Tarea autoevaluativa unidad 3

Determinar si el junto de todas las imágenes en escala de grises representadas por matrices de número reales son un espacio vectorial. Podríamos decir que el conjunto estaría definido de la siguiente forma:

$$\mathrm{Img} = \left\{ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \mid p_{ij} \in \mathbb{R}\, \forall i, j = 1, 2, ..., n \right\}$$

¿Puede, el conjunto de imágenes en escala de grises considerarse un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}^{n \times n}$?
Para que un conjunto de elementos sea considerado un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}^{n \times n}$ debe cumplir las siguientes propiedades:

1. Clausura de la suma
2. Conmutatividad de la suma
3. Asociatividad de la suma
4. Existencia del elemento neutro
5. Existencia del inverso aditivo
6. Clausura de la multiplicación por un escalar
7. Distributiva de un vector respecto a la suma de escalares
8. Distributiva de la multiplicación de escalares respecto a la suma
9. Asociatividad de la multiplicación por escalares
10. Identidad multiplicativa

<u>Clausura de la suma</u>
Definimos:

$$\mathrm{Img}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad Img_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\mathrm{Img}_1 + Img_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

Como $a_{ij} + b_{ij} \in \mathbb{R}\,, \forall i, j = 1, 2..., n$ podemos decir que la se cumple la propiedad de la clausura para la suma

Clausura de la multiplicación por un escalar

Definimos:

$$\mathrm{Img}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y el escalar } k \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\mathrm{k * Img}_1 = k* \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k*a_{11} & k*a_{12} & \cdots & k*a_{1n} \\ k*a_{21} & k*a_{22} & \cdots & k*a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k*a_{n1} & k*a_{n2} & \dots & k*a_{nn} \end{pmatrix}$$

Como $k * a_{ij} \in \mathbb{R}\, \forall i, j = 1, 2, ..., n$ podemos decir que la se cumple la propiedad de la clausura para la multiplicación por un escalar.

Existencia del elemento neutro

En este caso el elemento neutro seria la matriz nula $Img = \odot$

Si bien no se probaron todas las propiedades podemos decir el conjunto Img definido al inicio es un espacio vectorial.

Da una interpretación visual de las operaciones

¿Qué significa sumar dos imágenes en escala de grises?

- Se puede interpretar la suma de dos imágenes en escala de grises como la suma de las intensidades de cada pixel, es decir, pixel a pixel. Aun que en este caso valores más altos en la escala implican un gris más claro en la imagen.

¿Qué significa multiplicar una imagen por un escalar mayor que 1, entre 0 y 1, o negativo?

- Si cada pixel se multiplica por un valor mayor que 1, esto implicaría que la imagen se aclara cada vez más.
- Multiplicarlo por un escalar entre 0 y 1, disminuiría el valor en la escala la de grises lo cual oscurecería más la imagen
- Multiplica una imagen por un escalar negativo, daría como resultado el valor inverso lo cual no tendría un interpretación directa en una imagen real.

En la práctica digital ¿de qué valores se habla?

- En la práctica digital se habla de valores de entre 0 y 255 para imágenes de 8 bits.

¿Cómo afecta esto al considerar las imágenes digitales reales como un espacio vectorial?

- Si bien matemáticamente las imágenes reales se pueden considerar un espacio vectorial no se tendría una interpretación física directa, por ejemplo para números negativos o valores con decimales.

Conclusión

Por como se definió el conjunto de imágenes en escala de grises representadas por matrices de número reales podemos decir que es un espacio vectorial. Sin embargo este conjunto no es una representación directa de imágenes digitales en la práctica.