontrado que podemos expresar a cualquier vector como combinación lineal de los vectores LI dados. Lo que nos permite concluir que el conjunto

$$B = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

es una base para el espacio R^2 , por lo que a esos escalares encontrados los llamaremos componentes del vector en la base B y la dimensión del espacio es 2.

En general podemos observar que:
Si V es un espacio vectorial de dimensión n

- Si tenemos un conjunto de m vectores v_1 , $v_2, \ldots v_m \epsilon V$ con m > n siempre un **conjunto de vectores LD**
- Si tenemos un conjunto de vectores v_1 , $v_2, \ldots v_m \epsilon V$ linealmente independientes con n = m estos siempre formarán **una base para V**.

En muchas situaciones se desea determinar la base y dimensión de un subespacio vectorial H de V con la dimensión de H menor o igual a la dimensión del espacio V (dim(H) ≤ dim (V)), en otras palabras, por ejemplo, encontrar el subespacio solución de un sistema de ecuaciones. Analicemos un caso concreto

Determinar una base y la dimensión para el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2y + z \quad &= 0 \\ -x \quad + 2z - w &= 0 \\ 2x - 4y + z \quad &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Primero se determina el conjunto solución del sistema, al escalonar la matriz ampliada:

$$\underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 + R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{R_2 \mapsto (-1/2)R_2 \\ R_3 \mapsto (-1)R_3}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 + (3/2)R_3 \\ R_1 \mapsto R_1 - R_3}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)} \sim$$

$$\underset{R_1 \mapsto R_1 + 2R_2}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + w = 0 \\ y + \frac{1}{2}w = 0 \\ z = 0 \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Este resultado muestra que tenemos tres ecuaciones con cuatro incógnitas, entonces como el sistema es homogéneo tiene solución múltiple dada en su forma matricial como una combinación lineal:

$$\overbrace{\underset{w \in \mathbb{R}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -w \\ -\frac{1}{2}w \\ 0 \\ w \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}}^{\text{Conjunto Solución}} = w \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{w}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}.$$

Se concluye que el vector $\mathbf{v}_1$ es L.I. y genera al vector $\mathbf{v}$. Por tanto, la base V del espacio solución está dada por:

$$\text{Base}\,(V) = \{\mathbf{v}_1\} \text{ con } \dim(V) = 1$$

Notar que dado un espacio vectorial V con dim(V) = n y H un subespacio vectorial de V entonces dim(H) ≤ n

Final de la Unidad 3

Trabajo Práctico N° 3

Problema 1. Sea V el espacio de las matrices de orden 2x2 ($V = R^{2x2}$). El conjunto S

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

¿Es un subespacio de V? Fundamenta tu respuesta

Problema 2. Sea $V = R^2$ y el conjunto C

$$C = \{(x, y), x, y \in R, y \leq 0\}$$

¿Es un subespacio de R^2? Fundamenta tu respuesta

Problema 3 Sea V el espacio de las matrices de orden 2x2 ($V = R^{2x2}$). El conjunto S

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\} \text{ (conjunto de matrices diagonales de } 2 \times 2)$$

¿Es un subespacio de V? Fundamenta tu respuesta

Problema 4. Sea V el espacio de las matrices de orden 2x1 ($V = R^{2x1}$) encontrar un subespacio de V. Fundamenta tu respuesta.

Problema 5. Sea V el espacio de las matrices de orden 2x2 ($V = R^{2x2}$). Observe que ocurre con el conjunto S

$$S = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$$

¿Es un subespacio de R2? Fundamenta tu respuesta

Problema 6. De ser posible, escribe el elemento dado como combinación lineal de los elementos del conjunto W

a) $v = (1, -6, -4, 4)$; $W = \{\boldsymbol{v_1} = (-1, 2, 3, 1),\ \boldsymbol{v_2} = (2, 4, -5, 1)\}$

b) $v = (-5, -15, 1)$; $W = \{\boldsymbol{v_1} = (5, 5, 3),\ \boldsymbol{v_2} = (0, -5, 2), \boldsymbol{v_3} = (3, 5, 1)\}$

c)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; W = \left\{ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}; \quad W = \left\{ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Problema 7. Para los siguientes vectores determina si son LI o LD. Fundamenta tu respuesta. En caso de ser posible interpreta gráficamente la situación.

a) $\boldsymbol{v_1} = (2, 1),\ \boldsymbol{v_2} = (1, 2)$

b) $\boldsymbol{v_1} = (6, -3),\ \boldsymbol{v_2} = (-2, 1)$

c) $\boldsymbol{v_1} = (-1, 3, 5),\ \boldsymbol{v_2} = (0, 4, -8)$

d) $\boldsymbol{v_1} = (4, -1, 2),\ \boldsymbol{v_2} = (2, -3, 4), \boldsymbol{v_3} = (0, 5, -6)$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Problema 8. Para los siguientes conjuntos de vectores encuentra el espacio por ellos generado

a) $W = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (2,1,1), \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1), \boldsymbol{v}_4 = (-1,0,1)\}$

b) $W = \{\boldsymbol{v}_1 = (2,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (-9,5), \boldsymbol{v}_3 = (1,0)\}$

c) $W = \left\{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}$

Problema 9 El conjunto $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ se la define como base canónica de R^{2x2} Verifica que realmente en una base ¿Qué dimensión tiene este espacio?

Problema 10. Determina si los conjuntos de vectores del problema 8 forman una base para los respectivos espacios, en caso de serlo dar la dimensión del espacio generado. Fundamenta tu respuesta.

Problema 11. Para los siguientes sistemas de ecuaciones lineales encuentra una base y la dimensión para el conjunto solución

a)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - w = 0 \\ 5x - z + 2w = 0 \\ 4x + y - w = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 5x + 2y + w - t = 0 \\ 3x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Problema 12 Para cada uno de los siguientes subespacios determina una base y dimensión

a)

$$\left\{\begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ con: } y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

b)

$$\left\{\begin{pmatrix} 3z - w \\ 2z + w \\ z \\ w \end{pmatrix}, \text{ con: } z, w \in \mathbb{R}\right\}$$