МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії
та інформаційних технологій

КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

ЗВІТ

З ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«Моделювання систем»

Виконав студент групи КН-23-1

Полинько Ігор Миколайович

Перевірив доцент кафедри АІС Бурдільна Є. В.

КРЕМЕНЧУК 2025

Лабораторна робота № 3

Тема: Моделювання дискретних випадкових величин та потоків подій

Мета: навчитися розв’язувати задачі моделювання випадкових подій і випадкових величин із заданим законом розподілу з метою подальшого використання в задачах імітаційного моделювання.

Виконання завдання лабораторної роботи:

1. Побудувати процедуру імітації дискретної випадкової величини X з законом розподілення, завданим у наступній таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Варіант	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
4	0,11	0,25	0,26	0,3	0,08		

Випадкова величина приймає n значень $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ з імовірностями

$P_1, i = \overline{1,n}$ (3.1)

Тоді функцію розподілення можна визначити наступним чином:

$F(x) = 0, x \leq x_1$

$F(x) = P_1, x_1 \leq x \leq x_2$

$F(x) = P_2, x_2 \leq x \leq x_3$ (3.2)

…………

$F(x) = 1, x > x_n$

Для розв’язання поставленого завдання можна застосувати метод оберненої функції, тобто знайти випадкову величину x за допомогою перетворення $X = F^{-1}(Y)$, де $Y \in [0,1]$, F^{-1} – функція, обернена до $F(x)$.

Простіший алгоритм обчислення дискретної випадкової величини X, який заданий таблицею розподілення:

Якщо $Y \leq P_1$, то $X \leq x_1$ інакше,

Якщо $Y \leq P_1 + P_2$, то $X \leq x_2$ інакше,

Якщо $Y \leq \sum_{i=1}^{n-1} P_1$, то $X \leq x_{n-1}$ інакше $X = x_n$

Геометрична інтерпретація алгоритму зведена до наступного: одиничний відрізок ділиться на n ділянок довжиною $P_1, P_2, \dots, P_n$. Якщо випадкове число Y припало, наприклад, на ділянку P_3 , то це означає, що як значення випадкової величини X потрібно вибрати x_3.

```
using System;

class Program
{
    static void Main()
    {
        Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.UTF8;

        // Задаємо ймовірності
        double[] probabilities = { 0.11, 0.25, 0.26, 0.3, 0.08 };
        double[] cumulative = new double[probabilities.Length + 1];
        cumulative[0] = 0;

        // Розрахунок меж (точок) для проміжків
        for (int i = 0; i < probabilities.Length; i++)
        {
            cumulative[i + 1] = Math.Round(cumulative[i] + probabilities[i], 2);
        }

        // Виводимо точки проміжків
        Console.Write("Точки проміжків: ");
        for (int i = 1; i < cumulative.Length; i++)
        {
            Console.Write($"{cumulative[i]}; ");
        }
        Console.WriteLine();

        // Лічильники
        int[] counts = new int[probabilities.Length];

        // Моделювання
        Random rnd = new Random();
        for (int i = 0; i < 10000; i++)
        {
            double value = rnd.NextDouble();
            for (int j = 0; j < probabilities.Length; j++)
            {
                if (value > cumulative[j] && value <= cumulative[j + 1])
                {
                    counts[j]++;
                    break;
                }
            }
        }

        // Вивід результатів
        for (int i = 0; i < probabilities.Length; i++)
        {
            Console.WriteLine($"Випадкове    значення    потрапило    у    проміжок
{cumulative[i]} – {cumulative[i + 1]}: {counts[i]} разів");
        }
    }
}
```

```
Точки проміжків: 0,11; 0,36; 0,62; 0,92; 1;
Випадкове значення потрапило у проміжок 0 – 0,11: 1087 разів
Випадкове значення потрапило у проміжок 0,11 – 0,36: 2613 разів
Випадкове значення потрапило у проміжок 0,36 – 0,62: 2498 разів
Випадкове значення потрапило у проміжок 0,62 – 0,92: 3015 разів
Випадкове значення потрапило у проміжок 0,92 – 1: 787 разів
```

Рис 3.1 – Результат роботи процедури імітації дискретної випадкової величини

2. Створити процедуру моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення з параметром λ, який заданий у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Варіант	4	X_2
λ	1	0,25

Для моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення з параметром λ можна також використовувати обернену функцію. Експоненціальна щільність розподілення випадкової величини має вигляд:

$$Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x > 0) \tag{3.3}$$

оберненою функцією буде функція

$$X = \frac{\ln(1-Y)}{\lambda}, \tag{3.4}$$

де Y – набір псевдовипадкових чисел, які отримані, наприклад, за допомогою функції rand.

```
using System;
using System.Collections.Generic;

class Program
{
    static void Main()
    {
        Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.UTF8;

        double lamda = 1;
        List<double> Xn = new List<double>();

        // Генерація 10 випадкових чисел
        Random rnd = new Random();
        for (int i = 0; i < 10; i++)
        {
            double y = rnd.NextDouble();  // Генерація випадкового числа Y в діапазоні
[0, 1)
```

```
                // Використовуємо обернену функцію для моделювання експоненціального розподілу
                double xn = (-1 * Math.Log(1 - y)) / lamda;

                Console.WriteLine($"Число X з лямбдою {lamda} дорівнює: {xn}");
                Xn.Add(xn);  // Додаємо згенероване число до списку
            }
        }
    }
```

```
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,06541036741874498
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,008073006545177282
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 2,5748070654381903
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,1322980496863449
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,3252883751144416
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,28904180691327164
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,2716651165847258
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 1,1870043366808036
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,7987099529952989
Число X з лямбдою 1 дорівнює: 0,06422877255507942
```

Рис 3.2 – Результат роботи процедури моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення

3. За допомогою складеної процедури моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення змоделювати потік подій, у якому інтервали часу між подіями мають експоненціальне розподілення з параметром λ. Результати моделювання відобразити на осі часу з позначенням моментів виникнення подій.

Для моделювання потоку подій, у якому інтервали часу між подіями розподілені за довільним законом, можна скористатися наступним алгоритмом:

1. За допомогою генератора псевдовипадкових чисел і оберненої функції отримати ряд значень $x_1, x_2, \dots, x_n$

2. Нанести їх на вісь часу наступним чином:

- перша подія настає після x_1 одиниць часу після початку моделювання,

- друга подія настає після $x_1 + x_2$ одиниць часу після початку моделювання і так далі.

```
using System;
using System.Collections.Generic;

class Program
{
```

```
        static void Main()
        {
            Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.UTF8;

            double lamda = 1;
            List<double> Xn = new List<double>();

            // Генерація 10 випадкових чисел
            Random rnd = new Random();
            for (int i = 0; i < 10; i++)
            {
                double y = rnd.NextDouble();  // Генерація випадкового числа Y в діапазоні [0, 1)

                // Використовуємо обернену функцію для моделювання експоненціального розподілу
                double xn = (-1 * Math.Log(1 - y)) / lamda;
                Xn.Add(xn);
            }

            double time = 0;
            for (int i = 0; i < Xn.Count; i++)
            {
                time += Xn[i];
                Console.WriteLine($"Подія {i} настала після {time} одиниці часу.");
            }
        }
    }
```

```
Подія 0 настала після 0,9070413319856623 одиниці часу.
Подія 1 настала після 1,796073798137738 одиниці часу.
Подія 2 настала після 2,62671903792295 одиниці часу.
Подія 3 настала після 3,2806644879443287 одиниці часу.
Подія 4 настала після 3,674945404084925 одиниці часу.
Подія 5 настала після 5,12116316718O329 одиниці часу.
Подія 6 настала після 5,27021706049141 одиниці часу.
Подія 7 настала після 5,521015783634943 одиниці часу.
Подія 8 настала після 7,236642636577372 одиниці часу.
Подія 9 настала після 7,394767863860144 одиниці часу.
```

Рис 3.3 – Результат роботи потоку подій, у якому інтервали часу між подіями мають експоненціальне розподілення з параметром λ.

Висновок: на цій лабораторній роботі ми моделювали дискретні випадкові величини та потоки подій. Ми навчитися розв’язувати задачі моделювання випадкових подій і випадкових величин із заданим законом розподілу з метою подальшого використання в задачах імітаційного моделювання, створили три програмних застосунки, що імітують дискретні випадкові величини, процедури моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення та реалізували потік подій, у якому інтервали часу між подіями мають експоненціальне розподілення з параметром λ. Всі змінні були підібрані індивідуально по варіанту у списку журнала.

Контрольні питання:

1. Що таке дискретна випадкова величина?

Дискретна випадкова величина — це величина, яка може набувати лише окремих, ізольованих значень (як правило, цілих чисел), кожному з яких відповідає певна ймовірність. Прикладом дискретної випадкової величини може бути кількість влучень у мішень або кількість заявок, що надійшли за одиницю часу.

2. Як задається закон розподілення дискретних випадкових величин?

Закон розподілення дискретної випадкової величини задається у вигляді таблиці, в якій кожному можливому значенню випадкової величини відповідає певна ймовірність. Сума всіх ймовірностей повинна дорівнювати 1. Такий розподіл можна задати як таблично, так і графічно.

3. Яким чином робиться моделювання дискретних випадкових величин?

Моделювання дискретної випадкової величини здійснюється методом кумулятивної суми (накопиченої ймовірності). Генерується випадкове число з інтервалу [0; 1), після чого визначається, до якого з інтервалів накопичених ймовірностей воно належить. Значення випадкової величини, яке відповідає цьому інтервалу, і є результатом моделювання.

4. Яким чином робиться моделювання випадкових величин з довільним законом розподілення?

Для моделювання випадкових величин із довільним законом розподілення використовують метод оберненої функції розподілу. Полягає він у наступному:

1. генерується випадкове число Y з рівномірного розподілу на [0;1);

2. обчислюється значення $X = F^{-1}(Y)$, де F^{-1} — обернена функція до функції розподілу $F(x)$.

5. Як можна змоделювати потік подій, у якому інтервали часу між подіями мають експоненціальне розподілення?

Для моделювання потоку подій з експоненціально розподіленими інтервалами часу застосовують обернений метод. Спочатку генерується послідовність випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, що мають експоненційний розподіл за формулою:

$X = -\ln(1 - Y) / \lambda$, де $Y \in [0;1)$

Далі визначаються моменти часу настання подій як сума попередніх інтервалів:

$T_1 = X_1$

$T_2 = X_1 + X_2$

$T_3 = X_1 + X_2 + X_3$

...

Таким чином, формується часовий ряд, який моделює потік подій.