Wykład 2

Wprowadzenie do METODY SIMPLEKS

A. Pilawski

WIT

Warszawa, 2024

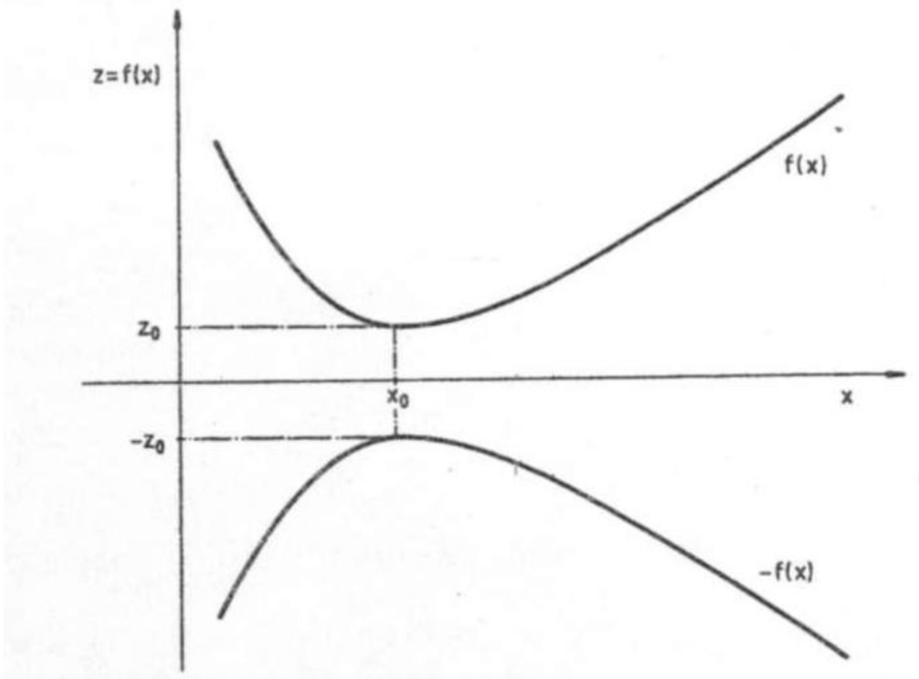
Spis Treści

TWIERDZENIE 1

Dla dowolnej funkcji $z = f(x)$ spełnione są równości

(min) $f(x)$ **= - (max) [-** $f(x)$ **]**

(max) $f(x)$ **= - (min) [-** $f(x)$ **]**



$$(max) z = f(x) \tag{1}$$

przy warunkach ograniczająncych

$$g_i(x) \overset{=}{\underset{\leq}{}} 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{2}$$

Gdzie $z \in$ *R*, a $x \in R^n$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych

DEFINICJA

Rozwiązanie $x_0 \in X$ nazywamy rozwiązaniem optymalnym zadania programowania matematycznego (1)-(2) jeżeli dla dowolnego $x \in X$ spełniony jest warunek

$$f(x_0) \geq f(x) \tag{3}$$

DEFINICJA

Dwa zadania programowania matematycznego nazywamy równoważnymi, jeżeli rozwiązań optymalnych tych zadań są identyczne.

Jeżeli w zadaniu (1)-(2) funkcja celu oraz warunki ograniczające są liniowe, to zadanie takie nazywamy zadaniem programowania liniowego

Jego postać ogólna jest zatem następująca (4)

(min albo max) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

przy warunkach ograniczających (5)

≤

$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$

gdzie $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$, **A** jest macierzą typu ***m* x *n*.**

Zadaniem o postaci ***standardowej*** nazywamy zadanie

(max) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ (6)

przy warunkach ograniczających

$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \; (\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0})$ (7)

$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ (8)

Zadaniem o postaci ***klasycznej*** (zwaną czasem postacią kanoniczną) nazywamy zadanie

(max) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ (9)

przy warunkach ograniczających

$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ (10)

$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ (11)

Postać ***mieszaną***

Zadanie o postaci ogólnej można przekształcić do postaci standardowej, klasycznej lub mieszanej za pomocą następujących operacji:

OPERACJA (1) - Zmiana rodzaju ekstremum. Zgodnie z twierdzeniem1 zadanie na minimum (maksimum) można przekształcić w zadanie na maksimum (minimum) zmieniając funkcję celu na przeciwną (tzn. mnożąc ją przez -1).

OPERACJA (2) - Zamiana zmiennych dowolnych co do znaku na zmienne nieujemne. Jeżeli pewna zmienna $\boldsymbol{x}$ jest dowolna co do znaku, to podstawiając

$$x = x^{+} - x^{-}$$

gdzie $x^{+} = \max\{0, x\}$, $x^{-} = \max\{0, -x\}$ otrzymujemy przedstawienie tej zmiennej za pomocą nieujemnych zmiennych x^{+} i x^{-} ($x^{+}, x^{-} \geq 0$).

OPERACJA (3) - Zamiana nierówności na równość. Nierówność

$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq$ lub $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq$

można zastąpić równościami odpowiednio:

$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + x^d = \boldsymbol{b}$ lub $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} - x^d = \boldsymbol{b}$

Zmienna x^d nosi nazwę zmiennej dodatkowej. Zmienne dodatkowe nie występują w funkcji celu.

OPERACJA (4) - Zamiana równości na nierówność. Równanie

$\boldsymbol{a^T x = b}$

jest równoważne dwóm nierównościom

$\boldsymbol{a^T x \ \leq \ b}$

$\boldsymbol{-a^T x \ \leq \ -b}$

Dowolna postać wyjściowa zadania oraz postać otrzymana z niej w wyniku zastosowania zdefiniowanych powyżej operacji (l)-(4) są sobie równoważne.

Zgodnie z tradycją, przez R^n będziemy oznaczać *n*-wymariarową przestrzeń euklidesową, tzn. Przestrzeń, której elementami są wektory o postaci

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

o składnikach rzeczowistych $x_i \in R$ dla $i - 1.2, \ldots, n$).

Definicja.

Wektor $z \in R^n$ nazywamy kombinacią liniową wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^n$ jeżeli

$$x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \quad (\mu_i \in R, \qquad i - 1.2. \ldots, k)$$

<u>Definicja</u>.

Mówimy , że wektory $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$ tworzą układ liniowo zależny jeżeli

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \mathbf{0} \qquad (\lambda_i \in R, \qquad i = 1.2. \dots, k)$$

Przy czym nie wszystkie λ_i są równe zeru (symbol **0** oznacza wektor zerowy przestrzeni R^n)

TWIERDZENIE 2

Dowolny układ wektorów zawierający wektor zerowy jest układem liniowo zależnym

Definicja.

Układ wektorów $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$ nazywamy liniowo niezależnym jeżeli równość

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \mathbf{0} \qquad (\lambda_i \in R, \qquad i = 1.2.\dots, k)$$

zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie $(\lambda_i = 0\ (i = 1.2.\dots, k)$

TWIERDZENIE 3.
Maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni ***R*** ^{n} wynosi ***n.***

<u>Definicja.</u>

Mówimy ze układ wektorów $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ rozpina zbiór $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, jeżeli dla każdego $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ istnieją takie $\lambda_i \in R \ (i = 1,2, \dots, k)$, że

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{b}_i$$

tzn. każdy element zbioru $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $b_1, b_2, \dots, b_k$.

<u>Definicja.</u>

Bazą zbioru $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ nazywamy liniowo niezależny układ wektorów $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ rozpinający zbiór $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

TWIERDZENIE 4
Liczba wektorów stanowiących bazę zbioru $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ jest równa maksymalnej liczbie wektorów liniowo niezależnych należących do $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ***.***

Wniosek.
Dowolny zbiór ***n*** liniowo niezależnych wektorów należących do przestrzeni $\boldsymbol{R^n}$ jest bazą przestrzen

DEFINICJA

Zbiór $C \in R^n$ nazywamy wypukłym, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in C$ oraz dla dowolnego $0 \le \lambda \le 1$ zachodzi

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in C$$

DEFINICJA

Punkt $x \in C$ nazywamy punktem wierzchołkowym (ekstremalnym) zbióru wypukłego C wtedy i tylko wtedy, jeżeli nie istnieją takie dwa różne punkty $x_1, x_2 \in C$ $(x_l \neq x_2)$ i różne od punktu x $(x_1 \neq x, x_2 \neq x)$ oraz takie $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, że $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$

TWIERDZENIE

Hiperpłaszczyzna $\boldsymbol{H}$ o postaci $\boldsymbol{a^T x = d}$ $\boldsymbol{(x, a \in R^n, d \in R)}$ jest zbiorem wypukłym.

TWIERDZENIE

Półprzestrzeń postaci $\boldsymbol{a^T x \leq d}$ $\boldsymbol{(x, a \in R^n, d \in R)}$ jest zbiórem wypukłym.

TWIERDZENIE

Zbiór rozwiązań układu równań liniowych postaci $\boldsymbol{Ax = b}$ ($\boldsymbol{A}$ jest macierz typu

$\boldsymbol{m \times n, x \in R'', b \in R^m)}$ jest zbiorem wypukłym.

TWIERDZENIE

Część wspólna zbiorów wypukłych jest zbioórem wypukłym.

WNIOSEK

Zbiór nieujemnych rozwiązań układu równań $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jest zbiorem wypukłym.

Zbiór nieujemnych rozwiązań układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest zbiorem rozwiązań układu równań i nierówności postaci $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$.

Na mocy twierdzeń odpowiednio 2, 3, 4: zbiór tych rozwiązań jest zbiorem wypukłym.