# Геометрия - семинар №2

25.02.2020г.

**зад. 6** ABCD - успоредник

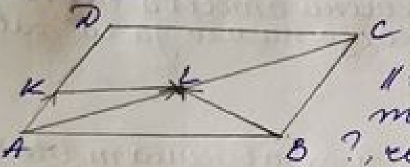
т. $K \in AD$: $5\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD}$

т. $L \in AC$: $6\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC}$

? ДСД, че т. K, т. B и т. L - колинеарни

Забележка: 3 точки са колинеарни, ако лежат на една права

Решение:




// Векторна база: Избиране $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$

// ще изразим всички вектори чрез тези 2 като $\overrightarrow{AK}$.

?, че т. K, L, B - колин. $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{KL} \parallel \overrightarrow{BL}$ // две насочени отсечки трябва да са с едно и също начало/край

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AL} - 5\overrightarrow{AK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AL} - 6\overrightarrow{AL} + 5\overrightarrow{AK} = 5(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AL})$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} \\ \overrightarrow{BL} &= 5(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AL}) \end{aligned}\right\} \overrightarrow{KL} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BL} \Rightarrow \overrightarrow{KL} \parallel \overrightarrow{BL}$$

$\Rightarrow$ K, L, B - колинеарни

**зад. 7** OABC - тетраедър (триъгълна пирамида)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ // векторна база: зададена е

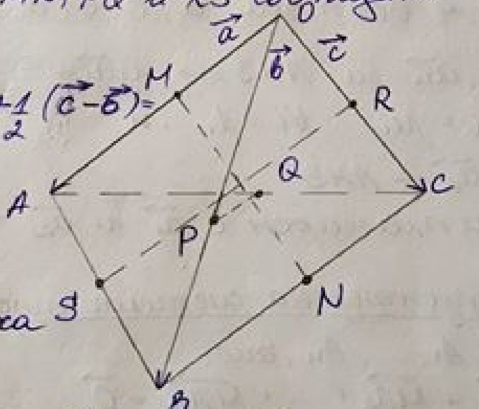
M, P, R - среди на OA, OB, OC

N, Q, S - среди на BC, AC, AB

а) ? $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

б) ? ДСД, че средите на MN, PQ и RS съвпадат

Решение:




а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) =$

$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ // среда на отсечка

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}$; $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

б) // ще док., че средите съвпадат

Нека т. $K_1$ - среда на (MN)

$\overrightarrow{OK_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\right) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Нека т. $K_2$ – среда на $(PQ)$

$\Rightarrow \vec{OK_2} = \frac{1}{2}(\vec{OP}+\vec{OQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})\right) = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

Нека т. $K_3$ – среда на $(RS)$

$\Rightarrow \vec{OK_3} = \frac{1}{2}(\vec{OR}+\vec{OS}) = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\Rightarrow \vec{OK_1} = \vec{OK_2} = \vec{OK_3} \Rightarrow K_1 \equiv K_2 \equiv K_3$ // иначе няма как тези насочени отсечки с едно и също начало да са равни

# Тема №2

## Линейна зависимост (ЛЗ) и независимост (ЛНЗ) на вектори

def: $\vec{v}$ е лин. комбинация на $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$, ако $\exists$ поне една n-орка $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$: $\lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n} = \vec{v}$

def: $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$ – ЛЗ $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$: $\lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$

def: $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$ – ЛНЗ $\Leftrightarrow \lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i=1,\dots,n$

Th: Ако $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$ – ЛЗ, то поне един от тях може да се изрази като ЛК на останалите.

* $\vec{a}$ е ЛЗ $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
* $\vec{a}, \vec{b}$ – ЛЗ $\Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ // колинеарни
* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ЛЗ $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарни
* всеки 4 вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ са ЛЗ // защото работим в $\mathbb{R}^3$

Th: $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow \lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n} = \mu_1\vec{a_1}+\dots+\mu_n\vec{a_n}$
$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i=1,\dots,n$

* $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ – ЛНЗ
  $\vec{b}$ – компланарен с $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ $\Rightarrow \exists!$ числа $\lambda$ и $\mu$: $\vec{b} = \lambda\vec{a_1} + \mu\vec{a_2}$

def: Медицентър на система точки: т. $M$ е медицентър на с-ма точки $A_1,\dots,A_n$, ако:

1) $\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \dots + \vec{MA_n} = \vec{0}$

// Д-во чрез среда на отсечка: противоположни посоки на отс., събираме ги и става 0


$\Updownarrow$

2) За произволна т. $O$ е в сила: $\vec{OM} = \frac{1}{n}(\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_n})$

<u>зад. 1</u> $\triangle ABC$

$\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$

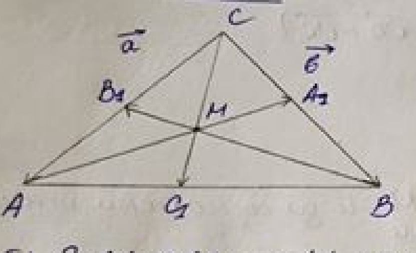
т. $A_1, B_1, C_1$ – среди на $BC, AC, AB$

а) да се изразят $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$

б) ? ДСД, че $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ се пресичат в т. $M$ и отношението, в което ги дели тази точка

в) за произв. т. $O$. ДСД, че $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

<u>Решение:</u>




а) $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{a})$

// среда на отс.

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b})$

б) ? $AA_1 \cap BB_1 =$ т. $M \iff \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ – ЛНЗ

// от def $\iff \alpha . \overrightarrow{AA_1} + \beta . \overrightarrow{BB_1} = \vec{0} \iff \alpha = \beta = 0$ // трябва да го покажем

$\Rightarrow \alpha . \overrightarrow{AA_1} + \beta . \overrightarrow{BB_1} = \vec{0}$

// $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛНЗ, защото са страни на $\triangle$ $\Rightarrow$ трябва да изразим $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\alpha . \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) + \beta . \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{0}$

$\vec{a}\left(-\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) + \vec{b}\left(\frac{1}{2}\alpha - \beta\right) = \vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$

// $\Rightarrow$ числата пред $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тр. да са 0

$\begin{cases} -\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ са ЛНЗ $\Rightarrow AA_1 \cap BB_1 =$ т. $M$ // т. $M$ - вътрешна за $\triangle$, понеже са медиани

? т. $M \in CC_1 \iff \overrightarrow{CM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC_1}$ // еднопосочно колинеарни

$\Rightarrow \exists!$ число $k$ : $\overrightarrow{CM} = k . \overrightarrow{CC_1}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \exists!$ число $x$ : $\overrightarrow{AM} = x . \overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + x . \overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \exists!$ число $y$ : $\overrightarrow{BM} = y . \overrightarrow{BB_1}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + y . \overrightarrow{BB_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \underset{\vec{a}}{\overrightarrow{CA}} + x . \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a}(1 - x) + \frac{x}{2} . \vec{b}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + y . \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{y}{2}\vec{a} + (1 - y)\vec{b}$

$\overset{Th}{\Rightarrow}$ от $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ЛНЗ $\Rightarrow \begin{cases} 1 - x = \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} = 1 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x = y \\ x = 2 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \vec{CM} = \frac{3}{2}\vec{CC_1} \Rightarrow \vec{CM} \parallel \vec{CC_1} \Rightarrow C, M, C_1$ – колинеарни

в) $\vec{CM} = \frac{1}{3}(\vec{CA}+\vec{CB}) \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$ // пише за произв. т. $O$, затова избираме т. $O \equiv$ т. $C$

$\vec{OM}-\vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{OA}-\vec{OC}+\vec{OB}-\vec{OC})$

$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}-2\vec{OC}+3\vec{OC}) = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$

зад. 2 $DABC$ – тетраедър

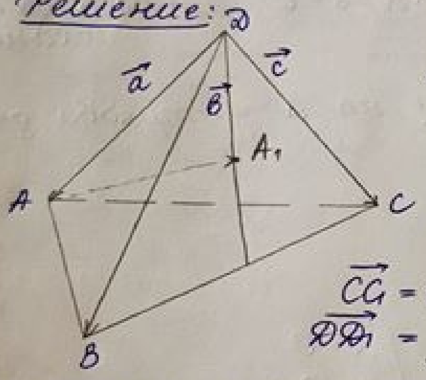
$\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$

а) ? $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}, \vec{CC_1}, \vec{DD_1}$ – медиани

б) ? ДСД, че $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \cap DD_1 =$ т. $M$ и да се намери отношението, в което тя ги дели

в) ? ДСД, че за произв. т. $O$ е в сила: $\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD})$

Решение:




а) т. $A_1$ – медицентър на $\triangle BCD$

$\vec{AA_1} = \vec{AD}+\vec{DA_1} = -\vec{DA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{DB}+\vec{DC}) =$

$= -\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{BB_1} = \vec{DB_1}-\vec{DB} = \frac{1}{3}(\vec{DA}+\vec{DC})-\vec{DB} =$

$= \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$

$\vec{CC_1} = \vec{DC_1}-\vec{DC} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

$\vec{DD_1} = \frac{1}{3}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}) = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

в) понеже е за произв. т. $O$ избираме т. $O \equiv$ т. $D$

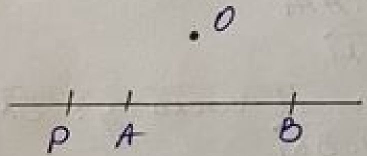
$\vec{DM} = \frac{3}{4}\vec{DD_1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}) = \frac{1}{4}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC})$

зад. 3 т. $A \neq B$

т. $O$ – произволна

? ДСД, че НДУ т. $P \in$ на правата $AB$ е да $\exists$ числа $\alpha$ и $\beta$, за които: $\begin{cases} \vec{OP} = \alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB} \\ \alpha+\beta = 1 \end{cases}$

Решение: НУ $\Rightarrow$)




?, че $\begin{cases} \vec{OP} = \alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB} \\ \alpha+\beta = 1 \end{cases}$

т. $P \in AB \Rightarrow \vec{PA} \parallel \vec{PB} \Rightarrow \exists!$ число $\lambda$: $\vec{PA} = \lambda\cdot\vec{PB}$

$\vec{PA} = \vec{OA}-\vec{OP} = \lambda(\vec{OB}-\vec{OP})$

$(\lambda-1)\cdot\vec{OP} = \lambda\vec{OB}-\vec{OA}$ $\quad | :(\lambda-1) \neq 0$ понеже по усл. $A \neq B$, а ако $\lambda = 1$, то $A \equiv B$, ако $\lambda = 0$, то $P \equiv A$

$\vec{OP} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\vec{OB} - \frac{1}{\lambda-1}\vec{OA}$

$\alpha+\beta = \frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda-1} = 1$. $\square$

ДУ $\Leftarrow$) $\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} \\ \alpha + \beta = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 1 - \beta \end{cases}$

?, че т. $P \in AB$

$\overrightarrow{OP} = (1-\beta)\overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \beta \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B$ и $P$ - колинеарни. $\square$

Основна задача:

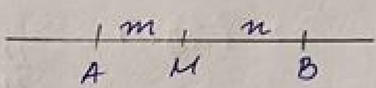
зад. 4 т. $A \neq B$

$m, n \in \mathbb{R}^+$

?, че НДУ т. $M$ да дели отс. $(AB)$ вътрешно в отношение $m:n$, считано от т. $A$ е за произв. т. $O$ да е в сила

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$$

Решение: НУ $\Rightarrow$)




?, че $\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$

т. $M \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \parallel \overrightarrow{MB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $k = -\frac{m}{n}$ // минус, понеже $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ - противопосочни

$\overrightarrow{MA} = -\frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -\frac{m}{n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$

$\overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OM}$

$\left(\frac{m+n}{n}\right)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB} \quad / \cdot \frac{n}{m+n}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$ $\quad . \square$

ДУ $\Leftarrow$) $\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

?, че $(ABM) = -\frac{m}{n} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$

$\overrightarrow{OM} = \underbrace{\frac{n}{m+n}}_{\alpha}\overrightarrow{OA} + \underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\beta}\overrightarrow{OB}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} \\ \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ т. $M \in AB$

$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta$

$\overrightarrow{OM} = (1-\beta)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\vec{AM} = \beta \cdot \vec{AB}$

$\beta > 0 \Rightarrow \vec{AM} \uparrow\uparrow \vec{AB}$

$\beta \in (0,1) \Rightarrow$ т. $M \in (AB)$

$\vec{AM} = \beta \cdot \vec{AB} = \beta \cdot (\vec{AM} + \vec{MB})$

$\vec{AM} - \beta \cdot \vec{AM} = \beta \cdot \vec{MB}$

$\underbrace{(1-\beta)}_{\alpha} \vec{AM} = \beta \cdot \vec{MB}$

$\alpha \quad \vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha} \vec{MB} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{BM}$

$\vec{AM} = -\frac{m}{\cancel{m+n}} \cdot \frac{\cancel{m+n}}{n} \cdot \vec{BM}$

$\vec{AM} = -\frac{m}{n} \vec{BM}$

$\overline{AM} = -\frac{m}{n} \cdot \overline{BM} \quad /: \overline{BM}$

$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad (ABM) = -\frac{m}{n} \quad . \square$

$\parallel$ по деф.

$(ABM)$