ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1.

ДИСКРЕТНА ЗГОРТКА СИГНАЛІВ.

Мета: Ознайомитися з поняттям дискретних систем. Освоїти процес та алгоритм дискретної згортки сигналів.

Поняття дискретних систем

Узагальнена структурна схема дискретної системи представлена на рис. 1.

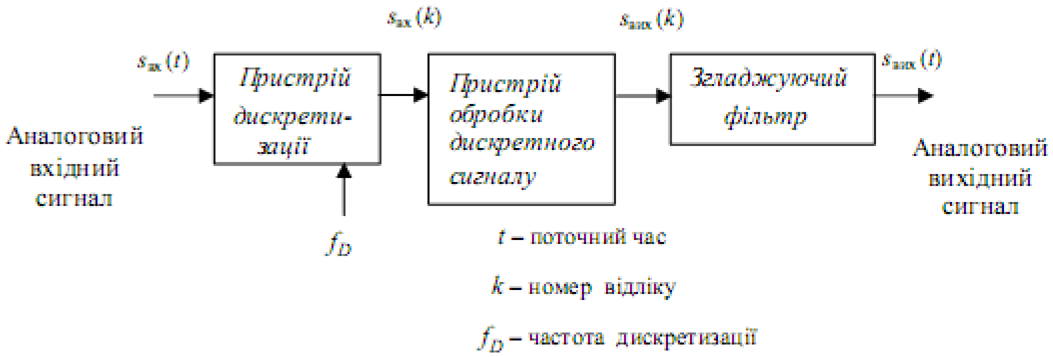

Рис. 1

Вхідний аналоговий сигнал переводиться в послідовність відліків $s_{вх}(k)$ і надходить на пристрій обробки, звідки знімається вихідна імпульсна послідовність $s_{вих}(k)$, яка потім згладжується фільтром. Окремим випадком дискретної системи є система цифрової обробки сигналу (ЦОС), коли послідовність вхідних відліків $s_{вх}(k)$ оцифровується. У цьому випадку, очевидно, пристрій обробки повинен мати аналогово-цифровий перетворювач (АЦП) на вході і цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) на виході.

Дискретизація аналогового сигналу. Теорема Найквіста-Котельникова-Шеннона.

Перехід від аналогового безперервного сигналу $s(t)$ до дискретного $s_D(t)$ здійснюється шляхом дискретизації по часу (рис. 2). З рисунків бачимо, що вихідний неперервний сигнал $s(t)$ представляється послідовністю відліків $\{s_k\}$, де $s_k = s(k\Delta t)$. Інтервал Δt називають *кроком дискретизації*, а $f_D = \frac{1}{\Delta t}$ – *частотою дискретизації*. Зрозуміло, що для уникнення втрат інформації крок дискретизації повинен бути досить малим. З іншого боку, занадто часті відліки ведуть до невиправданої надмірності інформації і ускладнення апаратури. Відповідь про правильний вибір Δt дає теорема Найквіста-Котельникова-Шеннона.

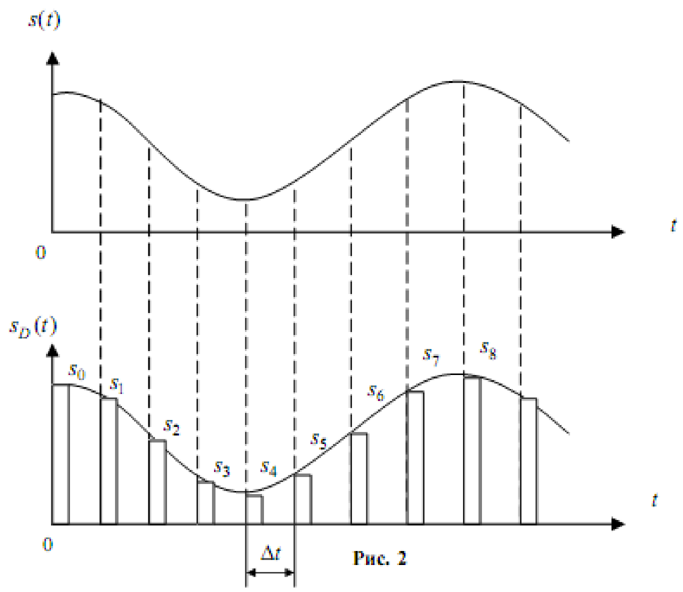

Рис. 2

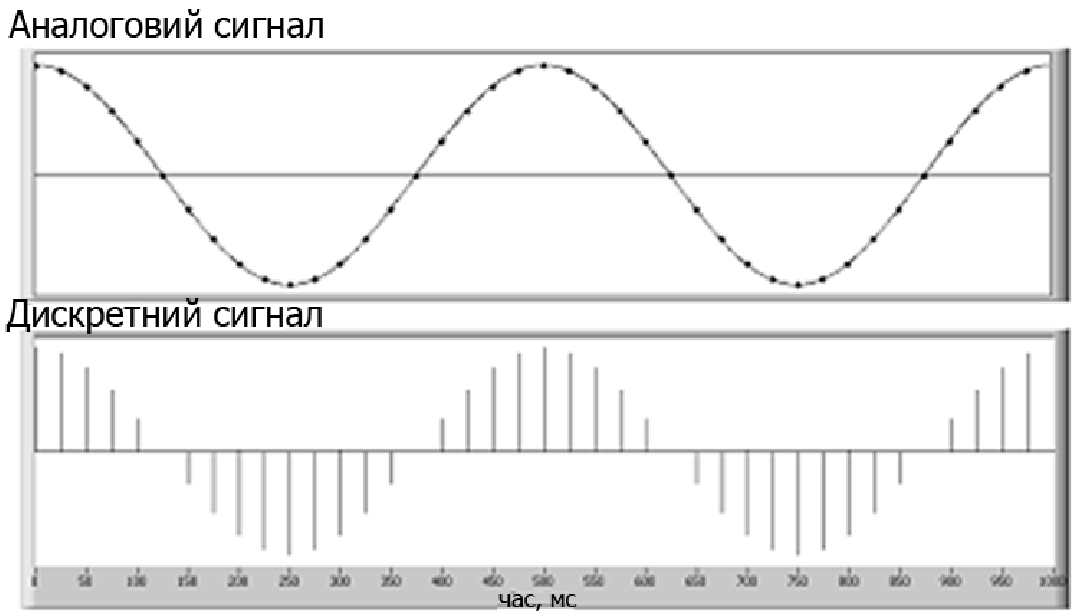

Рис. 2б. Коректне відтворення. Аналоговий гармонічний і дискретний сигнали: частота сигнала $f_s = 2$ кГц, частота дискретизації $f_D = 40$ кГц

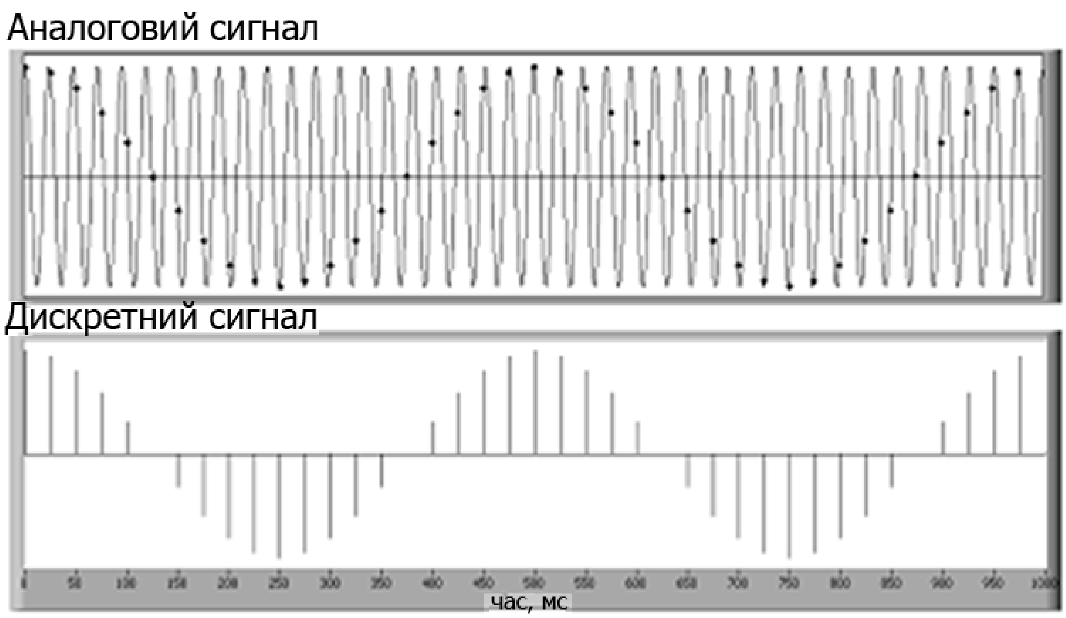

Рис. 2в. Некоректне відтворення. Аналоговий гармонічний і дискретний сигнали: частота сигнала $f_s = 42$ кГц, частота дискретизації $f_D = 40$ кГц

Теорема Найквіста-Котельникова-Шеннона: довільний сигнал $s(t)$, спектр якого обмежений частотою F_B може бути повністю відтворений по послідовності своїх відліків, взятих з інтервалом

$$\Delta t \leq \frac{1}{2F_B} \tag{1}$$

При цьому відновлення здійснюється за допомогою ряду

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\Delta t}\left(t - k\Delta t\right)\right]}{\frac{\pi}{\Delta t}\left(t - k\Delta t\right)}. \tag{2}$$

Фізичний зміст цієї теореми стає зрозумілим, якщо розглянути спектри сигналів $s(t)$ і $s_D(t)$.

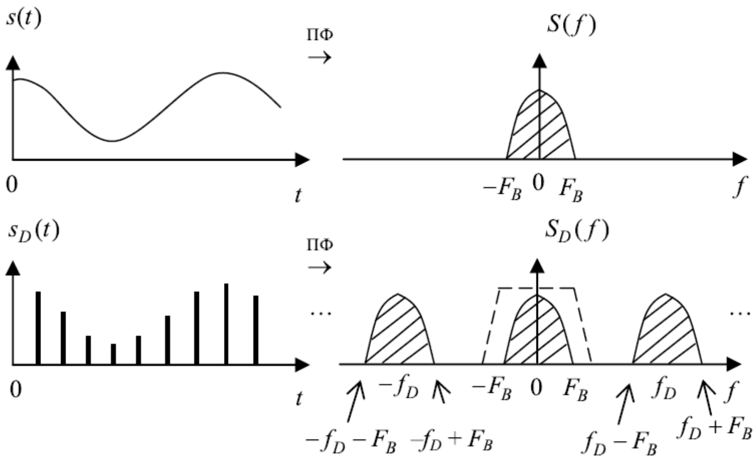

Рис. 3

З рис. 3 видно, що $S_D(f)$ містить в собі $S(f)$ і ще нескінченне число копій $S(f)$, зсунутих один відносно одного на частоту дискретизації f_D. Якщо пропустити сигнал $S_D(f)$ через фільтр низьких частот (ФНЧ), амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) якого показана на цьому ж рисунку, то на виході ФНЧ залишиться тільки $S(f)$, тобто відновиться сигнал $s(t)$.

При $f_D > 2F_B$ копії не перетинаються з основною пелюсткою спектра $S_D(f)$ і таке відновлення можливе.

При $f_D = 2F_B$ копії дотикаються до основної пелюстки, проте виділення вихідного сигналу $s(t)$ ще можливе, але за допомогою ідеального ФНЧ з нескінченною крутизною спаду АЧХ.

При $f_D < 2F_B$ пелюстки спектру $S_D(f)$ перекриваються і відновлення вихідного сигналу $s(t)$ стає неможливим.

На практиці частоту f_D завжди вибирають більшою, ніж $2F_B$, так як будь-який фільтр допустимої складності має не нескінченну крутизну спаду АЧХ. Спектр реального сигналу зазвичай має точну верхню межу. Найчастіше $S(f)$ зменшується із зростанням частоти, асимптотично наближаючись до нуля. У такому випадку на вході пристроя-дискретизатора застосовують ФНЧ з частотою, яка рівна ефективній ширині спектра вихідного аналогового сигналу. Його призначення – прибрати "хвости" спектра за межами F_B і тим самим виключити перекриття пелюсток спектра $S_D(f)$

Дискретна згортка сигналів

Згортку двох аналогових сигналів можна зобразити у вигляді:

$$x(t) * y(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau \,. \quad (1)$$

За аналогією зі згорткою неперервних сигналів в теорії дискретних систем вводять дискретну згортку - сигнал, відліки якого пов'язані з відліками дискретних сигналів $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ співвідношенням:

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \,. \quad (2)$$

Розглянемо найпростіший приклад обчислення згортки дискретних сигналів $\{x_k\} = (1, 2, 3)$ і $\{y_k\} = (5, 3, 1)$. Скориставшись алгоритмом дискретної згортки (2), здійснимо безпосереднє обчислення її відліків. Для цього спочатку випишемо відліки сигналу $\{x\}$ в прямій послідовності, а сигнала $\{y\}$ – в зворотній:

x_k :			
	1	2	3

$\rightarrow x_1,\ x_2,\ x_3$

y_k :			
	1	3	5

$\leftarrow y_3,\ y_2,\ y_1$

Щоб визначити нульовий відлік згортки ($m = 0$), сумістимо нульові позиції отриманих сигналів

$$\leftarrow$$

		1	2	3
1	3	5		

$$\rightarrow$$

і перемножимо відліки, що знаходяться один під одним. В результаті отримаємо

$$f_0 = 1 \cdot 5 = 5$$

Для $m = 1$, $f_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$

	1	2	3
1	3	5	

Для $m = 2$, $f_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 22$

1	2	3
1	3	5

Для $m = 3$, $f_3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$

1	2	3	
	1	3	5

Для $m = 4$, $f_4 = 1 \cdot 3 = 3$

1	2	3		
		1	3	5

У підсумку

$$\{f_m\} = (5, 13, 22, 11, 3)$$

Завдання до роботи.

Створити програму для знаходження дискретної згортки $\{f_m\}$ дискретних сигналів $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$.

Таблиця 1. Вхідні дані

Варіант №	$\{x_k\}$	$\{y_k\}$
1	3, 5, 7	6, 3, 3
	4, 5, 7, 3	4, 1, 6, 7
	6, 4, 7, 8, 1, 1, 5	5, 3, 6, 7, 1, 0
2	5, 6, 0	1, 4, 7
	2, 3, 4, 7	0, 3, 8, 7, 2, 6, 4,
	6, 3, 2, 4, 6	0, 8, 2, 3, 7, 4, 0, 8, 5
3	0, 8, 6	4, 2, 2
	3, 2, 4, 0, 1, 2, 8, 7	1, 8, 7, 6, 4
	3, 4, 6, 0, 9, 2, 1, 6, 4, 0	0, 1, 2, 3, 6, 4
4	5, 2, 3	9, 7, 5
	2, 1, 4, 3, 6, 8	8, 4, 1, 8
	6, 4, 0, 1, 2, 8, 7, 4, 0, 1, 2	8, 3, 4, 0, 8, 2, 1
5	6, 7, 1	5, 6, 7
	6, 4, 7, 9, 2, 3, 6, 4, 9	8, 2, 7, 3, 6, 4, 0
	2, 3, 6, 4, 2, 4, 8, 2	1, 2, 8, 6, 4, 0, 8, 3, 7, 6, 4, 0
6	8, 1, 0	5, 6, 9
	6, 4, 2, 7, 9, 3	4, 9, 0, 8, 1, 7, 2,
	6, 4, 7, 0, 8, 1, 2	3, 4, 8, 7, 0, 6
7	6, 5, 4	3, 2, 1
	0, 9, 2, 7, 4, 3	6, 8, 6, 4
	5, 1, 0, 2, 6, 4, 7, 8	0, 1, 2, 8, 7, 4, 0
8	4, 1, 1	7, 4, 5
	9, 8, 7, 4, 9, 5, 0	5, 3, 2, 4, 0, 1, 2
	7, 1, 9, 8, 7, 5	8, 7, 3, 4, 6, 0, 9, 2, 1, 6
9	5, 4, 3	1, 5, 6
	0, 7, 1, 4, 5, 6, 1, 2	1, 0, 9, 2, 8, 7,
	0, 9, 4, 5, 0, 7, 5	4, 7, 3, 4, 9, 2, 1, 3, 7, 4
10	0, 3, 6	6, 5, 4
	7, 4, 8, 0, 1, 3, 2, 7	8, 7, 7, 5, 8, 1, 0
	4, 0, 1, 7, 5, 1, 0	2, 4, 3, 9, 6, 5
11	3, 3, 6	5, 6, 0
	9, 8, 7, 2, 1, 0	7, 1, 3, 2, 9, 4, 7, 1
	5, 7, 6, 1, 0, 8, 7, 6	8, 2, 9, 3, 0,
12	4, 2, 2	9, 7, 5
	4, 0, 8, 7, 0, 3, 7	4, 3, 9, 0, 8, 7
	8, 4, 3, 6, 5, 2, 1	3, 2, 4, 9, 0, 8, 7, 3, 2
13	7, 4, 5	5, 2, 3
	2, 6, 5, 4, 7, 6, 5	1, 8, 4, 3, 5, 0, 9
	1, 6, 5, 0, 9, 4, 7	8, 7, 3, 2, 4, 5
14	1, 5, 6	6, 7, 1
	2, 8, 7, 3, 4, 5, 1, 0	1, 2, 8, 3, 4
	2, 4, 0, 9, 1, 2, 7	0, 8, 2, 1, 6, 4, 2
15	6, 5, 4	8, 1, 0
	6, 4, 0, 1, 2, 3, 6, 4, 0, 3, 8, 7	4, 0, 8, 2, 7, 3,
	2, 6, 4, 0, 8, 2	6, 4, 0, 1, 2, 8, 6, 4, 0, 8, 3, 7