

Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

Educación a
Distancia



ÁLGEBRA

MATRICIAL

Universidad Nacional de
San Luis

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas y Naturales

Facultad de Ciencias Económicas,
Jurídicas y Sociales



ÍNDICE

Aplicaciones del Álgebra Matricial II.....	6
5.1. Análisis de datos geoespaciales	6
5.1.1. Representación de datos geoespaciales con matrices y vectores	6
5.1.2. Cálculo de distancias y direcciones entre ubicaciones.....	11
5.1.3. Análisis de rutas y trayectorias utilizando operaciones matriciales	18
5.1.4. Visualización de datos geoespaciales en el plano cartesiano	23
5.2. Procesamiento de imágenes	24
5.2.1. Representación de imágenes como matrices de píxeles	25
5.2.2. Aplicación de filtros y transformaciones en imágenes mediante operaciones matriciales	30
5.3. Análisis de datos de movimiento.....	36
5.3.1. Representación de datos de movimiento con matrices y vectores	37
5.3.2. Análisis de trayectorias y cambios en la posición utilizando operaciones matriciales	42
5.3.4. Aplicaciones en el seguimiento de objetos y análisis de movimientos.....	43
TRABAJO PRÁCTICO N° 5	46

REFERENCIAS



Concepto o definición importante



Curiosidad o comentario sobre un tema



Resumen para recordar y tener en cuenta



Preguntas de reflexión



Libro electrónico para descargar



Video de YouTube



Actividad práctica para realizar



Situación problemática



Página de internet



Síntesis de ideas o conclusiones

Unidad 5

Aplicaciones del Álgebra Matricial

5.1 Análisis de datos geoespaciales

En la era digital actual, la abundancia de datos representa un recurso valioso para comprender fenómenos complejos y tomar decisiones fundamentadas. Entre estos datos, los relacionados con la ubicación geográfica tienen un papel crucial. La ciencia de datos ha evolucionado para abordar esta particularidad, dando origen al análisis de **datos geoespaciales**. Este campo se centra en comprender la relación entre los datos y su ubicación geográfica, ofreciendo perspectivas fundamentales para múltiples disciplinas.



En el marco de la Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos, el análisis de datos geoespaciales adquiere un papel esencial en la formación de profesionales altamente competentes. Esta sección explorará aspectos fundamentales relacionados con la representación, cálculo y visualización de datos con referencias espaciales.

En primer lugar, abordaremos la **representación de datos geoespaciales con matrices y vectores**. Estas estructuras matemáticas proporcionan un medio eficaz para describir ubicaciones, trayectorias y fenómenos en un espacio geográfico. La traducción de información geográfica a modelos matriciales o vectoriales permite manipulaciones analíticas precisas.

Continuando, exploraremos el **cálculo de distancias y direcciones entre ubicaciones**, una aplicación clave del análisis geoespacial. Estos cálculos, basados en principios trigonométricos y algebraicos, son fundamentales para determinar relaciones espaciales entre puntos. Proporcionan información valiosa para logística, planificación urbana, medio ambiente y muchas otras áreas.

Posteriormente, nos adentraremos en el **análisis de rutas y trayectorias utilizando operaciones matriciales**. Este análisis se ha vuelto crucial en un mundo móvil e interconectado, permitiendo la optimización de rutas de transporte, seguimiento de flotas y comprensión de la movilidad urbana.

Finalmente, destacaremos la importancia de la **visualización adecuada de datos geoespaciales en el plano cartesiano**. Al representar datos en mapas, gráficos o visualizaciones interactivas, se pueden identificar patrones y correlaciones espaciales. La interpretación correcta de estos resultados respalda la toma de decisiones informadas en diversos contextos.

El **análisis de datos geoespaciales** es un pilar crucial en la formación de expertos en análisis y gestión de datos. Estos conceptos proveen las bases esenciales para **comprender la relación entre datos y ubicación, permitiendo el uso óptimo de la información espacial en la toma de decisiones estratégicas y operacionales**. A través de este conocimiento, los futuros profesionales podrán enfrentar los desafíos de un mundo impulsado por la información geoespacial de manera efectiva y precisa.



5.1.1 Representación de datos geoespaciales con matrices y vectores

En el contexto del análisis y gestión de datos geoespaciales, la **representación efectiva de información sobre ubicaciones geográficas** es esencial para extraer conocimientos significativos. Este proceso se fundamenta en el uso de estructuras matemáticas poderosas: matrices y vectores. Estas herramientas matemáticas permiten traducir datos espaciales complejos en formas que son manejables y susceptibles de análisis.

Las **matrices** se convierten en una representación fundamental al trabajar con datos geoespaciales. Cada fila de una matriz puede representar un punto específico en el espacio geográfico, mientras que las columnas pueden contener información sobre distintas dimensiones, como la latitud, longitud, altitud u otras características relevantes. Esta estructura tabular proporciona un marco organizado para almacenar y manipular datos con referencias espaciales.



Por otro lado, los **vectores** también son cruciales para describir ubicaciones y trayectorias en el espacio. Los vectores direccionales pueden representar la distancia y dirección desde un punto a otro. Por ejemplo, en el análisis de trayectorias, cada vector puede denotar el cambio de posición entre puntos sucesivos en un intervalo de tiempo específico. La operación matemática de vectores proporciona una comprensión más profunda de cómo los puntos están distribuidos y se relacionan en el espacio geográfico.

La representación de **datos geoespaciales** con matrices y vectores permite una manipulación más eficaz y precisa de la información. Estas estructuras matemáticas brindan la base sobre la cual se construyen algoritmos para el análisis de rutas óptimas, cálculos de proximidad y visualización de datos en mapas y gráficos. Además, la combinación de matrices y vectores facilita la interpretación de patrones complejos en los datos geoespaciales, esencial para la toma de decisiones informadas en una amplia gama de aplicaciones.

Ahora abordaremos la resolución de un problema que involucra el uso de datos geoespaciales, diversas coordenadas, y el análisis de sus ventajas y limitaciones.



Consigna: Supongamos que trabajas en una agencia de viajes especializada en rutas internacionales y deseas planificar las conexiones óptimas entre tres importantes aeropuertos en América del Sur: Aeropuerto Internacional de Ezeiza en Buenos Aires (Argentina), Aeropuerto Internacional de São Paulo en Guarulhos (Brasil) y el Aeropuerto Internacional de Lima (Perú).



Realiza una representación gráfica de estos aeropuertos en un sistema de coordenadas. Explica las limitaciones de representar coordenadas esféricas en un plano y cómo esta proyección puede afectar la precisión en las distancias. Además, utiliza una matriz para representar la información de la gráfica, explicando el significado de cada fila y columna en términos de ubicación de aeropuertos y sus coordenadas.

Resolución: En primer lugar, es necesario conocer la latitud y longitud geográfica de cada uno de los aeropuertos, utilizando el sistema de coordenadas geográficas. La latitud y la longitud son dos tipos de coordenadas geográficas angulares que constituyen el sistema de referencia planetario, permitiendo ubicar

cualquier punto en la superficie de la Tierra. Este sistema es utilizado por tecnologías como el GPS (*Global Positioning System*). Sus principales características son las siguientes:



Latitud: Es el ángulo imaginario que determina la distancia entre un punto y el ecuador, la línea horizontal imaginaria que divide el mundo en dos hemisferios: Norte y Sur. En otras palabras, indica qué tan lejos o cerca está un punto de la referencia del ecuador y de los trópicos paralelos a él, como el trópico de Cáncer y el de Capricornio. La latitud se simboliza con la letra griega phi, ϕ .

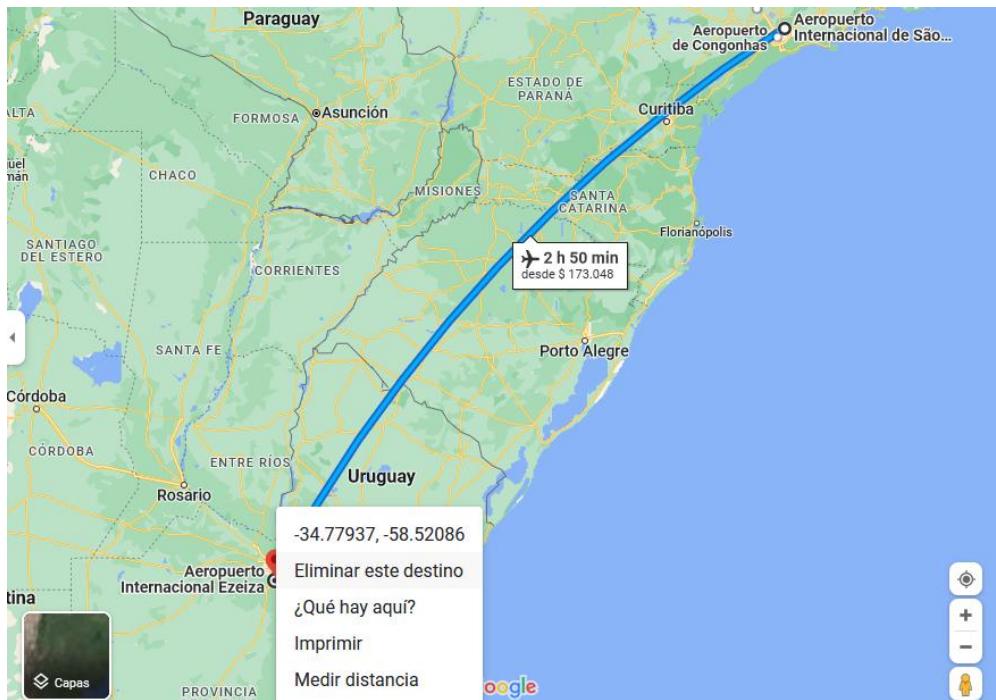


Longitud: Es el ángulo imaginario que determina la distancia entre un punto y el meridiano de Greenwich o meridiano 0, que cruza por la localidad del mismo nombre en Londres, Inglaterra. Este meridiano es vertical y divide al mundo en dos regiones, occidental (Oeste) y oriental (Este), y sirve como referencia para trazar los demás meridianos que cruzan imaginariamente el globo de manera paralela al meridiano de Greenwich. La longitud se simboliza con la letra griega lambda, λ .

Estas coordenadas de latitud y longitud componen el sistema de coordenadas conocido como **Sistema de Coordenadas Geográficas**, cuyo centro imaginario es el centro de la Tierra. Sus valores se expresan en grados, minutos y segundos, acompañados de una letra que indica la orientación cardinal en el globo: Norte, Sur, Este u Oeste. Esta información suele anotarse entre paréntesis, presentando primero los datos de latitud y luego los de longitud.

Por ejemplo, un punto X en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, tiene coordenadas geográficas angulares de (34° 36' 47" S; 58° 22' 38" O). Es decir, el punto X está a 34 grados, 36 minutos, 47 segundos de latitud sur, y 58 grados, 22 minutos, 38 segundos de longitud oeste. También es importante mencionar que, en lugar de utilizar la letra 'S' para el sur y la letra 'O' para el oeste, es común expresar estas direcciones con valores negativos. Por ejemplo, la latitud sur se representaría como -34° y la longitud oeste como -58°. Esta notación es ampliamente utilizada, por ejemplo, en aplicaciones como Google Maps, donde se emplea el signo negativo para indicar tanto latitud sur como longitud oeste, simplificando la representación y lectura de las coordenadas geográficas.

Para obtener estas coordenadas para un lugar específico, podemos utilizar Google Maps. Basta con buscar el aeropuerto que deseamos localizar y, luego, haciendo **clic con el botón derecho en el lugar o en el área del mapa**, se abrirá una ventana emergente donde encontraremos la latitud y longitud en formato decimal en la parte superior.



El Aeropuerto Internacional de Ezeiza en Buenos Aires, Argentina, tiene el nombre oficial “*Aeropuerto Internacional Ministro Pistarini*” en honor a Juan Pistarini, un destacado político y militar argentino. El Aeropuerto Internacional de Guarulhos en São Paulo, Brasil, es conocido oficialmente como “*Aeropuerto Internacional de São Paulo/Guarulhos - Governador André Franco Montoro*”, en honor a André Franco Montoro, quien fue un político y abogado brasileño. El aeropuerto principal de Lima, Perú, lleva el nombre oficial de “*Aeropuerto Internacional Jorge Chávez*”, en honor al aviador pionero peruano Jorge Chávez Dartnell.

Si organizamos estos datos en una tabla tendremos los siguientes valores:

Aeropuerto	Latitud	Longitud
Aeropuerto Internacional de Ezeiza	-34.46953	-58.54775
Aeropuerto Internacional de Guarulhos	-23.01586	-46.49848
Aeropuerto Internacional de Lima	-12.02282	-77.10803

La tabla proporcionada se puede traducir en una matriz, donde cada fila representa un aeropuerto y contiene dos valores: la latitud y la longitud. En esta representación matricial, las filas corresponden a cada uno de los aeropuertos: Aeropuerto Internacional de Ezeiza, Aeropuerto Internacional de Guarulhos y Aeropuerto Internacional de Lima. Las columnas, por otro lado, representan la información asociada a cada aeropuerto, siendo la primera columna la latitud y la segunda columna la longitud. Así, cada entrada de la matriz corresponde a una coordenada geoespacial específica que caracteriza la ubicación de un aeropuerto en términos de latitud y longitud.

$$\begin{bmatrix} -34.46953 & -58.54775 \\ -23.01586 & -46.49848 \\ -12.02282 & -77.10803 \end{bmatrix}$$

Para representar estos datos en un sistema de coordenadas plano, podemos utilizar las coordenadas geográficas proporcionadas (latitud y longitud) como coordenadas rectangulares en un plano cartesiano. Asignamos la latitud a la coordenada en el eje Y (ordenada) y la longitud a la coordenada en el eje X (abscisa). De esta manera, cada aeropuerto se puede ubicar como un punto en el plano, como se aprecia en la siguiente imagen, realizada con GeoGebra.



Sin embargo, como podemos observar, esta representación no se corresponde adecuadamente con un plano cartesiano. Por lo tanto, asignamos la longitud a la coordenada en el eje X (abscisa) y la latitud a la coordenada en el eje Y (ordenada). De este modo, cada aeropuerto puede ubicarse como un punto en el plano, obteniendo la siguiente representación.



Esta representación en un plano cartesiano corresponde adecuadamente con la ubicación real en un mapa, ya que la longitud corresponde a la ubicación este-oeste, y la latitud corresponde a la ubicación norte-sur.

Sin embargo, es importante destacar que este proceso de representación introduce ciertas limitaciones y consideraciones. Primero, **las coordenadas geográficas originales están en un sistema esférico**, que representa la Tierra tridimensionalmente, mientras que nuestro sistema de coordenadas plano es bidimensional. Por lo tanto, esta representación en plano no captura la verdadera geometría de la superficie terrestre, lo que puede llevar a distorsiones y errores



en la medición de distancias.

Además, al utilizar coordenadas geográficas como coordenadas rectangulares en un plano, **estamos tratando ángulos como si fueran longitudes lineales** en un sistema plano, lo cual es una simplificación y puede generar inexactitudes. La superficie de la Tierra es curva, y esta aproximación plana puede generar imprecisiones especialmente en largas distancias.

No obstante, esta representación en un plano cartesiano facilita la visualización y comprensión de la distribución geográfica de los aeropuertos. Permite comparar fácilmente sus posiciones relativas y analizar patrones espaciales. Además, simplifica el uso de herramientas de análisis y visualización disponibles en entornos gráficos bidimensionales.

En síntesis, al representar **coordenadas geográficas** en un **sistema de coordenadas plano** nos proporciona una visualización clara y conveniente de la ubicación de los lugares en un **plano bidimensional**, pero introduce ciertas **limitaciones en la precisión y la fidelidad geométrica** debido a la diferencia entre un modelo esférico y un plano.

Después de haber trabajado con esta **representación geoespacial** de los aeropuertos, reflexiona sobre las implicaciones de utilizar coordenadas rectangulares en un plano para representar posiciones en la superficie esférica de la Tierra. ¿Qué **ventajas y limitaciones** identificas en este enfoque para la representación de **datos geoespaciales** en comparación con un sistema esférico?



5.1.2 Cálculo de distancias y direcciones entre ubicaciones

En el contexto de análisis y gestión de datos geoespaciales, es fundamental poder calcular de manera precisa las distancias y direcciones entre diferentes ubicaciones. Esto nos permite comprender la relación espacial entre puntos de interés, un aspecto crucial en aplicaciones de geolocalización, logística, urbanismo y muchas otras áreas.

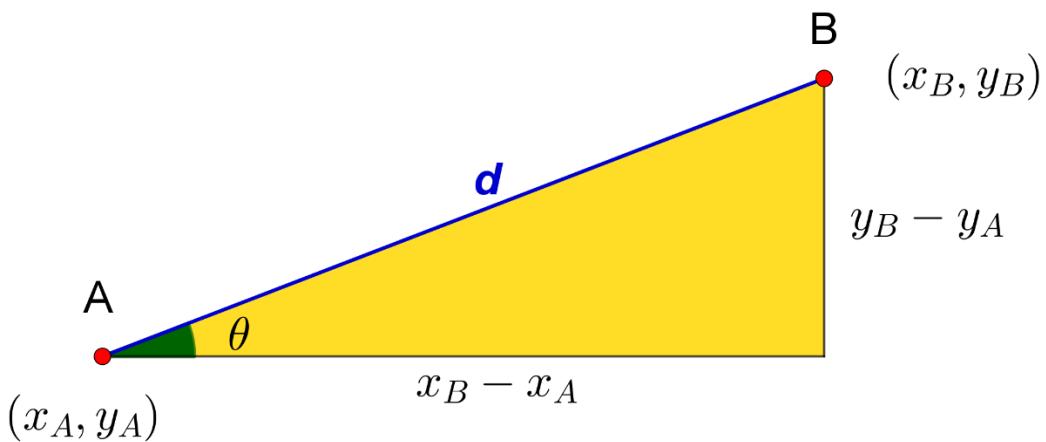
Distancia entre puntos

Para calcular la distancia entre dos puntos en un espacio geoespacial, generalmente utilizamos la fórmula de la distancia euclídea en álgebra lineal. Dada dos ubicaciones A y B con sus correspondientes vectores de coordenadas $\vec{A} = (x_A, y_A)$ y $\vec{B} = (x_B, y_B)$, la distancia d entre estos puntos se calcula como:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Esta fórmula representa la distancia en línea recta entre dos puntos en un plano bidimensional. Básicamente, su deducción se deriva de la aplicación del teorema de Pitágoras, como se ilustra en la siguiente imagen.



Es importante tener en cuenta que, en algunos contextos, especialmente en distancias geográficas largas, es necesario utilizar fórmulas más complejas que consideren la curvatura de la Tierra.

Dirección entre puntos

La dirección o el ángulo entre dos puntos en un espacio geoespacial se puede calcular utilizando funciones trigonométricas. Dada dos ubicaciones A y B , el ángulo θ entre la línea que los une y el eje horizontal se puede calcular como:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$$



Esta fórmula nos proporciona el ángulo en radianes. Si deseamos la dirección en grados, podemos convertirlo multiplicando por 180π .

Este cálculo se deduce aplicando trigonometría básica al triángulo rectángulo formado por la línea que conecta A y B . La tangente del ángulo θ es igual a la relación entre la diferencia en coordenadas y y la diferencia en coordenadas x . La función arcotangente nos da el ángulo correspondiente a esta relación.

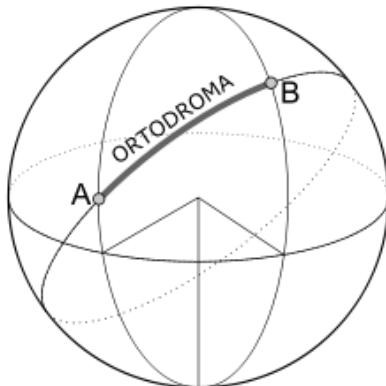
Estos cálculos son fundamentales para diversas aplicaciones en análisis de datos geoespaciales, ya que permiten evaluar la proximidad y la orientación relativa entre diferentes ubicaciones.

Distancia en una esfera

Cuando trabajamos con **coordenadas geoespaciales** en forma de latitud y longitud, es necesario utilizar fórmulas específicas para calcular la distancia entre dos puntos en la superficie de la Tierra. Esto se debe a que la Tierra es una esfera, y la distancia entre dos puntos en una esfera no se calcula directamente como en un plano bidimensional.



La intersección de un plano que contiene el centro de una esfera con la esfera misma genera dos tipos de líneas importantes: un círculo máximo y una circunferencia máxima en la superficie de la esfera. Un círculo máximo divide la esfera en dos hemisferios iguales. La distancia más corta entre dos puntos A y B en la superficie de la esfera, medida a lo largo de un arco de círculo máximo, se denomina **distancia ortodrómica**. Si viviéramos en una Tierra plana (lo cual no es así), entonces sí, una línea recta sería la distancia más corta entre los puntos A y B .



En la superficie terrestre, ejemplos de círculos máximos incluyen los meridianos y la línea ecuatorial. Para calcular la distancia ortodrómica entre dos puntos en una esfera, como la Tierra, se utiliza la **fórmula del Haversine**. Esta fórmula tiene en cuenta la curvatura de la Tierra y proporciona una estimación precisa de la distancia entre dos puntos en la superficie terrestre.

En consecuencia, dada dos ubicaciones A y B con sus correspondientes latitudes ϕ_A y ϕ_B , y longitudes λ_A y λ_B , la distancia d entre estos puntos se calcula como:

$$d = 2r \times \arcsen \left(\sqrt{\sen^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) + \cos(\phi_A) \times \cos(\phi_B) \times \sen^2 \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)} \right)$$

Donde:

- $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$
- $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$
- La variable r representa el radio de la Tierra, que se aproxima a 6371 kilómetros. Para mayor precisión, se desglosa en el radio ecuatorial de aproximadamente 6378.1 km y el radio polar de aproximadamente 6356.8 km. Se utiliza un valor medio de 6371 km como referencia debido a estas variaciones.

En el mundo real, la **fórmula de Haversine** se utiliza para calcular rutas de vuelo, distancias en mapas y navegación marítima. También se utiliza en meteorología para calcular las trayectorias de las tormentas, para posicionar equipos de telecomunicaciones y para trazar la trayectoria de los satélites en el cielo. La fórmula también se utiliza en **navegación GPS** para determinar las rutas más eficientes para los conductores.



Conversión de latitud y longitud a coordenadas rectangulares

Para representar coordenadas geoespaciales en un plano cartesiano, podemos convertir las coordenadas de latitud y longitud a coordenadas rectangulares utilizando proyecciones cartográficas. Una de las proyecciones comúnmente utilizadas es la **proyección de Mercator**, que convierte la latitud y longitud en coordenadas x e y en un plano bidimensional.



La **proyección de Mercator** lleva el nombre de su creador, Gerardus Mercator, un cartógrafo, geógrafo y matemático flamenco-alemán. Mercator presentó esta proyección en 1569 en su obra "Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accommodata" (Una descripción del mundo nueva y más completa, corregida para su uso por navegantes).

La **proyección de Mercator** fue diseñada originalmente para ayudar en la navegación marítima, ya que representa líneas de rumbo recto como líneas rectas en el mapa, facilitando el trazado de rutas en un mapa (en forma de líneas rectas), lo que es especialmente útil para la navegación con brújula.

Sin embargo, esta proyección distorsiona el tamaño y forma de las áreas, especialmente hacia los polos, lo que la convierte en una proyección inadecuada para representar de manera precisa las áreas de continentes en latitudes altas y bajas. A pesar de sus distorsiones, la **proyección de Mercator** sigue siendo ampliamente utilizada y es conocida en todo el mundo.

Dado un punto con una latitud ϕ y una longitud λ , la conversión a coordenadas rectangulares en esta proyección se realiza de la siguiente manera:



Conversión de grados a radianes: Es necesario convertir las medidas en grados a radianes, ya que muchas de las funciones trigonométricas en las fórmulas están definidas en radianes.

- Latitud en radianes = $\phi \times \left(\frac{\pi}{180}\right)$
- Longitud en radianes = $\lambda \times \left(\frac{\pi}{180}\right)$



Cálculo de coordenadas rectangulares: Utilizando la fórmula de proyección de Mercator, se calculan las coordenadas x e y en el plano rectangular:

- $x = R \times \lambda$
- $y = R \times \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{latitud en radianes}}{2} \right) \right)$

Donde R es el radio de la Tierra y se utiliza como constante en la proyección. La elección del radio puede variar dependiendo del contexto, pero un valor comúnmente utilizado es el radio medio de la Tierra, que es aproximadamente 6371 kilómetros.

Tomando como ejemplo el Aeropuerto Internacional de Ezeiza con latitud $\phi = -34.46953$ y longitud $\lambda = -58.54775$, podemos realizar los cálculos:

Convertimos a radianes:

$$\text{Latitud en radianes} = -34.46953 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx -0.601607 \text{ radianes}$$

$$\text{Longitud en radianes} = -58.54775 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx -1.021851 \text{ radianes}$$

Calculamos las coordenadas rectangulares:

$$x \approx 6371 \times (-1.021851) \approx -6510.21 \text{ km}$$

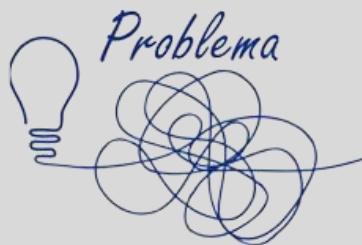
$$y \approx 6371 \times \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{0.601607}{2} \right) \right) \approx -4087.45 \text{ km}$$

Así, en un plano cartesiano, el Aeropuerto Internacional de Ezeiza estaría ubicado aproximadamente en las coordenadas $(-6510.21, -4087.45)$ kilómetros.

Esta representación permite trabajar con las coordenadas de manera más sencilla en un plano bidimensional, aunque hay que tener en cuenta que la

proyección introduce distorsiones en las distancias y ángulos, especialmente en latitudes altas.

Retomemos el problema que habíamos trabajado sobre la representación de los tres aeropuertos de América del Sur.



Consigna: Supongamos que trabajas en una agencia de viajes especializada en rutas internacionales y deseas planificar las conexiones óptimas entre tres importantes aeropuertos en América del Sur: Aeropuerto Internacional de Ezeiza en Buenos Aires (Argentina), Aeropuerto Internacional de São Paulo en Guarulhos (Brasil) y el Aeropuerto Internacional de Lima (Perú).



Realiza una proyección de Mercator utilizando las coordenadas de los tres aeropuertos. Luego, crea una representación gráfica basada en esta proyección y calcula las distancias entre los aeropuertos en el plano cartesiano resultante. Posteriormente, compara estas distancias con la distancia ortodrómica entre los aeropuertos y proporciona una explicación detallada y fundamentada de tus resultados. Realiza también una comparación con las distancias proporcionadas por Google Maps para validar y respaldar tus conclusiones.

Resolución: Hemos determinado previamente que, en un plano cartesiano, las coordenadas aproximadas para el Aeropuerto Internacional de Ezeiza son $(-6510.21, -4087.45)$ kilómetros.

Ahora, al considerar el Aeropuerto Internacional de Guarulhos con latitud $\phi = -23.01586$ y longitud $\lambda = -46.49848$, podemos calcular sus coordenadas rectangulares. Para ello, primero convertimos la latitud y la longitud de grados a radianes:

$$\text{Latitud en radianes} = -23.01586 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx -0.4018025 \text{ radianes}$$

$$\text{Longitud en radianes} = -46.49848 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx -0.811552 \text{ radianes}$$

Luego, obtenemos las coordenadas rectangulares:

$$x \approx 6371 \times (-0.811552) \approx -5170.40 \text{ km}$$

$$y \approx 6371 \times \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{-0.4018025}{2}\right)\right) \approx -2630.99 \text{ km}$$

Por lo tanto, en un plano cartesiano, las coordenadas aproximadas para el Aeropuerto Internacional de Guarulhos son $(-5170.40, -2630.99)$ kilómetros.

Continuando con el Aeropuerto Internacional de Lima, con latitud $\phi = -12.02282$ y longitud $\lambda = -77.10803$, realizamos el mismo proceso:

$$\text{Latitud en radianes} = -12.02282 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx -0.209838 \text{ radianes}$$

$$\text{Longitud en radianes} = -77.10803 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx -1.345789 \text{ radianes}$$

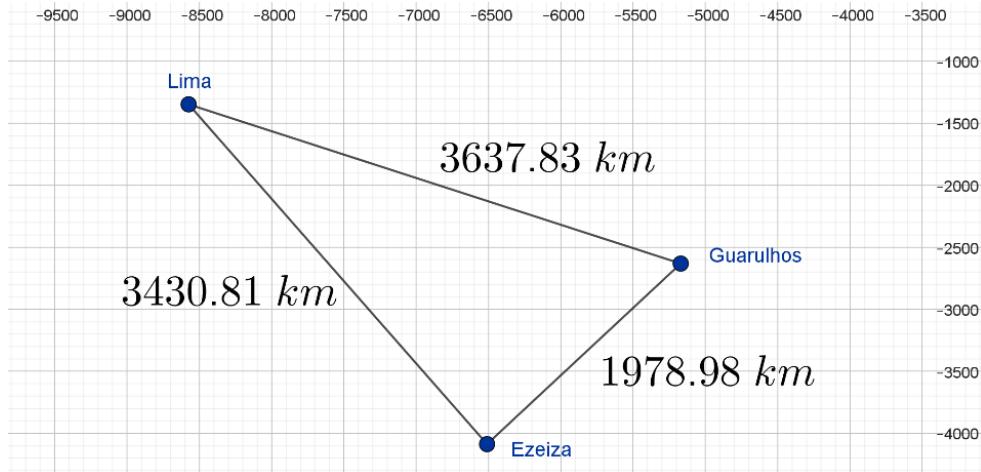
Calculamos las coordenadas rectangulares:

$$x \approx 6371 \times (-1.345789) \approx -8574.02 \text{ km}$$

$$y \approx 6371 \times \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-0.209838}{2} \right) \right) \approx -1346.80 \text{ km}$$

En consecuencia, en un plano cartesiano, las coordenadas aproximadas para el Aeropuerto Internacional de Lima son $(-8574.02, -1346.80)$ kilómetros.

La representación gráfica en un plano cartesiano, con el cálculo de las distancias entre aeropuertos, se muestra a continuación.



Para el cálculo de las distancias ortodrómicas empleamos la fórmula de Haversine para calcular la distancia entre dos puntos en una esfera (como la Tierra), teniendo la precaución que los ángulos deben estar expresados en radianes:

$$d = 2r \times \arcsen \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\phi_B - \phi_A}{2} \right) + \cos(\phi_A) \times \cos(\phi_B) \times \sin^2 \left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{2} \right)} \right)$$

Para la distancia entre el Aeropuerto Internacional de Ezeiza y el Aeropuerto Internacional de Guarulhos tenemos:

$$\phi_A = -34.46953 \times \left(\frac{\pi}{180} \right) \approx -0.602568 \text{ rad}$$

$$\phi_B = -23.01586 \times \left(\frac{\pi}{180} \right) \approx -0.401799 \text{ rad}$$

$$\lambda_A = -58.54775 \times \left(\frac{\pi}{180} \right) \approx -1.021423 \text{ rad}$$

$$\lambda_B = -46.49848 \times \left(\frac{\pi}{180} \right) \approx -0.811865 \text{ rad}$$

Por consiguiente, tenemos:

$$d_{Ezeiza-Guarulhos} \approx 1729.77 \text{ km}$$

Llevando a cabo un razonamiento análogo tenemos las siguientes distancias:

$$d_{Guarulhos-Lima} \approx 3458.83 \text{ km}$$

$$d_{Ezeiza-Lima} \approx 3122.28 \text{ km}$$

Las notables diferencias en las distancias calculadas se deben principalmente a las particularidades de las proyecciones y fórmulas empleadas. Para calcular la

distancia ortodrómica utilizando la **fórmula de Haversine**, se tiene en cuenta la curvatura de la Tierra y se calcula la distancia a lo largo de la superficie de la esfera, ofreciendo resultados más precisos, especialmente para distancias considerables.

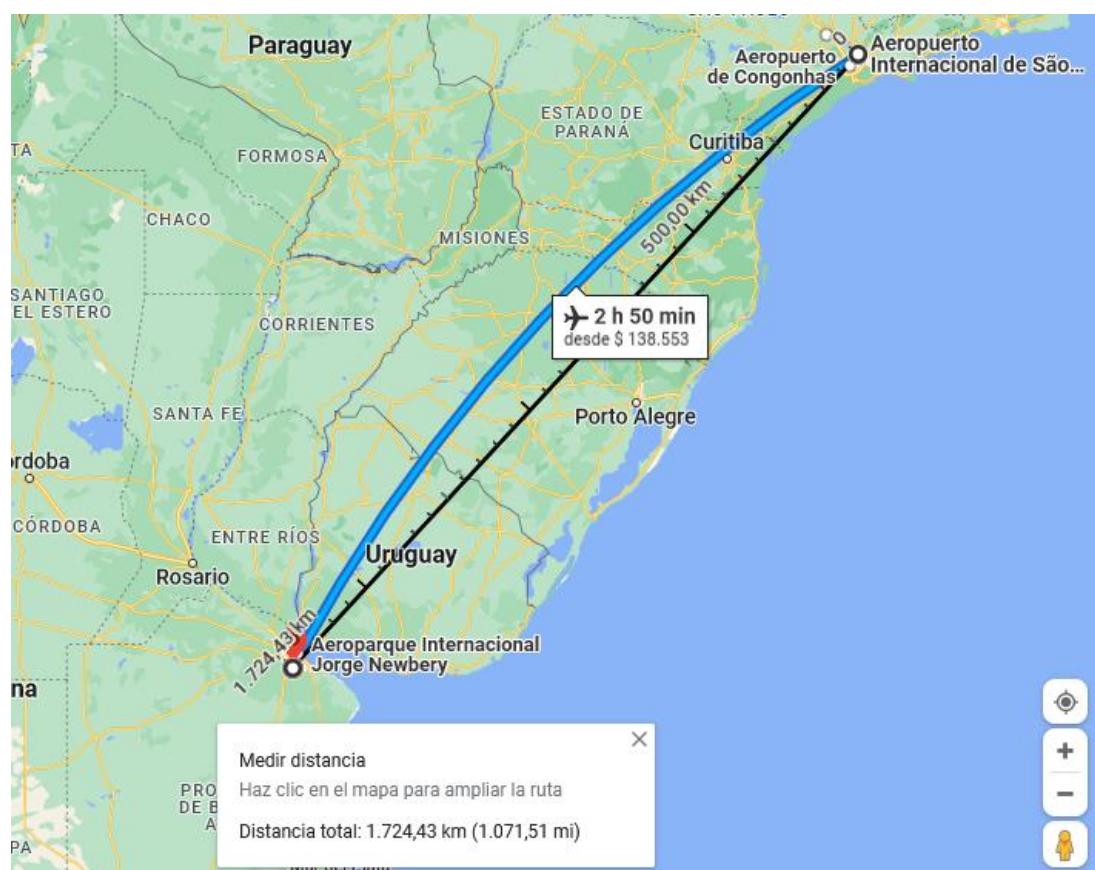
Por otro lado, al optar por una **proyección de Mercator** y luego calcular la distancia euclíadiana en el plano cartesiano, se asume una representación plana de la superficie esférica de la Tierra. Las proyecciones planas presentan distorsiones, especialmente en regiones lejanas al ecuador, lo que puede ocasionar diferencias significativas en las distancias calculadas.

Las discrepancias también guardan relación con la elección del radio de la Tierra en la **fórmula de Haversine** y con la precisión numérica en los cálculos. Es esencial utilizar el radio de la Tierra adecuado y mantener una precisión precisa en los cálculos para obtener resultados más fiables y coherentes. En nuestro caso, elegimos un radio medio de 6371 km para la Tierra.

Para recordar: Las diferencias se pueden atribuir a las características de las proyecciones y fórmulas empleadas, así como a la precisión numérica en los cálculos. La **fórmula de Haversine** proporciona una medida más precisa de la distancia a lo largo de la superficie de la Tierra, mientras que la **proyección de Mercator** y el cálculo euclíadiano en el plano pueden introducir distorsiones que afectan las diferencias observadas.



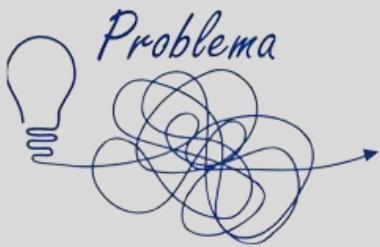
Al consultar Google Maps, observamos que la distancia entre el Aeropuerto Internacional de Ezeiza y el Aeropuerto Internacional de Guarulhos es aproximadamente 1724.43 km, una cifra cercana al cálculo que realizamos mediante la fórmula de Haversine, que arrojó 1729.77 km. La discrepancia fundamentalmente radica en la precisión con la que marcamos en el mapa los dos puntos para calcular la distancia.



5.1.3 Análisis de rutas y trayectorias utilizando operaciones matriciales

El **análisis de rutas y trayectorias** es fundamental en el campo del análisis y gestión de datos geoespaciales, ya que permite entender y optimizar la movilidad en diversos contextos, desde el transporte de bienes hasta la planificación urbana. En esta sección, exploraremos cómo las operaciones matriciales, una herramienta poderosa en álgebra lineal, pueden aplicarse con eficacia en este análisis para obtener información valiosa y tomar decisiones fundamentadas.

Pasemos a la resolución de un problema que pondrá en juego los conceptos matemáticos centrales de esta sección.



Consigna: Una agencia de turismo está planeando un viaje para un grupo de turistas desde San Luis hasta Córdoba en ómnibus. La agencia ha identificado tres rutas principales con diferentes distancias y tiempos de viaje, cada una con distintas ciudades intermedias que los turistas podrían visitar. El objetivo es encontrar la ruta más eficiente en términos de distancia y tiempo de viaje.



Las dos rutas identificadas son las siguientes:

Ruta A: Localidades intermedias: Villa Dolores, Mina Clavero y Villa Carlos Paz.

Ruta B: Localidades intermedias: Villa Mercedes, Río Cuarto y Río Tercero.

Analiza y fundamenta cuál de estas rutas podría ser la más eficiente.

Resolución: Para determinar cuál de estas rutas es la más eficiente, comenzamos por calcular diversas matrices, incluyendo la de distancias entre las localidades, los tiempos estimados de recorrido y las velocidades promedio. Es importante tener en cuenta que estos datos son específicos al momento de la búsqueda en Google Maps y pueden variar según diferentes horarios y condiciones de tráfico. Sin embargo, para los fines prácticos de este análisis, consideramos que los datos proporcionados nos ofrecen una referencia sólida.

Ahora, procedamos con el primer paso de nuestro análisis.



Representación matricial de los trayectos y ciudades intermedias

Construiremos una matriz D_i para representar las distancias entre ciudades intermedias para cada trayecto. Esta matriz será de tamaño $n \times n$, donde n es el número de localidades en cada trayecto. Luego, construiremos la matriz, T_i , para representar los tiempos de viaje entre localidades en cada trayecto. Apelamos a Google Maps para determinar las distancias y los tiempos, los cuales plasmamos en una tabla y, a partir de ella, establecemos la matriz. Finalmente, construimos la matriz de velocidades, dividiendo apropiadamente distancias entre las localidades y el tiempo promedio que insume el recorrido.

	San Luis	Villa Dolores	Mina Clavero	Villa Carlos Paz	Córdoba
San Luis	0	212	259	369	402
Villa Dolores	212	0	45	154	188
Mina Clavero	259	45	0	112	145
Villa Carlos Paz	369	154	112	0	44
Córdoba	402	188	145	44	0

Por lo tanto, la matriz de distancias para la Ruta A resulta ser la siguiente:

$$D_A = \begin{vmatrix} 0 & 212 & 259 & 369 & 402 \\ 212 & 0 & 45 & 154 & 188 \\ 259 & 45 & 0 & 112 & 145 \\ 369 & 154 & 112 & 0 & 44 \\ 402 & 188 & 145 & 44 & 0 \end{vmatrix}$$

En cuanto a los tiempos esperados en realizar el recorrido, tenemos la siguiente tabla:

	San Luis	Villa Dolores	Mina Clavero	Villa Carlos Paz	Córdoba
San Luis	0	2h 24 min	3h 13min	4h 50 min	5h 12 min
Villa Dolores	2h 24 min	0	55 min	2h 30 min	2h 52 min
Mina Clavero	3h 13min	55 min	0	1h 36 min	2 h 4 min
Villa Carlos Paz	4h 50 min	2h 30 min	1h 36 min	0	47 min
Córdoba	5h 12 min	2h 52 min	2 h 4 min	47 min	0

Esta tabla conlleva a estructurar la siguiente matriz de tiempos para la Ruta A.

$$T_A = \begin{vmatrix} 0 & 2.40 & 3.2167 & 4.8334 & 5.21 \\ 2.4 & 0 & 0.9168 & 2.50 & 2.8667 \\ 3.2167 & 0.9168 & 0 & 1.60 & 2.0667 \\ 4.8334 & 2.50 & 1.60 & 0 & 0.7834 \\ 5.21 & 2.8667 & 2.0667 & 0.7834 & 0 \end{vmatrix}$$

Con la matriz de distancias y de tiempos de la Ruta A, establecemos la de velocidades promedios.

$$V_A = \begin{vmatrix} 0 & 88.33 & 80.52 & 76.34 & 77.31 \\ 88.33 & 0 & 49.09 & 61.60 & 65.58 \\ 80.52 & 49.09 & 0 & 70.00 & 70.16 \\ 76.34 & 61.60 & 70.00 & 0 & 56.17 \\ 77.31 & 65.58 & 70.16 & 56.17 & 0 \end{vmatrix}$$

Procediendo de manera análoga para la Ruta B, tendremos las siguientes tablas y matrices asociadas.

	San Luis	Villa Mercedes	Río Cuarto	Río Tercero	Córdoba
San Luis	0	97	217	357	429
Villa Mercedes	97	0	126	266	338
Río Cuarto	217	126	0	142	213
Río Tercero	357	266	142	0	99
Córdoba	429	338	213	99	0

$$D_B = \begin{vmatrix} 0 & 97 & 217 & 357 & 429 \\ 97 & 0 & 126 & 266 & 338 \\ 217 & 126 & 0 & 142 & 213 \\ 357 & 266 & 142 & 0 & 99 \\ 429 & 338 & 213 & 99 & 0 \end{vmatrix}$$

	San Luis	Villa Mercedes	Río Cuarto	Río Tercero	Córdoba
San Luis	102333	16 14 min1.7834	2h 45min	4.283420 min	5h 12 min
Villa Mercedes	1h 24.7667	1.7834 0	1h 47.8344	2.600022 min	4h 17 min
Río Cuarto	2h 46.3334	3.1667 min1.7834	00	1.433347 min	2h 36 min
Río Tercero	4h 20.4000	4.28342 min2.6000	1h 047.8344	0 0	1h 26 min
Córdoba	5h 12 min	4h 17 min	2h 36 min	1h 26 min	0

$$V_B = \begin{vmatrix} 0 & 78.65 & 78.43 & 82.38 & 82.50 \\ 78.65 & 0 & 68.11 & 79.00 & 78.91 \\ 78.43 & 68.11 & 0 & 79.63 & 81.92 \\ 82.38 & 79.00 & 79.63 & 0 & 69.07 \\ 82.50 & 78.91 & 81.92 & 69.07 & 0 \end{vmatrix}$$

En este caso particular, podríamos utilizar la matriz de distancia para tomar la decisión, ya que la distancia es uno de los criterios más comunes para elegir una ruta óptima. Dado que la distancia total de la Ruta A (402 km) es menor que la de la Ruta B (429 km), según ese criterio, la Ruta A podría considerarse óptima.



Costos ponderados

Para tomar una decisión basada en criterios adicionales, como las velocidades promedio o el tiempo, podemos utilizar una matriz de costos ponderados. Esto implica asignar pesos a los diferentes factores y combinarlos en una sola métrica para comparar las rutas. Aquí hay un enfoque que podemos seguir:

Definir factores y asignar pesos: Identifica los factores que deseas considerar además de la distancia. Por ejemplo, podríamos considerar la velocidad promedio y el tiempo de viaje.

La **asignación de pesos a los factores** (distancia, velocidad promedio y tiempo) en una matriz de costos ponderados depende de tus preferencias y prioridades personales. **No hay una regla fija para determinar los pesos**, y la elección de los pesos debe estar fundamentada en tus necesidades y objetivos específicos para el viaje. Aquí te proporcionamos algunas consideraciones para asignar pesos a estos factores:



Distancia (0.4): Si tu principal objetivo es minimizar la distancia recorrida y prefieres la ruta más corta, asignar un peso relativamente alto a la distancia tiene sentido. Una asignación de 0.4 indica que la distancia es el factor más importante en tu decisión.

Tiempo (0.3): Si consideras que el tiempo es un recurso crítico y estás dispuesto a comprometer un poco la distancia para ahorrar tiempo, asignar un peso al tiempo puede ser apropiado. Esto es útil si deseas llegar a tu destino lo más rápido posible.

Velocidad promedio (0.3): Si valoras la velocidad y prefieres rutas que permitan un desplazamiento más rápido, puedes asignar un peso a la velocidad promedio. Esto podría ser relevante si deseas minimizar el tiempo en carretera.

La **asignación de pesos no es estática** y puede variar según tus circunstancias y preferencias personales. Por ejemplo, si estás planificando un viaje de ocio, es posible que desees priorizar la distancia y la escenografía, mientras que en un viaje de negocios, el tiempo podría ser más importante.

Crear matrices de costo ponderado: Multiplica cada matriz de factor (distancia, velocidad promedio, tiempo) por su peso correspondiente. Por ejemplo, para la matriz ponderada para las diferentes rutas tendremos:

$$CP_A = 0.4D_A + 0.3T_A + 0.3V_A$$

$$CP_B = 0.4D_B + 0.3T_B + 0.3V_B$$

En un primer paso, introducimos estas matrices en una aplicación de software. En este caso, utilizaremos GeoGebra como nuestra herramienta.

► Vista Algebraica

- $D_A = \begin{pmatrix} 0 & 212 & 259 & 369 & 402 \\ 212 & 0 & 45 & 154 & 188 \\ 259 & 45 & 0 & 112 & 145 \\ 369 & 154 & 112 & 0 & 44 \\ 402 & 188 & 145 & 44 & 0 \end{pmatrix}$
- $T_A = \begin{pmatrix} 0 & 2.4 & 3.2167 & 4.8333 & 5.2 \\ 2.4 & 0 & 0.9167 & 2.5 & 2.8667 \\ 3.2167 & 0.9167 & 0 & 1.6 & 2.0667 \\ 4.8333 & 2.5 & 1.6 & 0 & 0.7833 \\ 5.2 & 2.8667 & 2.0667 & 0.7833 & 0 \end{pmatrix}$
- $V_A = \begin{pmatrix} 0 & 88.3333 & 80.5181 & 76.3448 & 77.3077 \\ 88.3333 & 0 & 49.0909 & 61.6 & 65.5814 \\ 80.5181 & 49.0909 & 0 & 70 & 70.1613 \\ 76.3448 & 61.6 & 70 & 0 & 56.1702 \\ 77.3077 & 65.5814 & 70.1613 & 56.1702 & 0 \end{pmatrix}$
- $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 97 & 217 & 357 & 429 \\ 97 & 0 & 126 & 266 & 338 \\ 217 & 126 & 0 & 142 & 213 \\ 357 & 266 & 142 & 0 & 99 \\ 429 & 338 & 213 & 99 & 0 \end{pmatrix}$
- $T_B = \begin{pmatrix} 0 & 1.2333 & 2.7667 & 4.3333 & 5.2 \\ 1.2333 & 0 & 1.85 & 3.3667 & 4.2833 \\ 2.7667 & 1.85 & 0 & 1.7833 & 2.6 \\ 4.3333 & 3.3667 & 1.7833 & 0 & 1.4333 \\ 5.2 & 4.2833 & 2.6 & 1.4333 & 0 \end{pmatrix}$
- $V_B = \begin{pmatrix} 0 & 78.6486 & 78.4337 & 82.3846 & 82.5 \\ 78.6486 & 0 & 68.1081 & 79.0099 & 78.9105 \\ 78.4337 & 68.1081 & 0 & 79.6262 & 81.9231 \\ 82.3846 & 79.0099 & 79.6262 & 0 & 69.0698 \\ 82.5 & 78.9105 & 81.9231 & 69.0698 & 0 \end{pmatrix}$

Al realizar estos cálculos con GeoGebra, obtenemos las siguientes matrices de costos ponderados para cada una de las rutas:

$$\textcircled{c} \quad \mathbf{CP}_A = \begin{pmatrix} 0 & 112.02 & 128.7204 & 171.9534 & 185.5523 \\ 112.02 & 0 & 33.0023 & 80.83 & 95.7344 \\ 128.7204 & 33.0023 & 0 & 66.28 & 79.6684 \\ 171.9534 & 80.83 & 66.28 & 0 & 34.6861 \\ 185.5523 & 95.7344 & 79.6684 & 34.6861 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{c} \quad \mathbf{CP}_B = \begin{pmatrix} 0 & 62.7646 & 111.1601 & 168.8154 & 197.91 \\ 62.7646 & 0 & 71.3874 & 131.113 & 160.1582 \\ 111.1601 & 71.3874 & 0 & 81.2229 & 110.5569 \\ 168.8154 & 131.113 & 81.2229 & 0 & 60.7509 \\ 197.91 & 160.1582 & 110.5569 & 60.7509 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos enfrentamos a una pregunta natural: **¿Cómo tomamos una decisión ahora que solo disponemos de una matriz de costos ponderados?** Para comparar estas matrices ponderadas y seleccionar la ruta óptima, llevamos a cabo el cálculo del Costo Total Ponderado para cada ruta. Este proceso implica la suma de todos los elementos de la matriz ponderada de cada ruta. Luego, procedemos a la comparación de los costos totales ponderados de ambas rutas. La ruta con el costo total ponderado más bajo se convierte en la elección preferida, ya que representa la opción que mejor se alinea con los criterios y pesos que hemos establecido previamente.



Si utilizamos el comando `SUMA()` de GeoGebra en cada matriz, obtendremos una lista que refleja la suma de los elementos de cada fila. Luego, aplicamos nuevamente el comando `SUMA()` de GeoGebra a esta lista, lo que nos proporciona un valor equivalente a la suma de todos los elementos de la matriz.

- I1 = {598.2462, 321.5867, 307.6711, 353.7495, 395.6412}
- a = 1976.8947
- I2 = {540.6501, 425.4231, 374.3273, 441.9021, 529.376}
- b = 2311.6787

En nuestro caso, al sumar los elementos de la matriz de costos ponderada para la Ruta A, obtenemos un total de 1976.89, mientras que la suma de los elementos de la matriz de costos ponderada para la Ruta B es de 2311.68. Estos resultados confirman que la Ruta A es la opción más eficiente, coincidiendo incluso con la recomendación de Google Maps.

Este enfoque de suma nos permite cuantificar y comparar de manera precisa los costos totales ponderados de ambas rutas, respaldando nuestra elección de la Ruta A como la preferida en función de los criterios y pesos asignados.

Para recordar: Mediante operaciones matriciales, podemos aplicar algoritmos de optimización para determinar la ruta más eficiente entre dos puntos. Esto desempeña un papel fundamental en la logística, donde minimizar la distancia, el tiempo, la velocidad y otros factores es esencial para la eficiencia operativa. En este contexto, las operaciones matriciales ofrecen un enfoque poderoso y versátil para analizar rutas y trayectorias en datos geoespaciales. Desde la representación estructurada hasta los cálculos y la optimización, estas herramientas permiten un análisis exhaustivo y fundamentado. Su aplicación en la **gestión y análisis de datos geoespaciales** puede generar información valiosa que, a su vez, contribuye a la toma de decisiones informadas y a la mejora de la eficiencia en una variedad de contextos relacionados con la movilidad y la planificación.



5.1.4 Visualización de datos geoespaciales en el plano cartesiano

La **visualización de datos geoespaciales** en el plano cartesiano es una etapa crucial en la comprensión y comunicación de información relacionada con ubicaciones geográficas. A medida que avanzamos en nuestro análisis de datos geoespaciales y exploramos las rutas y trayectorias utilizando operaciones matriciales, surge la necesidad de representar de manera efectiva estos datos para obtener una visión más completa y accesible.



El plano cartesiano, con su sistema de coordenadas bidimensional, proporciona un marco ideal para representar datos geoespaciales de manera intuitiva. En este contexto, cada punto en el plano cartesiano corresponde a una ubicación geográfica específica. A través de la asignación de coordenadas en los ejes x e y , podemos situar lugares, rutas y trayectorias con precisión.

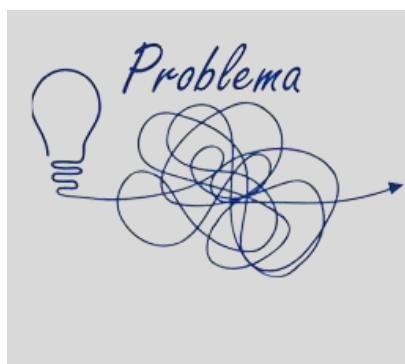
La **representación de datos geoespaciales** en el plano cartesiano no solo simplifica la visualización, sino que también facilita la comparación y el análisis de diferentes ubicaciones y rutas. Esto es particularmente valioso en aplicaciones como la planificación urbana, logística, navegación y análisis de datos geográficos, donde se requiere una representación gráfica clara y efectiva.

Una de las ventajas clave de la visualización en el plano cartesiano es la capacidad de superponer múltiples capas de información geográfica. Esto permite combinar datos de diversas fuentes y aplicar diferentes capas de análisis, lo que enriquece la comprensión de la situación geoespacial y facilita la toma de decisiones informadas.

En este contexto, la elección de símbolos, colores y escalas es fundamental para transmitir información de manera efectiva. La visualización en el plano cartesiano puede representar no solo ubicaciones y rutas, sino también datos relacionados, como densidad de tráfico, tiempo estimado de viaje, condiciones meteorológicas, puntos de interés y más. Esto agrega profundidad y contexto a la representación geoespacial, lo que es esencial para la toma de decisiones precisas.

Además, la visualización en el plano cartesiano permite la identificación de patrones, tendencias y anomalías en los datos geoespaciales. Al trazar ubicaciones y rutas en un gráfico, es más fácil reconocer relaciones espaciales y realizar análisis comparativos.

Imaginemos un ejemplo en el contexto de la gestión de flotas de vehículos, un tema relevante en análisis y gestión de datos. Supongamos que una empresa de logística necesita optimizar las rutas de sus camiones para realizar entregas a múltiples destinos en una ciudad. Utilizar el plano cartesiano para visualizar los datos geoespaciales puede ser fundamental para este análisis.



Consigna: La empresa de logística debe entregar mercancías a cinco clientes en una ciudad. Los puntos de entrega (clientes) se ubican en coordenadas geográficas en el plano cartesiano. Además, se dispone de información sobre las distancias entre estos puntos, las velocidades promedio en las carreteras y el tiempo estimado de viaje entre ellos.



El objetivo es determinar la ruta más eficiente para que el conductor de la flota pueda visitar a cada cliente y regresar al punto de partida minimizando el tiempo total de viaje. La empresa debe aprovechar al máximo sus recursos y reducir los costos operativos.

Resolución: Para abordar este problema, la empresa puede utilizar álgebra lineal y visualización en el plano cartesiano. Primero, representan cada ubicación de entrega como un punto en el plano, asignando coordenadas (x, y) a cada cliente. Luego, trazan las rutas posibles entre los puntos y calculan las distancias y tiempos de viaje utilizando los datos geoespaciales disponibles.

Al visualizar esta información en el plano cartesiano, la empresa puede ver las ubicaciones de los clientes y las rutas potenciales. Pueden identificar visualmente la ruta más corta y eficiente al observar las distancias entre los puntos y las velocidades promedio. Esto permite una toma de decisiones más informada para optimizar la entrega de mercancías. Además, al representar las rutas en el plano cartesiano, la empresa puede realizar análisis comparativos y ajustes en tiempo real si surgen cambios en las condiciones de tráfico o nuevas entregas. Esto es esencial para la gestión efectiva de la flota y la logística de la empresa.

Esto muestra cómo el álgebra lineal y la visualización son herramientas esenciales en la gestión y el análisis de datos en el campo de la logística y la gestión de flotas.

Con el avance en tu carrera, tendrás la oportunidad de explorar una amplia gama de herramientas y enfoques adicionales para abordar problemas similares, especialmente en materias correlativas a esta temática. Como recurso adicional, te ofrecemos un video que ilustra una posible solución para el desafío planteado en el problema anterior.

Descripción	Dirección URL
Problema de la ruta más corta	https://youtu.be/e6XzDIKwm5Q?si=-dVocMOQx75WtFF3



5.2 Procesamiento de imágenes

El **procesamiento de imágenes** es una disciplina fundamental en el ámbito del análisis y gestión de datos, que nos permite extraer información valiosa a partir de imágenes digitales. En esta sección, exploraremos cómo el álgebra lineal desempeña un papel esencial en el procesamiento de imágenes, brindándonos herramientas y técnicas poderosas para analizar, transformar y mejorar la información visual contenida en las imágenes.



El primer paso en el procesamiento de imágenes es comprender cómo se **representan las imágenes digitalmente**. En lugar de ser simples representaciones visuales, las imágenes se descomponen en una matriz de píxeles, donde cada píxel almacena información sobre su color, intensidad y posición en la imagen. Aquí, el álgebra lineal entra en juego al permitirnos

manipular estas matrices de píxeles y realizar cálculos para analizar la estructura y contenido de las imágenes.

Una vez que hemos representado una imagen como una matriz de píxeles, podemos aplicar una amplia variedad de **filtros y transformaciones a través de operaciones matriciales**. Esto incluye técnicas como suavizado, realce de bordes, mejora del contraste y más. Al utilizar el álgebra lineal, podemos definir matrices de filtro que actúan sobre la imagen original, lo que nos permite lograr efectos deseados en la imagen procesada.

La convolución es una operación fundamental en el procesamiento de imágenes que nos permite **detectar bordes y características relevantes en una imagen**. Al aplicar núcleos de convolución a la matriz de píxeles, podemos resaltar transiciones de intensidad, contornos y detalles en la imagen. Esta técnica es ampliamente utilizada en la detección de características, como rostros u objetos, y se basa en conceptos algebraicos que son esenciales en el análisis de imágenes.

La mejora del **contraste y el filtrado en imágenes** es otro campo en el que el álgebra lineal demuestra ser invaluable. Podemos diseñar matrices de filtrado para realzar áreas de interés, eliminar ruido o mejorar la calidad visual de una imagen. Estas técnicas permiten una manipulación precisa de la información de la imagen, contribuyendo a un análisis de datos más efectivo.

En síntesis, el procesamiento de imágenes se basa en la representación de imágenes como matrices de píxeles y el uso de operaciones matriciales para aplicar filtros, transformaciones y detectar características. El álgebra lineal proporciona la base teórica y práctica para estas aplicaciones, permitiendo a los profesionales de análisis y gestión de datos explorar y analizar datos visuales de manera efectiva.



En las siguientes secciones, profundizaremos en cada uno de estos conceptos, brindando una comprensión completa del procesamiento de imágenes en el contexto de nuestro curso.

5.2.1 Representación de imágenes como matrices de píxeles

Cuando nos adentramos en el mundo del procesamiento de imágenes, el primer concepto fundamental que debemos comprender es cómo se **representan las imágenes digitalmente**. Aunque percibimos las imágenes visualmente, en el ámbito digital, estas son desglosadas en matrices de píxeles. Esta representación matricial es la base sobre la cual construimos muchas de las técnicas de procesamiento de imágenes que utilizamos en el análisis y gestión de datos.

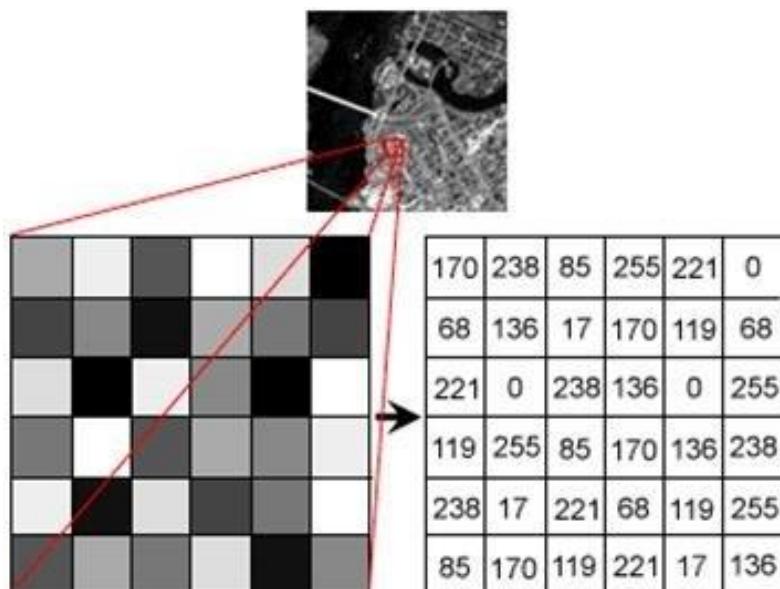


Cada entrada de esta matriz contiene información sobre el valor de intensidad del píxel en esa ubicación específica. En una imagen en escala de blanco y negro, generalmente se utiliza el valor 0 (cero) para representar el color negro y el valor 255 (o el valor máximo posible para un pixel en una imagen) para representar el color blanco. Los valores intermedios entre 0 y 255 se utilizan para representar diferentes tonos de gris. Este es un estándar común en el procesamiento de imágenes digitales y proporciona una representación clara y simple de las imágenes en blanco y negro.

Sin embargo, en algunos contextos, especialmente en programación y procesamiento de imágenes, es común utilizar una escala de 0 y 1 para

representar negro y blanco. En esta representación, 0 se usa para el color negro y 1 para el color blanco.

La elección entre 0-1 y 0-255 depende del contexto y los requisitos específicos de la aplicación. Ambas representaciones son válidas y pueden ser utilizadas según las necesidades de procesamiento de imágenes o visualización. La escala de 0-255 se prefiere a menudo en aplicaciones de mayor precisión debido a su mayor número de niveles de gris, lo que permite una representación más detallada de las imágenes en blanco y negro.



Aunque la escala de grises se puede calcular a través de números racionales, los píxeles de la imagen generalmente se cuantifican para almacenarlos como enteros sin signo, para reducir el almacenamiento y el cálculo necesarios.

Por ejemplo, las imágenes en escala de grises (como fotografías) destinadas a la visualización (tanto en pantalla como impresas) se almacenan comúnmente con 8 bits por píxel muestreado. Esta profundidad de píxeles permite registrar $2^8 = 256$ intensidades diferentes (es decir, sombras de grises). Este método simplifica el cálculo, ya que se puede acceder a cada muestra de píxeles individualmente como un byte completo.

Si se admite una elección de 0-255 para representar **intensidades en imágenes** en blanco y negro, y la profundidad de píxeles permite registrar 256 intensidades diferentes, **¿por qué no utilizamos hasta el 256?** ¿Qué razones podrían justificar esta elección en lugar de una escala de 0-256?



Pasemos a la resolución de una actividad para ejemplificar lo que estamos abordando.

Consigna: Tomando el logo de la Universidad Nacional de San Luis como punto de partida, convierte la imagen en una representación binaria en blanco y negro y proporciona la matriz correspondiente. Asegúrate de detallar el proceso utilizado para realizar esta conversión y explica el significado de los valores en la matriz resultante en el contexto de una imagen binaria.



Resolución: Para obtener el logo de la Universidad Nacional de San Luis, exploraremos recursos disponibles en Internet y utilizaremos una aplicación gratuita, en este caso, la aplicación DCODE. Esta herramienta nos permitirá realizar la conversión de la imagen en un formato binario, que consiste en la representación de la imagen mediante una secuencia de ceros y unos.

La dirección URL de la aplicación es <https://www.dcode.fr/imagen-binario>



The screenshot shows the DCODE application interface. At the top, there's a search bar with placeholder text "Search for a tool" and a dropdown menu for "SEARCH A TOOL ON DCODE BY KEYWORD". Below the search bar is a list of "Results" containing binary code snippets. To the right, the main interface shows a preview of a logo image being converted. The title "IMAGEN EN BINARIO O 1" is displayed above the preview. The preview shows a logo for "TOMÁ EL TIEMPO PARA REDESCUBRIRLA BONQUA NACIDA EN LAS SIERRAS DE CÓRDOBA". The main area is titled "CONVERSOR DE IMAGEN A BINARIO". It includes sections for "ANCHO DE LA IMAGEN" (set to "ANCHO PERSONALIZADO (RESOLUCIÓN) 50"), "UMBRAL BLANCO / NEGRO" (set to "50% GRIS (RECOMENDADO)", with "UMBRAL DE ACTIVACIÓN DE BLANCO A NEGRO (ENTRE 0 Y 100)" set to 25), and "CARÁCTERES BINARIOS" (set to "NEGRO = 0, BLANCO = 1"). On the right side, there's a sidebar with links like "Summary", "Conversor de imagen a binario", and "Similar pages" which include "Grayscale Image", "File Creation", "Image in Numbers", and "Binary Code".

La aplicación DCODE ofrece la opción de asignar valores binarios a los colores presentes en una imagen. En este caso, por defecto, utiliza el valor 0 para el color negro y 1 para el blanco, lo que coincide con la convención comúnmente utilizada en imágenes binarias.

Además, la aplicación propone un valor de "50% gris (recomendado)" que es especialmente útil para simplificar la imagen y asegurarse de que los detalles esenciales se mantengan visibles. Esto implica que los tonos de gris en la imagen original se traducirán a una combinación equitativa de ceros y unos en la representación binaria, lo que facilita la identificación de elementos clave.

DCODE también establece de manera predeterminada una resolución recomendada de 50, lo que puede ayudar a mantener un equilibrio entre la claridad de la imagen y el tamaño del archivo resultante. Esta configuración es adecuada para muchas aplicaciones y garantiza una representación efectiva de la imagen en blanco y negro.

Para nuestra actividad, el resultado fue el siguiente:



Cuando convertimos una imagen a blanco y negro utilizando una codificación binaria con 0 y 1, es importante **comprender cómo se manejan los colores en este proceso**. En este método, se toma en cuenta la intensidad de luminancia de cada píxel de la imagen original para decidir si se asigna el valor 0 (negro) o 1 (blanco) al píxel correspondiente en la versión en blanco y negro. Los colores más oscuros, como el negro, se representan con 0, mientras que los colores más claros, como el blanco, se representan con 1. Sin embargo, los **colores intermedios**, como el amarillo o el celeste, pueden presentar un desafío en esta conversión. Si un color no es ni completamente negro ni completamente blanco, la decisión sobre si se le asigna 0 o 1 dependerá de un umbral o porcentaje específico de intensidad de luminancia. Por ejemplo, si se establece un **umbral del 50%**, los colores con una intensidad de luminancia por encima de ese umbral se considerarán como blanco, mientras que los colores con una intensidad por debajo de ese umbral se considerarán como negro.



Esta metodología simplifica el proceso de conversión y, en ocasiones, puede resultar en una pérdida de información de color y matices, ya que los colores cercanos al umbral se representan de manera uniforme en la imagen en blanco y negro resultante. Por lo tanto, **la elección del umbral es un aspecto importante en la conversión de imágenes a blanco y negro**, y puede variar según los objetivos y requisitos específicos de la aplicación.

¿Cuál es el **criterio** utilizado para determinar si se asigna el color negro o blanco en el caso en que una **cuadrícula no esté completamente ocupada** por una imagen en colores, sino que contiene un porcentaje de ocupación?

El **criterio para asignar un color** (negro o blanco) a una cuadrícula que no está completamente ocupada por una imagen en colores generalmente se basa en el **porcentaje de ocupación de esa cuadrícula**. Es decir, se considera cuánto de la cuadrícula está ocupado por la imagen en comparación con cuánto está vacío. Si el porcentaje de ocupación supera un umbral predefinido, se asigna un valor que representa el color negro, mientras que si el porcentaje de ocupación está por debajo de ese umbral, se asigna un valor que representa el color blanco.

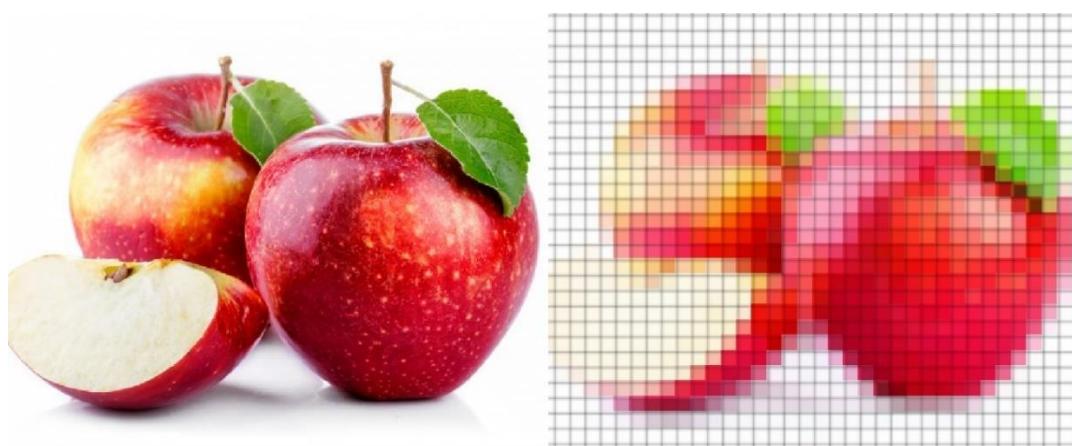


El umbral específico puede variar según la aplicación y los requisitos. Por

ejemplo, si se establece un umbral del 50%, se considerará que una cuadrícula está ocupada por la imagen si más del 50% de su área está cubierto por píxeles de la imagen. En ese caso, se asignaría el valor que representa el color negro. Si el porcentaje de ocupación es inferior al 50%, se asignaría el valor que representa el color blanco.

La elección del umbral depende de la tolerancia deseada para definir qué se considera como ocupación de la cuadrícula y qué se considera como vacío. En la práctica, este umbral puede ajustarse según las necesidades de la aplicación y la naturaleza de la imagen, permitiendo cierta flexibilidad en la conversión a escala de blanco y negro.

En imágenes a color, se utilizan tres canales de color, y cada canal tiene su propia matriz de intensidades. Para una imagen en color, generalmente se utilizan tres canales de color (rojo, verde y azul) para representar la intensidad de cada color en un píxel.



La clave para comprender esta representación radica en ver la imagen como una **matriz bidimensional de píxeles**. En esta matriz, cada elemento representa un píxel individual. Por ejemplo, si tenemos una imagen de 1000x1000 píxeles, esto se traduce en una matriz de 1000 filas y 1000 columnas.

Para obtener resultados visualmente aceptables, es necesario (y casi suficiente) proporcionar varias muestras (canales de color) para cada píxel, que se interpretan como coordenadas en algún espacio de color. Dependiendo del uso, una imagen a color se puede representar usando diferentes tipos de modelos, como por ejemplo:

- [rojo, verde, azul] o RGB (por sus siglas en inglés)
- [cian, magenta, amarillo, negro] o CMYK (por sus siglas en inglés)
- [matiz, saturación, intensidad] o HSI (por sus siglas en inglés)

Por lo tanto, diremos que una imagen a color es una matriz $A \in R^{m \times n \times c}$, donde m representa el largo de la imagen, n el ancho de la imagen y c son los canales: rojo (R), verde (G) y azul (B). La imagen a color está formada por 3 matrices de tamaño $m \times n$. Estas matrices son A_r (canal rojo), A_g (canal verde) y A_b (canal azul). Es decir, $A = \{A_r, A_g, A_b\}$. Por consiguiente, el pixel $A(i, j, w)$ representa la posición (i, j) de la imagen en el canal w .

Columna			
0	1	2	
0	.392	.482	.576
1	.478	.63	.169 .263 .376
2	.580	.79	.263 .44 .306 .376 .451
R	G	B	

La **representación de imágenes como matrices de píxeles** es fundamental para aplicar conceptos de álgebra lineal en el procesamiento de imágenes. Permite que cada píxel sea tratado como un elemento de una matriz, lo que a su vez nos habilita para realizar cálculos y operaciones matriciales para analizar y modificar la imagen.

Esta representación no solo se aplica a imágenes estáticas, sino que también se extiende a secuencias de imágenes o video, donde cada fotograma se convierte en una matriz individual en una secuencia. Entender cómo se representa una imagen como una matriz de píxeles es el primer paso en el procesamiento de imágenes y sienta las bases para técnicas posteriores como filtros, transformaciones y análisis de características.

5.2.2 Aplicación de filtros y transformaciones en imágenes mediante operaciones matriciales

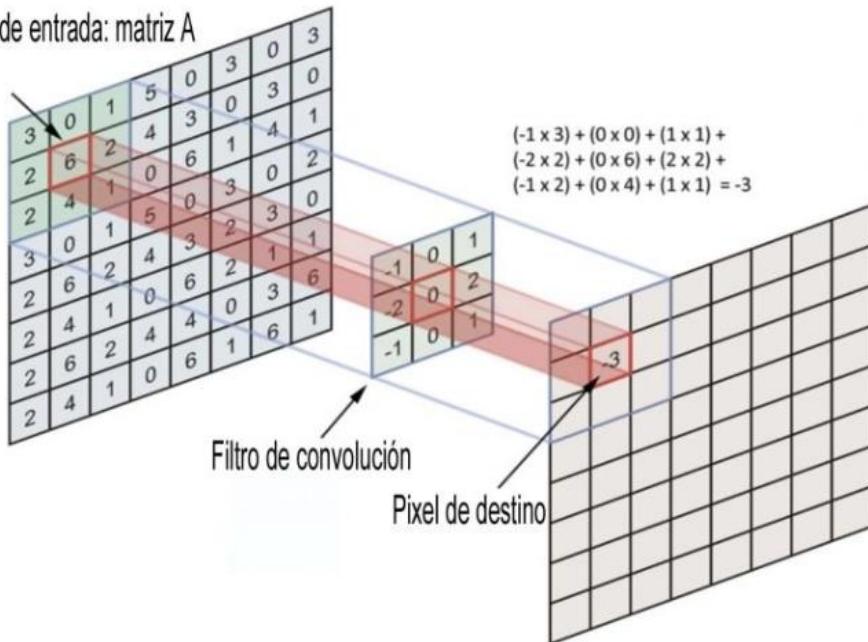
Una vez que comprendemos cómo se representan las imágenes mediante matrices de píxeles, es fundamental explorar cómo el álgebra lineal desempeña un papel central en el procesamiento de imágenes. Esta sección se centra en la aplicación de filtros y transformaciones en imágenes mediante operaciones matriciales, mostrando cómo las técnicas matriciales pueden ser utilizadas para modificar y mejorar la información visual contenida en las imágenes.

Los **filtros y transformaciones** son herramientas esenciales en el procesamiento de imágenes, permitiéndonos modificar características específicas de una imagen. Estos filtros pueden ser diseñados utilizando matrices que actúan como **núcleos de convolución**. Los núcleos de convolución son matrices que especifican cómo los píxeles vecinos contribuyen al valor de un píxel en la imagen procesada.

Un ejemplo común es el **filtro de suavizado**, que se emplea para reducir el ruido en una imagen. Este filtro se basa en la operación de promedio, donde el valor de cada píxel en la imagen suavizada se calcula promediando los valores de los píxeles circundantes en la imagen original. El promedio se realiza utilizando una **matriz de convolución** que refleja esta operación matricial.



Imagen de entrada: matriz A



La **matriz de convolución** se la suele llamar ***kernel*** en el contexto del procesamiento de imágenes y visión por computadora. La razón principal es simplificar y abreviar la terminología. Aunque el término **matriz de convolución** describe con precisión lo que es, ***kernel*** es una abreviatura comúnmente aceptada que se ha vuelto estándar en la jerga técnica. Básicamente la elección de la palabra ***kernel*** proviene de la idea de que esta matriz actúa como un núcleo o un filtro que se aplica para procesar la imagen. El ***kernel*** define cómo se realiza la operación de **convolución** y determina cómo se modifica la imagen original para obtener la imagen procesada.



El **realce de bordes** es otra aplicación crucial en el procesamiento de imágenes. Los bordes representan transiciones abruptas en la intensidad de la imagen y son fundamentales para identificar características visuales en una imagen. Para realizar los bordes, se utilizan núcleos de convolución que destacan las diferencias de intensidad entre píxeles vecinos. Este proceso es especialmente útil en aplicaciones como la detección de bordes de objetos en imágenes médicas o la identificación de objetos en imágenes de visión por computadora.

Otro aspecto importante del procesamiento de imágenes es la **mejora del contraste y la calidad visual**. Mediante operaciones matriciales, es posible diseñar filtros que resalten áreas de interés, aclaren u oscurezcan regiones específicas y ajusten el contraste global de la imagen. Estas técnicas permiten una manipulación precisa de la información visual, lo que es esencial en aplicaciones como la restauración de imágenes antiguas o la mejora de imágenes médicas para diagnóstico.

¿Cómo se lleva a cabo la operación de convolución?

Cuando aplicamos la operación de **convolución** a una matriz de partida (de orden $m \times n$) utilizando una matriz de convolución (de orden $r \times r$), seguimos los siguientes pasos:

01

Coloca la matriz de convolución (kernel) de tamaño $r \times r$ en la posición superior izquierda de la matriz de partida (la matriz más grande de tamaño $m \times n$). Esto alinea la esquina superior izquierda del kernel con el primer píxel de la matriz de partida.

02

Realiza una multiplicación elemento por elemento entre los valores de la matriz de partida cubiertos por el kernel y los valores del kernel. Estos productos se suman para obtener un solo valor que representará el resultado de la convolución para esa posición en la matriz de salida.

03

Mueve el kernel una posición a la derecha a lo largo de la fila superior de la matriz de partida y repite el proceso de multiplicación y suma para obtener un nuevo valor en la matriz de salida.

04

Continúa moviendo el kernel hacia la derecha a lo largo de la fila superior de la matriz de partida hasta que hayas calculado los valores para todas las posiciones en esa fila.

05

Luego, mueve el kernel una fila hacia abajo y comienza nuevamente desde la izquierda de la matriz de partida, repitiendo el proceso para calcular los valores en la fila siguiente de la matriz de salida.

Repite estos pasos hasta que hayas calculado los valores de convolución para todas las posiciones en la matriz de salida, que tendrá un tamaño menor que la matriz de partida debido a la aplicación de la convolución.

El resultado es una nueva matriz, que es la matriz de salida de la convolución. Esta nueva matriz tendrá dimensiones $(m - r + 1) \times (n - r + 1)$, ya que la aplicación del kernel reduce el tamaño de la matriz original.

Capa de partida

0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0

Capa convolucionada

1	4	3	4	1
1	2	4	3	3
1	2	3	4	1
1	3	3	1	1
3	3	1	1	0

Filtro utilizado

Convolución

Los criterios a tener en cuenta en este proceso incluyen la elección del tamaño y la forma del kernel, así como la estrategia para tratar los bordes de la matriz de partida (por ejemplo, mediante la extensión de ceros o el uso de valores repetidos). La selección del kernel y la estrategia de manejo de bordes dependerán de la tarea específica de procesamiento de imágenes que estés realizando.

Las operaciones matriciales en el procesamiento de imágenes no solo son aplicables a imágenes estáticas, sino también a secuencias de imágenes o

video. Esto es especialmente relevante en campos como la vigilancia por video, el procesamiento de señales y la visión por computadora.

Es cierto que, en la **operación de convolución**, las matrices de entrada y el kernel (matriz de convolución) suelen contener valores que son 0 y 1. Sin embargo, los valores en la **matriz de salida** (resultado de la convolución) no están limitados a 0 o 1, y pueden ser mayores o menores a 1. Esto se debe a que la operación de convolución implica una combinación ponderada de los valores de la matriz de entrada y el kernel en cada paso, y el resultado es una suma ponderada de estos productos. Cada elemento en la matriz de salida es el resultado de multiplicar el kernel por una región correspondiente de la matriz de entrada y luego sumar estos productos. Por lo tanto, es posible que el resultado de esta suma ponderada sea mayor o menor que 1, dependiendo de los valores en el kernel y en la matriz de entrada.



El **kernel actúa como un filtro que convoluciona** con la matriz de entrada y, en función de sus valores, puede amplificar o reducir ciertas características de la imagen. Por lo tanto, es común que la matriz de salida contenga valores que no están limitados a 0 o 1, y estos valores representarán las características de la imagen procesada de manera más detallada y con mayor contraste.

La interpretación de una matriz de salida generada por una operación de convolución depende de su contexto y del propósito de la operación. Aunque los valores de la matriz de salida pueden variar y no están limitados a 0 y 1, aún se pueden analizar y comprender de manera significativa. Aquí hay algunas consideraciones para interpretar una matriz de salida de convolución:

- 1 Amplitud y signo:** Los valores en la matriz de salida pueden ser mayores o menores que 1. Un valor mayor puede indicar una amplificación de la característica en comparación con la imagen de entrada, mientras que un valor menor puede indicar una atenuación. El signo puede indicar si la característica se oscurece (valor negativo) o se aclara (valor positivo).
- 2 Características relevantes:** Analiza los valores en la matriz de salida para identificar las características relevantes resaltadas por el kernel. Por ejemplo, en la detección de bordes, los valores altos pueden indicar bordes nítidos.
- 3 Escalas de grises:** Si estás procesando una imagen en escala de grises, los valores en la matriz de salida representan diferentes niveles de gris. Valores más bajos pueden corresponder a áreas más oscuras, y valores más altos a áreas más claras.
- 4 Thresholding:** Puedes aplicar un umbral (threshold) a la matriz de salida para binarizarla nuevamente si deseas convertir los valores en blanco y negro. Esto implica establecer un valor umbral y asignar un color o nivel de gris a los valores por encima o por debajo de ese umbral.
- 5 Visualización:** La mejor manera de entender la interpretación de la matriz de salida es visualizarla. Puedes mostrar la imagen de salida generada por la convolución para apreciar las características realizadas o atenuadas.

En el ejemplo, se utilizó la siguiente matriz de convolución:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es comúnmente conocida como un **filtro de paso alto o kernel de realce de bordes**. Los valores 1 en esta matriz indican que se resaltarán los cambios bruscos en la intensidad de los píxeles, como los bordes en una imagen, mientras que los valores 0 indican que no se aplicará ningún cambio en esa ubicación. Esto es, los valores 1 en el centro y alrededor del núcleo indican que se da un mayor peso a los píxeles cercanos en la imagen de entrada. Significa, además, que el filtro buscará diferencias abruptas en la intensidad de los píxeles adyacentes, como las que se encuentran en los bordes de los objetos.



En tanto, los valores 0 en el centro y alrededor del núcleo indican que no se consideran los cambios graduales en la intensidad de los píxeles en la operación de convolución. Esto permite que el filtro se centre en resaltar los cambios bruscos y detalles finos.

Los **kernels** en operaciones de convolución no necesariamente deben ser matrices cuadradas. Pueden tener **diferentes dimensiones**, pero es común que tengan dimensiones pequeñas y generalmente son matrices cuadradas o rectangulares de tamaños impares para facilitar el cálculo.



Las dimensiones más comunes para **kernels** suelen ser 3×3 y 5×5 , aunque también se utilizan 7×7 , 9×9 y otras dimensiones dependiendo de la aplicación específica. Las matrices cuadradas (por ejemplo, 3×3 y 5×5) son las más populares porque son fáciles de trabajar y proporcionan resultados efectivos en el procesamiento de imágenes.

El tamaño del **kernel** tiene un impacto en el efecto que tiene en la imagen. **Kernels más pequeños** tienden a realizar **operaciones locales**, mientras que los **kernels más grandes** pueden **capturar patrones y características más grandes en la imagen**. La elección del tamaño del **kernel** depende de la tarea que se esté realizando y de los detalles que se deseen capturar o resaltar en la imagen.

Veamos algunos ejemplos de lo que hacen los kernels.



Kernel de suavizado (Filtro promedio)

$$K_S = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Este kernel se utiliza para suavizar una imagen. Cada píxel de la imagen de salida es el promedio ponderado de los píxeles vecinos en la imagen de entrada. Reduce el ruido y las pequeñas imperfecciones.



Kernel de detección de bordes (Filtro Sobel Horizontal)

$$K_{SH} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este kernel detecta bordes horizontales en una imagen. Acentúa las diferencias de intensidad entre píxeles vecinos en la dirección horizontal. Los valores

negativos representan bordes oscuros y los valores positivos, bordes claros.

Los filtros "Sobel" son operadores de convolución que se utilizan comúnmente en el procesamiento de imágenes para resaltar bordes y cambios bruscos en la intensidad de los píxeles en una imagen. Estos filtros llevan el nombre de sus inventores, Irwin Sobel y Gary Feldman, quienes desarrollaron estos operadores en la década de 1960.



Kernel de detección de bordes (Filtro Sobel Vertical)

$$K_{SV} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Este kernel detecta bordes verticales en una imagen. Acentúa las diferencias de intensidad entre píxeles vecinos en la dirección vertical. Los valores negativos representan bordes oscuros y los valores positivos, bordes claros.



Kernel de realce de características (Filtro Laplaciano)

$$K_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Este kernel se utiliza para realzar las características en una imagen, como esquinas y detalles finos. Resalta áreas de alta frecuencia y puede hacer que los bordes sean más visibles. Los valores negativos representan áreas oscuras y los valores positivos, áreas claras.



Kernel de desenfoque (Filtro Gaussiano)

$$K_G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Este kernel se utiliza para aplicar un efecto de desenfoque o suavizado a una imagen. Reduce las diferencias bruscas en la intensidad de los píxeles al promediar los valores de los píxeles vecinos. El resultado es una imagen con menos detalles y menos ruido.

Cada uno de estos kernels se utiliza en operaciones de convolución para lograr efectos específicos en el procesamiento de imágenes. Los valores en el kernel determinan cómo se transforma la imagen original. También se utiliza para identificar puntos de interés o características en una imagen. Estos puntos de interés pueden incluir esquinas, puntos de alta textura o regiones de la imagen que tienen propiedades distintivas. La detección de características es esencial en campos como la visión por computadora, donde se aplican al reconocimiento de patrones, seguimiento de objetos y creación de mapas tridimensionales a partir de imágenes estereoscópicas.

En el análisis y gestión de datos visuales, la detección de bordes y características mediante convolución desempeña un papel crucial. En campos tan diversos como la medicina, la robótica, la geolocalización y la visión por computadora, estas técnicas son fundamentales para identificar patrones y características relevantes en imágenes.

A modo de síntesis: El uso de **matrices y operaciones matriciales** en áreas como el **procesamiento de imágenes y el análisis de datos de movimiento** plantea interesantes paralelismos y diferencias con las operaciones matriciales en el álgebra lineal tradicional.



Por un lado, en el ámbito del procesamiento de imágenes, las **matrices de convolución** se utilizan para aplicar filtros y transformaciones a una imagen. Aunque visualmente **puede parecer similar a la multiplicación de matrices**, la convolución es una operación específica que involucra la superposición de un "kernel" o matriz de convolución en una matriz de imagen y la acumulación de productos en puntos específicos. Esta técnica es fundamental para aplicar efectos como el desenfoque, la detección de bordes y el realce de detalles en las imágenes.

Si bien el uso de **matrices y operaciones matriciales** en campos como el procesamiento de imágenes y el análisis de datos de movimiento comparte algunos conceptos fundamentales con el **álgebra lineal tradicional**, también introduce elementos específicos y técnicas adaptadas a sus aplicaciones particulares. La reflexión sobre estas similitudes y diferencias puede enriquecer nuestra comprensión de cómo las matemáticas son una herramienta poderosa y versátil en una variedad de disciplinas.

5.3 Análisis de datos de movimiento

El **análisis de datos de movimiento** es una disciplina fundamental en el campo de las ciencias y para la Licenciatura en análisis y gestión de datos. Nos permite entender y cuantificar el comportamiento de objetos en movimiento, desde partículas subatómicas hasta cuerpos celestes en el universo. Este análisis se basa en una sólida base matemática, en particular en el álgebra lineal, que nos brinda las herramientas necesarias para representar y comprender estos fenómenos.



En esta sección, exploraremos cómo representar **datos de movimiento** utilizando matrices y vectores, lo cual nos proporciona una forma estructurada y eficiente de describir trayectorias y cambios en la posición de objetos en movimiento. A través de cálculos de velocidades y aceleraciones, podremos cuantificar el comportamiento de estos objetos y analizar cómo cambian con el tiempo.

Además, examinaremos cómo estas **técnicas de análisis de movimiento** tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas, desde la investigación científica hasta el seguimiento de objetos en la industria y el análisis de movimientos en campos tan variados como la biología, la física, la robótica y más. El álgebra lineal se convierte en una herramienta esencial para comprender y resolver problemas relacionados con el movimiento, lo que lo convierte en un elemento esencial en el arsenal de un analista de datos y científico.

A medida que avanzamos en esta sección, exploraremos ejemplos concretos, ejercicios y aplicaciones prácticas que ilustrarán cómo el álgebra lineal puede ayudarnos a comprender y analizar el mundo en movimiento que nos rodea.

5.3.1 Representación de datos de movimiento con matrices y vectores

Imaginemos un escenario simple: un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta. Para **describir su movimiento**, necesitamos una manera de representar su posición en cada instante de tiempo. Aquí es donde entran en juego las matrices y vectores.

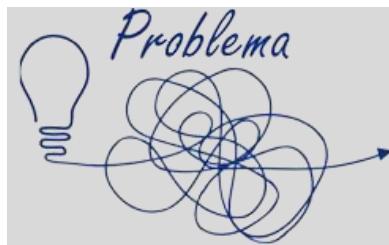


Cada punto en el espacio se puede representar mediante un vector tridimensional. En el caso de un automóvil en una carretera recta, podríamos utilizar un vector bidimensional, donde una componente representaría la posición a lo largo de la carretera y la otra componente sería el tiempo. Al combinar estos vectores a lo largo del tiempo, obtenemos una matriz que describe la trayectoria del automóvil.

Este enfoque no se limita únicamente a vehículos en una carretera. Su versatilidad le permite extenderse a objetos en movimiento en dos o tres dimensiones, lo que resulta fundamental para representar una amplia variedad de situaciones. A medida que avances en tu formación profesional, tendrás la oportunidad de explorar con mayor profundidad estos conceptos en cursos específicos dentro de la carrera. El análisis de datos de movimiento se vuelve una herramienta valiosa en campos como la logística, el seguimiento de objetos, la gestión de flotas, el análisis de tráfico, y muchas otras aplicaciones del mundo real.

En nuestro caso, exploraremos cómo crear estas matrices y vectores para describir trayectorias y cambios de posición en objetos en movimiento. También examinaremos cómo estas representaciones matriciales y vectoriales se extienden a casos más complejos, como el seguimiento de múltiples objetos o el análisis de datos de movimiento en tiempo real.

Pasemos a la resolución de un problema básico que ponga en juego los conceptos centrales de esta sección.



Consigna: Una empresa de logística realiza entregas a diferentes destinos desde su sede principal. Además, utiliza tecnología GPS para rastrear las entregas y obtener información detallada sobre la posición y el tiempo de llegada de los conductores a los puntos de entrega.

Analiza y fundamenta si hubo retrasos significativos, áreas de congestión o problemas recurrentes en la entrega de los productos a destinos específicos. Los datos históricos promedio registrados para entregas en ubicaciones específicas son los siguientes:

Punto	Lugar	Coordenadas geográficas	Tiempo promedio de trámite (minutos)
A	Droguería LAM SRL	(-32.40677,-63.24809)	40
B	Centro de Atención Primaria de Salud Mental	(-32.40936,-6323343)	35
C	Clínica Privada de Especialidades	(-32.41454,-6324600)	50
D	Clínica Fusavim	(-32.40831,-63.24077)	45
E	Clínica de los camioneros	(-32.39892,-63.25637)	50
F	Sanatorio Cruz Azul	(-32.40715,-63.24445)	30

Distancias y tiempo promedio que demanda el recorrido:

	A	B	C	D	E	F
A	0 min 0 km	6 min 2.5 km	3 min 1.2 km	5 min 1.6 km	4 min 1.5 km	3 min 1.1 km
B	6 min 2 km	0 min 0 km	6 min 1.7 km	3 min 1 km	9 min 3.5 km	5 min 1.5 km
C	6 min 1.6 km	8 min 2.2 km	0 min 0 km	6 min 1.6 km	7 min 2.6 km	6 min 1.6 km
D	3 min 1 km	4 min 1.4 km	5 min 1.3 km	0 min 0 km	7 min 2.5 km	2 min 0.5 km
E	4 min 1.3 km	8 min 3.3 km	6 min 2.3 km	8 min 3 km	0 min 0 km	5 min 1.9 km
F	2 min 0.5 km	6 min 1.9 km	3 min 1.1 km	5 min 1.1 km	5 min 2 km	0 min 0 km

Los datos registrados para el conductor con el número de registro interno M2837 son los siguientes:

Punto	Coordenadas (Latitud, Longitud)	Hora de llegada	Hora de salida
Inicio	(-32.40677,- 63.24809)	8 h 03'	8 h 35'
B	(-32.40936,- 63.23343)	8 h 50'	9 h 20'
E	(-32.39892,- 63.25637)	9 h 30'	10 h 30'
D	(-32.40831,- 63.24077)	10 h 42'	11 h 32'
C	(-32.41454,- 63.24600)	11 h 47'	12 h 37'
F	(-32.40715,- 63.24445)	12 h 40'	13 h 10'
Fin	(-32.40677,- 63.24809)	13 h 15'	13 h 30'

Resolución: Para analizar la posibilidad de retrasos significativos, áreas de congestión o problemas recurrentes en la entrega de productos a destinos específicos, debemos comenzar examinando cuidadosamente los datos históricos proporcionados. Estos datos comprenden dos conjuntos principales: los datos promedio registrados para entregas en ubicaciones específicas y los datos específicos de un conductor identificado con el número de registro interno M2837.

Para dar inicio a este proceso analítico, es crucial identificar y definir las variables clave en este problema. En este caso, estas variables incluyen los destinos, sus coordenadas geográficas, el tiempo de llegada, el tiempo de salida y, también, la velocidad promedio alcanzada por el conductor. La representación coherente de estas variables se lleva a cabo mediante la creación de matrices de datos. Por ejemplo, cada punto de entrega se convierte en una fila de una matriz, y los

momentos de tiempo de llegada y salida se organizan en columnas correspondientes, lo que resulta en una matriz de datos de entregas.

Una vez que tengamos estas matrices, estamos en posición de emplear operaciones matriciales para analizar los datos. Esto incluye cálculos de diferencias de tiempo, distancias entre ubicaciones y la obtención de velocidades promedio utilizando estas matrices. A través de estas operaciones, buscamos patrones y tendencias que puedan indicar retrasos notables, áreas de congestión o comportamientos recurrentes en las entregas. La identificación de valores atípicos o áreas con tiempos de llegada inusualmente extensos puede servir como punto de partida para investigaciones adicionales.

Finalmente, para lograr un análisis completo de los datos, debemos proporcionar una explicación sólida de los resultados. En otras palabras, debemos responder preguntas fundamentales, como: ¿Qué causó ciertos retrasos? ¿En qué áreas de la ciudad se experimentan con mayor frecuencia problemas de congestión? ¿Se han identificado problemas recurrentes en destinos específicos?

Para llevar a cabo estos análisis, utilizamos las matrices T (que contiene los tiempos en minutos necesarios para recorrer entre los puntos de entrega) y D (que almacena las distancias en kilómetros entre estos puntos). Es importante destacar que estos valores varían dependiendo de la dirección y sentido de las calles de la ciudad, lo que contribuye a la complejidad del problema. También tenemos la matriz V (que contiene la velocidad promedio en km/h) que deducimos de las dos anteriores. A continuación, presentamos las tres matrices mencionadas para una referencia visual más clara.

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 6 & 3 & 9 & 5 \\ 6 & 8 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2.5 & 1.2 & 1.6 & 1.5 & 1.1 \\ 2 & 0 & 1.7 & 1 & 3.5 & 1.5 \\ 1.6 & 2.2 & 0 & 1.6 & 2.6 & 1.6 \\ 1 & 1.4 & 1.3 & 0 & 2.5 & 0.5 \\ 1.3 & 3.3 & 2.3 & 3 & 0 & 1.9 \\ 0.5 & 1.9 & 1.1 & 1.1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 25 & 24 & 19.2 & 22.5 & 22 \\ 20 & 0 & 17 & 20 & 23.33 & 18 \\ 16 & 16.5 & 0 & 16 & 22.86 & 16 \\ 20 & 21 & 15.6 & 0 & 21.43 & 15 \\ 19.5 & 24.75 & 23 & 22.5 & 0 & 22.8 \\ 15 & 19 & 22 & 13.2 & 24 & 0 \end{vmatrix}$$

Este enfoque analítico no solo demuestra la aplicación efectiva de conceptos matriciales para el análisis de datos de movimiento, especialmente en el contexto de entregas y logística, sino que también subraya la utilidad y relevancia del álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real. Además, invita a discusiones sobre cómo las operaciones matriciales pueden optimizar procesos logísticos y respaldar la toma de decisiones informadas.

Teniendo la matriz T o D podemos encontrar el camino mínimo que comienza en el punto A, recorre todos los puntos y regresa a A. Existen algoritmos que se pueden utilizar, como el algoritmo de TSP (*Traveling Salesman Problem*, Problema del Viajante de Comercio). El TSP busca la ruta más corta que visita cada punto exactamente una vez y luego regresa al punto de partida. De todos modos, no es el objetivo de esta unidad abordar este tipo de algoritmo y se puede recurrir a Inteligencia Artificial o utilizar software de optimización o programación que esté diseñado para resolver problemas de TSP. Estas herramientas pueden encontrar soluciones aproximadas o incluso óptimas para el problema.

Es importante destacar que encontrar la solución exacta para el TSP (visitar todos los puntos exactamente una vez) en matrices más grandes puede ser un problema computacionalmente costoso y requerir mucho tiempo de procesamiento. Por lo tanto, en la práctica, es común utilizar algoritmos de aproximación para obtener soluciones cercanas a la óptima. En nuestro caso, podemos encontrar el camino mínimo que pasa por todos los puntos (A, B, C, D, E, F) y regresa a A, calculando el recorrido más corto en base a la matriz de distancias proporcionada. En nuestro caso, podríamos tener los siguientes caminos:

$$A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$$

$$\begin{aligned} \text{Distancia a recorrer} &= 1.2 \text{ km} + 1.6 \text{ km} + 1.1 \text{ km} + 1.4 \text{ km} + 3.5 \text{ km} + 1.3 \text{ km} \\ &= 10.1 \text{ km} \end{aligned}$$

$$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A.$$

$$\begin{aligned} \text{Distancia a recorrer} &= 1.2 \text{ km} + 1.6 \text{ km} + 0.5 \text{ km} + 1.9 \text{ km} + 3.5 \text{ km} + 1.3 \text{ km} \\ &= 10 \text{ km} \end{aligned}$$

La distancia total recorrida es aproximadamente 10 km, visitando cada punto exactamente una vez y regresando al punto de partida (A).

Ahora procedamos a crear una tabla que contenga los datos del conductor identificado con el número de registro interno M2837. Esto nos permitirá calcular los tiempos de permanencia en cada ubicación, el tiempo de viaje y la velocidad promedio durante cada tramo. Estos valores están presentados en la siguiente tabla. Aunque podríamos representarlos como una matriz sin las referencias, en este caso, las referencias son esenciales ya que indican la ruta elegida por el conductor.

Punto	Hora de llegada	Hora de salida	Permanencia (minutos)	Tiempo de viaje (horas)	Tiempo de viaje (minutos)	Velocidad promedio (km/h)
Inicio	8.0500	8.5833	32			
B	8.3333	9.3333	30	0.2500	15	10
E	9.5000	10.5000	60	0.1667	10	21
D	10.7000	11.5333	50	0.2000	12	15
C	11.7833	12.6167	50	0.2500	15	5.2
F	12.6667	13.1667	30	0.0500	3	32
Fin	13.2500	13.5000	15	0.0833	5	6

Podemos advertir que el recorrido realizado fue: A → B → E → D → C → F → A. Con la matriz de distancias anteriores podemos establecer la distancia total recorrida. En este caso resulta:

$$\text{Distancia recorrida} = 2.5 \text{ km} + 3.5 \text{ km} + 3 \text{ km} + 1.3 \text{ km} + 1.6 \text{ km} + 0.5 \text{ km} = 12.4 \text{ km}$$

Observamos que la distancia elegida es ligeramente superior a la mínima posible en esta situación. Para analizar el desempeño del conductor con mayor detalle, podemos crear una matriz de velocidades (VC). En este caso, consideraremos únicamente un recorrido, ya que si tuviéramos múltiples trayectos, podríamos calcular las velocidades promedio para cada uno de ellos. En la matriz de velocidades, asignamos el valor 0 a los trayectos para los cuales no disponemos de información, lo que significa que no podemos calcular la velocidad en esos tramos.

$$VC = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 5.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Al comparar esta matriz de velocidades (VC) con los datos promedios de la empresa, representados en la matriz V, es evidente que en la mayoría de los trayectos, a excepción de uno, la velocidad del conductor ha sido significativamente más lenta. Esta discrepancia plantea interrogantes sobre las razones detrás de los registros de velocidad que hemos observado. Es esencial investigar las causas subyacentes de esta diferencia para comprender por qué el conductor se desvió de las velocidades promedio establecidas por la empresa en la mayoría de los tramos del recorrido.

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 25 & 24 & 19.2 & 22.5 & 22 \\ 20 & 0 & 17 & 20 & 23.33 & 18 \\ 16 & 16.5 & 0 & 16 & 22.86 & 16 \\ 20 & 21 & 15.6 & 0 & 21.43 & 15 \\ 19.5 & 24.75 & 23 & 22.5 & 0 & 22.8 \\ 15 & 19 & 22 & 13.2 & 24 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente, nos queda por analizar los tiempos de permanencia en cada uno de los lugares, comparándolos con los datos promedios que tiene registrado la empresa, o datos esperados.

Punto	Tiempo promedio de trámite (minutos)	Tiempo insumido por el conductor (minutos)
A	40	32
B	35	30
C	50	50
D	45	50
E	50	60
F	30	30

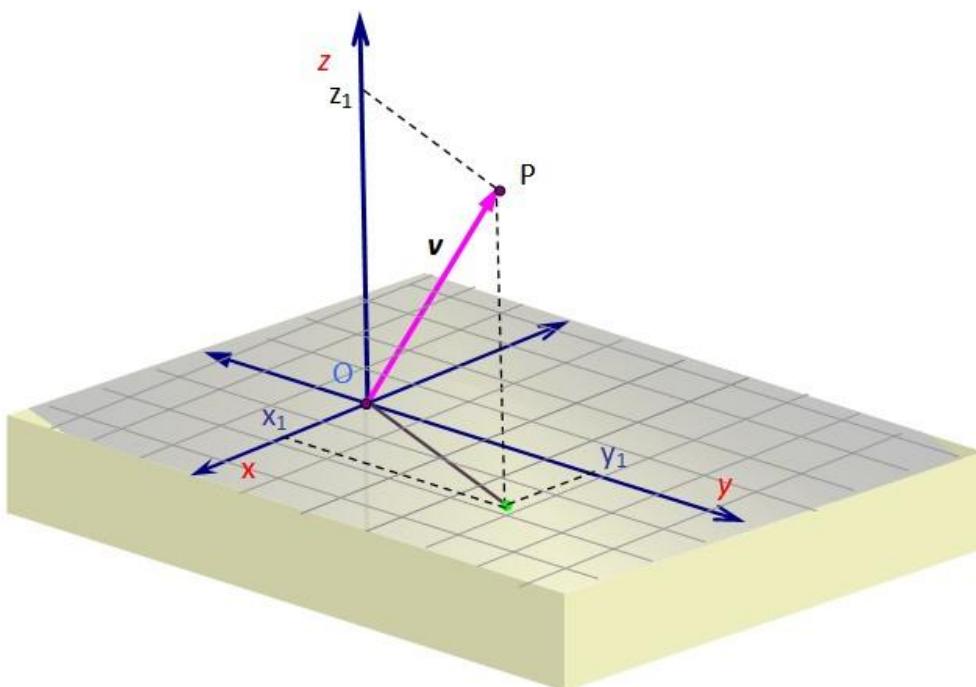
En relación a la duración de su estancia en diferentes puntos del recorrido, notamos que en el lugar de partida, el conductor permaneció 8 minutos menos que el promedio, y en el punto B, su tiempo de permanencia fue 5 minutos inferior al establecido por la empresa. Tanto en los puntos C como en F, el conductor se ajustó al tiempo promedio, mientras que en el punto D, se excedió en 5 minutos. En general, los tiempos de permanencia del conductor en los lugares designados para trámites son aceptables. Sin embargo, no resulta óptimo el tiempo que demandó para el traslado entre estos sitios y el orden en que los visitó, lo que afecta la eficiencia del recorrido, la puntualidad y la eficacia de las entregas.

5.3.2 Análisis de trayectorias y cambios en la posición utilizando operaciones matriciales

En el **análisis de datos de movimiento**, exploramos cómo emplear operaciones matriciales en el contexto del análisis de trayectorias y cambios en la posición. Este enfoque se basa en representar los movimientos y trayectorias de objetos como matrices y vectores, lo que nos permite aplicar conceptos fundamentales del álgebra lineal a situaciones de movimiento en dos o tres dimensiones.



Comenzamos considerando el seguimiento de la posición de un objeto en movimiento a lo largo del tiempo. Representamos su posición en el espacio tridimensional mediante un vector con tres componentes: una para la coordenada x , otra para la coordenada y y una tercera para la coordenada z . A medida que el objeto se mueve, estos vectores de posición evolucionan con el tiempo.



Para **analizar cambios en la posición**, calculamos la diferencia entre dos vectores de posición en momentos diferentes. Esta diferencia nos proporciona un vector de desplazamiento que indica cómo ha cambiado la posición del objeto en un intervalo de tiempo dado. La operación matricial esencial aquí es la resta de vectores, que nos permite calcular estos desplazamientos.

Para **estudiar trayectorias**, consideramos una secuencia de vectores de posición a lo largo del tiempo y conectamos estos puntos para formar una curva o línea que describe la trayectoria del objeto. La representación matricial aquí se basa en organizar estos vectores de posición en una matriz, donde cada fila corresponde a un instante de tiempo y las columnas representan las coordenadas x , y y z . Esta matriz nos brinda una representación estructurada de la trayectoria.

Las operaciones matriciales nos permiten analizar estas trayectorias y cambios en la posición de varias maneras. Podemos calcular la velocidad promedio al dividir el desplazamiento entre dos puntos en el tiempo por el tiempo transcurrido. La velocidad se representa como un vector y, por lo tanto, también se puede tratar con operaciones matriciales.

Además, la **aceleración**, que mide la tasa de cambio de la velocidad, también se puede calcular y representar en forma matricial. Estas magnitudes son esenciales en la descripción de movimientos y se aplican en diversos campos, desde la física y la ingeniería hasta la geolocalización y la robótica.

El **análisis de trayectorias y cambios en la posición** mediante operaciones matriciales nos brinda una forma estructurada y eficiente de abordar problemas relacionados con el movimiento en el espacio. Al representar las **trayectorias** y los **cambios en la posición** como matrices y vectores, aplicamos las herramientas y conceptos fundamentales del álgebra lineal para comprender mejor y analizar los movimientos de objetos en diferentes contextos. Estas técnicas tienen aplicaciones en una amplia variedad de campos y proporcionan una base sólida para el análisis de datos de movimiento. A medida que avances en tu carrera de **Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos**, profundizarás en estas aplicaciones, lo que te permitirá abordar desafíos más complejos en este emocionante campo.



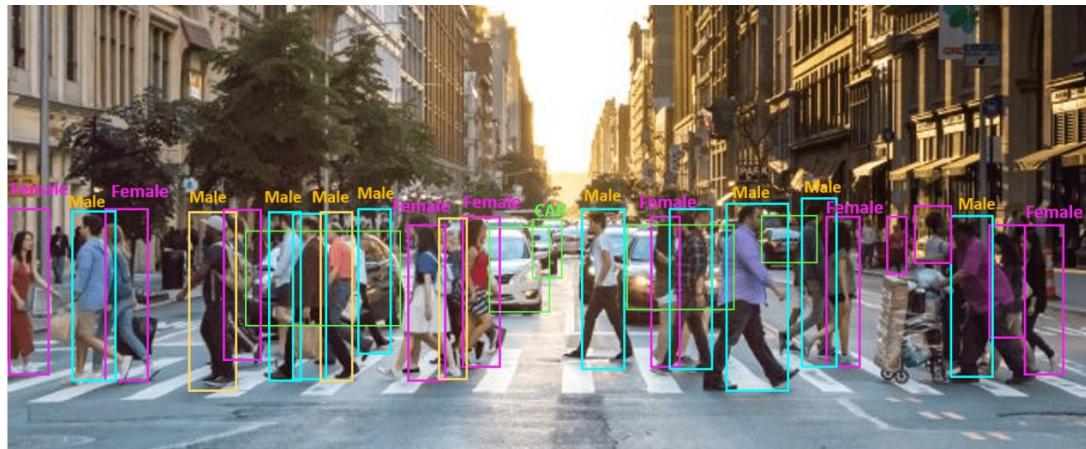
5.4 Aplicaciones en el seguimiento de objetos y análisis de movimientos

El **seguimiento de objetos y el análisis de movimientos** son áreas de aplicación esenciales para el álgebra lineal, especialmente en el contexto de la gestión de datos y el análisis de información en tiempo real. En esta sección, exploraremos cómo las operaciones matriciales y los conceptos de álgebra lineal se utilizan en la práctica para rastrear objetos en movimiento y analizar sus movimientos en diversos campos.



Una de las aplicaciones más destacadas es el **seguimiento de objetos en visión por computadora**. Aquí, las cámaras y otros sensores recopilan datos sobre la posición y el movimiento de objetos en tiempo real. Los datos de seguimiento se representan generalmente como coordenadas en el espacio tridimensional. Para procesar y analizar esta información, se utilizan operaciones matriciales para realizar cálculos de distancia, velocidad y aceleración. Estos cálculos son fundamentales para el seguimiento de objetos en aplicaciones

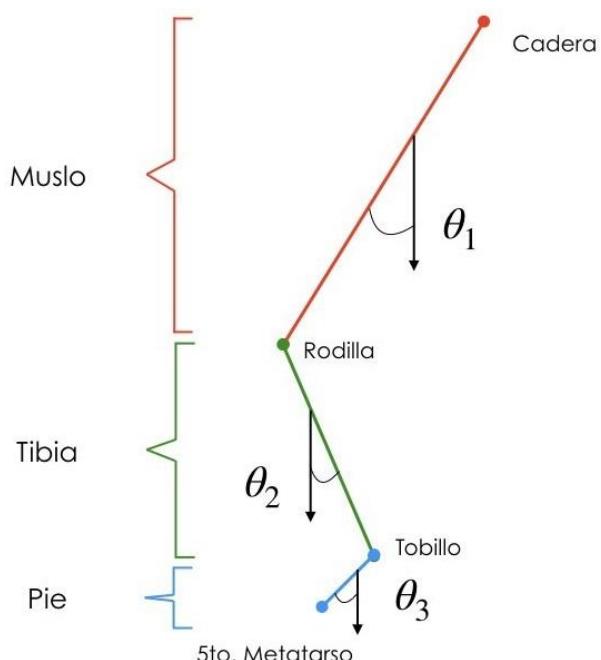
como la **detección de movimiento** en sistemas de seguridad, el seguimiento de vehículos en el transporte público y la realidad aumentada.



Además, el álgebra lineal es esencial en la **geolocalización**, donde se rastrean objetos en movimiento utilizando datos GPS. Aquí, las coordenadas geográficas se representan en matrices y vectores, y las operaciones matriciales permiten calcular distancias, direcciones y velocidades. Esto es crucial para aplicaciones como la navegación en vehículos, la gestión de flotas y el seguimiento de activos en logística.

En la robótica, el **seguimiento de objetos** es fundamental para el movimiento de brazos robóticos y la interacción con el entorno. Las transformaciones matriciales se utilizan para representar la posición y orientación de objetos y robots en un espacio tridimensional. Estas transformaciones se aplican mediante operaciones matriciales para controlar el movimiento de robots y realizar tareas como ensamblaje, soldadura y manipulación de objetos.

En el **análisis de movimientos humanos**, el álgebra lineal se utiliza para modelar y comprender el movimiento de las articulaciones y segmentos del cuerpo. Se aplican operaciones matriciales para calcular la cinemática y la dinámica de movimientos humanos, lo que es esencial en campos como la animación por computadora, la biomecánica y la fisioterapia.



Esto es, el **seguimiento de objetos y el análisis de movimientos** son áreas de aplicación clave para el álgebra lineal en la **gestión de datos y la toma de decisiones**. Las operaciones matriciales y los conceptos matemáticos subyacentes son fundamentales para **procesar, analizar y comprender datos de movimiento** en tiempo real en una variedad de campos, desde la **visión por computadora** y la **geolocalización** hasta la **robótica** y la **animación**. Estas aplicaciones demuestran la versatilidad y la relevancia del álgebra lineal en la resolución de problemas prácticos en la era de los datos y la tecnología.

En el contexto de la **inteligencia artificial**, cabe preguntarse: ¿Cuáles son los beneficios y desafíos de aplicar técnicas de aprendizaje automático y análisis de datos en el seguimiento de movimientos humanos en campos como la animación por computadora y la fisioterapia? ¿De qué manera podría la inteligencia artificial contribuir a una comprensión más profunda de la cinemática y la dinámica de los movimientos humanos?



Final de la Unidad 5

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Problema 1: Considera los siguientes aeropuertos internacionales: el Aeropuerto Internacional de Ezeiza en Buenos Aires, el Aeropuerto Internacional Arturo Merino Benítez (conocido también como Aeropuerto Internacional de Santiago o Aeropuerto de Pudahuel), y el Aeropuerto Internacional El Dorado, que es el principal aeropuerto de Colombia. El desafío consiste en llevar a cabo una proyección de Mercator utilizando las coordenadas de estos tres aeropuertos. A continuación, crea una representación gráfica basada en esta proyección y calcula las distancias entre los aeropuertos en el plano cartesiano resultante.

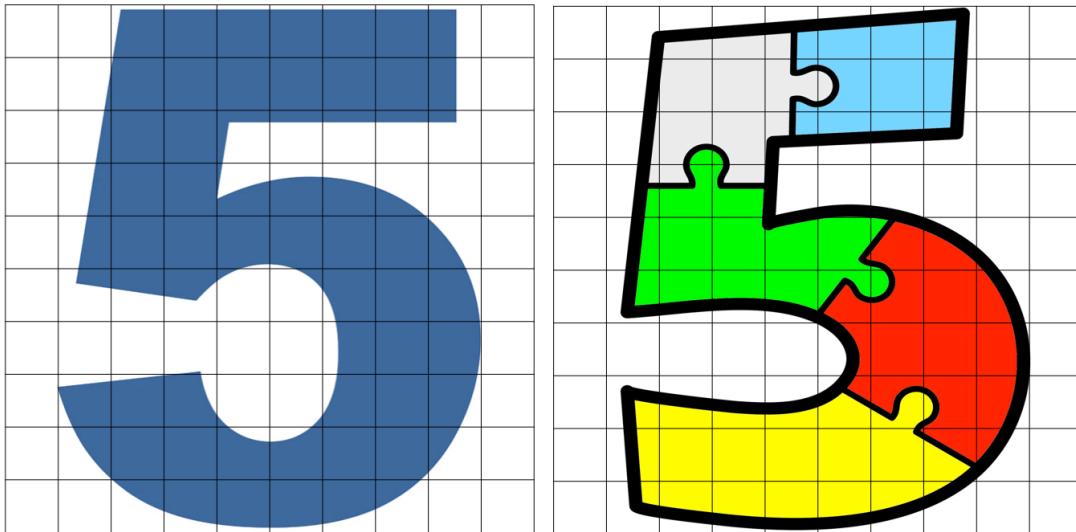
Finalmente, compara los cálculos obtenidos con la distancia ortodrómica entre los aeropuertos y proporciona una explicación detallada y fundamentada de tus resultados. No dejes de llevar a cabo una comparación con las distancias proporcionadas por Google Maps para validar y respaldar tus conclusiones.

Problema 2: Evalúa dos alternativas de trayecto para desplazarte desde la ciudad de San Luis a la ciudad de Villa Mercedes. Utilizando una matriz de costos ponderados que incluya factores como la distancia, el tiempo y la velocidad, justifica cuál de las dos rutas resulta más conveniente. Además, contrasta tu elección con la recomendación proporcionada por Google Maps para respaldar tus conclusiones.

Problema 3: Imagina que estás de visita en la ciudad de San Luis, Argentina, y deseas realizar un itinerario para explorar algunos destacados puntos turísticos, entre los que se incluyen la Universidad Nacional de San Luis, el Estadio Héctor Odicino-Pedro Benoza, Plaza Independencia, Parque de las Naciones y la Iglesia Catedral de San Luis. Para simplificar la visualización, análisis y comparación de distintas ubicaciones y rutas, crea una representación cartográfica que muestre datos geoespaciales en un plano cartesiano.

Genera una matriz que incluya los tiempos estimados para completar el recorrido entre estos puntos, ya sea en automóvil o a pie. Por último, recomienda un itinerario específico y proporciona una justificación sólida para tu elección.

Problema 4: Transforma la imagen suministrada, que presenta dos números 5 en dos cuadrículas de 10x10, en una matriz de 10x10 en escala de blanco y negro utilizando la escala estándar de 0-255. Además, configura un umbral del 50% para determinar si cada píxel debe ser representado en color blanco o negro.



Problema 6: Supongamos que se te proporciona una matriz de entrada que representa una imagen en escala de grises.

140	120	110	100	90	80	70
135	125	115	105	95	85	75
130	120	110	100	90	80	70
125	115	105	95	85	75	65
120	110	100	90	80	70	60
115	105	95	85	75	65	55
110	100	90	80	70	60	50
105	95	85	75	65	55	45
100	90	80	70	60	50	40
95	85	75	65	55	45	35

- a) Realiza una convolución entre la matriz de entrada y el filtro Sobel horizontal.
- b) Realiza una convolución entre la matriz de entrada y el filtro Laplaciano.
- c) Realiza una convolución entre la matriz de entrada y el filtro de suavizado.
- d) ¿Qué cambios observas en la imagen después de aplicar cada uno de los filtros? Fundamenta tus respuestas.

Problema 7: La Facultad de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis está a punto de llevar a cabo un relevamiento de datos esencial para un estudio estadístico. Este estudio se enfoca en recopilar información de varios restaurantes destacados de la ciudad, que incluyen: Napoli Pastas, Amelie Cucina del Mondo, Uovo Cucina Restaurante y Cactus Restaurante. Inicialmente y para organizar el trabajo, el objetivo es reunir datos apelando a Google maps para crear tablas y matrices que proporcionen detalles sobre los tiempos de traslado necesarios para viajar desde cada uno de estos puntos a los demás, la distancia promedio de los recorridos y la velocidad promedio de los mismos.

Estos datos son fundamentales para tomar decisiones informadas en términos

de planificar los circuitos de recorrido necesarios para llevar a cabo el trabajo propuesto. Al comprender estas relaciones, podemos establecer trayectorias de recorrido óptimas, optimizando la logística y asegurando la eficiencia en la ejecución del estudio. En este sentido, establece y fundamenta un recorrido que consideres óptimo, teniendo en cuenta que el punto de partida y llegada es la Facultad de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de la UNSL.

Problema 8: Matías, un estudiante de la Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos de la UNSL realizó un recorrido, referido al estudio que se propone en el Problema 7, utilizando un dispositivo GPS mientras se desplazaba en una motocicleta. A continuación, se presentan las coordenadas geográficas (Latitud, Longitud) y los horarios de llegada y salida en cada punto del recorrido:

Punto	Coordenadas (Latitud, Longitud)	Hora de llegada	Hora de salida
Inicio	(-32.29144, -66.34014)	9 h 01'	9 h 17'
A	(-33.30637, -66.32249)	9 h 30'	9 h 47'
B	(-33.30143, -66.32876)	9 h 55'	10 h 30'
C	(-33.29591, -66.33547)	10 h 35'	11 h 00'
D	(-33.30324, -66.34012)	11 h 07'	11 h 30'
Fin	(-32.29144, -66.34014)	11 h 40'	12 h 00'

Realiza un informe y un análisis de la trayectoria y el seguimiento de esta actividad, comparándola con los resultados informados en el problema previo. En este sentido, se busca determinar si el estudiante siguió una ruta óptima o si hubo desviaciones significativas en su recorrido, así como analizar la duración y la eficiencia de la actividad en relación con los datos recabados para el Problema 7.

Problema 9: Marlene, otra estudiante de la Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos de la UNSL, cuestionó el recorrido realizado por Matías y planteó una alternativa que considera más conveniente. Según la propuesta de Marlene, el recorrido óptimo habría sido el siguiente: partir desde la facultad hacia AMELIE Cucina Del Mondo, luego dirigirse hacia Cactus Restaurante, Napoli Pastas, Uovo Cucina Restaurante y, finalmente, regresar a la universidad.

Marlene argumenta que este recorrido alternativo minimiza las distancias totales y reduce la cantidad de desplazamientos entre los puntos, lo que podría resultar en un trayecto más eficiente. Sin embargo, también reconoce que la elección de un recorrido óptimo puede depender de varios factores, como el tráfico, las restricciones de horario y otros imprevistos.

La pregunta es: ¿Es correcto el análisis de Marlene? Fundamenta la respuesta.

