

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА

Завдання:

1. Вивчити теоретичні основи дискретного перетворення Гільберта.
2. Написати програму для розрахунку перетворення Гільберта для трьох простих дискретних сигналів з 5 довільними значеннями.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Дискретне перетворення Гільберта

z -перетворення імпульсної характеристики лінійної і стійкої фізично реалізованої системи в будь-якій точці, що лежить поза межами одиничного кола, можна виразити через значення дійсної чи уявної частини перетворення Фур'є тієї ж імпульсної характеристики. Інакше кажучи, дійсну і уявну частини перетворення Фур'є дійсної послідовності можна виразити одну через одну. Розглянемо фізично реалізовану послідовність $x(n)$ [тобто $x(n)=0$ при $n < 0$] і її z -перетворення $X(z)$. Припустимо, що функція $X(z)$ – аналітична поза одиничним колом, тобто всі полюси $X(z)$ лежать всередині цього кола. Нехай $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ і $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ – дійсна і уявна частини перетворення Фур'є послідовності $x(n)$, тобто

$$X(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}). \quad (1)$$

Введемо $x_{\Pi}(n)$ (парну частину $x(n)$) як

$$x_{\Pi}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)]$$

Тоді $x(n)$ можна записати у вигляді

$$x(n) = 2x_{\Pi}(n)s(n), \quad (2)$$

де

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Використовуючи формулу (2), знайдемо значення z -перетворення $x(n)$ в точках z , які лежать поза одиничним колом ($z = re^{j\omega}$, $r > 1$). Отримаємо:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_{\Pi}(n)s(n)r^{-n}e^{-jn\omega}. \quad (4)$$

Права частина рівняння (4) – це фактично перетворення Фур'є послідовності

$$y(n) = [2x_{\Pi}(n)][s(n)r^{-n}]. \quad (5)$$

Оскільки послідовність $y(n)$ дорівнює добутку двох послідовностей, її перетворення Фур'є можна знайти за допомогою теореми про комплексну згортку у вигляді згортки перетворень Фур'є окремих множників, тобто

$$X(re^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_{\text{Re}}(v) \left(\frac{e^{j\omega} + r^{-1}v}{e^{j\omega} - r^{-1}v} \right) \frac{dv}{v} \quad (6)$$

Тут z -перетворення $x_{\Pi}(n)$ і $s(n)r^{-n}$ дорівнюють відповідно $X_{\text{Re}}(z)$ і $0,5 \left(\frac{1 + \frac{1}{rz}}{1 - \frac{1}{rz}} \right)$ і контур інтегрування C збігається з одиничним колом.

Рівняння (6) пов'язує значення функції $X(re^{j\omega})$ в точках, що лежать поза одиничним колом, зі значеннями її дійсної частини $X_{\text{Re}}(z)$ на одиничному колі. Якщо $X_{\text{Re}}(z)$ має вигляд раціонального дробу, то контурний інтеграл (6) можна легко обчислити за допомогою різниць.

Аналогічно можна отримати співвідношення, що пов'язує $X(re^{j\omega})$ з $X_{\text{Im}}(z)$. Запишемо $x(n)$ у вигляді

$$x(n) = 2x_{\text{H}}(n)s(n) + x(0)u_0(n), \quad (7)$$

де $x_{\text{H}}(n)$ – непарна складова $x(n)$, що визначається як

$$x_{\text{H}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)] \quad (8)$$

У цьому випадку вираз для $X(re^{j\omega})$ має вигляд

$$X(re^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=re^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi} \oint_C X_{\text{Im}}(v) \left(\frac{e^{j\omega} + r^{-1}v}{e^{j\omega} - r^{-1}v} \right) \frac{dv}{v} + x(0), \quad (9)$$

причому z -перетворення $x_{\text{H}}(n)$ дорівнює $X_{\text{Im}}(z)$, а контуром інтегрування як і раніше є одиничне коло.

Щоб знайти співвідношення, що пов'язує $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ і $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$, розглянемо граничні значення правих частин (6) і (9), коли $r \rightarrow 1$. Так як при цьому полюс підінтегральної функції наближається до контуру інтегрування, то обчислення інтегралів слід проводити акуратно. Якщо ці інтеграли прирівняти до основних значень інтеграла типу Коші, тобто

$$\frac{1}{2\pi j} P \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & |z_0| < 1, \\ 0, & |z_0| > 1, \\ \frac{1}{2} f(z_0), & |z_0| = 1, \end{cases} \quad (10)$$

(де $P \oint g(z) dz$ – головне значення інтеграла типу Коші), то можна знайти межі інтегралів (6) і (9) при $r \rightarrow 1$. Однак замість того, щоб безпосередньо обчислювати ці інтеграли, введемо нову змінну інтегрування $v = e^{j\theta}$ (так як інтегрування проводиться по одиничному колу) і запишемо $X(re^{j\omega})$ наступним чином:

$$X(re^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(re^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(re^{j\omega}). \quad (11)$$

Перепишемо рівняння (6) у вигляді

$$X_{\text{Re}}(re^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \frac{1 - \frac{1}{r^2} + \frac{2j}{r} \sin(\theta - \omega)}{1 - \frac{2}{r} \cos(\theta - \omega) + \frac{1}{r^2}} d\theta, \quad (12)$$

звідки, після прирівнювання уявних частин, отримаємо:

$$X_{\text{Im}}(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \frac{2}{r} \sin(\theta - \omega)}{1 - \frac{2}{r} \cos(\theta - \omega) + \frac{1}{r^2}} d\theta \quad (13)$$

Аналогічним чином перетворимо рівняння (9):

$$X_{\text{Re}}(re^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \frac{2}{r} \sin(\theta - \omega)}{1 - \frac{2}{r} \cos(\theta - \omega) + \frac{1}{r^2}} d\theta + x(0). \quad (14)$$

Перейдемо в отриманих виразах до границі при $r \rightarrow 1$ і використовуючи для обчислення інтегралів формулу (10), одержимо шукані співвідношення:

$$X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) d\theta \quad (15)$$

і

$$X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = x(0) - \frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Im}}(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) d\theta \quad (16)$$

Ці співвідношення називають парою **дискретних перетворень Гільберта**. Вони дозволяють визначити уявну частину частотної характеристики фізично реалізованої системи за її дійсною частиною і, навпаки, дійсну частину частотної характеристики за її уявною частиною.

Формули дискретного перетворення Гільберта можна також отримати, співставляючи логарифм модуля частотної характеристики і фазову характеристику фізично реалізованої *мінімально-фазової системи* (всі нулі і полюси передаточної функції такої системи лежать всередині одиничного кола.) Зазначимо, що обмеження, які накладаються на розміщення нулів передаточної функції, є занадто жорсткими. У багатьох реальних системах нулі розташовуються поза, або на одиничному колі.

Перетворення Гільберта для дійсних сигналів

Однією з найбільш важливих областей застосування перетворення Гільберта є системи модуляції. У них (наприклад, в системах односмугової модуляції) часто обробляються комплексні смугові сигнали. Такі сигнали характерні тим, що на нижній половині одиничному колі (тобто при $\pi \leq \omega \leq 2\pi$) їх спектр дорівнює нулю. Таким чином, якщо $\nu(n)$ відноситься до розглянутого класу сигналів, його перетворення Фур'є

$$V(e^{j\omega}) = 0, \quad \pi \leq \omega \leq 2\pi. \quad (17)$$

Очевидно, що сигнал $v(n)$ є комплексним, оскільки перетворення Фур'є дійсного сигналу задовольняє співвідношення

$$V^*(e^{-j\omega}) = V(e^{j\omega}); \quad (18)$$

якби сигнал $v(n)$ був дійсним, то з рівняння (18) $V(e^{j\omega}) = 0$. Комплексний сигнал $v(n)$ можна представити у вигляді

$$v(n) = x(n) + j\hat{x}(n) \quad (19)$$

де $x(n)$ і $\hat{x}(n)$ – дійсні послідовності. Рівняння (17) виконується, якщо

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j\hat{X}(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{при } \pi \leq \omega \leq 2\pi, \quad (20)$$

або

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = jX(e^{j\omega}), \quad \pi \leq \omega \leq 2\pi \quad (21)$$

Оскільки послідовності $x(n)$ і $\hat{x}(n)$ дійсні, то

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = -jX(e^{j\omega}), \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (22)$$

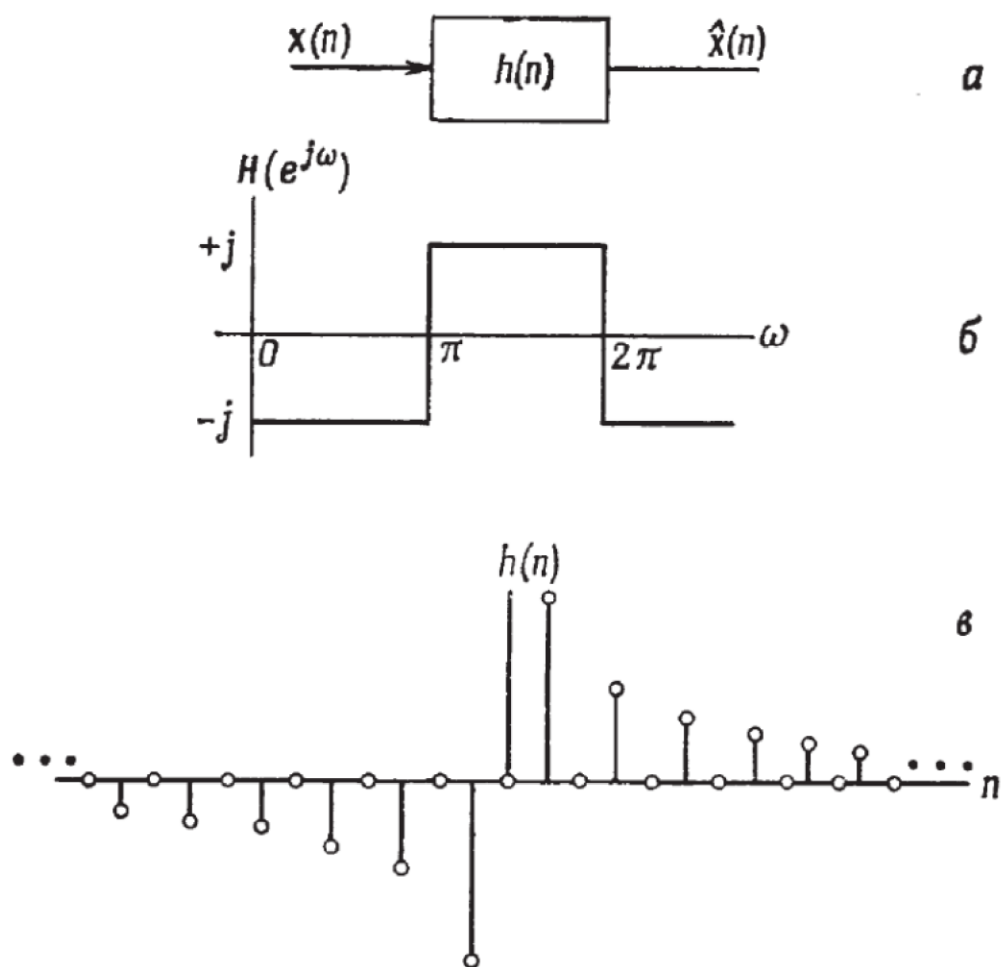


Рис. 1. Імпульсна і частотна характеристики ідеального перетворювача Гільберта

Отже, сигнал $\hat{x}(n)$ можна отримати, пропустивши сигнал $x(n)$ через фільтр з частотною характеристикою

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \leq \omega < \pi, \\ j, & \pi \leq \omega < 2\pi. \end{cases} \quad (23)$$

При цьому $V(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega})$ на інтервалі $0 \leq \omega \leq \pi$ і $V(e^{j\omega}) = 0$ на інтервалі $\pi \leq \omega \leq 2\pi$, як і було прийнято. Імпульсна характеристика фільтра з частотною характеристикою виду (23) виходить з оберненого перетворення Фур'є частотної характеристики (23):

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} -je^{j\omega n} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} je^{j\omega n} d\omega \right), \quad (24)$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1 - e^{j\pi n}}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

звідки:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Рівняння (23) і (25) описують **ідеальний цифровий перетворювач Гільберта**. На рис. 1 зображені його частотна і імпульсна характеристики. Зрозуміло, що такий пристрій фізично не піддається реалізації, так як його імпульсна характеристика простягається від $-\infty$ до $+\infty$. Окрім того, z -перетворення послідовності (25) сходиться тільки на одиничному колі. Тому ідеальний перетворювач Гільберта подібний до ідеального фільтру низьких частот, або ідеального диференціатора в тому сенсі, що на практиці їх можна реалізувати тільки наближено.

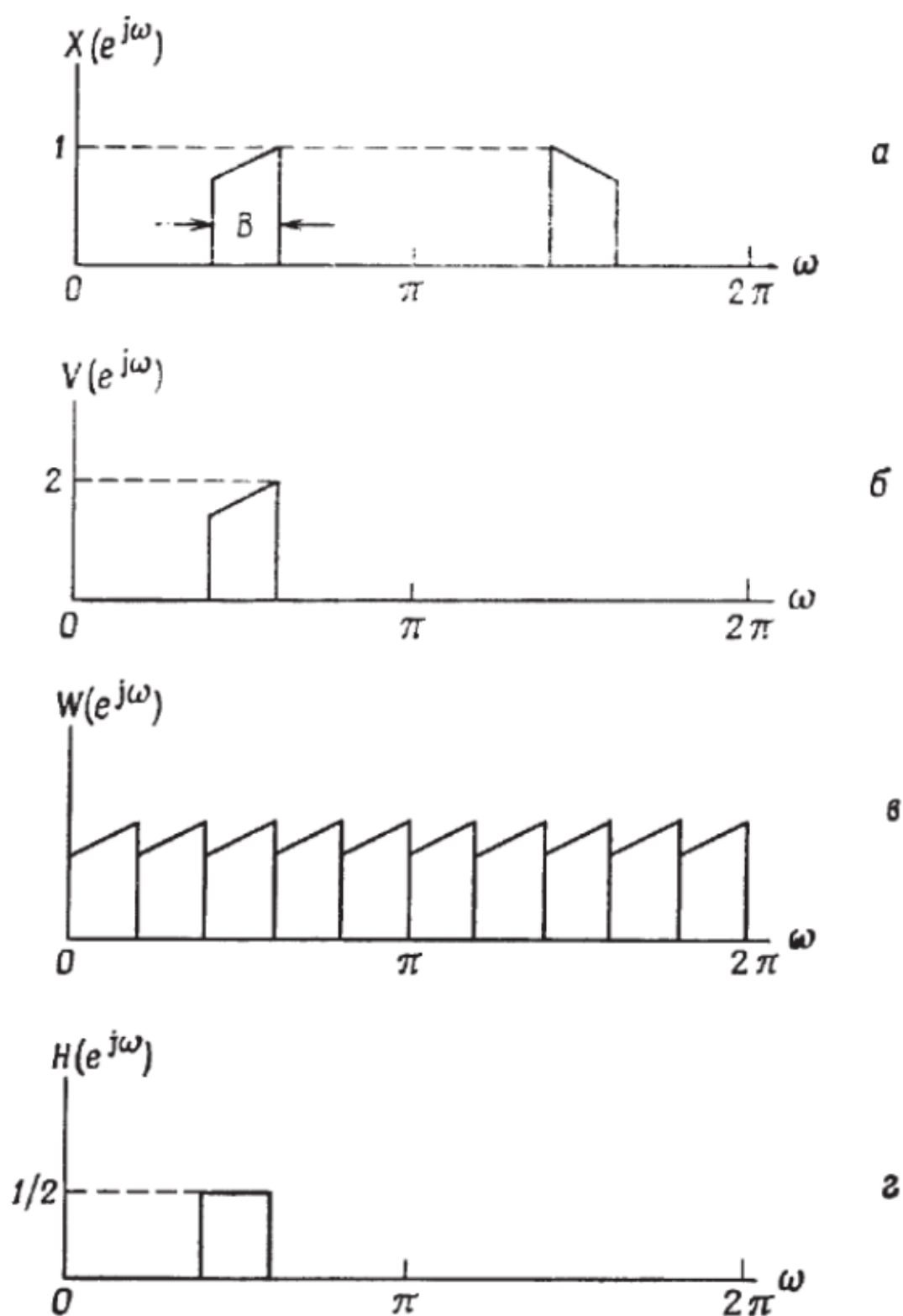


Рис. 2. Дискретизація смугового коливання

Оскільки послідовність $\tilde{x}(n)$ можна отримати, пропускаючи $x(n)$ через фільтр, то ці дві послідовності пов'язані співвідношенням типу згортки:

$$\hat{x}(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq n}}^{\infty} x(n-m) \frac{\sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{m}. \quad (26)$$

Аналогічним чином з $\hat{x}(n)$ за допомогою фільтра, імпульсна характеристика якого описується виразом (25) з протилежним знаком, можна отримати $x(n)$.

Отже,

$$x(n) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq n}}^{\infty} \hat{x}(n-m) \frac{\sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{m}. \quad (27)$$

Рівняння (26) і (27) – це пара **перетворень Гільберта для дійсних сигналів** $x(n)$ і $\hat{x}(n)$.

За аналогією з неперервними аналітичними сигналами, спектр яких дорівнює нулю в області негативних частот, послідовність $\nu(n) = x(n) + j\hat{x}(n)$ також називають аналітичним сигналом. Такий сигнал відіграє важливу роль при дискретизації смугових сигналів (рис. 2). На рис. 2,а зображено спектр смугового дійсного коливання $x(n)$, а на рис. 2,б – спектр аналітичного сигналу $\nu(n) = x(n) + j\hat{x}(n)$. При дискретизації аналітичного сигналу $\nu(n)$ частоту дискретизації можна зменшити до $\frac{B}{2\pi}$ комплексних відліків в секунду, не побоюючись накладання в спектрі. Спектр отриманої при цьому послідовності $\omega(n)$ (вважаємо, що $\frac{2\pi}{B}$ – ціле) зображений на рис. 2,в. Щоб відновити вихідний сигнал у вигляді послідовності з первісної частотою дискретизації, застосовують смугової інтерполюють фільтр (рис. 2,г). Дійсна частина коливання на його виході і дає шуканий дійсний сигнал.