Badania operacyjne (operational research) z elementami logistyki

A.Pilawski

Warszawa, WIT

2024

Obszarem naszego zainteresowania będą sytuacje i problemy decyzyjne w sferze organizacji produkcji i planowaniu, ekonomice i zarządzaniu przedsiębiorstwem.

Literatura podstawowa:

1. Kukuła K.(red): *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, 2016.
2. Siudak M.: *Badania Operacyjne*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012.
3. Trzaskalik T.: *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, PWE, 2008.
4. F.S. Hiller, G. J. Lieberman: *Introduction to Operations Research,* The McGraw-Hill, 7th Ed., 2001

Literatura uzupełniająca:

1. Radzikowski W.: *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń 1997.
2. Gajda J.B., Jadczak R. (red.): *Badania operacyjne w praktyce,* Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2006.
3. Ciesielski M. (red.): *Logistyka we współczesnym zarządzaniu*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, 2003.
4. Szapiro T.(red.), *Decyzje menedżerskie z Excelem*, PWE, 2000.

Warunki zaliczenia

I.	Kolokwium 1 (Programowanie liniowe) (min 8 pkt.)	15 pkt.
II.	Kolokwium 2 (Programowanie dynamiczne) (min 8 pkt.)	15 pkt
III.	Zadania domove (min 8 pkt.)	15 pkt
IV.	Projekt (min 8 pkt.)	15 pkt.
V.	Egzamin (min 21 pkt.)	40 pkt.
		Σ 100 pkt. (min 53 pkt.)

Oceny

53 - 60	3,0
61 - 70	3,5
71 - 80	4,0
81 - 90	4,5
91 - 100	5,0

Spis Tresći

1. *Przedmiot badań operacyjnych*
2. *Przedmiot logistyki*
3. *Uwagi o konstrukcji modeli*
4. *Przykłady modeli decyzyjnych*
5. *Podstawowe definicje I postacie zadań programowania liniowego*
6. *Interpretacja geometryczna zadań programowania liniowego*

1. Przedmiot badań operacyjnych

Każdy system działania rodzi w sposób naturalny tzw. ***sytuacje decyzyjne***. Pojęcem sytuacji decyzyjnej nazywać będziemy ogół czynników, które wyznaczają w sposób bezpośredni postępowanie decyzyjne dowolnego podmiotu podejmującego decyzje, zwanego na ogół decydentem.

W każdej sytuacji decyzyjnej pojawiają się: ***decydent, okoliczności przyczynowe wywołujące sytuację decyzyjną, zbiór decyzji możliwych oraz kryteria ich wyboru***.

Następstwem prawie każdej sytuacji decyzyjnej (poza przypadkami banalnymi) jest pewien ***problem decyzyjny***, którego rozwiązanie wyznacza racjonalną w określonym sensie decyzję. ***Obszarem naszego zainteresowania będą sytuacje i problemy decyzyjne w sferze organizacji produkcji i planowaniu, ekonomice i zarządzaniu przedsiębiorstwem***.

Wiele problemów decyzyjnych, powstających z sytuacji decyzyjnych w sferze organizacji produkcji, planowania i zarządzania przedsiębiorstwem można odwzorować za pomocą odpowiedniego ***modelu decyzyjnego*** i w konsekwencji rozwiązać przez badania operacyjne.

Badania operacyjne (operational research) należą do tych dziedzin wiedzy, które zajmują się metodami rozwiązywania problemów decyzyjnych, wynikających z potrzeb racjonalnej działalności człowieka.

Znaczący rozwój badań operacyjnych nastąpił dzięki ich licznym zastosowaniom w zarządzaniu organizacjami gospodarczymi różnych szczebli, w planowaniu, ekonomice i organizacji produkcji. ***Z tych względów badania operacyjne uważa się za dyscyplinę należącą do zespołu nauk o organizacji i zarządzaniu.***

Rozwiązanie problemu decyzyjnego za pomocą badań operacyjnych jest procedurą składającą się z następujących etapów:

1. rozpoznanie sytuacji decyzyjnej i wynikającego z niej problemu decyzyjnego,
2. budowa modelu decyzyjnego,
3. rozwiązanie zadania decyzyjnego,
4. ocena poprawności i realności uzyskanych rozwiązań oraz ewentualna weryfikacja modelu decyzyjnego,
5. przedstawienie rozwiązań decydentowi i ostateczne przygotowanie decyzji.

Mówiąc o możliwościach badań operacyjnych w skutecznym wspieraniu procesu decyzyjnego, można postawić dość oczywiste pytanie - czy każdy problem decyzyjny może być potencjalnie rozwiązany za pomocą badań operacyjnych?

Odpowiedź na to pytanie nie jest twierdząca. Aby to uzasadnić i jednocześnie określić jakiego rodzaju problemy, wobec powyższego, mogą być rozwiązywane lub co najmniej wspomagane metodami badań operacyjnych, przedstawimy trzy podstawowe klasy problemów decyzyjnych sformułowane przez H. Simona i A. Newella w roku 1958:

1. O dobrze określonej strukturze (dobrze ustrukturalizowane) - są to problemy, które można przedstawić w postaci modelu matematycznego. Sytuacje decyzyjne tworzące tego typu problemy charakteryzują się przewagą elementów i zależności ilościowych, które są dobrze poznane i z tego powodu mogą być odwzorowane odpowiednim modelem matematycznym.
2. O nieokreślonej strukturze (nieustrukturalizowane) - są to problemy wynikające z takich sytuacji decyzyjnych, które można opisać prawie wyłącznie za pomocą cech i zależności o charakterze jakościowym, przy czym cech tych i zależności nie można z różnych względów zmierzyć jakąkolwiek miarą.
3. O słabo określonej strukturze (słabo ustrukturalizowane) - są to problemy mieszane, które w pewnej części są dobrze ustrukturalizowane, a w pewnej nieustrukturalizowane.

Obecnie istnieje wiele możliwości analizy systemów zarządzania, organizacji złożonych działań i ich projektowania.

Metody badań operacyjnych stanowią jedną z tych możliwości, którą odróżniają od innych następujące cechy charakterystyczne:

1. ukierunkowanie na podejmowanie decyzji,
2. możliwość oceny działania (decyzji) na podstawie ustalonych kryteriów,
3. konieczność budowy modelu (na ogół matematycznego) sytuacji decyzyjnej,
4. konieczność stosowania emc.

2. Przedmiot logistyki

Większość badaczy spotyka się na tym, że semantyka słowa schodzi do Drewnej Grecji, gdzie «logistyka» (англ. - logistics) naznaczała « sztukę liczeniową » albo «sztukę obliczać, zastanawiać się». Historyczny można wyśledzić dwa główne traktowania terminu, które doszedły przed nasze dni. Pierwsza jest związana z wojskowym obwodem. Tu logistyka określa się jak praktyczna sztuka zarządu wojskami i włącza szerokie koło pytań, związanych z planowaniem i zarządem materialno-techniczną aprowizacją armii, wyznaczeniem miejsc dyslokacji wojsk, transportową obsługą armii, …

Oprócz wojskowo-praktycznych traktowań terminu «logistyka», jest i wyjątkowo naukowe traktowanie - matematyczna.

Gotfrid Wilhelm Lejbnic nazywał logistyką matematyczną logikę. Ten termin był oficjalnie przymocowany za matematyczną logiką na filozoficznej konferencji w Genewie (1904 r.). W ojczystych encyklopedycznych wydaniach XX w. i w słownikach cudzoziemskich słów termin «logistyka» również praktykuje się jak matematyczna logika.

Logistyka – rys historyczny

Korzenie etymologiczne pojęcie *logistyka* sięgają języka greckiego, w którym występują m. in. słowa:

- ✓ **Logos - słowo, mowa, myśl, rachunek;**
- ✓ **Logike - logika;**
- ✓ **Logistike - sztuka liczenia, sztuka kalkulowania.**

Początkowo termin *logistyka* używany był w obszarze militarnym.

Obejmował wszyskie działania służące zaopatrzeniu oddziałów, takie jak:

- **Planowanie dróg i magazynów wojskowych,**
- **Transport osób i sprętu**
- **Dostawa zaopatrzenia i części zamiennych**

Pierwsze zastosowania logistyki

Działania wojskowe:
- Cesarz Leon VI (865-912 n.e.)
- Baron de Jomoni

Gospodarka:
- USA (1955 r.)

Logistyka występowała pod nazwą *business logistics*, a jej celem było osiągnięcie optymalnej koordynacju przepływu materialów, surowców, czynności związanych z ich magazynowaniem, czynności manipulacyjnych towarów, problemów dotyczących opakiwania, magazynowania I przepływuwyrobów gotowych do ich ostatecznych odbiorców.

ó

Cele logistyki

Ekonomiczne (tj. przy minimalnych kosztach) dostarczanie:

- ✓ Właściwego dobra (mateiały, wyroby, informacje, usługi, energia)
- ✓ We właściwej ilości
- ✓ O właściwej jakości
- ✓ Z właściwą inormacją (nie więcej niżpotrzeeba!)
- ✓ O właściwym czasie
- ✓ Do właściwego miejsca.

Przeczyny rozwoju logistyki

- ✓ Recesja w USA (1950)
- ✓ Wysoki poziom wydajności produkcji
- ✓ Wzrost kosztów transportu
- ✓ Zmiana filozofii podejścia do klienta
- ✓ Rozwój techniki komputerowej
- ✓ Rozwój telekomunikacji

Obecne zastosowania logistiki

- ✓ wojsko
- ✓ gospodarka
- ✓ Służba zdrowia (szpitale)
- ✓ Turystyka
- ✓

2.1. Definicje logistyki

Pojęcie „logistyka” jest wszystkim znane – do czasu, kiedy zapytamy o definicję (a wielu stawia jeszcze to pytanie), ponieważ logistyka jest nadal jeszcze w fazie określania swego miejsca w teorii i praktyce; stąd też nie ma jednolitej, akceptowanej przez wszystkich definicji.

Z wcześniejszych rozważań wiemy, że podstawowy cel logistyki w przedsiębiorstwie to koordynacja przepływu surowcow, materiałow i wyrobow gotowych do konsumentow, i minimalizacja kosztow tego przepływu przez usprawnianie zarządzania procesami. Opis tego celu (czyli w istocie rzeczy zdefiniowanie logistyki) jest rożnie formułowany przez rożnych badaczy.

Obecnie logistyka jest pojmowana jest jako:

Zintegrowane zarządzanie, planowanie i sterowanie przepływem materiałów i informacji, mające na celu optymalne tworzenie i transformację wartości (dóbr).

M. Ciesielski podaje np., Ŝe definicji logistyki jest ponad 100. Przykładowo kilka z nich:

- P. Blaik: „Logistyka to przekrojowa koncepcja zarządzania i podstawowy potencjał strategiczny, którego wyzwolenie i realizacja stają się niezbędnym warunkiem działalności i sukcesu na współczesnym konkurencyjnym rynku”.
- M. Christopher: „Logistyka to proces strategicznego zarządzania zaopatrzeniem, przechowywaniem i transportem materiałów, części oraz gotowych materiałów, w ramach organizacji oraz poprzez jej kanały marketingowe, zapewniający maksymalizację obecnych i przyszłych zysków oraz najbardziej efektywną realizację zamówień”.
- S. Krawczyk: „Logistyka obejmuje planowanie, koordynację i sterowanie przebiegiem, zarówno w aspekcie czasu, jak i przestrzeni, realnych procesów realizujących przyjęte cele. W szczególności dotyczy to przestrzennego i czasowego: rozmieszczenia, stanu i przepływu dóbr będących podmiotami tych procesów, a więc ludzi, dóbr materialnych, informacji i środków finansowych. W przypadku, gdy organizacją jest przedsiębiorstwo produkcyjne, logistyka obejmuje planowanie, kształtowanie, sterowanie i kontrolowanie przepływów materiałów (surowców, części) i produktów (półproduktów i produktów finalnych) oraz związanych z nimi przepływów informacji od dostawców do przedsiębiorstwa, wewnątrz przedsiębiorstwa i od przedsiębiorstwa do klientów”.
- S. Kummer i J. Weber „Logistyka to koncepcja zarządzania procesami i potencjałem dla skoordynowanej realizacji przepływów towarowych w skali przedsiębiorstwa i powiązań pomiędzy jego partnerami rynkowymi”.

Logistyczną operacją nazywa się jakiekolwiek elementarne działanie (całoksztalt działań), że przyprowadza do przekształcenia parametrów materialnego и\или związanych z nimi informacyjnych, finansowych serwisowych potoków, nie podmiot późniejszej dekompozycji w ramkach postawionego zadania administrowania albo projektowania logistycznej systemy.
Innymi słowami, do logistycznych operacji odnoszą się takie działania, jak załadunek, rozładunek, затаривание, przewóz, chwyt i wydawanie z ładownii, przechowywanie, przeładunek z jednego wyglądu transportu na innej kompletowanie, sortowanie, konsolidowanie, разукрупнение …
Logistycznymi operacjami, związanymi z informacyjnymi i finansowymi potokami, сопутствующими materialnemu, mogą być zbiór przechowywanie, przekazanie informacji o materialnym potoku, chwyt i przekazanie zamówienia po informacyjnych kanałach, rozliczenia z dostawcami, nabywcami towarów i logistycznymi pośrednikami, ubezpieczenie ładunku, operacje celniczego załatwienia ładunku …
Detalizowanie operacji logistycznego systemu - trudna i czasochłonna zadanie. Ona decyduje się zazwyczaj na poziomie firmy w ramkach budowy że informacyjny-zarządza modela przedsiębiorstwa, wyboru odpowiednią korporatywny-informacyjnej systemy, modelarstwa logistycznych procesów.

Każda definicja jest poprawna, kładzie tylko akcent na inne sprawy (wiadomo przecież, że ile jest ludzi na świecie, tyle samo może być odmiennych zdań na dany, konkretny temat). Analizując jednak poszczegolne sformułowania można wyodrębnić trzy ważne aspekty definicyjne logistyki:

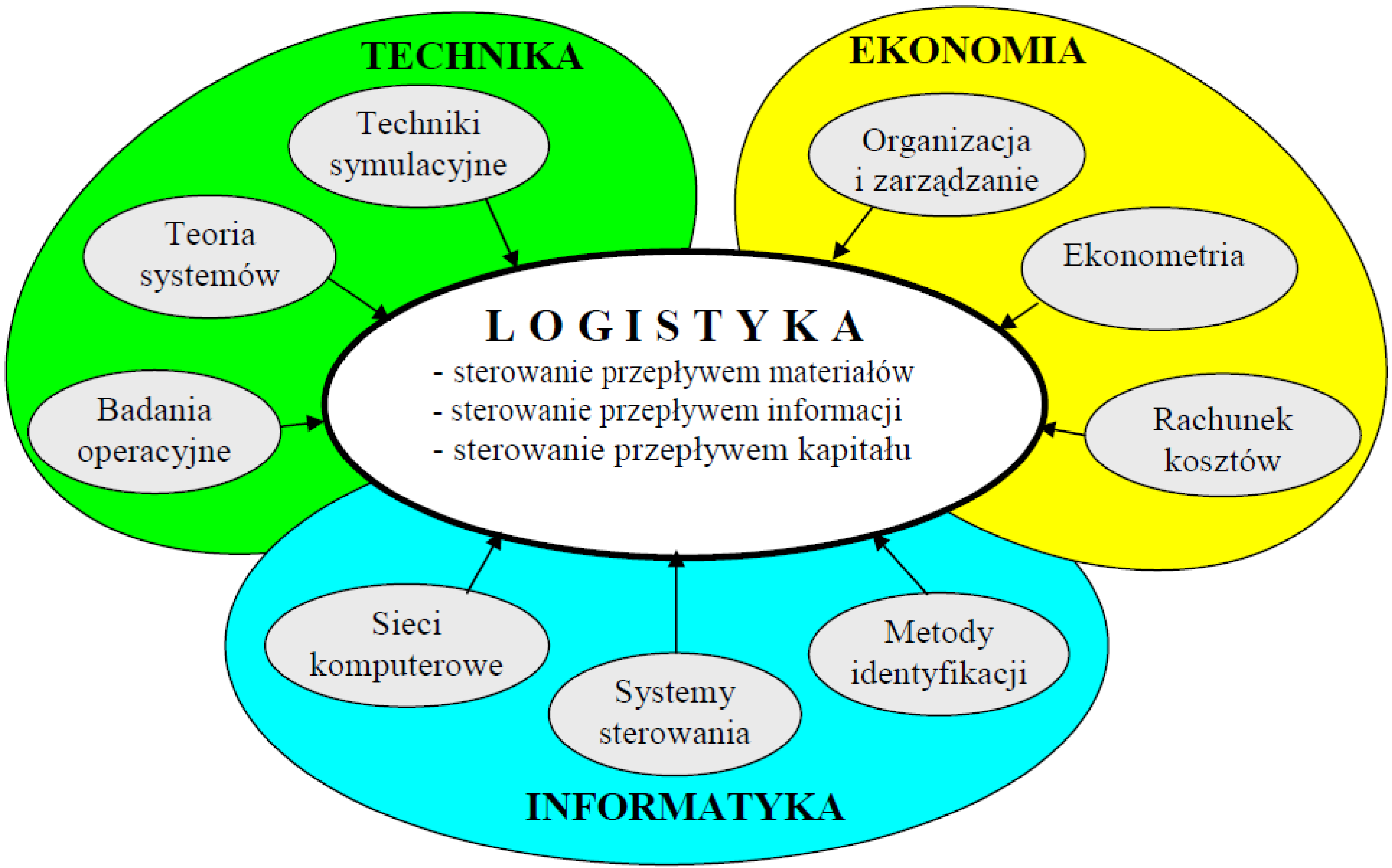
1. **LOGISTYKA** – to proces przepływu fizycznego dobr materialnych (surowcow, materiałow, wyrobow gotowych) w przedsiębiorstwie oraz między przedsiębiorstwami, a także przepływ towarzyszących im informacji;
2. **LOGISTYKA** – to pewna koncepcja zarządzania procesami przepływu dobr, oparta na zintegrowanym i systemowym ujmowaniu tych procesow. Ideą zarządzania logistyką jest koordynacja przepływow w celu minimalizacji kosztow tych przepływow;
3. **LOGISTYKA** – to dziedzina wiedzy ekonomicznej, badająca prawidłowości i zjawiska przepływu dobr i informacji w gospodarce i jej poszczegolnych ogniwach.

Logistyka

“Organizacja, planowanie, kontrola i wykonanie towarowego potoku od projektowania i zakupów, przez produkcję i podział do końcowego konsumenta w celu zadowolenia wymagań rynku z minimalnymi operacyjnymi i fundamentalnymi kosztami”.

«W wytwórczym kontekście - sztuka i nauka zapewnienia, produkcji i podziału materiałów i produkcji w potrzebnym miejscu i potrzebnych ilościach. W wojskowej sprawie (gdzie ten termin jest bardziej skonsumowany) może również włączać przemieszczenie wojsk».

«Logistyka jest proces planowania, wykonania i kontroli skutecznego z punktu widzenia obniżki kosztów potoku zapasów surowca, materiałów, niezakończonej produkcji, gotówa produkcji, serwisu i związanej informacji od punktu jego narodzin do punktu konsumpcji (włączając import, eksport, wewnętrzne i zewnętrzne przemieszczenia) dla pełnego zadowolenia wymagań konsumentów».



Rys. 1. ***Pojmowanie logistyki oraz dziedziny nauki, na których bazuje***

Do głównych metod, używanych do rozstrzygnięcia naukowych i praktycznych zadań w obwodzie logistyki, trzeba odnieść:

- ✓ metody systemowej analizy;
- ✓ **metody teorii badania operacji**;
- ✓ cybernetyczne podejście;
- ✓ prognostykę.

3. Uwagi o konstrukcji modeli

Budowa modelu decyzyjnego jest jednym z trudniejszych etapów w procedurze podejmowania decyzji za pomocą badań operacyjnych. Na ogół w praktyce nie jest łatwe wyróżnienie istotnych cech sytuacji decyzyjnej i ujęcie ich w modelu, a ponadto tę samą sytuację często można odwzorować za pomocą kilku modeli.

Od postaci sformułowanego modelu zależą szanse jego efektywnego rozwiązania - stąd przy formułowaniu modelu należy mieć rozeznanie co do metod, którymi można go rozwiązać. Należy oczywiście dobierać taką postać modelu, aby realne było uzyskanie jego rozwiązania w rozsądnym czasie. Uwaga ta wynika stąd, że trudności z rozwiązaniem modelu mogą istnieć również wtedy, gdy teoretycznie problem jest rozwiązany, a istnieją trudności natury praktycznej, np. zbyt duża pracochłonnosc opracowania programu na emc (wtedy, gdy takiego programu jeszcze nie ma), Modelowanie matematyczne można podzielić na następujące etapy:

1. Zdefiniowanie celu zadania i oceny rozwiązania;
2. Zebranie i uporządkowanie danych liczbowych;
3. Konstrukcja ogólnej struktury modelu matematycznego;
4. Budowa modelu szczegółowego;
5. Wyznaczenie rozwiązania modelu;
6. Kontrola prawidłowości wyników rozwiązania;
7. Analiza formalna i merytoryczna rozwiązania;
8. Korekta modelu szczegółowego pod względem łatwiejszego zastosowania w praktyce;
9. Uzyskanie rozwiązania suboptymalnego.

Warunkiem uzyskania poprawnego modelu matematycznego, a więc i wyników jego rozwiązania jest stosowanie odpowiednio trafnych danych wyjściowych oraz prawidłowa budowa modelu ogólnego. W przeciwnym bowiem przypadku uzyskuje się w wyniku programowania matematycznego plany produkcji mało realne lub nawet wręcz fałszywe.

Model decyzyjny jest konstrukcją formalną, odwzorowującą istotne cechy rzeczywistej sytuacji decyzyjnej. Model taki może być sformułowany w różnej postaci.

Matematyczna postać modelu decyzyjnego jest następująca

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (1)$$

gdzie: $\bar{z}$ jest miarą oceny podjętej decyzji (określonej przez zmienne decyzyjne), zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noszą nazwę zmiennych decyzyjnych i są przedmiotem sterowania przez podejmowanie decyzji, a f jest funkcją odwzorowującą zależność między zmiennymi decyzyjnymi a miarą oceny z. Zmienne decyzyjne w zależności (1) okreśiają alternatywne sposoby działania.

Przykładowo w zagadnieniu wyboru struktury asortymentowej produkcji zmiennymi decyzyjnymi są wielkości produkcji poszczególnych wyrobów, ponieważ zależą one od decyzji decydenta. Funkcja f nosi nazwę funkcji celu lub funkcji kryterium.

Model decyzyjny jest konstrukcją formalną, odwzorowującą istotne cechy rzeczywistej sytuacji decyzyjnej. Model taki może być sformułowany w różnej postaci.

Matematyczna postać modelu decyzyjnego jest następująca

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

gdzie:

z jest miarą oceny podjętej decyzji (określonej przez zmienne decyzyjne),

zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noszą nazwę zmiennych decyzyjnych i są przedmiotem sterowania przez podejmowanie decyzji,

f jest funkcją odwzorowującą zależność między zmiennymi decyzyjnymi a miarą oceny z.

Zmienne decyzyjne w zależności (1) określają alternatywne sposoby działania.

Na ogół, zbiór alternatywnych sposobów działania nie jest dowolny i wtedy podejmowanie decyzji przebiega w warunkach pewnych ograniczeń.

Uwzględnienie tych warunków w modelu decyzyjnym polega na określeniu zbioru dopuszczalnych decyzji (rozwiązań) dla konkretnej sytuacji decyzyjnej.

Ogólnie, warunki ograniczające można przedstawić następująco

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (2)$$

Zagadnienie wyboru decyzji za pomocą modelu decyzyjnego polega na określeniu wartości zmiennych decyzyjnych ze zbioru dopuszczalnych sposobów działania opisanych ograniczeniami (2) tak, aby uzyskać najkorzystniejszą wartość miary oceny podjętej decyzji, tzn. tak, aby osiągnąć optimum funkcji celu (1).

Operację poszukiwania wartości zmiennych decyzyjnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które maksymalizują lub minimalizują funkcję celu będziemy zapisywać symbolicznie w sposób następujący

$$(\max) \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

lub

$$(\min) \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ostatecznie zatem ogólna, matematyczna postać modelu decyzyjnego jest następująca

$$(\max \text{ lub } \min) \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

przy warunkach ograniczających

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) . \qquad (4)$$

Jeżeli funkcja celu (3) oraz warunki ograniczające (4) są liniowe, to model (3) - (4) jest modelem liniowym o postaci

$$(\text{max lub min}) \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5}$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \geq (\leq, =) b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{6}$$

gdzie: b_j *(i* = 1,2,..., m) oraz a_{ij} - są parametrami.

Zadania programowania liniowego (PL) stanowią oddzielny, specyficzny obszar w dziedzinie optymalizacji.

Generalnie, związane są z problemem efektywnego rozmieszczenia lub wykorzystania ograniczonych zasobów, przy czym zużycie zasobów na określoną działalność jest proporcjonalne do rozmiaru tej działalności.

Warunkiem uzyskania poprawnego modelu matematycznego, a więc i wyników jego rozwiązania jest stosowanie odpowiednio trafnych danych wyjściowych oraz prawidłowa budowa modelu ogólnego. W przeciwnym bowiem przypadku uzyskuje się w wyniku programowania matematycznego plany produkcji mało realne lub nawet wręcz fałszywe.

*Zagadnienie PL można zapisać w formie **kanonicznej** lub **standardowej**.*

Forma kanoniczna charakteryzuje się tym, że wszystkie warunki ograniczające podaje się w postaci nierówności jednego typu. Również nie żąda się by współczynniki były liczbami dodatnimi a warunki nieujemności nie muszą być pełne.

Forma standardowa charakteryzuje się tym, że zasadnicze warunki ograniczające są dane w postaci równań, wyrazy wolne są liczbami nieujemnymi oraz warunki nieujemności są pełne.

A więc zagadnienie PL w formie standardowej będzie: zmaksymalizować lub zminimalizować funkcję liniową przy danych warunkach ograniczających.

Forma ta jest konieczna przy rozwiązywaniu zagadnień PL.

*Istnieje jeszcze trzecia forma najczęściej spotykana w praktyce, w której ograniczenia występują w postaci równań i nierówności, nazywa się formą **mieszaną**.*

Postac standardowa Zagadnienia Programowania Liniowego

W celu ustandaryzowania sposobu rozwiazywania zagadnień programowania liniowego wprowadza się tzw. postać standardowa do której można sprowadzić każde zagadnienie programowania liniowego.

$\min z = C^T x$
przy ograniczeniach

$Ax = b$
$x_i \geq 0$

gdzie *A* jest macierzą o *m* wierszach i *n* kolumnach. Istotne jest założenie o nieujemności zmiennych.

4. Przykłady modeli decyzyjnych

Przykład 1. Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W_1 i W_2. W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I – 96 000 jedn., natomiast środek II – 80 000 jedn. Nakłady limitowanych środków na jednostkę wyrobów W_1 i W_2 podano w tabl. 1.

Tablica 1

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	W_1	W_2
I	16	24
II	16	10

Wiadomo także, że zdolności produkcyjne jednego z wydziałów, stanowiącego wąskie gardło procesu produkcyjnego, nie pozwalają produkować więcej niż 3000 szt. wyrobów W_1 oraz 4000 szt. wyrobów W_2. Ponadto, działająca w ramach przedsiębiorstwa komórka analizy rynku ustaliła optymalne proporcje produkcji, które kształtują się odpowiednio jak 3 : 2. Cena sprzedaży (w zł) jednostki wyrobu W_1 wynosi 30, a wyrobu W_2 – 40.

Ustalić optymalne rozmiary produkcji

Przykład 2. Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W_1 i W_2. W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I – 36 000 jedn., środek II – 50 000 jedn. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produkcji podano w tabl. 2.

Tablica 2

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	W_1	W_2
I	6	6
II	10	5

Należy także uwzględnić, że zdolność produkcyjna jednego z agregatów nie pozwala wyprodukować więcej niż 4000 szt. wyrobu W_2. Nie ma natomiast żadnych dodatkowych ograniczeń w stosunku do wyrobu W_1.

Określić optymalne rozmiary produkcji, przy założeniu że zysk realizowany na obu wyrobach jest jednakowy. Przy rozwiązywaniu zastosować metodę geometryczną.

Model 1

Zakład (firma) może produkować n wyrobów. Do ich produkcji zużywane są różne środki produkcji, z których część (powiedzmy r) jest dostępna w ograniczonych ilościach. Dane są normy zużycia środków produkcji na jednostkę każdego wyrobu, zasoby środków produkcji, ceny lub zyski jednostkowe ze sprzedaży wyrobów. Mogą być także podane dodatkowe informacje o popycie na produkowane wyroby (lub niektóre z nich) – minimalna ilość, jaką trzeba wyprodukować, aby zrealizować zamówienia odbiorców, lub maksymalna ilość, jaką można sprzedać. A zatem parametrami w modelu matematycznym zagadnienia są:

a_{ij} – zużycie i-tego środka produkcji na wytworzenie jednostki j-ego wyrobu ($i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, n$);
b_i – posiadany zasób i-tego środka produkcji;
c_j – cena lub zysk jednostkowy ze sprzedaży j-ego wyrobu;
d_j – minimalna ilość j-ego wyrobu, jaką trzeba wyprodukować;
g_j – maksymalna ilość j-ego wyrobu, jaką można sprzedać.

Środki	Wyroby						Zasoby środka
	1	**2**	**…**	**j**	**…**	**n**	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Zysk	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	**max**

Należy określić, które wyroby i w jakich ilościach produkować, aby nie przekraczając posiadanych zasobów środków produkcji i ewentualnie spełniając pewne dodatkowe ograniczenia dotyczące struktury produkcji, zmaksymalizować przychód (lub zysk) z ich sprzedaży. Zmiennymi decyzyjnymi w tym zagadnieniu są zatem wielkości produkcji wyrobów: x_j – wielkość produkcji j-ego wyrobu, a ogólny model zagadnienia można zapisać następująco:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \leqslant b_r ; \\
d_j \leqslant x_j \leqslant g_j \quad \text{dla niektórych } j, \\
x_1, \ldots, x_n \geqslant 0, \\
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,
\end{gathered}
$$

gdzie pierwsze r warunków dotyczy ograniczonych zasobów środków produkcji, pozostałe zaś warunki (które nie zawsze występują) związane są z ograniczeniami od strony popytu. Plany produkcji spełniające warunki ograniczające i warunki brzegowe będą *rozwiązaniem dopuszczalnym*. *Rozwiązaniem optymalnym* będzie to (lub będą te) spośród rozwiązań dopuszczalnych, dla którego (lub dla których) funkcja celu przyjmuje wartość maksymalną.

Przykład 4. Spółdzielnia produkcyjna sporządza mieszankę paszową dla trzody chlewnej z dwóch produktów: P_1 i P_2. Mieszanka paszowa ma dostarczyć trzodzie chlewnej pewnych składników odżywczych: S_1, S_2 i S_3 w ilościach nie mniejszych niż określone minima. Zawartość składników odżywczych w jednostce poszczególnych produktów, ceny produktów, a także minimalne ilości składników podano w tabl. 15.

Tablica 15

Składniki	Zawartość składnika w 1 kg produktu		Minimalna ilość składnika
	P_1	P_2	
S_1	3	9	27
S_2	8	4	32
S_3	12	3	36
Cena (w zł)	6	9	

Należy zakupić takie ilości produktów P_1 i P_2, aby dostarczyć trzodzie chlewnej składników odżywczych S_1, S_2 i S_3 w ilościach nie mniejszych niż minima określone w tabl. 15 i aby koszt zakupu był minimalny.

Zbudować model matematyczny tego zagadnienia i przedstawić rozwiązanie metodą geometryczną.

Model 2. Problem mieszanek

W zagadnieniu optymalnego składu mieszanki podejmujący decyzję pragnie określić, jakie ilości podstawowych surowców należy zakupić (zmieszać), aby otrzymać produkt o pożądanym składzie chemicznym przy możliwie najniższych kosztach zakupu surowców.
Szczególnym wariantem problemu mieszanek jest zagadnienie diety. Problem diety stawiany może być tak w odniesieniu do ludzi (pojedynczego człowieka lub określonej grupy ludzi, np. korzystających ze stołówki, czy dzieci w przedszkolu), jak i w odniesieniu do zwierząt domowych.
Aby zaspokoić potrzeby organizmu, trzeba mu dostarczyć w różnych ilościach rozmaitych składników odżywczych (np. białka, tłuszcze, sole mineralne, witaminy itd.). Składniki te zawarte są w różnych produktach żywnościowych. Załóżmy, że mamy do dyspozycji n produktów żywnościowych, w których powinno być zawarte r składników odżywczych. Parametrami (danymi) w tym zagadnieniu są:

a_{ij} - zawartość i-tego składnika odżywczego w jednostce j-ego produktu (i = 1, 2,…, r; j = 1,2, …, n);

b_i - tzw. norma żywienia, czyli minimalna (a czasami maksymalna) ilość i-tego składnika, jaką organizmowi należy (można) dostarczyć;

Model 2

Danych jest n surowców wyjściowych zawierających m różnych składników, istotnych z punktu widzenia właściwości produktu, będącego odpowiednią mieszanką tych surowców (np. mogą to być artykuły żywnościowe zawierające określoną liczbę różnych składników odżywczych). Znany jest poziom a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n)$ zawartości i-tego składnika w jednostce wagowej (np. w 1 kg) j-tego surowca oraz cena jednostkowa p_j $(j = 1, 2, ..., n)$ j-tego surowca. Z surowców tych należy utworzyć mieszankę, przy czym proporcje poszczególnych surowców powinny być takie, aby w jednostce wagowej mieszanki zawartość i-tego składnika wynosiła co najmniej b_i $(i = 1, 2, ..., m)$. Które surowce należy mieszać i w jakich ilościach, aby uzyskać żądaną mieszankę o najmniejszym koszcie?

c_j – cena j-ego produktu żywnościowego.

W konkretnych sytuacjach decyzyjnych mogą być także wymagania takie, jak warunek, aby dieta nie była zbyt monotonna, tzn. podane mogą być:

d_j – minimalna ilość j-tego produktu, jaką powinno się spożywać;

g_j – maksymalna ilość j-ego produktu, jaką organizm może otrzymać.

Należy określić takie wielkości zakupu poszczególnych produktów żywnościowych, które zapewnią organizmowi niezbędne składniki odżywcze i spełnią ewentualnie pewne dodatkowe ograniczenia, a równocześnie koszt ich zakupu będzie możliwie najniższy. Zmiennymi decyzyjnymi są zatem ilości produktów, jakie należy zakupić: x_j – wielkość zakupu j-ego produktu żywnościowego ($j = 1, 2, \ldots, n$), a problem diety sprowadza się do rozwiązania następującego zadania.

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\
\dotfill \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \geqslant b_r, \\
d_j \leqslant x_j \leqslant g_j \quad \text{dla niektórych } j, \\
x_1, \ldots, x_n \geqslant 0, \\
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.
\end{gathered}$$

A zatem celem decydenta jest wybór takiego składu mieszanki żywieniowej, która ze wszystkich dopuszczalnych byłaby najtańsza.

Model 3

Ładowność środka transportowego wynosi b. Środek ten może być załadowany co najwyżej N różnymi przedmiotami. Waga jednej sztuki j-tego przedmiotu wynosi w_j ($j = 1, 2, ..., N$), natomiast jej wartość c_j ($j = 1, 2, ..., N$). Należy określić ładunek rozpatrywanego środka transportowego o maksymalnej wartości.

Oznaczmy przez x_j ($j = 1, 2, ..., N$) liczbę sztuk j-tego przedmiotu wchodzącego w skład ładunku. Zagadnienie ma wtedy postać następującą

$$(\max)\ z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{j=1}^{N} w_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, ..., N)$$

$$x_j \text{ – całkowite} \quad (j = 1, 2, ..., N)$$

Powyższe zadanie nosi nazwę zagadnienia załadunku. Ma ono postać liniowego modelu całkowitoliczbowego (ze względu na warunek (2.16)).

Model 5

Niech będzie dana duża (praktycznie nieograniczona) liczba jednowymiarowych produktów wyjściowych o długości L. Mogą to być np. rury, pręty, deski, zwoje blachy itp. Produkty te należy pociąć na odcinki m typów, przy czym długość odcinka i-tego typu wynosi l_i $(i = 1, 2, ..., m)$. Wymagana liczba odcinków i-tego typu wynosi b_i $(i = 1, 2, ..., m)$. Zadanie polega na określeniu sposobu cięcia tak, aby pokrywając wymagane zapotrzebowanie, zminimalizować odpad produktu.

Przykład

Obecnie, na konkretnym przykładzie pokażemy sposób określenia macierzy **A** i odpadu odpowiadającego poszczególnym sposobom cięcia. Przypuśćmy, że rury o standardowej długości 20 m należy pociąć na odcinki o długościach 11, 7 i 3 m. Wymagane liczby tych odcinków wynoszą odpowiednio b_1, b_2 i b_3. W powyższych warunkach należy określić optymalny program cięcia. Tablica 2.2 podaje wszystkie możliwe sposoby cięcia rury na odcinki wymaganej długości.

Tablica 2.2

Długość odcinka	Sposoby cięcia							Zapotrzebowanie
	1	2	3	4	5	6	7	
11 m	1	1	0	0	0	1	0	b_1
7 m	1	0	2	1	0	0	2	b_2
3 m	0	3	2	4	6	0	0	b_3
Odpad	2	0	0	1	2	9	6	

Model decyzyjny optymalnego sposobu cięcia w rozpatrywanym przykładzie ma postać

$$(\min)\ z = 2x_1 + x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 6x_7$$

przy warunkach ograniczających

$$x_1 + x_2 + x_6 = b_1$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_7 = b_2$$

$$3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = b_3$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_7 \geq 0$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_7 \text{ – liczby całkowite}$$

Model 6

Danych jest m dostawców pewnego jednorodnego produktu. Zasoby tego produktu znajdujące się u i-tego dostawcy wynoszą a_i ($i = 1, 2, ..., m$). Produkt jest przeznaczony dla n odbiorców, których zapotrzebowanie wynosi odpowiednio: $b_1, b_2, ..., b_n$. Koszt transportu jednostki produktu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy wynosi c_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$). Należy określić plan przewozów pomiędzy dostawcami a odbiorcami tak, aby po uwzględnieniu dostępnych zasobów dostawców i wymaganego zapotrzebowania odbiorców łączne koszty transportu były minimalne.

Oznaczmy przez x_{ij} $(i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n)$ wielkość przewozu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy. Wtedy sformułowane zadanie ma następujący model

$$(\min)\, z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.38}$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1, 2, ..., m) \tag{2.39}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{2.40}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n) \tag{2.41}$$

Przykład

Firma turystyczna dysponuje czterema autobusami o różnych kosztach eksploatacji. Firma podpisała umowy na wynajęcie autobusów czterem różnym klientom na długi weekend. Koszty realizacji poszczególnych zleceń dla każdego autobusu zamieszczono w tablicy 1.10.

Tablica 1.10. Koszty realizacji zleceń [zł]

Autobus / Zlecenie	A1	A2	A3	A4
Kołobrzeg	3000	1500	3900	2100
Międzyzdroje	4700	2500	5500	3500
Szklarska Poręba	5600	3000	7200	4200
Zielona Góra	6200	3700	8200	4700

zminimalizować

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Przykład

W pewnym zakładzie (elektrownia, gazownia lub pogotowie ratunkowe) z powodów technologicznych konieczna jest stała obecność pracowników. Ze względu na zmienne natężenie realizowanego procesu liczba niezbędnych pracowników ulega zmianie. Można ją określić dla czterogodzinnych przedziałów czasu w czasie całej doby: godziny 0-4 – co najmniej 4 osoby, godziny 4-8 – co najmniej 18 osób, 8-12 – co najmniej 7, 12-16 – co najmniej 15, 16-20 – co najmniej 18, w przedziale 20-24 – co najmniej 6 osób.

Pracownicy przychodzą do pracy tylko o określonych godzinach (0, 4, 8, 12, 16 lub 20), a po przyjściu pozostają w pracy przez całą zmianę, która trwa równe 8 godzin.

Należy zbudować zadanie PL w celu uzyskania odpowiedzi na pytanie: jaka jest minimalna liczba pracowników niezbędnych do obsługi procesu produkcyjnego w ciągu doby?

Przykład

W pewnej sieci komunikacyjnej (pociągi, bity informacji lub przesyłki pocztowe) chcemy przesłać w pewnej jednostce czasu jak najwięcej jednorodnego towaru z punktu 1 do punktu przeznaczenia o numerze 6. Jest w sumie 6 węzłowych punktów tej sieci. Sieć komunikacyjna składa się z następujących połączeń: (1→2), (1→3), (2→3), (2→4), (3→4), (3→5), (4→5), (4→6), (5→6). Strzałki oznaczają jedyny możliwy kierunek przepływu towaru. Zbiór połączeń oznaczamy L.

Każda z tras ma w danym okresie określoną przepustowość, co oznacza, że w analizowanym okresie może nią zostać przesłana ilość towaru nie większa, niż ustalona i podana. Przepustowości „p” dla kolejnych odcinków sieci przedstawiają się następująco: p(1→2)=7, p(1→3)=10, p(2→3)=6, p(2→4)=8, p(3→4)=2, p(3→5)=3, p(4→5)=7, p(4→6)=8, p(5→6)=9.

Należy zbudować zadanie PL, które umożliwi wyznaczenie rozwiązania, które określi: jakie mają być przepływy towarowe na poszczególnych odcinkach sieci, aby zmaksymalizowana została suma towarów przesłanych z punktu początkowego do punktu końcowego?