Ibarra Hector Leonel

Ejercicio 1

Tasa de crecimiento de las ventas:

$$f(t) = 2000 - 1500e^{-0.05t}\,(0 \leq t \leq 60)$$

Para determina una expresión que dé el número total de computadoras que se venderán en t meses calcularemos la integral de la función $f(t)$:

$$\int 2000 - 1500e^{-0.05t}\,dt$$

Aplicando propiedades de la integración, podemos separar la integral en integrales mas sencillas:

$$\int 2000 - 1500e^{-0.05t}\,dt = \int 2000\,dt - 1500\int e^{-0.05t}\,dt$$

Resolvemos primero:

$$\int 2000dt = 2000t + C_1$$

Resolvemos la otra integral:

$$\int e^{-0.05t}\,dt$$

Si definimos $u = -0.05t$ entonces $du = -0.05dt \rightarrow dt = -\dfrac{1}{0.05}du$ entonces sustituyendo en la integral:

$$\int e^u\,du = -\frac{1}{0.05}\int e^u\,du = -\frac{1}{0.05}e^u + C_2$$

Entonces volviendo a reemplazar por el valor original:

$$\int e^{-0.05t}\,dt = -\frac{1}{0.05}e^{-0.05t} + C_2$$

Volviendo a la operación inicial tenemos entonces que:

$$\int 2000 - 1500e^{-0.05t}\,dt = 2000t + C_1 - 1500(-\frac{1}{0.05}e^{-0.05t} + C_2)$$
$$= 2000t + \frac{1500}{0.05}e^{-0.05t} + C$$

Entonces la función que no determinara cuantas computadoras son vendidas después de t meses esta dada por:

$$F(t) = 2000t + 30000e^{-0.05t}$$

¿Cuántas computadoras venderá Universal en el primer año en que estén en el mercado?

Para responder esta pregunta deberemos evaluar en t=12 es decir:

$$F(12) \approx 40464$$

Ibarra Hector Leonel

Ejercicio 2

$$r(t) = 400(1 + \frac{2t}{24 + t^2})\,(0 \leq t \leq 5)$$

Para poder determinar la función que necesitamos integramos r(t):

$$\int 400(1 + \frac{2t}{24 + t^2})\,dt = 400 \int 1\,dt + \frac{2t}{24 + t^2}\,dt$$
$$= 400[\int 1\,dt + \int \frac{2t}{24 + t^2}\,dt]$$

Se aplicaron reglas de derivación extrayendo un escalar de la integral y la integral de la suma de dos funciones es la suma de las integrales. De esta forma podemos separar en expresiones más simples de integrar.

Calculamos la primer integral de la expresión:

$$\int 1\,dt = t + C_1$$

Calculamos la segunda integral de la expresión:

$$\int \frac{2t}{24 + t^2}\,dt = \int \frac{1}{24 + t^2} 2t\,dt$$

Podemos aplicar sustitución. Podemos definir $u = t^2 + 24$ entonces $du = 2t\,dt$. Y reemplazando tenemos:

$$\int \frac{1}{u}\,du = ln|u| + C_2$$

Volviendo a reemplazar tenemos:

$$\int \frac{1}{24 + t^2} 2t\,dt = ln|24 + t^2| + C_2$$

Finalmente armando la expresión inicial:

$$\int 400(1 + \frac{2t}{24 + t^2})\,dt = 400[t + C_1 + ln|24 + t^2| + C_2]$$
$$= 400(t + ln|24 + t^2|) + C$$

Tenemos entonces la función:

$$R(t) = 400(t + ln|24 + t^2|) + C$$

Pero como la población actual es 60000 podemos decir que cuando $t = 0\,, R(0) = 60000$:

$$R(0) = 400(0 + ln|24 + 0^2|) + C = 60000$$

Entonces:

$$C = 60000 - 400ln|24| \approx 58728$$

Por lo tanto nuestra función será:

$$R(t) = 400(t + ln|24 + t^2|) + 58728$$

¿Cuál será la población dentro de 5 años a partir de ahora?

Para responder esta pregunta vamos evaluar $R(5)$:

$$R(5) = 400(5 + ln|24 + 5^2|) + 58728 = 2000 + ln|49| + 58728 \approx 60731$$

Podemos decir entonces que la población dentro de 5 años sera de 60731 personas aproximadamente.

Ejercicio 3

a)$\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{(x^3+2x)^2}\,dx$

La misma función se puede escribir como:

$\displaystyle\int \frac{1}{(x^3+2x)^2}(3x^2+2)\,dx$

Aplicaremos sustitución por y definimos $u = x^3 + 2x$ entonces $du = 3x^2 + 2\,dx$

Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = ln|u^2| + C$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x^3+2x)^2}(3x^2+2)\,dx = ln|x^3+2x| + C$$

Ejercicio 4

a)$f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f(2) = 4$

Primero calculamos la integral de $f'(x)$ para obtener $f(x)$

$\displaystyle\int 3x^2 - 6x\,dx = 3\frac{1}{3}x^3 - 6\frac{1}{2}x^2 + C = x^3 - 3x^2 + C$

Y como $f(2) = 4$ entonces $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + C = 4 \rightarrow C = 4 - 8 + 12 = 8$

Por lo que la función que verifica las condiciones es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$

b)$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y $f(4) = 2$

Primero calculamos la integral de $f'(x)$ para obtener $f(x)$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$