Ibarra Hector Leonel

Trabajo Auto-evaluativo Unidad 4

Problema

Una empresa distribuye su capital entre dos tipos de fondos, renta fija (x), renta variable (y). Cada mes el 30% del dinero invertido en renta fija se transfiere a renta variable, el 20% del dinero invertido en renta variable pasa a renta fija y el resto del capital en cada tipo de fondo permanece en su lugar.

Representación del problema

Representamos esta situación mediante un sistema de ecuaciones que exprese como varia el capital en cada tipo de inversión y obtener una regla de correspondencia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. Cada mes el 30% invertido en renta fija se transforma en renta variable.
2. Cada mes el 20% invertido en renta variable se transforma en renta fija.
3. Cada mes el resto de cada tipo de fondo permanece en su lugar.

Teniendo en cuenta 1 y 2 podemos decir que:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2y \\ 0.3x \end{pmatrix}$$

Pero también hay que tener en cuenta lo mencionado en 3 por lo que resulta:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7x + 0.2y \\ 0.3x + 0.8y \end{pmatrix}$$

Determinar si T es una transformación lineal

Para determinar si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineas se debe probar que se cumplen las propiedades:

Dados dos elementos $u, v \in V$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$1.\ T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$2.\ T(\alpha\, u) = \alpha\, T(u)$$

Propiedad 1. Definimos entonces dos vectores:

u=$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, v=$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(u + v) = T(u) + T(v)$$
$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)$$

Aplicamos la regla de transformación definida anteriormente

$$\begin{bmatrix}0,7(u_1+v_1)+0,2(u_2+v_2)\\0,3(u_1+v_1)+0,8(u_2+v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,7u_1+0,2u_2\\0,3u_1+0,8u_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,7v_1+0,2v_2\\0,3v_1+0,8v_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0,7(u_1+v_1)+0,2(u_2+v_2)\\0,3(u_1+v_1)+0,8(u_2+v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,7u_1+0,2u_2+0,7v_1+0,2v_2\\0,3u_1+0,8u_2+0,3v_1+0,8v_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0,7(u_1+v_1)+0,2(u_2+v_2)\\0,3(u_1+v_1)+0,8(u_2+v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,7u_1+0,7v_1+0,2u_2+0,2v_2\\0,3u_1+0,3v_1+0,8u_2+0,8v_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0,7(u_1+v_1)+0,2(u_2+v_2)\\0,3(u_1+v_1)+0,8(u_2+v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,7(u_1+v_1)+0,2(u_2+v_2)\\0,3(u_1+v_1)+0,8(u_2+v_2)\end{bmatrix}$$

Llegamos a una igualdad en ambos miembros por lo que podemos decir que se cumple la propiedad 1.

<u>Propiedad 2.</u>

$$\mathrm{T}(\alpha\, u) = \alpha\, T(u)$$

$$\mathrm{T}\left(\alpha \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) = \alpha T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathrm{T}\left(\begin{bmatrix}\alpha u_1\\\alpha u_2\end{bmatrix}\right) = \alpha T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right)$$

Aplicamos la regla de transformación definida anteriormente

$$\begin{bmatrix}0,7(\alpha u_1)+0,2(\alpha u_2)\\0,3(\alpha u_1)+0,8(\alpha u_2)\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}0,7u_1+0,2u_2\\0,3u_1+0,8u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha(0,7u_1+0,2u_2)\\\alpha(0,3u_1+0,8u_2)\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}0,7u_1+0,2u_2\\0,3u_1+0,8u_2\end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix}0,7u_1+0,2u_2\\0,3u_1+0,8u_2\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}0,7u_1+0,2u_2\\0,3u_1+0,8u_2\end{bmatrix}$$

Llegamos a una igualdad en ambos miembros por lo que podemos decir que se cumple la propiedad 2.

Podemos concluir que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.7x+0.2y\\0.3x+0.8y\end{pmatrix}$$

Es un trasformación lineal.

<u>Matriz asociada a la transformación</u>

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.7x+0.2y\\0.3x+0.8y\end{pmatrix}$$

Lo podemos escribir también como:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.7 & 0.2\\0.3 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada es:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix}0.7 & 0.2\\0.3 & 0.8\end{pmatrix}$$

Para pensar: ¿Qué ventajas tiene representar un proceso económico mediante una transformación lineal?

Ibarra Hector Leonel

En general poder encontrar una transformación lineal permite proyectar el comportamiento de lo que se esta modelando. Para este caso en particular permitiría proyectar los resultados de las inversiones para los fondos x, y