TPE Unidad 3

Ibarra Hector Leonel

Ejercicio 1

a) Los vectores son linealmente independientes. Son dos vectores que nunca se cruzan.

b) Los vectores son linealmente independientes. Son dos vectores que solo se cruzan en el origen.

c) Los vectores son linealmente dependientes. Son dos vectores con direcciones opuestas pero que pueden ser combinación lineal uno del otro.

d) Sean $u = (6, 8, 10)$ y $v = (2, -4, 5)$ son linealmente independientes ya que no es posible encontrar un escalar k tal que $k * (2, -4, 5) = (6, 8, 10)$

e) Sean $a = (0.5, 1, 1.3) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{13}{10})$ y $b = (1, 2, 2.6) = (1, 2, \frac{26}{10})$ son linealmente dependientes ya que existe un $k = 2$ para el que se cumple que $k * a = 2 * (\frac{1}{2}, 1, \frac{13}{10}) = (1, 2, \frac{26}{10}) = b$

Ejercicio 2

a) Es correcta

b) Es incorrecta. Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ deben ser linealmente independientes para ser una base

c) Es incorrecto. Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ deben ser linealmente independientes para ser una base

d) Es incorrecto. Un espacio vectorial V es aquel con junto de vectores que cumplen las 10 propiedades de los espacios vectoriales:

1. Clausura de la suma
2. Elemento inverso de la suma
3. Elemento neutro de la suma
4. Asociatividad de la suma
5. Conmutatividad de la suma
6. Clausura del producto por un escalar
7. Asociatividad del producto con dos escalares
8. Distributiva del producto escalar respecto de la suma de vectores
9. Distributiva del producto escalar respecto de la suma de escalares
10. Elemento neutro del producto

e) Es correcto.

Ejercicio 3

$$\begin{cases} 2y + 2x - 4z &= 0 \\ -x - w + 2y &= 0 \\ -y - 2x + 4z &= 0 \end{cases}$$

Primero ordenamos las variables del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4z + 0w &= 0 \\ -x + 2y + 0z - w &= 0 \\ -2x - y + 4z + 0w &= 0 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz: $F_3 = F_3 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 = F_1 - 2F_3; F_2 = F_2 - 2F_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 = -F_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 = F_1 - 2F_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 = -\frac{1}{2}F_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que el espacio solución esta dado por:

$$S = \{(x, y, z, w) | x = -w; y = 0; z = -\frac{1}{2}w, w \in \mathbb{R}\}$$

Si pasamos a notación vectorial tenemos que:

$$(x, y, z, w) = (-w, 0, -\frac{1}{2}w, w) = w(-1, 0, -\frac{1}{2}, 1)$$

Por lo que la base de S:
Base $= \{(-1, 0, -\frac{1}{2}, 1)\}$
Dimensión $= 1$

Ejercicio 4
Sea el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^4$

$W = \{v_1 = (1, 1, 2, -3), v_2 = (-2, -2, -4, 6), v_3 = (-1, -1, -2, 3)\}$
¿Son estos vectores LI?
No son linealmente independientes ya que es posible escribir un vector como combinación lineal de los otros:

$$-2v_1 = v_2 \to -2(1, 1, 2, -3) = (-2, -2, -4, 6)$$

$$-1v_1 = v_3 \to -1(1, 1, 2, -3) = (-1, -1, -2, 3)$$

¿Cuál es el espacio generado por ellos?
En este caso debemos determinar el espacio generado por el vector $v_1 = (1, 1, 2, -3)$ que estaría definido por todas las combinaciones lineales de ese vector:

$$V = \{(x, y, z, w)|k(1, 1, 2, -3), k \in \mathbb{R}\}$$

¿Podrías dar una base para el espacio generado?
Base = $\{(1, 1, 2, -3)\}$
¿Cuál es la dimensión?
Dimensión = 1

¿El vector $v = (-1, 1, 2, 3)$ pertenece al espacio generado?
No pertenece al espacio generado ya que no existe un k tal que:

$$kv_1 = k(1, 1, 2, -3) = (-1, 1, 2, 3)$$