50 años
Universidad
Nacional
de San Luis

Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

Educación a Distancia

ÁLGEBRA

MATRICIAL

Universidad Nacional de San Luis
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales

FCEJS

Índice

REFERENCIAS

Concepto o definición importante

Curiosidad o comentario sobre un tema

Resumen para recordar y tener en cuenta

Preguntas de reflexión

Libro electrónico para descargar

Video de YouTube

Actividad práctica para realizar

Situación problemática

Página de internet

Síntesis de ideas o conclusiones

UNIDAD 1

Fundamentos del Álgebra Matricial

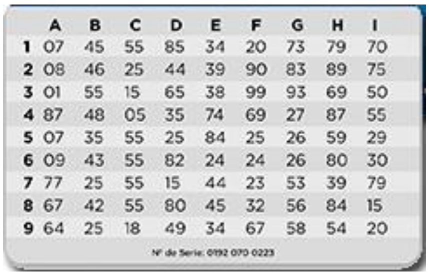
1.1. Introducción

En el contexto de la Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos, nos encontraremos frecuentemente trabajando con **matrices**, aunque no siempre nos refiramos a ellas con ese nombre específico. Un ejemplo claro de ello es la llamada “Tarjeta de Coordenadas”, una herramienta ampliamente utilizada en entornos cotidianos y en el ámbito financiero.

La Tarjeta de Coordenadas consiste en una tarjeta de plástico, similar en tamaño a una tarjeta de crédito, que presenta una matriz o serie de números, generalmente dispuestos en pares de datos, ordenados en filas y columnas. En dicha tarjeta, las filas están etiquetadas con números ascendentes a partir del 1, mientras que las columnas están identificadas con letras en orden alfabético comenzando por la A. Es importante mencionar que algunas entidades bancarias pueden presentar un orden inverso, colocando las letras en las filas y los números en las columnas.

Esta tarjeta es personal e intransferible.
En caso de pérdida o robo comuníquelo urgentemente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	10	84	93	12	92	58	38	28	36	02
B	99	29	10	23	33	47	58	39	34	18
C	28	05	29	03	94	14	41	33	11	39
D	01	49	39	79	53	38	17	88	70	12

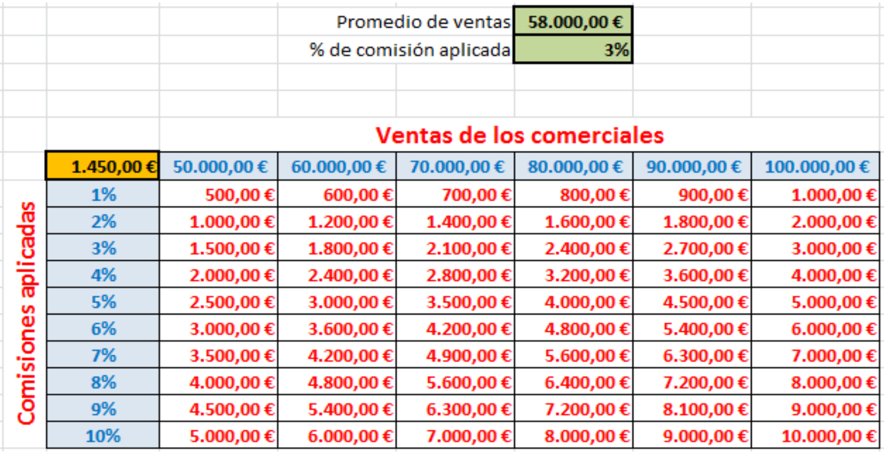


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	07	45	55	85	34	20	73	79	70
2	08	46	25	44	39	90	83	89	75
3	01	55	15	65	38	99	93	69	50
4	87	48	05	35	74	69	27	87	55
5	07	35	55	25	84	25	26	59	29
6	09	43	55	82	24	24	26	80	30
7	77	25	55	15	44	23	53	39	79
8	67	42	55	80	45	32	56	84	15
9	64	25	18	49	34	67	58	54	20

Nº de Serie: 0192 070 0223

En el ámbito de la Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos, **comprender la estructura y función de las matrices es esencial**, ya que estas forman la base para la representación y manipulación de datos complejos. El uso de matrices en diversos campos, como el análisis financiero, la gestión de inventarios, o la segmentación de clientes, nos permite realizar operaciones eficientes y tomar decisiones informadas en situaciones reales.

Pero también es una matriz, y aquí es más obvio, si armamos una tabla en alguna planilla de cálculo, donde cada número expresado en una fila y en cada columna tiene una interpretación particular.



Promedio de ventas: 58.000,00 €
% de comisión aplicada: 3%

Ventas de los comerciales

Comisiones aplicadas

1.450,00 €	50.000,00 €	60.000,00 €	70.000,00 €	80.000,00 €	90.000,00 €	100.000,00 €
1%	500,00 €	600,00 €	700,00 €	800,00 €	900,00 €	1.000,00 €
2%	1.000,00 €	1.200,00 €	1.400,00 €	1.600,00 €	1.800,00 €	2.000,00 €
3%	1.500,00 €	1.800,00 €	2.100,00 €	2.400,00 €	2.700,00 €	3.000,00 €
4%	2.000,00 €	2.400,00 €	2.800,00 €	3.200,00 €	3.600,00 €	4.000,00 €
5%	2.500,00 €	3.000,00 €	3.500,00 €	4.000,00 €	4.500,00 €	5.000,00 €
6%	3.000,00 €	3.600,00 €	4.200,00 €	4.800,00 €	5.400,00 €	6.000,00 €
7%	3.500,00 €	4.200,00 €	4.900,00 €	5.600,00 €	6.300,00 €	7.000,00 €
8%	4.000,00 €	4.800,00 €	5.600,00 €	6.400,00 €	7.200,00 €	8.000,00 €
9%	4.500,00 €	5.400,00 €	6.300,00 €	7.200,00 €	8.100,00 €	9.000,00 €
10%	5.000,00 €	6.000,00 €	7.000,00 €	8.000,00 €	9.000,00 €	10.000,00 €

En esta unidad, consideraremos estos arreglos como objetos matemáticos en sí y desarrollaremos algunas de sus propiedades para aplicarlas posteriormente en problemas del campo del análisis y gestión de datos.

Una **matriz** es una tabla cuadrada o arreglo rectangular de datos (llamados elementos o entradas de la matriz) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales.

A una matriz con *m* filas y *n* columnas se le denomina matriz *m*-por-*n* (escrito ***m***×***n***), y a ***m*** y ***n*** dimensiones de la matriz. Las dimensiones de una matriz siempre se dan con el número de filas primero y el número de columnas después. Comúnmente se dice que una matriz *m*-por-*n* tiene un orden de *m*×*n* ("orden" tiene el significado de tamaño).

Como mencionamos anteriormente, el ***tamaño* u *orden* de una matriz** se describe en términos del número de filas (líneas horizontales) y de columnas (líneas verticales) que contiene. Por ejemplo, la 1º tarjeta de coordenadas que pusimos como ejemplo tiene 4 filas y 10 columnas, de modo que su tamaño es 4 por 10 (que se escribe 4x10). La segunda tarjeta de coordenadas, en cambio, tiene 9 filas y 9 columnas, razón por la cual decimos que es cuadrada de orden 9x9. En la descripción del tamaño, el primer número siempre denota el número de filas y el segundo, el de columnas.

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Matrices: conceptos básicos	https://youtu.be/m6w5vLA3Lnw

En síntesis, matemáticamente para denotar matrices se utilizarán letras mayúsculas, y para los elementos letras minúsculas. Así, una matriz general *mxn* se denota:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cuando se desea que la notación sea condensada, la matriz precedente se puede expresar como:

$$A = [a_{ij}]_{mxn}$$

donde a_{ij} representa al elemento que aparece en la fila "i" y en la columna "j".

Una matriz A con *n* filas y *n* columnas se denomina matriz cuadrada de orden *n*, y se dice que los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} están en la *diagonal principal* de A.

1.2. Tipo de Matrices

Haremos una caracterización del tipo de matrices, centrando su estudio como objeto matemático. Verás que es muy intuitivo la denominación que se les otorga y anticipamos que no tendrás dificultades en comprender estas ideas.

Nuestro propósito es operar con las matrices (sumar, restar y multiplicar) porque nos permitirá la resolución de importantes problemas que se aplican a la vida cotidiana.

1.2.1. Matriz Cero (o Nula)

Una **matriz cero, o matriz nula**, es aquella cuyos elementos son todos iguales a cero. Se denota por O_{mxn}. Por ejemplo, sería matrices nulas las siguientes:

$$0_{1\times 1} = [0] \quad 0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Matriz Cuadrada

Una **matriz cuadrada** es la que tiene el mismo número de filas que de columnas (*m* = *n*). Simplemente se la llama matriz cuadrada de orden n.

En una matriz cuadrada de orden n, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn} son llamados elementos de la *diagonal principal* (desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha).

Son ejemplos de matrices cuadradas:

Orden 1

$$\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

Orden 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Orden 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

1.2.3. Matriz Diagonal

Es aquella matriz cuadrada en la que todos los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero. Simbólicamente se lo expresa así:

A es matriz diagonal sí y sólo si $a_{ij}=0 \; \forall i \neq j$.

Son ejemplos de matrices diagonales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La definición no dice nada acerca de los elementos que están en la diagonal principal, razón por la cual también podrían ser iguales a cero

1.2.4. Matriz Identidad

Es la matriz diagonal *nxn* ($\mathbf{I}_n$) cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1 (uno). Un ejemplo es la matriz 2x2 citada en el punto anterior. Una **matriz identidad** de orden 3x3 sería la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.5. Matriz Triangular

Si en una matriz cuadrada A todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son cero, se denomina *matriz triangular superior*.

De manera análoga, una matriz cuadrada A se dice que es una *matriz triangular inferior* si todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero. Son ejemplos de matrices triangulares:

Triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Se suelen emplear las letras U y L para matriz triangular superior e inferior respectivamente, ya que U es la inicial de "*upper triangular matriz*" y L de "*lower triangular matriz*", los nombres que reciben estas matrices en inglés.

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este contenido.

Descripción	Dirección URL
Tipos de matrices	https://youtu.be/GyrQmbxk7ds

1.3. Traspuesta de una Matriz

Si A es cualquier matriz *mxn*, entonces la **traspuesta** de A, denotada por A^T, se define como la matriz *nxm* que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A. Es decir, la primera columna de A^T es la primera fila de A, la segunda columna de A^T es la segunda fila de A, y así sucesivamente. Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este contenido.

Descripción	Dirección URL
Matriz Traspuesta	https://youtu.be/aTsgBk34zyY

1.4. Traza de una matriz cuadrada

Si A es una matriz cuadrada, entonces la traza de A, denotado por tr(A), se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de A. La traza de A no está definida si A no es una matriz cuadrada.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de matrices y sus trazas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

1.5. Operaciones con Matrices

Hasta el momento, las matrices se han usado para abreviar el trabajo al resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para otras aplicaciones, sin embargo, es deseable desarrollar una "aritmética de matrices" en la que sea posible sumar, restar y multiplicar matrices de manera útil. El resto de esta unidad la dedicaremos al desarrollo de esta aritmética.

1.5.1. Suma de Matrices

Un comerciante de vehículos para nieve (*snowmobile*) vende dos modelos: *Apex RTX,* y *Nytro XTX*. Cada uno está disponible en uno de dos colores: rojo y azul. Suponga que las ventas para enero y febrero de este año están representadas por las matrices de venta:

(enero) E = $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (febrero) F = $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

correspondiendo las filas a los colores (rojo y azul), y las columnas a los modelos (*Apex RTX,* y *Nytro XTX*). Una matriz que represente las ventas totales para cada modelo y color durante los dos meses puede ser obtenida sumando los correspondientes elementos en E y F:

$$E + F = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior podemos decir:

Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces la *suma* A + B es la matriz obtenida al sumar los elementos de B con los elementos correspondientes de A, y la *diferencia* A – B es la matriz obtenida al restar los elementos de B de los elementos correspondientes de A. En símbolos:

$$Si\ A = [a_{ij}]_{m\times n} y\ B = [b_{ij}]_{m\times n} \rightarrow A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}\ y\ A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

No es posible sumar o restar matrices de tamaños diferentes

Sean A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, y C = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Entonces:

A + B = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ A – B = $\begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$

Las expresiones A + C, A – C, B + C y B – C no están definidas pues se trata de matrices de distintos tamaños.

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este contenido.

Descripción	Dirección URL
Suma de matrices	https://youtu.be/S89lkpvajyU

1.5.2. Multiplicación por escalar

Regresando al vendedor de vehículos para nieve, y recordando que en febrero las ventas estaban dadas por la matriz: $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ Si en marzo el vendedor duplica las ventas de febrero de cada modelo y color de vehículos, la matriz de ventas M para marzo se podría obtener multiplicando cada elemento de F por 2:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

En consecuencia:

Si A es cualquier matriz y *k* es cualquier escalar (número real), entonces el *producto* kA es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por k.

En símbolos:

Si $A = [a_{ij}]_{mxn} \rightarrow k.A = [ka_{ij}]_{mxn}$

Este producto es denominado *producto por escalar* y a la matriz kA se la denomina *múltiplo escalar de A.*

Sean: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

Entonces:

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-1) \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{3} \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este contenido.

Descripción	Dirección URL
Multiplicación de matriz por escalar	https://youtu.be/-ArUqjhQIBM

1.5.3. Multiplicación de Matrices

En lugar de abordar la **multiplicación entre matrices** haciendo uso de la definición, hemos considerado más apropiado introducir algunas ideas que nos pueden ayudar a comprender mejor los conceptos involucrados. Recordarán que en el nivel medio hemos estado trabajando con ecuaciones, y en particular, si teníamos una ecuación sencilla del tipo: $3x = 5$, rápidamente encontrábamos la solución diciendo que el 3 "pasaba" dividiendo, y así quedaba que $x = \frac{5}{3}$

Ahora bien, hagamos un análisis detallado y fundamentado de la resolución de esta ecuación. Para ello haremos uso de propiedades de la igualdad. A su vez, resolveremos por un lado la ecuación propuesta (para tener "elementos" concretos), y por el otro, haremos una generalización al pensar que tenemos una ecuación de la forma $a \cdot x = b$, donde *a,* y *b* son números reales.

Sean entonces nuestras ecuaciones:

$$3x = 5 \qquad\qquad a.x = b$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por 1/3. Prestemos atención que 1/3 es el inverso multiplicativo del número 3. En consecuencia, en la ecuación de la derecha debemos multiplicar por el inverso multiplicativo de "a", el cual es 1/a y se denota a^{-1}

$$\frac{1}{3}.3x = \frac{1}{3}.5 \qquad\qquad a^{-1}.a.x = a^{-1}.b$$

Asociamos en cada miembro los productos entre escalares

$$\left(\frac{1}{3}.3\right)x = \left(\frac{1}{3}.5\right) \qquad\qquad (a^{-1}.a).x = (a^{-1}.b)$$

Sabemos que el producto de un número distinto de cero con su inverso multiplicativo es igual a uno (por definición de inverso multiplicativo)

$$1.x = \frac{5}{3} \qquad\qquad 1.x = (a^{-1}.b)$$

Además, el 1 es el elemento neutro en la multiplicación entre números reales

$$x = \frac{5}{3} \qquad\qquad x = (a^{-1}.b)$$

Así llegamos a resolver estas ecuaciones fundamentando los procedimientos. Tengamos en cuenta la expresión que resultó de resolver la ecuación cuya forma general es $a \cdot x = b$, pues volveremos a ella en breve.

Nuestra intención reside ahora en establecer un vínculo entre la resolución de ecuaciones del álgebra elemental con la de los sistemas lineales. Esto es, poder expresar un sistema lineal de la forma $A \cdot X = B$ (semejante a nuestra ecuación del tipo $3x = 5$, o de manera general, $a \cdot x = b$), donde A, B y X son matrices, y en particular X, una matriz de incógnitas. Pongamos un ejemplo concreto y sobre él desarrollemos algunas nociones.

Sea el sistema lineal: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}$

Podríamos pensar que nuestra matriz A la conforman los coeficientes, que la matriz X está compuesta por las incógnitas "x" e "y" del sistema, y que la matriz B por los términos independientes. En consecuencia, tendríamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad\qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Si recordamos la estructura de nuestra ecuación "elemental" ($a \cdot x = b$), nos ayudará expresar el sistema de ecuaciones de manera análoga, esto es, en la forma: $A \cdot X = B$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El miembro de la izquierda de esta ecuación debiera ser igual a $\begin{bmatrix} x-2y \\ 3x+5y \end{bmatrix}$, pues a la derecha tenemos una matriz de dos filas y una columna, y por la definición de igualdad de matrices que hemos dado, el producto de $A \cdot X$ debiera ser una matriz del mismo tamaño. Además, se debería cumplir que $x - 2y = 3$ y que $3x + 5y = -2$.

Notemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ 3x+5y \end{bmatrix}$$

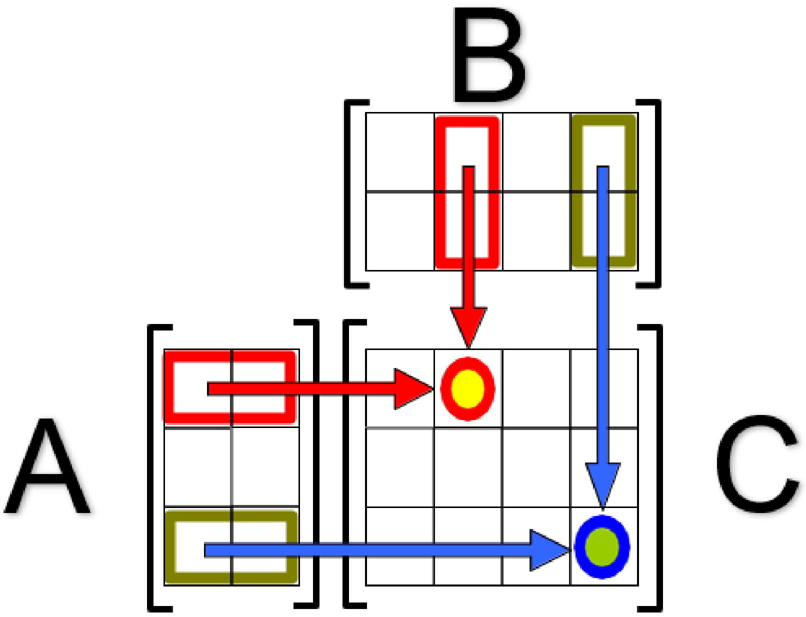
Esto nos está dando una pauta de la manera en que se multiplican las matrices: “primera fila de la matriz A por la primera columna de la matriz X” y “segunda fila de la matriz A por la primera columna de la matriz X”.

Ahora sí podemos pasar a la definición de multiplicación de matrices:

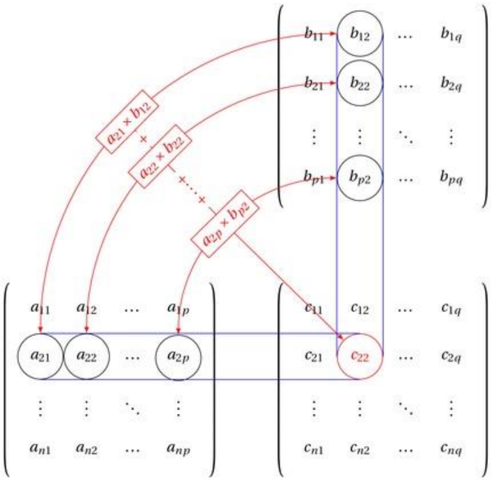
Dadas dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B; es decir:

$$A_{m\times n} \text{ y } B_{n\times p}$$

La multiplicación de A por B nos da una matriz C, de orden $m\,x\,p$ cuyos elementos se determinan como sigue: Para encontrar el elemento en la fila *i* y en la columna *j* de AB, hay que considerar sólo la fila *i* de la matriz A y la columna *j* de la matriz B. Multiplicar entre sí los elementos correspondientes de la fila y de la columna mencionados y luego sumar los productos resultantes.



Esquemáticamente la multiplicación entre matrices se realiza el siguiente modo:



Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Multiplicación de matrices	https://youtu.be/Tjrm3HsqBXE

Al igual que la multiplicación aritmética, la definición de la multiplicación de matrices es instrumental, es decir, viene dada por un algoritmo capaz de resolverla. No obstante, la multiplicación en este contexto se diferencia de la usual, principalmente porque no cumple con la propiedad de conmutatividad. Para formar el producto AB, la definición de multiplicación de matrices requiere que el número de columnas del primer factor A sea el mismo que el número de filas del segundo factor B. Si no se cumple esta condición entonces el producto no está definido. Por esta razón es que, en general, el producto entre matrices no es conmutativo.

Considera las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

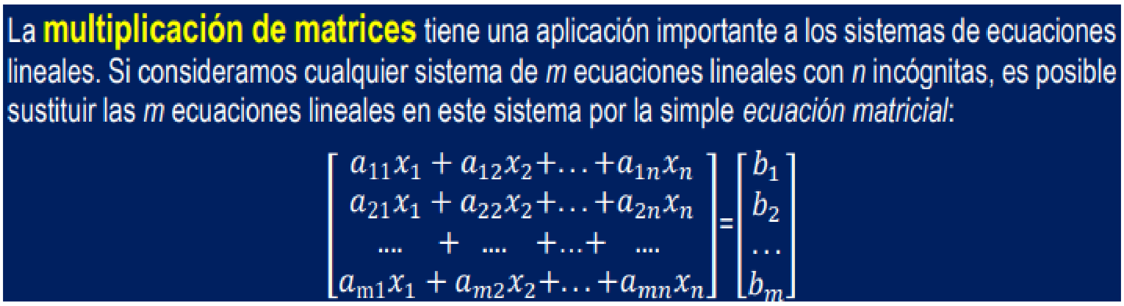
Como A es una matriz 2x3 y B es una matriz 3x4, el producto AB está definido y da por resultado una matriz 2x4. Para determinar, por ejemplo, el elemento en la fila 2 y en la columna 3 de AB, sólo se consideran la fila 2 de A y la columna 3 de B. Luego, como se ilustra a continuación, los elementos correspondientes se multiplican entre sí y se suman los productos obtenidos escribiendo el resultado de manera que ocupe el lugar que corresponde a la fila 2 y a la columna 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & 26 & \end{bmatrix}$$ ya que (2.4) +(6.3) +(0.5) =26

1.5.4. Propiedades de las operaciones con matrices

Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, entonces son válidas las siguientes reglas de aritmética matricial:

1. *Propiedad asociativa*: (**AB**)**C** = **A**(**BC**).
2. *Propiedad distributiva por la derecha*: (**A** + **B**) **C** = **AC** + **BC**.
3. *Propiedad distributiva por la izquierda*: **C** (**A** + **B**) = **CA** + **CB**.
4. *En general, el producto de matrices tiene divisores de cero*: Si **A.B = 0,** *No necesariamente* **A** *ó* **B** *son matrices nulas.*
5. *El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación*: Si **A.B** = **A.C**, *No necesariamente* **B** = **C**.
6. El producto de dos matrices generalmente no es conmutativo, es decir, **AB** ≠ **BA**.



La **multiplicación de matrices** tiene una aplicación importante a los sistemas de ecuaciones lineales. Si consideramos cualquier sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, es posible sustituir las *m* ecuaciones lineales en este sistema por la simple *ecuación matricial*:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots. \; + \; \ldots. \; + \ldots + \; \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz $m \times 1$ del miembro izquierdo de esta ecuación se puede escribir como un producto para obtener:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Si estas matrices se designan por A, X y B, respectivamente, entonces el sistema original de *m* ecuaciones con *n* incógnitas ha sido reemplazado por la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

En particular, si el sistema es homogéneo:

$$A \cdot X = O$$

1.6. Inversa de una Matriz

Ya hemos dicho que un sistema de ecuaciones lineales puede ser escrito en forma matricial como: $A \cdot X = B$. Si podemos determinar los valores de los elementos de la matriz de incógnitas X, tendremos una solución para el sistema.

Para calcular el valor de X en la ecuación $A \cdot X = B$, deberíamos multiplicar miembro a miembro por el inverso multiplicativo de A. Sea C ese inverso multiplicativo tal que $C.A = I$

$$A \cdot X = B$$

$$C \cdot (A \cdot X) = C \cdot B$$

$$(C \cdot A) \cdot X = C \cdot B$$

$$I \cdot X = C \cdot B$$

$$X = C \cdot B$$

Por supuesto que este método está basado en la existencia de una matriz C tal que $C.A = A.C = I$. Cuando tal matriz existe, decimos que es una matriz inversa de A. Entonces: Si A es una matriz cuadrada y existe una matriz C tal que C.A =A.C=I, entonces C es llamada inversa de A, y A se dice que es invertible. La inversa de una matriz A se denota por A^{-1}. Entonces: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$. Esta inversa, puede demostrarse, que si existe es única.

Regresando a nuestro sistema: $X = C \cdot B$, se tiene:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ resulta que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ es su inversa ya que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así entonces, el sistema: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 18 \end{cases}$ puede resolverse (pues la matriz de coeficientes es cuadrada e invertible) como sigue:

$$\text{A.x = b} \Rightarrow A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \{(-1,3)\}$$

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Inversa de una matriz	https://youtu.be/lrh5MKNZihQ

1.7. Determinante

Sabemos que aquellas funciones que asocian un número real f(x) a un valor real de la variable x son funciones que se describen como *funciones con valores reales de una variable real*. En esta parte de la unidad estudiaremos la *función determinante*, que es una función con valores reales de una variable matricial, en el sentido que asocia un número real f(x) = det(A) con una matriz A cuadrada. Antes de dar una definición de esta función, analizaremos algunos conceptos

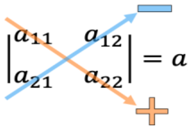
Sea *A* una matriz cuadrada. La ***Función Determinante*** se denota por *det(A)* ó $|A|$ y se define como la suma de los productos elementales con signo de *A.* El número *det(A)* ó $|A|$ se denomina **determinante de A**. El determinante de A a menudo se escribe simbólicamente como $|A| = \Sigma \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ donde Σ indica que los términos deben sumarse sobre todas las permutaciones $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ y los signos + ó – se eligen en cada término según si la permutación es par o impar.

1.7.1. Evaluación de Determinantes de 2x2

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz de 2x2, llamaremos determinante de A al número que resulta de considerar la suma de todos los productos elementales con su signo:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Básicamente lo podemos obtener teniendo en cuenta el siguiente esquema:



$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

1.7.2. Evaluación de Determinantes de 3x3

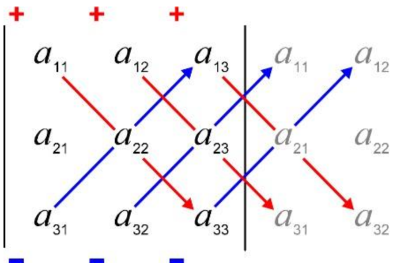
Dada la matriz A_{3x3} $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Se tiene la siguiente suma de productos elementales con su signo:

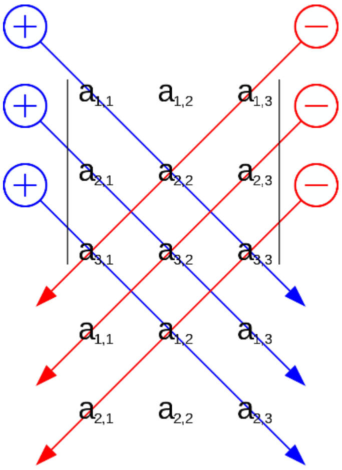
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Para no recordar de memoria esta expresión, podemos recurrir a las siguientes reglas:

Agregamos las dos primeras columnas de la matriz y formamos los seis productos elementales de la siguiente manera: Los positivos salen de multiplicar los elementos ubicados sobre la diagonal principal, y paralelos a ellas. Los negativos salen de multiplicar los elementos ubicados sobre la diagonal secundaria, y paralelas a ellas.



Agregamos las dos primeras filas de la matriz y formamos los productos elementales de manera análoga a la descripta en el apartado anterior.



Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Cálculo de un determinante	https://youtu.be/8OnOZvc5rFQ

1.7.3. Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su transpuesta.

$$|A| = |A^T|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -2 = det(A)$$

2. Si en un determinante se intercambian dos filas o dos columnas entre sí, éste cambia de signo.

$$|A| = |\ A'|$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 40 + 7 - 28 + 12 - 25 = -44$$

Ahora intercambiamos la segunda y tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -12 + 25 + 28 + 40 - 7 - 30 = 44$$

3. Si todos los elementos de una fila o columna se multiplican por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |B| = k|A|$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-5) = -10$$

4. Si todos los elementos de una fila o columna de A son nulos, el determinante también lo es.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, su valor es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.4.5 + (\text{-}1).5.3 + 4.3.4 \text{ - } 3.4.4 \text{ - } 4.5.2 \text{ - } 5.3.(\text{-}1) = 0$$

6. Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales, su valor es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Como la tercera fila es el triple de la primera, podemos aplicar la propiedad 3. Como quedan dos filas iguales (la segunda y la tercera), por la propiedad 5 resulta igual a 0.

7. Si una columna de una matriz se descompone como suma de dos sumandos, su determinante puede descomponerse en la suma de dos determinantes, de la siguiente manera:

$$\text{Si} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{pmatrix} \text{ entonces } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

8. Si una fila o columna es combinación lineal de otras, el determinante es nulo.

9. Si A es una matriz triangular $n \times n$ (superior, inferior o diagonal), entonces |A| es el producto de los elementos de la diagonal principal; es decir, |A| = $a_{11}a_{22}a_{33}. . . a_{nn}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 = -1.296$$

10. $|kA| = k^n|A|$. Si A_{nxn} y k es un escalar.

11. $|A + B| \neq |A| + |B|$. Suele no ser igual.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{det(A) = 1 y det(B) = 8}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{; det(A+B) = 23} \neq \text{det(A) + det(B)}$$

12. Si A y B son matrices cuadradas, entonces: $|A.B| = |A||B|$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{det(A) = 1 y det(B) = 8}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 17 \end{bmatrix} \quad \text{; det (A.B) = 8 = det(A) . det(B)}$$

13. Si B es la matriz que se obtiene cuando un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila, o cuando un múltiplo de una columna se suma a otra columna, entonces det(B) = det(A); es decir, cuando se aplica esta operación elemental el determinante no varía.

$$F_1 + k\cdot F_2 = \begin{vmatrix} a_{11}+k.a_{21} & a_{12}+k.a_{22} & a_{13}+k.a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{F2 + 2.F1} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \ \det(A) = -2 = \det(B)$$

14. Si A es invertible entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det\,(A)}$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; det(A)= 8 (A es invertible pues su determinante es distinto de cero)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{bmatrix}; \qquad det(A^{-1}) = \frac{1}{8} = \frac{1}{det(A)}$$

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Propiedades del determinante	https://youtu.be/ckeT2SIszgo

1.7.4. Evaluación de determinantes por triangulación

La idea es aplicar propiedades anteriores para calcular un determinante. En particular, buscaremos escalonar la matriz dada a la forma triangular superior, mediante operaciones elementales en las filas. Luego, calculamos el determinante de la matriz triangular superior y, finalmente, relacionamos el determinante de ésta con el determinante de la matriz original aplicando las propiedades estudiadas. Los vemos a través de un ejemplo:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}\right) = -3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$

$-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3\cdot(-55) = 165$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \end{vmatrix} =$

$= 7\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \end{vmatrix} = 7\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$

$= 7\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-26) = -546$

1.7.5. Cálculo del determinante por desarrollo de cofactores

Un método que abrevia, en parte, el cálculo de los determinantes es el que busca reducir el tamaño de ellos. Previo a dar el procedimiento que se emplea, se hace necesario precisar algunas definiciones relacionadas entre sí.

Sea A una matriz cuadrada, se definen en ella los siguientes elementos:

✓ Su matriz asociada a cada elemento de la matriz A de orden n:

Es aquella que se construye eliminando de A la fila y la columna a la cual pertenece el elemento. Genéricamente se la representa con A_{ij}, y simboliza la submatriz de orden n – 1 que se obtiene de eliminar en A la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna

Para $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ la submatriz asociada al elemento $a_{23} = 7$ es

$A_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y resulta de eliminar 2ª fila y 3ª columna en A

✓ Menor asociado a cada elemento a_{ij}:

Es el determinante de la submatriz asociada a a_{ij}. Lo anotaremos $|A_{ij}|$ o M_{ij}. Del ejemplo anterior, resulta que el menor complementario del elemento a_{23} resulta:

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 0 = -3.$$

✓ Cofactor asociado a cada elemento a_{ij}:

Es el Menor asociado a a_{ij}, afectado por un signo (menos o más) que depende de la paridad de la suma de los índices de a_{ij}. Más formalmente se lo define así: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$

Siguiendo con el ejemplo anterior, $C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |A_{23}| = (-1) \cdot (-3) = 3$

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, los menores y cofactores asociados a algunos elementos de la matriz resultan:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 16 = 16$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 28 \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 28 = 28$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 26 = -26$$

Si A es una matriz de orden n, habrá n^2 submatrices, menores y cofactores asociados a los n^2 elementos a_{ij} de A. Esto es natural, pues la cantidad de elementos que tiene una matriz de orden n es

n^2.

Teniendo en cuenta las definiciones previas dadas anteriormente, podemos hacer el cálculo de un determinante teniendo en cuenta el siguiente teorema:

Si A es una matriz de orden n, entonces

$$det(\, A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo del determinante a lo largo de una fila)

$$det(\, A) = a_{1j}C_{ij} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo del determinante a lo largo de una columna)

Calculemos el determinante de $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, desarrollandoló por cofactores de la 1era fila, de la 3er fila y de la 2da columna

Empecemos considerando los cofactores de la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 3 \cdot C_{13}$$

$$= 2 \cdot (-1)^2. \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (1 + 2) + 3 \cdot 0$$

$$= -3$$

Y si desarrollamos por cofactores según la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 1 \cdot C_{33}$$

$$= 2 \cdot (-1)^4. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot C_{32} + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1 - 0) + 0 + 1 \cdot (0 - 1)$$

$$= -3$$

Por último, desarrollemos por cofactores de la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{32}$$

$$= 1 \cdot (-1)^3. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{32}$$

$$= -(1 + 2) = -3$$

Notemos que el valor de $|A|$ es invariante respecto de la fila o columna escogida para hacer el desarrollo y que se hacen menos cálculos cuando más ceros contenga la fila o columna escogida (se hace innecesario calcular el cofactor asociado a esos ceros).

Calculemos el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, haciendo un desarrollo por cofactores

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (8 - 12) - 1 \cdot (4 - 15) + 0 \cdot (-8 + 20)$$

$$= 3 \cdot (8 - 12) - 1 \cdot (4 - 15) + 0 \cdot (-8 + 20)$$

$$= 3 \cdot (-4) - 1 \cdot (-11) + 0 \cdot (12)$$

$$= -12 + 11 + 0$$

$$= -1$$

1.7.6. Método de Chío para el cálculo de determinantes

El **Método de Chío** consiste en seleccionar una fila (o columna) de la matriz, obtener un 1 principal y hacer 0 el resto de los elementos de la línea seleccionada (Gauss-Jordan). Esto es posible mediante la aplicación de las propiedades estudiadas anteriormente. Luego, se aplica el método de los cofactores para calcular el determinante, debiendo así resolver un determinante de orden menor.

Si el determinante es de orden 5x5 o mayor, debe aplicarse este método tantas veces como sea necesario hasta poder aplicar la Regla de Sarrus. Veamos un ejemplo.

a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 0 & -13 & 7 \\ 2 & 0 & -9 & 3 \\ 8 & 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -7 & -13 & 7 \\ 2 & -9 & 3 \\ 8 & 10 & -1 \end{vmatrix} = (-1).453 = -453$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{4+2}.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(-1) = 1$

c. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 3 & 12 \\ 4 & 7 & 11 & 15 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 11 & 15 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -4 & -12 & 0 & -13 \\ -4 & -4 & 0 & -14 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -18 & -26 & 0 & -29 \end{vmatrix}$

$= 3.1.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -4 & -12 & -13 \\ -4 & -4 & -14 \\ -18 & -26 & -29 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -4 & -4 & -14 \\ -18 & -26 & -29 \end{vmatrix}$

$= 3.\begin{vmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -4 & -116 & 0 \\ -18 & -258 & 0 \end{vmatrix} = 3.1\,(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -4 & -116 \\ -18 & -258 \end{vmatrix} = 3.1056 = 3168$

Te invitamos a ver un breve video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Método de Chío	https://youtu.be/NYZcxSzcb04

1.8. Adjunta de una matriz

Si A es cualquier matriz nxn y Cij es el cofactor del elemento a_{ij}, entonces la matriz:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

se denomina *matriz de cofactores* de A. La transpuesta de esta matriz se denomina *adjunta* de A y se denota *adj(A)*.

Si $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ su matriz de cofactores es $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$ por lo que obtenemos:

$$Adj\ (A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Te invitamos a ver un video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Matriz Adjunta	https://youtu.be/86QH9a03sv8

1.8.1. Cálculo de la Inversa por el método de la Adjunta

Si A es una matriz invertible, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\ (A)}\ Adj\ (A)$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = 64 \Longrightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Podemos comprobarlo aplicando Gauss-Jordan.

Te invitamos a ver un video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Menor complementario y adjunto	https://youtu.be/ks0b0jufI7Y

1.9. Insumo Producto –Matriz de Insumo Producto

El análisis de cuadros de insumo-producto fue desarrollado por Leontief (https://es.wikipedia.org/wiki/Wassily_Leontief) en 1936, como un instrumento de interpretación de interdependencias de los diversos sectores de la economía. Para fijar ideas supongamos el siguiente sistema económico formado por tres sectores de producción:

Compras Ventas	**Demanda Intermedia**			**Demanda Final**	**Producción Bruta**
	Sector 1	Sector 2	Sector 3		
Sector 1	600	400	1400	600	3000
Sector 2	1500	800	700	1000	4000
Sector 3	900	2800	700	2600	7000
Otros	-----	-----	4200		

Esta es una *tabla de transacciones intersectoriales*, que muestra cómo se interrelacionan todas las industrias, en el sentido de que cada una adquiere productos fabricados por las demás a fin de llevar a cabo su propio proceso. Supongamos que los sectores productivos de esta tabla son Sector 1: Agropecuario; Sector 2: Industria; Sector 3: Servicios.

Estos tres nombres reflejan un concepto amplio. En el sector Agropecuario se agrupan todas las empresas agrícolas-ganaderas: producción de cereales, de ganado, lecheras, etc. En el sector Industrial están todas las empresas que producen bienes: de alimentos, textil, etc. En el sector Servicios están todas las empresas que prestan algún tipo de servicios: bancos, transporte, públicos, etc.

En la primera columna de esta tabla: la cifra 600 representa las compras que las empresas del sector Agropecuario han efectuado a otras empresas del mismo sector: semillas, abonos, ganado para engorde, etc. La cifra 1500 representa las compras del mismo sector al sector Industrial: herramientas, fertilizantes, máquinas agrícolas, etc. La cifra 900 representa las compras del mismo sector al sector Servicios: transporte de carga, sanidad, asesoría legal, etc.

De la misma manera, se analizan la 2º y 3º columnas. Estas tres columnas representan la *Demanda Intermedia*: son los insumos que los sectores adquieren para fabricar otros productos, o sea que sus bienes que no llegan al consumidor final sino que se utilizan dentro del proceso de producción. La 4º columna de esta tabla, representa las compras que los consumidores finales efectúan a los sectores de producción, o sea los bienes sean adquiridos por las familias, instituciones o por otros países para ser utilizados en consumo o en inversión. Esta columna recibe el nombre de *Demanda Final* o de Utilización Final.

Como vemos, las columnas nos indican las cantidades compradas por un determinado sector para lograr un determinado nivel de producción específico. En cambio, las filas nos indican las cantidades vendidas por un sector, a todos los sectores compradores o sea, el destino de la producción. Por esta razón, a esta matriz se la conoce como *Matriz Insumo-Producto* (https://economipedia.com/definiciones/matriz-insumo-producto.html)

En la última columna, tenemos el Valor Bruto de la Producción de cada sector o la *Producción Bruta* de cada uno de los sectores. Esas cifras se calculan sumando las ventas que cada sector ha efectuado a cada uno de los demás sectores, o sea sumando horizontalmente cada fila de la tabla.

Las unidades de medida en que se expresan los insumos no deben ser físicas sino monetarias, porque, de lo contrario, no podrían sumarse. Por lo tanto, en estas tablas de transacciones intersectoriales, las cifras deben expresarse en valores monetarios (pesos, dólares, etc.).

1.9.1. La planificación de requerimientos de producción

Hasta aquí hemos tratado los aspectos descriptivos. Ahora trataremos de resolver, usando la misma tabla, lo que ocurre cuando se prevé un incremento de la Demanda Final y cuál debe ser el valor de la Producción Bruta de cada sector que se requerirá para satisfacer ese incremento.

Planteándolo de otra forma: ¿en qué medida tendría que aumentar la Producción de todos y cada uno de los sectores de la economía para que pueda tener lugar un crecimiento en un sector determinado?.

Resolviendo el modelo de Insumo-Producto, se ilustra la forma en que tiene que modificarse todo el flujo de transacciones interindustriales, y también los niveles sectoriales de Producción Bruta, para hacer frente a un cambio dado de la Demanda Final y se proporcionan los instrumentos de cálculo que permitan cuantificar esas modificaciones.

En definitiva, el análisis de Insumo Producto nos permite estimar la producción total de cada sector cuando existe un cambio en la demanda final, pero este análisis se realiza bajo un supuesto que consiste en considerar que *la estructura básica de la economía permanece igual* (esto significa que, para cada sector, la cantidad gastada en cada insumo por cada dólar –u otra unidad monetaria- de producto permanece fija).

1.9.2. La Matriz de Coeficientes Técnicos de Insumo-Producto

Veamos la notación para simbolizar las relaciones entre Producción, Demanda Intermedia y Demanda Final que resultan de la tabla que estamos considerando.

Con X_i se simbolizará la Producción Bruta del sector i:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7000 \end{bmatrix}$$

Con y_i se simbolizará la Demanda Final del sector i:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{bmatrix}$$

Con x_{ij} se representarán las ventas que el sector i ha efectuado al sector *j*:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 400 & 1400 \\ 1500 & 800 & 700 \\ 900 & 2800 & 700 \end{bmatrix}$$

Como la Producción Bruta de cada sector es igual a la suma de las ventas a Demanda Intermedia más las ventas a Demanda Final, las relaciones entre demanda y producción se pueden expresar:

$$
① \begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{cases}
$$

Ó, en términos matriciales

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
$$

Ahora debemos elaborar una 2º tabla, que se conoce con el nombre de *Matriz de Coeficientes Técnicos*, o Matriz de Coeficientes Requerimientos Directos por Unidad de Producción Bruta.

Para ello tomamos el cuadro de transacciones intersectoriales. En cada transacción existen dos sectores: el sector vendedor i y el sector comprador j. Relacionando cada x_{ij} (ventas del sector i al sector j) con la Producción Bruta X_j del sector comprador, efectuamos el cociente $\frac{x_{ij}}{X_j}$ que define el *coeficiente técnico*: a_{ij} y que representa los requerimientos de insumos del sector i necesarios para producir una unidad del producto j. Si se supone que existe proporcionalidad directa entre la Producción Bruta del sector j y el volumen total de los insumos que este sector adquiere de los demás sectores proveedores, podemos admitir que los coeficientes técnicos a_{ij} son constantes y por lo tanto se tiene la ecuación lineal: $x_{ij} = a_{ij} . X_j$. Siguiendo con el ejemplo:

$$
a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{600}{3000} = \frac{1}{5} \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{400}{4000} = \frac{1}{10} \qquad a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{1400}{7000} = \frac{1}{5}
$$

$$
a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{1500}{3000} = \frac{1}{2} \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{800}{4000} = \frac{1}{5} \qquad a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{700}{7000} = \frac{1}{10}
$$

$$
a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{900}{3000} = \frac{3}{10} \qquad a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{2800}{4000} = \frac{7}{10} \qquad a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{700}{7000} = \frac{1}{10}
$$

Por lo tanto, se tiene la Matriz de Coeficientes Técnicos a_{ij}:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} ②
$$

Regresando al sistema de ecuaciones ①

$$
X_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} + y_i \qquad i = 1,2,3
$$

Y reemplazando cada x_{ij} por 2

$$
X_i = \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j + y_i \qquad i = 1,2,3 \qquad ③
$$

Y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad ③$$

o en forma simbólica:

$$X = AX + y \quad ③$$

1.9.3. *La Matriz de Leontief y su inversa*

Si como hemos supuesto a_{ij} son constantes (no varían durante un cierto período de tiempo), ello nos permite utilizar el sistema de ecuaciones ③ para determinar el nivel de Producción Bruta que se requiere en cada sector para satisfacer la Demanda Final prevista de acuerdo a un incremento de ella.

En nuestro ejemplo supongamos que se trata de satisfacer un aumento en la Demanda Final de 400 unidades en el sector agropecuario, 200 en el sector industrial y 200 en el sector servicios y se pregunta: ¿cuáles deben ser los valores X_1, X_2 y X_3 que permitirán satisfacer esos incrementos?

Este problema se resuelve expresando dicho sistema de ecuaciones como una relación funcional entre Producción Bruta y Demanda Final, en que el vector “X” es la variable dependiente y el valor “y” es la variable independiente.

Operando algebraicamente sobre ③

$$X = AX + y$$

$$X - AX = y$$

$$(I\text{-}A)\ X = y$$

$$(I\text{-}A)^{-1}(I\text{-}A) = (I\text{-}A)^{-1}y$$

$$IX = (I\text{-}A)^{-1}y$$

$$X = (I\text{-}A)^{-1}y$$

La matriz $(I - A)$ se denomina *Matriz de Leontief* y $(I - A)^{-1}$ Matriz Inversa de Leontief.

En nuestro ejemplo:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{4}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{-7}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}836 & 0{,}649 & 0{,}480 \\ 1{,}356 & 1{,}864 & 0{,}508 \\ 1{,}667 & 1{,}667 & 1{,}667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{325}{177} & \frac{115}{177} & \frac{85}{177} \\ \frac{80}{59} & \frac{110}{59} & \frac{30}{59} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta los incrementos previstos en la Demanda Final:

$$y = \begin{bmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 2800 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $X = (I\text{-}A)^{-1}y$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{325}{177} & \frac{115}{177} & \frac{85}{177} \\ \frac{80}{59} & \frac{110}{59} & \frac{30}{59} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 2800 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 3960 \\ 5017 \\ 8333 \end{bmatrix}$$

Lo que significa que, para satisfacer la Demanda Final prevista de 1000 unidades de productos agropecuarios, 1200 de productos industriales y 2800 de servicios, se debe generar una Producción Bruta de 3960 unidades en el sector 1, 5017 unidades en el sector 2 y 8333 en el 3.

Si quisiéramos obtener los incrementos de producción de acuerdo a los incrementos de la demanda, debemos calcular X antes y después de los mismos. Se puede comprobar fácilmente que para satisfacer los incrementos previstos de Demanda Final de $\Delta y = \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$ se deben generar en el sistema de producción los siguientes incrementos de Producción Bruta: $\Delta X = \begin{bmatrix} 960 \\ 1017 \\ 1333 \end{bmatrix}$

Ahora bien, si uno quisiera saber, por ejemplo, ¿cuánto se espera demandará el sector del sector 3 para la nueva situación?, deberíamos pensar que el valor que se nos solicita es el nuevo x_{32} de la tabla de demanda intermedia. Pero sabemos que:

$$a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} \Rightarrow x_{32} = a_{32} \,.\, X_2$$

$$x_{32} = \frac{7}{10}.5017$$

$$x_{32} \cong 3512$$

La matriz de insumo producto es central para esta unidad, por tal razón, Te invitamos a ver un video donde se aborda este tema.

Descripción	Dirección URL
Matriz de insumo producto|	https://youtu.be/mZBhvV8BiwA

APÉNDICE - Ejemplo de otro software para operar con matrices

En la actualidad disponemos de una amplia variedad de aplicaciones que nos ayudan en la resolución de operaciones con matrices. Un ejemplo de ellas es el matrixcalculator disponible on line https://matrixcalc.org/es/. Te invitamos a ver un video donde se aborda su utilización. Para ver su aplicación en operaciones con matrices solo requiere que veas los primero 5 minutos

Descripción	Dirección URL
Uso de matrixcal	https://www.youtube.com/watch?v=MEhzzHim3NI

Final de la Unidad 1

Trabajo Práctico N° 1

Problema 1. Una empresa, dedicada a la construcción de placares[1] de melamina, tiene organizada la producción en diferentes cuadros de doble entrada (matrices de datos en matemática), tal como se muestra a continuación.

Lista de precios	Placard 2 puertas 4 estantes, 1,40 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,14 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,60 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,80 m x 1,80 m
Pago Contado	U$S 100	U$S 150	U$S 190	U$S 310
Pago Débito	U$S 110	U$S 160	U$S 180	U$S 320
Crédito (3 cuotas)	U$S 120	U$S 170	U$S 210	U$S 330
Distribuidor	U$S 90	U$S 135	U$S 172	U$S 295

Ventas de enero	Placard 2 puertas 4 estantes, 1,40 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,14 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,60 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,80 m x 1,80 m
Sede Salta	18	22	14	23
Sede La Rioja	15	17	8	12
Sede Córdoba	21	16	19	20
Sede Santa Fe	12	11	14	17
Sede Corrientes	13	15	22	8
Sede Tucumán	9	7	10	11

Ventas de febrero	Placard 2 puertas 4 estantes, 1,40 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,14 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,60 m x 1,80 m	Placard 2 puertas corredizas 1,80 m x 1,80 m
Sede Salta	14	22	12	20
Sede La Rioja	12	18	10	10
Sede Córdoba	19	14	15	17
Sede Santa Fe	10	12	13	15
Sede Corrientes	11	16	21	9
Sede Tucumán	8	9	12	10

---

[11] Placar es una adaptación al español de la voz francesa *placard,* usada para designar el armario o ropero y su plural es *placares.* En muchos países de América se emplea el anglicismo *clóset*.

Si llamamos **P** a la matriz que contiene los precios de venta para diferentes categorías de clientes, **E** a la matriz de unidades vendidas en el mes de enero y con **F** a la matriz de unidades vendidas en el mes de febrero, se te pide que:

- Calcules las operaciones indicadas, si es que son conformables.
- **Interpretes** la información que arrojan en el contexto del problema, esto es, ¿qué importancia tiene lo realizado y qué aportaría para alguien que está en la administración de la empresa?

a) E – F b) F – E c) E+F

d) E*P e) F*P^T f) (E+F)*P^T

g) P*$(E+F)^T$ h) 1,21*E*P^T i) 0,21*F*P^T

Problema 2. Sean A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Consideremos que la matriz *C* se obtiene del producto *AB*, encuentra cada uno de los elementos siguientes explicando detalladamente cómo se obtienen los mismos. Esto es, no tiene relevancia indicar cuál es el valor numérico del elemento obteniéndolo por software, sino el modo en que lo calculas por definición.

a) c_{11} b) c_{32} c) c_{23}

Problema 3. Encuentra al menos dos matrices cuadradas con todos sus elementos distintos de cero, cuyo producto de como resultado la matriz nula. Explica y fundamenta, apoyándote en propiedades y constructos del álgebra, cómo obtuviste cada matriz.

Problema 4. Guillermo y Miguel tienen acciones de la bolsa, distribuidas del siguiente modo:

	BAC	GM	IBM	TRW
Guillermo	200	300	100	200
Miguel	100	200	400	0

Al cierre de operaciones en cierto día, los precios de las acciones, en dólares, están dados por la matriz:

	BAC	GM	IBM	TRW
precio	54	48	98	82

Si presentamos estos datos en forma matricial y realizamos el producto de estas matrices ¿Cuál es el significado de las entradas de la matriz producto en el contexto del problema? Realiza el cálculo y explica lo obtenido para las cotizaciones dadas.

Problema 5. Un comité de admisión de una universidad prevé la inscripción de 8.000 estudiantes para el próximo año. Para satisfacer las cuotas de ingreso, se han clasificado a los futuros estudiantes según sexo y lugar de residencia. El número de estudiantes en cada categoría está dado por :

	Hombre	Mujer
Local	2700	3000
Foráneo	800	700
Extranjero	500	300

Con foráneo se entienden a los estudiantes que no son de la ciudad, pero sí del país. Extranjero, en tanto, designa a los estudiantes que no son del país.

Al utilizar los datos acumulados de años anteriores, el comité de admisión considera que la probabilidad de que estos estudiantes opten por asistir a la Facultad de Letras y Ciencias, a la Facultad de Artes, la Facultad de Ciencias Económicas y la Facultad de Ingeniería, son:

	LyC	Artes	CE	Ing
Hombre	0.25	0.20	0.30	0.25
Mujer	0.30	0.35	0.254	0.10

Si A es la matriz confeccionada con el número de estudiantes y B la de las probabilidades, realiza el producto de estas. ¿qué representa? Explica detalladamente la información que brinda en el contexto del problema.

Problema 6. La firma comercial Cindy realiza llamadas regulares de larga distancia a Londres, Tokio y Hong Kong. Las matrices A y B brindan información sobre el tiempo (en minutos) de duración de sus llamadas en horas pico y no pico, respectivamente, a cada una de las ciudades durante el mes de septiembre.

$$\begin{array}{cccccc} & & \text{Londres} & \text{Tokio} & \text{Hong Kong} & \\ A= & | & 80 & 60 & 40 & | \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{cccccc} & & \text{Londres} & \text{Tokio} & \text{Hong Kong} & \\ B= & | & 300 & 150 & 250 & | \end{array}$$

Los costos de las llamadas para los períodos pico y no pico en el mes en cuestión están dados, respectivamente por las matrices:

$$C = \begin{array}{c} Londres \\ Tokio \\ Hong\ \text{Kong} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}34 \\ 0{,}42 \\ 0{,}48 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{array}{c} Londres \\ Tokio \\ Hong\ \text{Kong} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 0{,}31 \\ 0{,}35 \end{bmatrix}$$

Calcule la matriz AC+BD y explique lo que representa en el contexto del problema.

Problema 7. La producción total de sistemas de audio en las tres plantas de la *compañía Acrosonic*, durante los meses de mayo y junio, discriminada por modelos, está dada por las matrices A y B respectivamente:

$$A = \begin{array}{c|cccc|} & \text{M.A} & \text{M.B} & \text{M.C} & \text{M.D} \\ \text{Fábrica I} & 320 & 280 & 460 & 280 \\ \text{Fábrica II} & 480 & 360 & 580 & 0 \\ \text{Fábrica III} & 540 & 420 & 200 & 880 \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c|cccc|} & \text{M.A} & \text{M.B} & \text{M.C} & \text{M.D} \\ \text{Fábrica I} & 210 & 180 & 330 & 180 \\ \text{Fábrica II} & 400 & 300 & 450 & 40 \\ \text{Fábrica III} & 420 & 280 & 180 & 740 \end{array}$$

A su vez, los costos de producción y los precios de ventas de cada unidad de estos sistemas están dados por las matrices C y D, respectivamente, donde:

$$C = \begin{array}{c|c|} \text{Modelo A} & 120 \\ \text{Modelo B} & 180 \\ \text{Modelo C} & 260 \\ \text{Modelo D} & 500 \end{array} \qquad D = \begin{array}{c|c|} \text{Modelo A} & 160 \\ \text{Modelo B} & 250 \\ \text{Modelo C} & 350 \\ \text{Modelo D} & 700 \end{array}$$

Calcula las siguientes matrices y explica el significado, si es que tiene sentido, de las entradas de cada matriz, en el contexto del problema.

a) AC b) AD c) BC d) BD e) (A + B)C

f) (A + B)D g) A(D – C) h) B(D – C) i) (A + B)(D – C)

Problema 8. Evaluar los siguientes determinantes.

a) $det\begin{pmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{pmatrix}$

b) $det\begin{pmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 9. Encontrar todos los valores de x para los cuales $det(A)$ = 0. Fundamenta tu respuesta.

a) $A = \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ -5 & x+4 \end{bmatrix}$. b) $A = \begin{bmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 3 & x-1 \end{bmatrix}$

Problema 10. Encontrar el valor de la incógnita sabiendo que:

$$det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{pmatrix}$$

Fundamenta los procedimientos empleados.

Problema 11. Comprobar que $det(A) = det(A^T)$ para las siguientes matrices y luego verifica tus procedimientos utilizando algún software

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Problema 12. Evaluar el determinante de la matriz dada, reduciendo la matriz a forma escalonada. Fundamenta los procedimientos empleados. Luego verifica tus procedimientos utilizando algún software

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Problema 13. Dado que $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -6$, calcular los siguientes determinantes fundamentando los procedimientos con propiedades

a) $det\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$ b) $det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$

c) $det\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ d) $det\begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{pmatrix}$

Problema 14. Comprobar que $det(k \cdot A) = k^n \cdot det(A)$, siendo n el orden del determinante, para las siguientes matrices

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; k = 2$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}; k = -2$

Verifica tus procedimientos utilizando algún software.

Problema 15. Comprobar que $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ siendo A y B las siguientes matrices:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Verifica tus procedimientos utilizando algún software.

Problema 16. Determinar cuáles de las siguientes matrices son invertibles. Fundamenta tu respuesta.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Problema 17. ¿Para qué valor(es) de x se cumple que A no es invertible? Justifica la respuesta.

a) $A = \begin{bmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ x & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 18. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar los menores complementarios y cofactores que se indican a continuación:

a) M_{13} y C_{13} b) M_{23} y C_{23} c) M_{22} y C_{22} d) M_{21} y C_{21}

Problema 19. Evaluar $det(A)$ mediante desarrollo por cofactores a lo largo de una fila o una columna que elijas

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

Problema 20. Supongamos una economía hipotética con sólo 2 industrias, I y II, y con las interacciones entre industrias como se advierten en la tabla, expresados en millones de pesos:

	Industria I	Industria II	Demanda Finales	Producción total
Industria I	240	750	210	1.200
Industria II	720	450	330	1.500
Insumos Primarios	240	300		

a) Obtenga la nueva matriz de insumo producto si las demandas finales cambian a 312 unidades en el caso de la industria I y a 299 unidades para la industria II

b) ¿Cuáles serán entonces los nuevos insumos primarios y remuneraciones de los trabajares correspondientes a las dos industrias?

Problema 21. La tabla da la interacción entre dos sectores en una economía hipotética, expresada en millones de pesos:

	Industria I	Industria II	Demanda Finales	Producción total
Industria I	20	56	24	100
Industria II	50	8	22	80
Insumos Primarios	30	16		

a) Determine la matriz de coeficientes técnicos.

b) Si en cinco años las demandas finales cambian a 74 en el caso de la industria I y a 37 para la industria II ¿cuánto deberá producir cada industria a fin de satisfacer esta demanda proyectada?

c) Determine la matriz de Leontief

d) Determine la matriz de coeficientes directos e indirectos

e) ¿Cuáles serán los nuevos requerimientos de insumos primarios y remuneraciones de los trabajadores en 5 años para las dos industrias?

Problema 22. La interacción entre tres industrias P, Q y R está dada por la siguiente tabla, expresada en millones de pesos:

	Industrias				
	P	Q	R	Demanda Finales	Producción total
Industria P	22	80	76	42	220
Industria Q	88	40	38	34	200
Industria R	66	60	57	7	190
Insumos Primarios	44	20	19		

a) Determine la matriz de coeficientes técnicos.

b) Determine las nuevas producciones de P, Q y R si las demandas finales cambian en futuro a 68, 51 y 17 para P, Q y R respectivamente.

c) Determine la matriz de Leontief

d) Determine la matriz de coeficientes directos e indirectos

e) ¿Cuánto producirá la Industria Q para la Industria R?
f) ¿Cuánto insumirá la industria P de la Industria R?

Problema 23. La interacción entre tres industrias P, Q y R está dada por la siguiente tabla:

	Industrias				
	I	II	III	Demanda Finales	Producción total
Industria I	20	48	18	14	100
Industria II	30	12	54	24	120
Industria III	30	36	36	72	174
Insumos Primarios	20	24	66		

a) Determine la matriz de coeficientes técnicos.

b) Suponga que en tres años se anticipa que las demandas finales cambiarán a 24, 33 y 75 para las industrias I, II y III, respectivamente. ¿Cuánto debería producir cada industria con objeto de satisfacer la demanda proyectada?

c) Determine la matriz de Leontief

d) Determine la matriz de coeficientes directos e indirectos

e) ¿Cuánto le venderá la Industria I para la Industria II?

f) ¿Cuánto insumirá la industria III de la Industria I?

Problema 24. La siguiente tabla define las necesidades de producción interna de tres sectores de la economía, medidos porcentajes sobre el valor bruto de producción de cada sector (coeficientes técnicos).

Producción\Demanda	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0.4	0.03	0.02
Manufactura	0.06	0.37	0.1
Servicios	0.12	0.15	0.19

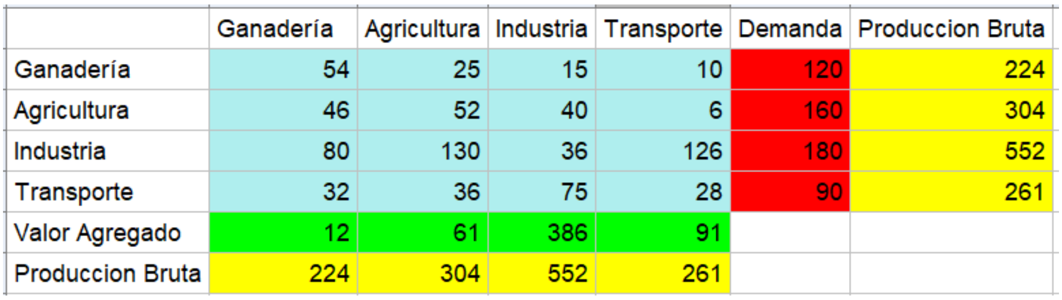
Se sabe que la demanda actual es de 80, 140 y 200 millones de pesos para cada uno de los sectores: agricultura, manufactura y servicios.

a) Determina el cuadro de transacciones intersectoriales actual de estos tres sectores de la economía

b) ¿Qué cantidad demanda o insume, en dólares, Agricultura de Servicios?

c) ¿Cuánto produce, o le vende, Agricultura a Servicios? Expresa el valor en dólares y no porcentaje.

Problema 25. En una población se tienen 4 sectores de economía: ganadería, agricultura, industria y transporte. El cuadro de transacciones intersectoriales actual, se resume en la siguiente tabla, expresada en millones de pesos.



	Ganadería	Agricultura	Industria	Transporte	Demanda	Produccion Bruta
Ganadería	54	25	15	10	120	224
Agricultura	46	52	40	6	160	304
Industria	80	130	36	126	180	552
Transporte	32	36	75	28	90	261
Valor Agregado	12	61	386	91		
Produccion Bruta	224	304	552	261		

a) Si la demanda final se incrementara en un 20% para cada uno de los sectores, determine el nuevo cuadro de transacciones intersectoriales.

b) ¿Cuánto produciría Agricultura para la Industria después del aumento?

c) ¿Cuánto insumirá la Industria del transporte después del aumento?

Problema 26. Un pequeño pueblo se tiene 3 sectores económicos, una mina de cobre, un ferrocarril, y una planta de energía eléctrica. Para producir una U$S 1 de cobre la mina gasta U$S 0.20 de cobre, U$S 0.1 de transporte y U$S 0.2 de energía eléctrica. Para producir U$S 1 de transporte, el ferrocarril requiere gastar U$S 0.1 de cobre, U$S 0.1 de transporte y U$S 0.4 de energía eléctrica. Para producir U$S 1 de energía eléctrica, la planta demanda U$S 0.2 de cobre, U$S 0.2 de transporte y U$S 0.3 de energía eléctrica. Durante un año hay una demanda externa de 1,2 millones de dólares de cobre, 0.8 millones de dólares de transporte y 1.5 millones de dólares por concepto de energía ¿Cuánto debe producir cada sector económico para satisfacer la demanda total? ¿Cuánto paga cada sector económico en remuneraciones e insumos primarios? Fundamenta la respuesta.