Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

Educación a Distancia

ÁLGEBRA MATRICIAL

Universidad Nacional de San Luis

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales

Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales

Índice

UNIDAD 4 .... **7**

Espacios vectoriales avanzados y aplicaciones **7**

4.1 Transformaciones lineales 8

4.1.1Definición de transformación lineal. 8

4.1.2 Matriz asociada a una transformación lineal. 11

4.1.3 Núcleo e imagen de una transformación lineal. 14

4.2 Autovalores y autovectores 15

4.2.3 Diagonalización de matrices. 20

Trabajo Práctico N° 4 25

REFERENCIAS


Concepto o definición importante

Curiosidad o comentario sobre un tema


Resumen para recordar y tener en cuenta


Preguntas de reflexión

Libro electrónico para descargar


Video de YouTube


Actividad práctica para realizar


Situación problemática

Página de internet

Síntesis de ideas o conclusiones

Unidad 4

Espacios vectoriales avanzados y aplicaciones

En la unidad anterior conocimos los espacios vectoriales y detectamos varios de ellos. En esta unidad encontraremos las relaciones que existen entre ellos que serán de interés en las aplicaciones. Para explicar estas relaciones utilizaremos las transformaciones lineales dando origen a los autovalores y autovectores (también conocidos como valores y vectores propios) que son usados en diversas áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica y aerodinámica, entre otras. ejemplo de esto A continuación se describen algunos de sus principales usos en estas áreas.

01 **En estadística**: tienen gran uso, ya que se utilizan en la parte de componentes principales del análisis multivariado para el cálculo de los valores propios de la matriz de varianzas y covarianzas, lo que, a su vez, permite calcular después las distancias óptimas entre vectores. Asimismo, con los valores propios es posible decidir qué variables son las que en realidad importan en un estudio y con base en este resultado realizar agrupamientos de las variables.

02 **En la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:** En aquellos sistemas de ecuaciones compuestos por ecuaciones diferenciales lineales en las que se puede establecer la ecuación característica que tiene como raíces a los autovalores.

03 **En robótica:** En el diseño de robots (robótica) se requiere el uso constante de rotaciones de cuerpos rígidos. Por medio de transformaciones lineales de los sistemas de coordenadas siempre hay al menos un conjunto de tres direcciones ortogonales alrededor de las cuales el cuerpo puede rotar sin precisión; para su cálculo se usan autovectores.

04 **En los grafos**. Un autovalor de un grafo se define como el autovalor de la matriz de adyacencia del grafo A. El autovector principal de un grafo se usa para medir la centralidad de sus vértices.

05 **En mecánica cuántica**: gran parte de su desarrollo se debe a los autovalores y autovectores, ya que las observaciones en un cierto estado se pueden representar mediante operadores hermitianos Q. Después, se encuentra el autovalor λ del operador, y el estado del sistema será la proyección del estado sobre el autovector asociado con λ.

En biometría los autovectores se usan para el procesamiento de imágenes, donde las componentes de los vectores son la luminancia de cada píxel. De esta forma, a través de los autovectores se puede expresar una imagen con la combinación de otras. Los autovectores de la matriz de covarianza asociada a un conjunto amplio de imágenes normalizadas de rostros se llaman autocaras.

Los autovalores y autovectores están presentes en todas las ciencias aplicadas. Se podría afirmar que es muy raro encontrar un área donde nunca se hayan usado.
En esta unidad estudiamos qué es una transformación entre espacios vectoriales y cuándo una transformación es lineal. Después, asociamos a una transformación lineal su representación matricial, y con esta calculamos los valores y vectores propios correspondientes

4.1 Transformaciones lineales

4.1.1 Definición de transformación lineal.

Una **transformación lineal** (o también conocido como operador lineal) es una forma de relacionar dos espacios, es establecer una correspondencia entre los conjuntos que permite conocer relaciones que pueden aplicarse. A las transformaciones lineales las denotaremos con la letra "T" de modo que si tenemos dos espacios vectoriales V y W una transformación lineal es una relación entre los elementos de V y W que denotaremos por

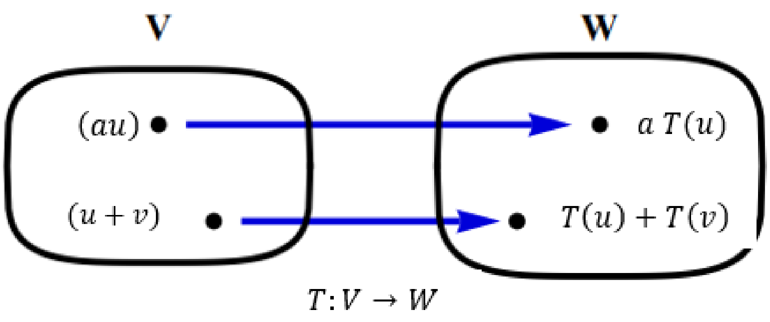
$$T: V \to W$$

Esta relación debe cumplir que al aplicar la transformación a la suma dos vectores de V debe ser igual a sumar la transformación aplicada a cada vector por separado, esto es que la suma de vectores en el espacio V origina la suma de vectores en el espacio W. De forma similar debe ocurrir con la multiplicación por un escalar, la transformación de un escalar por un vector del espacio V debe ser igual al escalar multiplicado por la transformación del vector. Si expresamos esto en símbolos podemos decir que se debe cumplir que:

Dados dos elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y un escalar a

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
$$T(a\mathbf{u}) = a\,T(\mathbf{u})$$

Al espacio V lo llamaremos dominio de la transformación y a W rango o codominio de la transformación. Observemos que el lado izquierdo tenemos la transformación aplicada a operaciones en el espacio vectorial V mientras que en el lado derecho tenemos operaciones en el espacio vectorial W.



¿Cómo verificamos si **una relación entre dos espacios V y W es una transformación lineal**? Debemos verificar que se cumplan las dos propiedades mencionadas. Para ello podemos proceder de dos formas:

1) Tomamos dos vectores genéricos del espacio V (**u**,**v**), los sumamos (**u+v**) luego aplicamos la transformación y mediante operaciones algebraicas obtenemos la transformación aplicada a cada vector individualmente.
2) Por un lado tomamos dos vectores genéricos del espacio V (**u**,**v**) a cada uno de ellos le aplicamos la transformación y luego sumamos. Por otro lado sumamos los vectores y luego aplicamos la transformación. Ambos resultados deben ser iguales

Analicemos algunos ejemplos

Sea V el espacio de las matrices 2x2 ($V = M_{2x2}$) y W los puntos del plano, es decir W = R^2 y para cada matriz de V definimos la transformación

$$T: M_{2x2} \to R^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (5a - 2b, 2b + c + d)$$

Solución

Suma

Aquí utilizamos el método 2. Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, al aplicar la transformación a cada una de las matrices:

$$T(\mathbf{A}) = T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = (5a_1 - 3b_1, 2b_1 + c_1 + d_1)$$

$$T(\mathbf{B}) = T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = (5a_2 - 3b_2, 2b_2 + c_2 + d_2)$$

Luego, sumamos ambos resultados, entonces tenemos la suma de las transformadas:

$$T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B}) = (5(a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2), 2(b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2)). \quad \mathbf{(8.2.4)}$$

Al aplicar la definición de T a la suma de matrices $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$:

$$T(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$= (5(a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2), 2(b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2)). \quad \mathbf{(8.2.5)}$$

Como **(8.2.4)** y **(8.2.5)** coinciden, concluimos que se cumple la linealidad de la suma.

Producto

Ahora utilizamos el método 1. Sea $\mathbf{A} \in M_{2\times 2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix}$, al aplicar la transformación al producto $\alpha\mathbf{A}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{A}) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} &= (5\alpha a_1 - 3\alpha b_1, 2\alpha b_1 + \alpha c_1 + \alpha d_1) = \alpha(5a_1 - 3b_1, 2b_1 + c_1 + d_1) \\
&= \alpha T(\mathbf{A}).
\end{aligned}
$$

Por el método 1 concluimos que T sí cumple la condición de linealidad, producto por un escalar.

Por tanto, se cumplen las dos condiciones de linealidad y se concluye que la transformación sí es lineal.

Corrobore que si V = R^2 y W = R^3 la transformación definida por

$$T: R^2 \rightarrow R^3$$
$$T((x, y)) = (2x, x - y, -y)$$

Es una transformación lineal

Solución

Suma

En este caso utilizamos el método 1. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, entonces: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y aplicamos la transformación a la suma:

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{si se aplica la definición de } T \\
&= (2(x_1 + x_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), -(y_1 + y_2)) && \text{al abrir paréntesis} \\
&= (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2, -y_1 - y_2) && \text{al reagrupar} \\
&= (2x_1 + 2x_2, (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), -y_1 - y_2) && \text{si se separan con componentes} \\
&= (2x_1, x_1 - y_1, -y_1) + (2x_2, x_2 - y_2, -y_2) && \text{por imagen de } T \qquad 4.1 \\
&= T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2).
\end{aligned}
$$

Por tantc por 4.1 concluimos que se cumple la linealidad de la suma.

Producto

En este caso también usamos el método 1. Sean $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces: $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y)$ y aplicamos la transformación al producto:

$$T(\alpha\mathbf{v}) = T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x, \alpha x - \alpha y, -\alpha y) = \alpha(2x, x - y, -y) = \alpha T(\mathbf{v}).$$

Por el método 1 concluimos que T cumple la condición de producto por un escalar.

Como se cumplen las dos condiciones de linealidad, podemos concluir que la transformación sí es lineal.

Las transformaciones lineales no necesariamente deben relacionar espacios vectoriales distintos, los espacios V y W pueden ser los mismos.

Para el espacio vectorial R^2, se define $T: R^2 \to R^2$

$$T((x, y)) = (2x, 3y)$$

¿Es esta una transformación lineal?

Solución:
En este caso utilizaremos el segundo modo de comprobarlo. Para ello tomamos dos vectores de R^2, $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ y $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ y un escalar a

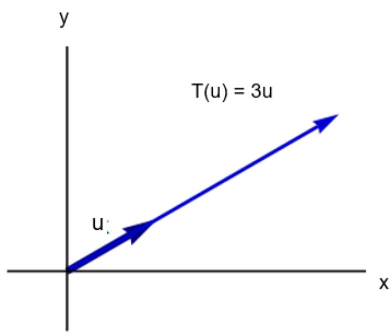
$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T\left((u_x, u_y) + (v_x, v_y)\right)$$
$$= T\left((u_x + v_x, u_y + v_y)\right) = \left(2(u_x + v_x), 3(u_y + v_y)\right)$$
$$= \left(2u_x + 2v_x, 3u_y + 3v_y\right) = \left(2u_x, 3u_y\right) + \left(2v_x, 3v_y\right)$$
$$= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$$

Mientras que para la multiplicación por el escalar

$$T(a\boldsymbol{u}) = T\left((au_x, au_y)\right) = \left(2au_x, 3au_y\right) = a\left(2u_x, 3u_y\right) = aT(\boldsymbol{u})$$

Esta transformación cumple con las 2 propiedades por lo que es una transformación lineal.

Podemos analizar geométricamente que es lo que se produce con la aplicación de esta transformación. Esta transformación tiene el efecto de “dilatar” el vector u, multiplicando su longitud en un factor de 3 y conservando su dirección y sentido



Matriz asociada a una transformación lineal.

Notemos algunas propiedades que surgen de las transformaciones lineales.
Dados dos espacios V y W y T y una transformación lineal

$$T: V \to W$$

se cumple que al aplicar la transformación al elemento neutro del espacio V obtenemos el elemento neutro del espacio W, en símbolos esto es

$$T(0_V) = 0_W$$

Dados dos vectores del espacio V, $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ cualesquiera

$$T(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) - T(\boldsymbol{v}_2)$$

En el caso que la transformación lineal se aplique a una combinación lineal de vectores de V, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$

$$T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n)$$

Teniendo estas propiedades en cuenta podemos enfrentar el hecho que en ocasiones no se conoce la expresión de la transformación, pero sí los resultados de la transformación al aplicarse a los n vectores de la base. Nuestra próxima meta es encontrar un método para determinar la expresión de la transformación.
Si contamos con la siguiente información:

- El espacio vectorial V con base $\{\boldsymbol{v}_1 \ , \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n\}$ y con dim(V) = n
- El espacio vectorial W con dim(W) = m
- Conocemos la transformación lineal aplicada a la base de V, es decir, conocemos

$$T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$$

podemos encontrar la expresión de T y representarla por una matriz. Para ello procedemos del siguiente modo:

- Tomamos un vector genérico del espacio V, $\boldsymbol{u} \in V$ y buscamos la representación de éste en la base conocida, esto es

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

  Para esto debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} c_1 v_{11} + c_2 v_{12} + \cdots + c_n v_{1n} = u_1 \\ c_1 v_{21} + c_2 v_{22} + \cdots + c_n v_{2n} = u_2 \\ \cdots \\ c_1 v_{n1} + c_2 v_{n2} + \cdots + c_n v_{nn} = u_n \end{cases}$$

  Es decir:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{B}$$

  Donde B es la matriz que se forma con los elementos de la base de V y **c** el vector de incógnitas del sistema. Recordemos que como B es una base del espacio vectorial el vector **c** será único.

- Una vez que contamos con la representación del vector

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

- le aplicamos la transformación

$$T(\boldsymbol{u}) = T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)$$
$$= c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n)$$
$$= c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n$$

  Este vector resultante lo reescribimos de modo que las variables queden separadas por columnas, asi obtenemos una matriz de orden nxm.

$$T(\boldsymbol{u}) = c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n$$
$$T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{A}$$

  A esta matriz encontrada "$\boldsymbol{A}_{nxm}$" la llamaremos **matriz de la transformación o matriz asociada a la transformación**

Te invitamos a que veas el siguiente video

Descripción	Dirección URL
Transformaciones lineales	https://www.youtube.com/watch?v=YJfS4_m_0Z8&t=95s

Sea T una transformación lineal que relaciona R^2 con R^3 y

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ es una base de R^2 para la cual se conoce que

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\-3\\3\end{pmatrix} \ y \ T\left(\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-13\\5\\-5\end{pmatrix}$$

Halla el vector resultante de aplicar la transformación al vector $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Solución:

Para hallar la transformación aplicada a otro vector debemos encontrar una expresión para ella por lo que procederemos del modo expuesto y luego encontraremos lo solicitado

El vector general de R^2 es v = (x,y) y resolveremos el sistema lineal $\mathbf{Bc} = \mathbf{v} \implies (\boldsymbol{B}|\mathbf{v})$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & x\\ 2 & -3 & y\end{array}\right)_{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & x\\ 0 & 1 & -2x+y\end{array}\right)_{R_1 \mapsto R_1 + 2R_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3x+2y\\ 0 & 1 & -2x+y\end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -3x+2y\\ c_2 = -2x+y\end{array}\right.$$

Al sustituir en la expresión $T(\boldsymbol{u}) = T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)$ se tiene

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (-3x+2y)\begin{pmatrix}8\\-3\\3\end{pmatrix} + (-2x+y)\begin{pmatrix}-13\\5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24x+16y\\9x-6y\\-9x+6y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}26x-13y\\-10x+5y\\10x-5y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3y\\-x-y\\x+y\end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar so la expresión de la transformación se obtiene las imágenes de los vectores dados

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+6\\-1-2\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-3\\3\end{pmatrix} \ \text{y} \ T\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4-9\\2+3\\-2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\5\\-5\end{pmatrix}.$$

Ahora para la representación matricial, en a expresión general de T, separamos por columnas las variables de $\mathbf{v}$, en este caso x,y

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & +3y\\-x & -y\\x & +y\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{array}{cc} x & y\end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

La matriz A es la que representa la transformación y es de orden mxn = 3x2

Por lo que $T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Nos valemos de Matrixcalculator o Geogebra para calcular este producto y obtenemos

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 3+3\cdot 2\\-1\cdot 3+(-1)\cdot 2\\1\cdot 3+1\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-5\\5\end{pmatrix}$$

Por lo que la transformación lineal aplicada al vector $T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ es

$$T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-5\\5\end{pmatrix}$$

Núcleo e imagen de una transformación lineal.

Dados dos espacios vectoriales, V y W, y una transformación lineal que los relaciona

$$T: V \to W$$

es posible definir algunos elementos de interés como por ejemplo

- El conjunto de vectores de V tales que al aplicarles la transformación obtenemos el elemento neutro en el espacio W. A este conjunto lo llamamos **núcleo de la transformación**

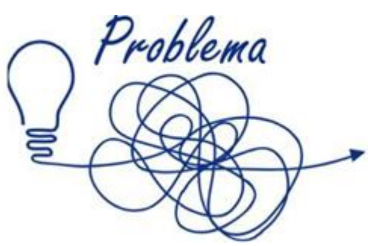
  $$\mathrm{N(T)} = \{\mathbf{v} \in \mathrm{V} | \mathrm{T}(\mathbf{v}) = 0_w\}$$

  La dimensión de este conjunto recibe el nombre de **Nulidad de T**

- Al conjunto de vectores de W que son imagen de la aplicación de la transformación a un elemento de V lo llamaremos **recorrido de T**

  $$Rec(T) = \{\boldsymbol{w} \in W |\, T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\ para\ algún\ \boldsymbol{v} \in V\}$$

  La dimensión de este conjunto recibe el nombre de **Rango de T**



Sea $T: R^2 \to R^2$ una transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}$$

Hallar una base para e núcleo de T y para el recorrido de T. ¿Cuáles son sus dimensiones? Determinar cual/les de los siguientes vectores pertenecen al recorrido de T

$$\boldsymbol{v}_1 = (100,-2) \quad \boldsymbol{v}_2 = (-100000,0) \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,0)$$

Solución:

Se sabe que para el núcleo se buscan los valores de (x,y) que hacen a la transformación igual a (0,0)

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Al aplicar la definición de la transformación

$$\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y para el recorrido se buscan los vectores (a,b) que se puedan generar con esta transformación.

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Al aplicar la definición de la transformación

$$\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Debido a que la matriz de los coeficientes de los dos sistemas es la misma, ambos sistemas se pueden escalonar de manera simultánea.

$$\underset{R_1 \mapsto R_1 - R_2}{\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

En el sistema homogéneo para el núcleo, la solución es única y la base $B = \{\mathbf{0} = (0,0)\}$ y como no hay vectores no nulos en la base del núcleo la dimensión es cero.

Para el recorrido, no hay renglones nulos, por lo que no hay restricciones sobre a y b por lo que se concluye que $a, b \in R$. De este modo, la transformación genera todo R^2 y una base para el recorrido de T puede ser $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, la dimensión es dos.

Esta transformación puede generar cualquier vector de $R^{2,}$ así todos los vectores pertenecen al recorrido de T.

4.2 Autovalores y autovectores

Definición de autovalor y autovector.

De todas las transformaciones lineales son de especial interés, debido a sus aplicaciones, aquellas que transforman un vector en otro paralelo a él. En otras palabras, vamos a estudiar aquellas transformaciones que a un vector $\boldsymbol{v}$ lo transforman en otro de la forma $\lambda\boldsymbol{v}$ con λ un escalar. Esto es:

$$T: V \to V. \dim(V) = n$$
$$T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$$

en donde $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$

Por lo que el problema a resolver es determinar el conjunto de vectores diferentes del nulo que cumplan $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ para algún escalar λ.

Resolver este problema se simplifica si usamos la matriz **A** asociada a la transformación T que nos permite expresar esta situación como un sistema de ecuaciones donde debemos encontrar tanto el escalar λ como su vector correspondiente para el cual se cumple

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$
$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

Quedando así formado un sistema homogéneo que sabemos tiene solución distinta de la nula cuando el det $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$

Al polinomio que resulta de desarrollar este determinante los llamaremos **polinomio característico**, por consiguiente, al escalar λ, que es la constante entre vectores paralelos lo llamaremos **autovalor o valor propio de A**, o también llamado **valor característico** de la ecuación. Al vector que le corresponde a un valor propio lo llamaremos **autovector o vector propio** o también **vector característico**.

Cálculo y propiedades de autovalores y autovectores

Para encontrar estos autovalores y autovectores tenemos los siguientes pasos:
Sea **A** una matriz de transformación, $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$**,** entonces λ y $\boldsymbol{v}$ se pueden calcular como sigue:
Paso 1: Calcular $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$ para encontrar el polinomio característico $p(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$
Paso 2: Resolver la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, encontrando los n valores propios.
Paso 3: Sustituir cada valor propio λ en el sistema homogéneo $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ y resolver llevando la matriz ampliada a su forma escalorada o escalonada reducida $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0})$. Las soluciones son los vectores propios o autovalores asociados al λ asignado.
En la actualidad contamos con sorftware que nos ayudan a realizar estos cálculos

Dada la transformación lineal cuya matriz asociada es

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina si tiene autovalores distintos de cero y en caso de existir determina los auto valores correspondientes

Solución:
Si vamos paso a paso a mano y siguiendo el método propuesto

Paso 1. Para calcular $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$, necesitamos $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, entonces:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12.$$

Paso 2. Resolvemos la ecuación $p(\lambda) = 0$:

Autovalores

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

Paso 3. Encontramos los vectores propios para cada valor de λ. Para $\lambda_1 = 6$:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\,|\,0)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_1 \mapsto (-1)R_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Autovector correspondiente a un autovalor

Al resolver el sistema de ecuaciones tenemos el vector propio para $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 2$ se tiene $(\mathbf{A}-2\mathbf{I}\,|\,0)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Si consideramos la nota anterior, podemos ver que los renglones son proporcionales. Así, podemos eliminar el renglón 1 y dejar el segundo renglón:

$$-x+y=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vectores propios} = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Autovector correspondiente al otro autovalor

Conjunto de autovectores

Si lo realizamos haciendo uso del matrixcalculator

Cálculo de valores propios y vectores propios ✓

Matriz A:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Si λ es un valor propio de A, entonces existe un vector propio $v!=0$ tal que $Av=\lambda v$

   Entonces: $Av-\lambda v=\left(A-\lambda I\right)\cdot v=0$

   Como v es no nulo, de determinante de la matriz $A-\lambda I$ es 0

   $$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+12 \underset{(?)}{=} (\lambda-2)\cdot(\lambda-6)=0$$

   ▶ Los detalles

   1. $\lambda_1=2$
   2. $\lambda_2=6$

Polinomio característico

Autovalores

A continuación, para cada autovalor lo reemplazamos en el sistema homogéneo

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

Y así obtenemos los autovectores correspondientes

1. $\lambda_1=2$

$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Av=\lambda v$ *

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\times\left(\tfrac{1}{3}\right) \underset{F_1/(3)\to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\times(1) \underset{F_2-(-1)\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left\{ x_1 - x_2 = 0 \right.$ (1)

- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1=x_2$

La respuesta:

$x_1=x_2$

$x_2=x_2$

La solución general: $X=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\left\{x_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Deje $x_2=1$, $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Autovector correspondiente a un autovalor

Por lo que para el autovalor λ=2 el autovector correspondiente es $v_1=\binom{1}{1}$. Mientras que para el autovalor λ=6

2. $\lambda_2=6$

$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$Av=\lambda v$ *

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{F_1/(-1)\to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right)\times(1) \underset{F_2-(-1)\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left\{ x_1 + 3\cdot x_2 = 0 \right.$ (1)

- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1{=}-3x_2$

La respuesta:

$x_1{=}-3x_2$

$x_2{=}x_2$

La solución general: $X{=}\begin{pmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Deje $x_2{=}1$, $\boldsymbol{v_2}{=}\begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Autovector correspondiente a un autovalor

Por lo que para el autovalor λ=6 el autovector correspondiente es $v_1 = \binom{-3}{1}$.
En el ejemplo analizado cada autovalor es raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico, pero esto no siempre es así.

Dada la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por

$$T\binom{x}{y} = \binom{-3x+4y}{-3y}$$

Determina si tiene autovalores distintos de cero y en caso de existir determina los auto valores correspondientes

Solución:

Antes de iniciar con el método, note que la matriz de transformación es:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Paso 1. Calcular $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-3-\lambda) = 0.$$

Paso 2. Para resolver la ecuación $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$, tenemos $(-3-\lambda)^2 = 0$. Entonces $\lambda = -3$ es el valor propio con multiplicidad algebraica 2.

Paso 3. Para el valor propio $\lambda = -3$, tenemos $\mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces en $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I} \,|\, 0)$ queda solo la ecuación $4y = 0$. Donde $y = 0$ y x cualquier valor de $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{vector propio } \mathbf{v}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso diremos entonces que el autovalor de la transformación tiene multiplicidad dos
Algunas propiedades que surgen con los autovalores que debemos tener presente:

- Si A una matriz cuadrada de orden nxn y $v_1, v_2, \dots v_k$ son k autovectores provienen de k autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes

- Si A una matriz cuadrada de orden nxn diagonal, los elementos de la diagonal son los autovalores de la matriz.

Debido a esta última propiedad es que toman gran interés estas matrices. A continuación, estudiaremos la diagonalización de matrices

4.3 Diagonalización de matrices.

Para aquellas matrices cuadradas **A** y **D** que podemos relacionar por una transformación lineal del siguiente modo:

$$T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$$

donde la matriz **C** es cuadrada y del mismo orden que la matriz **A,** diremos que las matrices **A** y **D** son **similares**. Las matrices similares poseen la particularidad de tener el mismo polinomio característico y por ende los mismos autovalores. En el caso en que la matriz **D** sea una matriz diagonal diremos que **A** es **diagonalizable.** En el caso de que **A** sea de orden nxn diagonalizable los autovalores tienen "n" autovectores linealmente independientes y viceversa, es decir, si los autovalores tienen "n" autovectores linealmente independientes, **A** de orden nxn es diagonalizable.

Para diagonalizar una matriz **A** de orden nxn, si bien nos apoyaremos en algún software, los pasos a seguir son los siguientes:

Sea una matriz **A** de orden nxn que tiene n autovectores

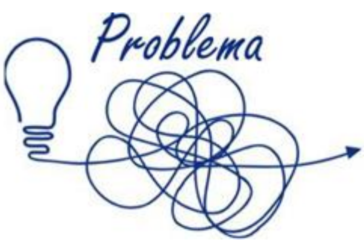
Paso 1: Calcular los autovalores y autovectores de **A**. Si resultan n autovectores, **A** puede diagonalizarse, en caso contrario la matriz **A** no es diagonalizable.

Paso 2: Sean $v_1, v_2, \dots v_n$ los n autovectores correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ (contemplar que algunos pueden ser iguales por la multiplicidad) entonces se construyen las matrices **C** y **D** de la siguiente forma:

- Las componentes de la diagonal de **D** son los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ donde se repiten los que son de multiplicidad (con los n valores)
- La matriz invertible **C** tiene como columnas los n autovectores $v_1, v_2, \dots v_n$ en el orden en que aparecen los autovalores en **D**.
- En caso de multiplicidad se colocan en cualquier posición dentro de la repetición del autovalor.

Paso 3: Comprobar que se cumple $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ o sin la matriz inversa, **CD = AC**.

Si volvemos al primer problema del parágrafo 4.2.2



Dada la transformación lineal cuya matriz asociada es

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar las matrices **C** y **D** y comprobar que el orden en construir **C** y **D** depende del orden entre lo autovalores y autovectores.

Solución:

En este caso, tenemos los valores propios $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 2$, y los vectores propios $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; entonces:

Como el orden de la matriz **A** es 2 y tiene 2 autovalores la matriz es diagonalizable

En este caso, tenemos los valores propios $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 2$, y los vectores propios $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; entonces:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \text{ y } \mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ con } \mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O si intercambiamos el orden tanto en los valores como en los vectores propios tenemos:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_2 & \lambda_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \text{ y } \mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ con } \mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si utilizamos matrixcalculator

Donde como ya calculamos los autovalores y autovectores

- La matriz diagonal `D` está compuesta por los valores propios (λ_1 y λ_2):

  $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

- La matriz con los vectores propios (v_1 y v_2) como sus columnas:

  $P=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $P^{(-1)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

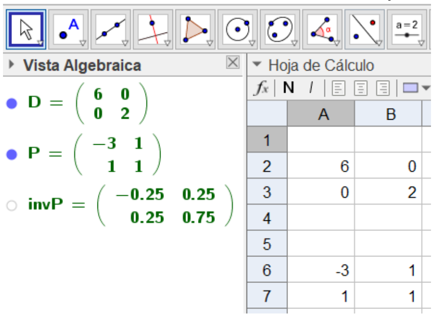
▼ Los detalles

Encontrar la inversa de la matriz de 2×2 mediante la fórmula: $A^{(-1)}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(-1)}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)}=\frac{1}{1\cdot1-(-3)\cdot1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

- $A=PD\cdot P^{(-1)}$ (?)

En el caso de este software no nos permite elegir el orden en que tomamos los auto valores y autovectores para formar las matrices por lo tanto podemos hacerlo a mano o recurrir a , por ejemplo Geogebra, donde armamos las matrices con la otra posibilidad de orden de selección y así:



Te invitamos a que veas el siguiente video

Descripción	Dirección URL
Autovalores y autovectores	https://www.youtube.com/watch?v=Gx0PaWI9eYo&t=186s

Algunas aplicaciones

¿Qué sentido podemos darle a los autovalores y autovectores?

Imaginemos un campo lleno de vectores elásticos en distintas direcciones. Sobre este campo sopla una ráfaga de viento. Luego de la ráfaga se observa que solo algunos vectores no cambiaron su dirección, aunque sí modificaron su longitud.
¿Qué representa la ráfaga? ¿Y los vectores que no cambiaron de dirección? ¿Qué ocurrió con sus módulos?
Podemos interpretarlo así: la ráfaga corresponde a una matriz que actúa sobre los vectores. Aquellos que no cambiaron su dirección son los autovectores, mientras que el cambio en su módulo está determinado por los autovalores asociados.
Analicemos un caso particular donde participan los autovalores y autovectores: un estudio realizado en biología a una especie ha arrojado la siguiente información: Los individuos han sido clasificados entre jóvenes y adultos, en cuanto a reproducción, los estudios arrojan que cada año, una población joven genera en promedio 0.4 adultos, cada adulto genera 1.2 jóvenes pero en cuanto a supervivencia la probabilidad de que un joven sobreviva y siga siendo joven al año siguiente es 0.3.mientras que la probabilidad de que un adulto sobreviva como adulto al año siguiente es 0.7.
Si denotamos $x = \begin{pmatrix} J \\ A \end{pmatrix}$ donde J es el número de jóvenes mientras que A es el número de adultos.
El número de individuos al año siguiente está dado por

$$\begin{cases} J' = 0.3J + 1.2A \\ A' = 0.4J + 0.7A \end{cases}$$

Matricialmente este sistema pude representarse por

$$x' = M\,x$$

Donde $M = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$

Definimos el **autovalor dominante** de una matriz a aquel cuyo **valor absoluto** es mayor que el de todos los demás autovalores de la matriz. Es decir:

$$|\lambda_{\mathrm{dom}}| \;=\; max\,\{|\lambda_1|, |\lambda_2| \ldots, |\lambda_n|\}$$

La propiedad de este autovector es que si una matriz se aplica repetidamente a un vector (por ejemplo $M^k\,x$), el comportamiento a largo plazo está gobernado casi exclusivamente por el autovalor dominante, el vector tiende a alinearse con el autovector asociado al autovalor dominante.

En una matriz que modela cómo evoluciona una población (jóvenes y adultos) aunque haya varios autovalores, el **dominante** determina el crecimiento o decrecimiento global de la población. Si el autovalor dominante es mayor que 1, la población crecerá mientras que si es menor que 1, tenderá a extinguirse y si es exactamente 1, la población se estabiliza.

Calculamos los autovalores y autovectores para la matriz M de nuestro ejemplo

Matriz A:

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 1.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

1. Si λ es un valor propio de A, entonces existe un vector propio $v!=0$ tal que $Av=\lambda v$

Entonces: $Av-\lambda v=\left(A-\lambda I\right)\cdot v=0$

Como v es no nulo, de determinante de la matriz $A-\lambda I$ es 0

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} \frac{3}{10}-\lambda & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-\frac{27}{100}=\frac{1}{100}\cdot\left(100\lambda^2-100\lambda-27\right) \underset{(?)}{=}$$

$$100\cdot\left(\frac{1}{100}\right)\cdot\left(\lambda+\frac{2\sqrt{13}-5}{10}\right)\cdot\left(\lambda-\frac{2\sqrt{13}+5}{10}\right)=0$$

$$\lambda_1=\frac{-2\sqrt{13}+5}{10} \approx -0{,}221$$

$$\lambda_2=\frac{2\sqrt{13}+5}{10} \approx 1{,}22$$

El autovalor dominante es $\lambda_2=\frac{2\sqrt{13}+5}{10} \approx 1{,}22$

Para el cual con la ayuda de matrixcalculator obtenemos el autovector correspondiente

$$\lambda_2=1{,}22$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} -0{,}921 & 1{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}521 \end{pmatrix}$$

$$Av=\lambda v \;*$$

$$\left(A-\lambda I\right)\cdot v=0$$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}921 & 1{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}521 & 0 \end{array}\right) \times (-1{,}09) \underset{F_1/(-0{,}921)\to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1{,}30 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}521 & 0 \end{array}\right) \times (-0{,}4)$$

$$\underset{F_2-(0{,}4)\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1{,}30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{ x_1 - 1{,}30\cdot x_2 = 0 \quad (1) \right.$$

- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1 = 1{,}30\cdot x_2$

La respuesta:

$x_1 = 1{,}30\cdot x_2$

$x_2 = x_2$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 1{,}30\cdot x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}30 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Deje $x_2 = 1$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1{,}30} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Por lo tanto, al autovalor $\boldsymbol{\lambda}_2 \approx 1{,}22$ le corresponde el auto vector $\mathrm{v}_2 = (1.30.1)$

Esto nos indica que como $\boldsymbol{\lambda}_2 \approx 1{,}22 > 1$ se presenta un crecimiento poblacional, la población aumenta con un factor aproximado de 1,22 por año y el autovector nos da la proporción (por cada adulto 1,30 joven). Así, en porcentaje, con el paso del tiempo la población tenderá a estabilizarse en aproximadamente **56.5% jóvenes** y **43.5% adultos** (aunque aumentando en tamaño total).

Final de la Unidad 4

Trabajo Práctico N° 4

Problema 1. Para las siguientes relaciones $r: R^2 \to R^2$, determina si ellas son transformaciones lineales. En caso de serlo interpreta el efecto geométrico que se obtiene al aplicarla.

a) $r(\boldsymbol{v}) = 3\boldsymbol{v}$

b) $r(\binom{v_1}{v_2}) = \binom{-v_2}{v_1}$

c) $r(\binom{v_1}{v_2}) = \binom{-v_1}{-v_2}$

d) $r(\binom{v_1}{v_2}) = \binom{-v_1 v_2}{v_2}$

e) Si **w** $=\binom{w_1}{w_2}$ es un vector fijo de R^2: $r(\binom{v_1}{v_2}) = \binom{v_1 + w_1}{v_2 + w_2}$

Problema 2. En los siguientes casos, determina una expresión para la transformación T y la matriz **A** de la transformación

a) $T: R^2 \to R^3$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) $T: R^3 \to R^3$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $T: R^3 \to R^2$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $T: R^3 \to R^3$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Para las siguientes transformaciones lineales obtén el núcleo y el recorrido

1. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $T(x, y, z, w) = (x - y, y - z, w)$.
2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $T(x, y, z) = (2x - 5y - 3z, 4x - 8y - 5z, 6x - 13y - 8z)$.
3. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y - 3z + w \\ 3x - 2y + z - w \\ - y - 7z + w \end{pmatrix}$.

Problema 4.

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+5y+3z \\ 3x-y+5z \\ 2y+2z \end{pmatrix}$. Determinar y responder:

1. Una base y dimensión para el núcleo de T.
2. Una base y dimensión para el recorrido de T.
3. ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al recorrido de T?
   $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)$ $\quad$ $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, -1)$ $\quad$ $\mathbf{v}_3 = (-1, 10, 1)$
4. ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al núcleo de T?
   $\mathbf{v}_1 = (3, -5, 1)$ $\quad$ $\mathbf{v}_2 = (-6, -3, 3)$ $\quad$ $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 1)$

Problema 5. Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal definida por :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y+z \\ x+y-z \\ -x+2y+4z \end{pmatrix}$$

Determina y responde:

a) Una base y dimensión para el núcleo de T.

b) Una base y dimensión para el recorrido de T.

c) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al recorrido de T?
   $\mathbf{v}_1 = (5, 7, 10)$ $\quad$ $\mathbf{v}_2 = (-100, 0, 5)$ $\quad$ $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 0)$

d) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al núcleo de T?
   $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ $\quad$ $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0)$ $\quad$ $\mathbf{v}_3 = (0, 0, -1)$

Problema 6. Sea $T: R^2 \to R^4$ una transformación lineal definida por :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-5y \\ 3x+y \\ 2x-y \\ -2x+y \end{pmatrix}$$

Determina y responde:

a) Una base y dimensión para el núcleo de T.

b) Una base y dimensión para el recorrido de T.

c) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al recorrido de T?

$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3, 1) \qquad \mathbf{v}_2 = (5, 0, -1, 3) \qquad \mathbf{v}_3 = (3, 7, 3, -3)$

d) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al núcleo de T?

$\mathbf{v}_1 = (2, 1) \qquad \mathbf{v}_2 = (0, 0) \qquad \mathbf{v}_3 = (-5, 3)$

Problema 7.

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada de T. Determinar los valores y vectores propios de $\mathbf{A}$.

Problema 8.

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -6 & -8 & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar sus valores y vectores propios.

Problema 9. Para las siguientes matrices determina los autovalores y autovectores de la matriz **A,** en caso de ser diagonalizable, determina la matriz **D** y la matriz **C.** Comprueba que **AC=CD**

1)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$